Numerisk Lineær Algebra F2023
Opgavesæt 2

Opgave 2.1. Brug python til at beregne længde og vinkel for de følgende vektorer i planen:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ 1{,}0 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ -1{,}0 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}866\,025\,403\,784\,438\,6 \end{bmatrix}.$$

Angiv vinklerne i både radianer, som multiplum af π, og i grader. Du må gerne bruge `np.arctan2` i beregning af vinkler.

Opgave 2.2. Følgende python kode laver en plot af funktionen

$$y = \frac{2\sin(x)}{(1+x^2)}$$

ud fra 100 x-koordinater jævnt fordelt over intervallet $[1{,}0, 7{,}0]$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.linspace(1.0, 7.0, 100)
y = (2 * np.sin(x)) / (1 + x**2)

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x,y)
```

Indtast koden i python og tjek at du kan se grafen; det kan være du skal afslutte med `plt.show()`.

Opgave 2.3. Matematisk er højresiden af de følgende to udtryk ens:

$$y = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$$

og

$$z = (x-1)^8.$$

Hvilket udtryk mener du python vil beregne mest korrekt?

Brug opgave 2.2 til at lave plots af fejlen af y i forhold til z og af den relative fejl af y i forhold til z. Prøv forskellige plotintervaller, og find frem til områder hvor fejlen, hhv. den relative fejl, er forholdsvis stor.

Opgave 2.4. (a) Lav en to-dimensional figur, som kan plottes med Matplotlib. Vis derefter effekten af matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2{,}0 & -1{,}0 \\ -1{,}0 & 2{,}0 \end{bmatrix}$$

på den.

(b) Brug din figur til at afgøre hvilke af de følgende udsagn er gyldige:

(i) en rotation efterfulgt af en anden rotation er en rotation,
(ii) en spejling efterfulgt af en anden spejling er en spejling,
(iii) en spejling efterfulgt af en anden rotation er en spejling,
(iv) en spejling efterfulgt af en anden spejling er en rotation.

For de udsagn der er sand, giv en matematisk begrundelse.

(c) Undersøg hvad der sker når du gentager transformationen fra del (a) flere gange, dvs. når du kikker på figurerne svarende til $v \mapsto Av$, $v \mapsto A(Av)$, $v \mapsto A(A(Av)), \ldots$

Opgave 2.5. For vektorer $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ og $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i planen, og et reel tal $t \in \mathbb{R}$, vis at (a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, (b) $\langle tu, v \rangle = t\langle u, v \rangle$.

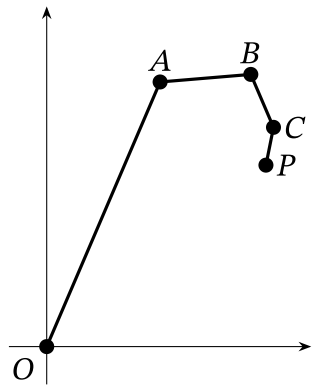
Opgave 2.6. For matricer $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ kan vi lade A virker på søjlerne af B og får matricen AB. Vis at transformationen af planen $v \mapsto (AB)v$ har det samme effekt som transformationen bestemt af B efterfulgt af transformationen bestemt af A, dvs. vis at

$$(AB)v = A(Bv)$$

for alle $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Afleveringsopgave 1

Afleveringsfristen bestemmes af instruktoren på dit hold, men vil nok være i løbet af uge 7. Man bedes uploade besvarelsen som én samlet pdf fil til brightspace under "Course Tools > Assignments > Aflevering 1". Opgaven er individuel.



En robotarm består af 4 stænger OA, AB, BC og CP samlet i planen således at armen kan bøjes ved ledderne O, A, B og C. Lad $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{BC}$ og $\mathbf{d} = \overrightarrow{CP}$. Robotarmens stilling er bestemt af matricen

$$S = \left[\mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{d}\right].$$

(a) Vælg nogle rimelige værdier for indgangerne i **a**, **b**, **c** og **d**, og brug derefter `matplotlib` til at lave en tegningen af robotarmen som ovenfor.

(b) Bestem vektoren $\overrightarrow{OP}$ ud fra **a**, **b**, **c**, **d**.

(c) Gør rede for at når armen bøjes i ledet C, svarer det til at anvende en rotationsmatrix R_C på **d**, dvs.

$$\text{bøj}_C(S) = \left[\mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c} \mid R_C\mathbf{d}\right].$$

Lav en `matplotlib` tegning der viser dette.

(d) Giv en opskrift for $\text{bøj}_A(S)$, hvor robotarmen bøjes kun i ledet A. Vis dette i en tegning.

(e) Vis generelt at

$$\text{bøj}_A(\text{bøj}_C(S)) = \text{bøj}_C(\text{bøj}_A(S)),$$

dvs. det har ingen betydning for slutstilligen hvilket led vi bøjer først.

Andrew Swann