TEMA 1 SISTEMA CARTESIANO DE COORDENADAS

PLAN DE CLASE SESIÓN 1

Recuerda que puedes descargar el plan de clase en la siguiente liga: https://grupoktdra.com/CONALEP/REFU/recurso/refuA21R1

INICIO ACTIVIDAD 1

INSTRUCCIONES: De manera individual, realiza lo siguiente:

1. Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Cómo ilustrarías el camino que conduce de tu casa a la escuela?

....

....

....

b. ¿Es posible realizar dicho esquema sin considerar un sistema o puntos de referencia?

....

....

....

c. ¿Sabes qué es un plano cartesiano?

....

....

....

d. ¿Cómo se ubican puntos en un plano cartesiano?

....

....

....

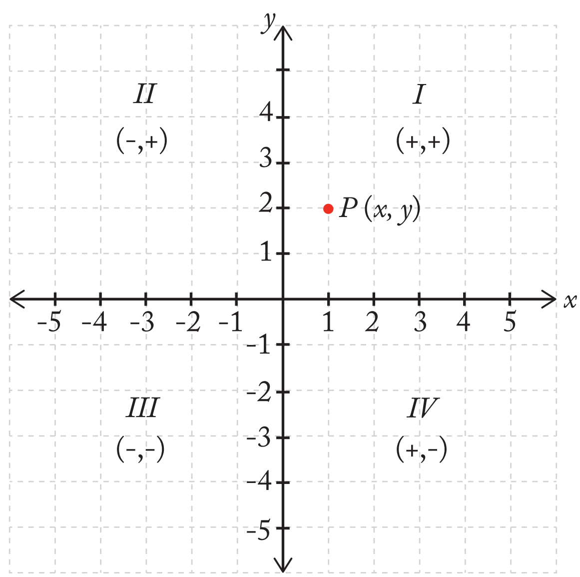
....

DESARROLLO

ORIENTACIÓN EN UN PLANO

El **plano cartesiano** es llamado así en honor a **René Descartes**. Se define como el arreglo de dos rectas perpendiculares x y y que se extienden al infinito; el punto de intersección o cruce es conocido como origen (O). El plano cartesiano está dividido en cuatro cuadrantes numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj. Al plano cartesiano también se le conoce como plano bidimensional o sistema cartesiano de coordenadas.

Los valores del eje horizontal x son conocidos como **abscisas**, y los del eje vertical y como **ordenadas**. El plano cartesiano es un sistema de referencia donde se pueden ubicar puntos de coordenadas $P(x, y)$ donde x y y pertenecen al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Gráficamente, se puede representar de la siguiente manera:

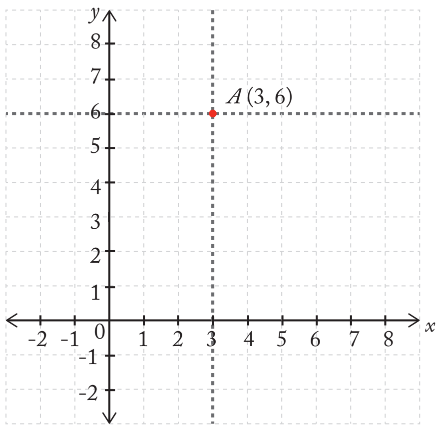


Un punto de coordenadas $P(x, y)$ expresa una posición en el plano. Para ubicar un punto de referencia en el plano cartesiano es necesario:

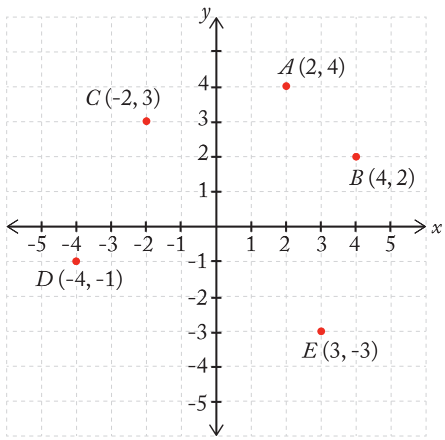
1. Dibujar el sistema coordenado y graduarlo, de preferencia con la misma escala en ambos ejes.
2. Representar a la recta horizontal con una x y a la vertical con una y.
3. Localizar el valor de x en la recta respectiva y trazar una recta paralela al eje y.
4. Localizar el valor de y en la recta respectiva y trazar una recta paralela al eje x.
5. En el punto de intersección de ambas rectas se ubica el punto de coordenadas $P(x, y)$.

La localización de un punto por medio de sus coordenadas se llama **trazado de puntos**. Por ejemplo, para trazar el punto $A(3,6)$, se desplaza a partir del origen tres unidades a la derecha sobre el eje x; luego, se desplaza seis unidades hacia arriba del eje y. Se trazan las dos rectas paralelas a los ejes y el punto de intersección representa el punto de coordenadas $A(3,6)$.

Gráficamente, se tiene:



Cualquier otro punto de coordenadas se localiza de manera similar y, por lo general, los puntos se designan con una letra mayúscula (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*). Por ejemplo:



Dos parejas de números reales determinan puntos iguales si y solo si las abscisas y las ordenadas son iguales y se escriben en el mismo orden. Por ejemplo: la pareja *A* (2,4) es distinta de la pareja *B* (4,2).

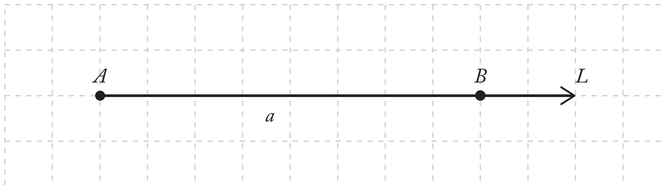
SEGMENTO DIRIGIDO

En geometría, un **segmento** es definido como un fragmento de recta que está comprendido entre dos puntos que puede ser curvo o rectilíneo. Se conoce como **segmento rectilíneo** a la porción de una línea recta comprendida entre dos puntos llamados **extremos del segmento**. El primer punto se llama **origen** o **punto inicial** y establece donde inicia el segmento; el segundo punto se llama **extremo** o **punto final** y establece donde termina el segmento.

Para una línea, el símbolo sobre las dos letras tiene dos puntas de flecha, lo que indica que se extiende indefinidamente en ambas direcciones.

Al estar comprendido entre dos puntos, se hace necesario establecer el sentido o dirección de un segmento. Este se indica siempre escribiendo primero el origen o punto inicial, posteriormente el extremo final y para terminar se marca la dirección mediante una flecha que se dibuja sobre ambos puntos.

Por ejemplo, para la recta L, los extremos del segmento son A y B, y la longitud de la recta L se representa mediante ambas letras de los segmentos, es decir, $\overline{AB}$.



En este ejemplo se comprende que el punto de origen o inicial es A, mientras el punto extremo o final es B, por lo tanto el segmento $\overline{AB}$ tiene una dirección de A hacia B, y está indicado por medio de una flecha.

También se puede obtener el mismo segmento dirigiéndolo de B a A designándolo $\overline{BA}$; en este caso B sería el origen, mientras que A sería el extremo.

Desde el punto de vista de la geometría elemental, las longitudes de los segmentos dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ son las mismas. En geometría analítica, sin embargo, se hace la distinción entre los signos de estas longitudes. De acuerdo con esto, si se especifica que el segmento $\overline{AB}$ es positivo, entonces el segmento $\overline{BA}$ tiene una longitud negativa y se representa como sigue:

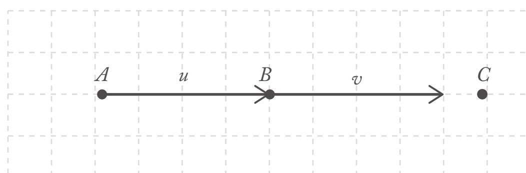
$$\overline{AB} = -\,\overline{BA}$$

Aunque, si solo nos interesa la longitud del segmento dirigido, sin importar el sentido, entonces hablamos de un tipo de segmento de recta denominado "**no dirigido**".

EJEMPLO

Considera tres puntos distintos A, B y C, sobre una línea recta cuya dirección positiva es de izquierda a derecha. Representa los segmentos y sus direcciones.

1. Trazar los puntos.
2. Unir los puntos.
3. Indicar las direcciones con una flecha:



A partir de esta relación, se puede demostrar el principio fundamental: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Teóricamente, los segmentos y rectas son resultado de una sucesión infinita de puntos en una misma dirección.

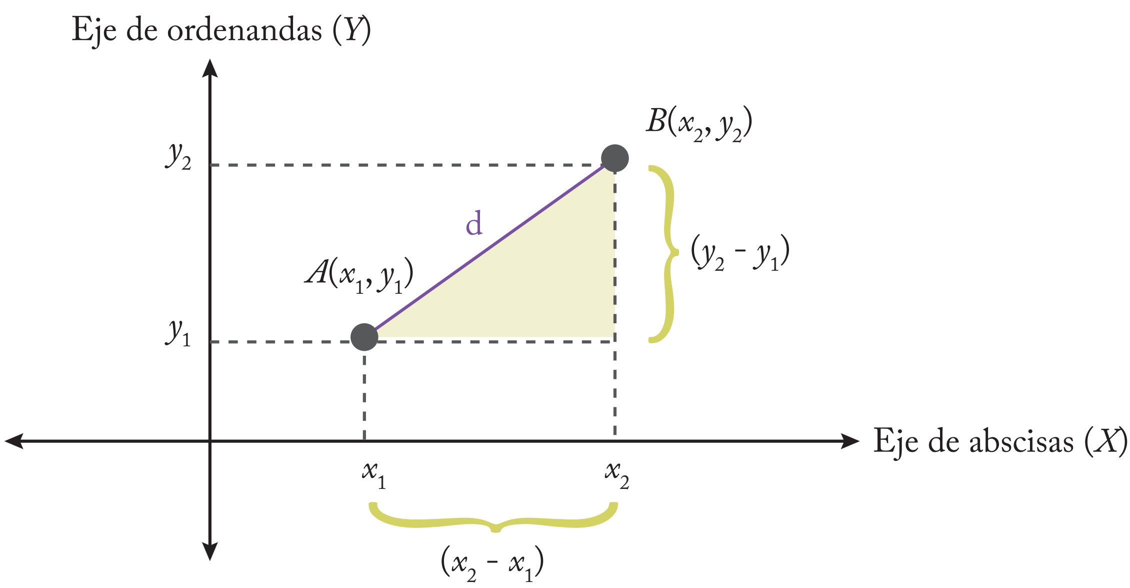
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Cuando dos puntos se encuentran ubicados sobre el eje *x*, o en una recta paralela a este eje, la **distancia entre los puntos** corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas. Sin embargo, cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje *y* o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.

Por otro lado, si los puntos se encuentran en cualquier lugar del sistema de coordenadas, la distancia queda determinada por la relación:

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En la que la distancia entre dos puntos en línea recta (*d*), tiene que $A\ (x_1\ y_1)$ y $B\ (x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano cartesiano. Gráficamente:



Puedes observar que en la fórmula aparece una raíz cuadrada y unas diferencias elevadas al cuadrado, lo que significa que esto tiene que ver con el **teorema de Pitágoras**+, ya que es el cálculo de una hipotenusa que se obtiene a partir de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los lados.

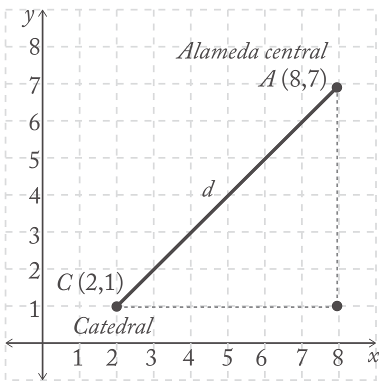
En Matemáticas, al aplicar esta fórmula y resolverla, es recomendable simplificar una raíz y dejarla como un valor exacto y no con un número decimal.

+ El **teorema de Pitágoras** establece que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

EJEMPLO 1

De acuerdo con el plano de la ciudad de Toluca, ¿cuál es la distancia que hay de la Catedral (C) a la Alameda Central (A)?

1. Trazar la gráfica:



2. Determinar los puntos de coordenadas, en este caso son:

$$A\,(8,7) \text{ y } C\,(2,1)$$

3. Sustituir los datos en la fórmula de distancia.

$$d = \sqrt{(2 - 8)^2 + (1 - 7)^2}$$

4. Simplificar las operaciones hasta su mínima expresión.

$$d = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$$

$$d = \sqrt{36 + 36}$$

$$d = \sqrt{72}$$

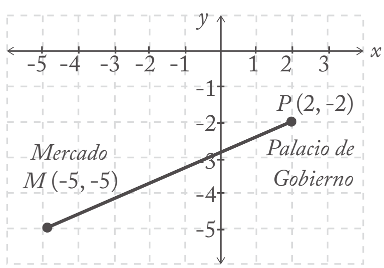
$$d = 6\sqrt{2} \quad \text{Valor exacto}$$

$$d = 8.4 \quad \text{Valor aproximado}$$

EJEMPLO 2

¿Cuál es la distancia que hay entre el Mercado (M) y el Palacio de Gobierno (P), si tienen como coordenadas: $M\,(-5,-5)$ y $P\,(2,-2)$?

1. Trazar la gráfica:



2. Establecer los puntos de coordenadas:

$$M\,(-5,-5) \text{ y } P\,(2,-2)$$

3. Sustituir las coordenadas en la fórmula de distancia

$$d_{\overline{MP}} = \sqrt{(2 -(-5))^2 + (-2 -(-5))^2}$$

4. Simplificar las operaciones hasta su mínima expresión:

$$d_{\overline{MP}} = \sqrt{(2 -(-5))^2 + (-2 -(-5))^2}$$

$$d_{\overline{MP}} = \sqrt{58} \quad \text{Valor exacto}$$

$$d_{\overline{MP}} = \sqrt{7.6157} \quad \text{Valor aproximado}$$

Por lo tanto, la distancia del Mercado (M) al Palacio de Gobierno (P) es de 7.6157

PUNTO MEDIO

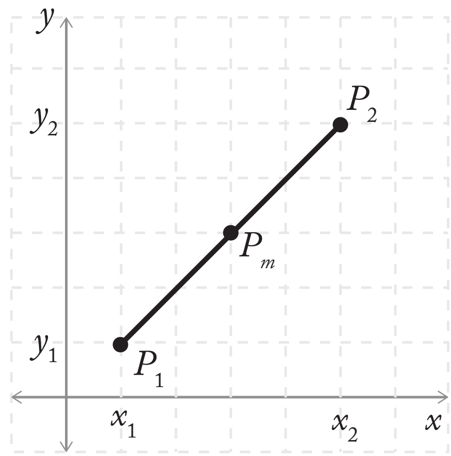
Como su nombre lo indica, el **punto medio** es aquel que divide a una recta en dos segmentos de igual longitud. Este se ubica a la mitad de un segmento $\overline{AB}$, en el que $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano cartesiano.

Las coordenadas del punto medio de un segmento coinciden con la semisuma de las coordenadas de los puntos extremos. Para calcular las coordenadas del punto medio $P_m\,(x_m, y_m)$ del segmento $\overline{AB}$ se utiliza la siguiente fórmula:

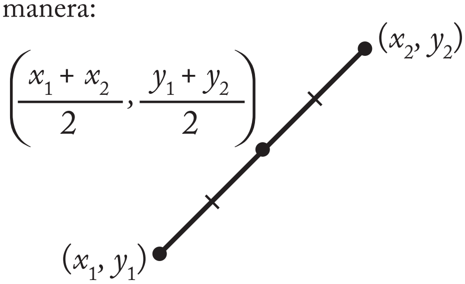
$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Su ubicación e interpretación se observa en la gráfica.



De igual forma de la siguiente manera:



EJEMPLO 1

Determina el punto medio del segmento $\overline{AB}$, cuyos extremos tienen como coordenadas P_1 (5,7) y P_2 (1, –3).

1. Ubicar el valor de x_1, y_1, x_2, y_2, posteriormente sustituir los datos en las fórmulas:

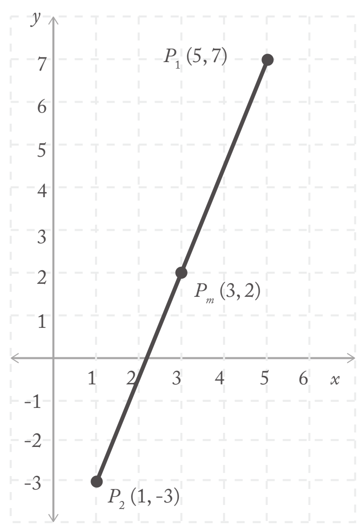
$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_m = \frac{5 + 1}{2} \qquad y_m = \frac{7 + (-3)}{2}$$

$$x_m = \frac{6}{2} \qquad y_m = \frac{4}{2}$$

$$x_m = 3 \qquad y_m = 2$$

2. Entonces, el punto medio P_m (x_m, y_m) es P_m (3,2).
3. Trazar los puntos de coordenadas en el plano cartesiano. Con un instrumento de medición (regla graduada), sobre la gráfica se puede comprobar que, efectivamente, el punto P_m (3,2) está a la mitad del segmento.



EJEMPLO 2

Determina el otro extremo de un segmento, si uno de ellos está en P_1 (3.2) y su punto medio es el punto P_m (–3,5).

1. Sustituir los elementos que se conocen x_1, y_1 x_m, y_m en las fórmulas:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$-3 = \frac{3 + x_2}{2} \qquad 5 = \frac{2 + y_2}{2}$$

Posteriormente despejar x_2, y_2 para determinar su valor:

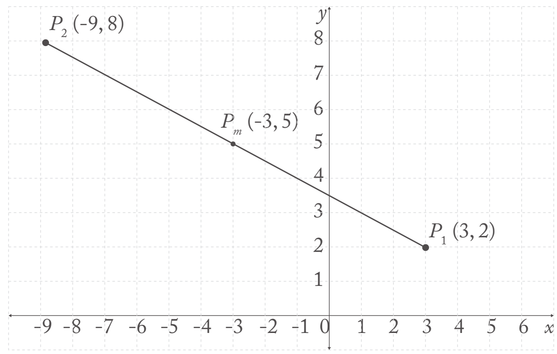
$$-6 = 3 + x_2 \qquad 10 = 2 + y_2$$

$$-6 - 3 = x_2 \qquad 10 - 2 = y_2$$

$$-9 = x_2 \qquad 8 = y_2$$

2. Por lo tanto, el otro extremo está en el punto P_2 (-9,8).

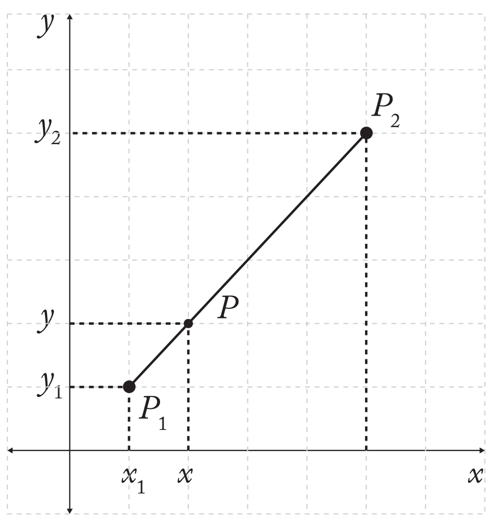
3. Trazar los puntos de coordenadas en el plano cartesiano.



DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Entendemos por **razón** a la relación que existe entre dos magnitudes, es decir, si los extremos de un segmento son $P_1 (x_1, y_1)$, $P_2 (x_2, y_2)$, la razón sería el punto $P (x, y)$, el cual también es conocido como **punto de división.** Este, además de pertenecer a la recta, divide al segmento en dos partes proporcionales

Gráficamente, la razón puede observarse así:



La razón r en que el punto $P (x, y)$ divide al segmento es: $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$. Para hallar la razón conociendo los extremos y el punto de división, se emplean las fórmulas:

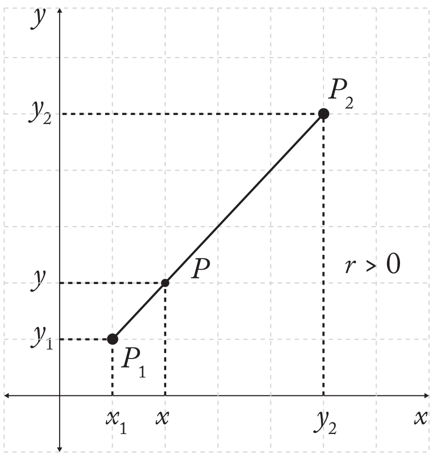
$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Para encontrar el punto de división conociendo los extremos y la razón, se utilizan las fórmulas:

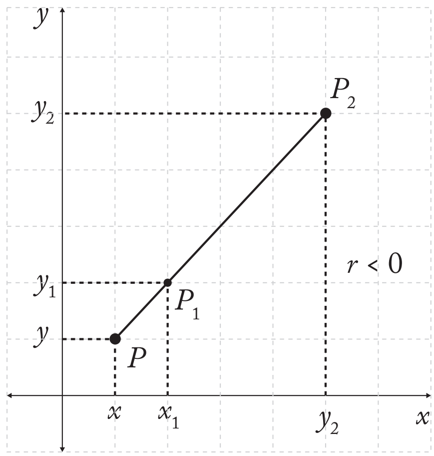
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

Para determinar la razón, existen dos casos:

a. Cuando $P(x, y)$ está entre P_1 y P_2, la razón es positiva. Gráficamente se observa:



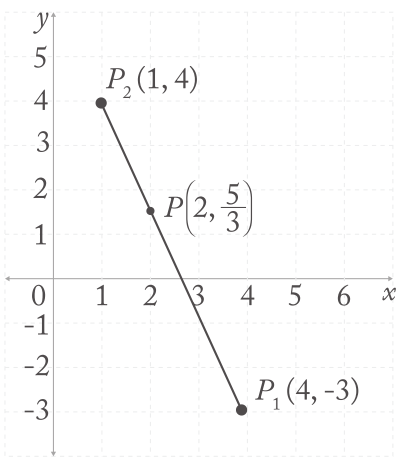
b. Cuando $P(x, y)$ no está entre P_1 y P_2, la razón es negativa. Gráficamente:



EJEMPLO

Dados los puntos P_1 (4,-3) y P_2 (1, 4), halla las coordenadas del punto $P(x, y)$ que está al doble de distancia de P_1 que de P_2.

1. Localizar los puntos de coordenadas en el plano cartesiano y trazar la gráfica:



2. En este caso el valor de la razón r es proporcionada y es:

$$r = 2$$

3. Para hallar las coordenadas del punto P de división, sustituir las coordenadas en las fórmulas:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{4 + 2(1)}{1 + 2} \qquad y = \frac{-3 + (2)(4)}{1 + 2}$$

$$x = 2 \qquad y = \frac{5}{3}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto P (x, y) de división son $P\left(2, \frac{5}{3}\right)$, como se puede apreciar en la gráfica anterior.

CIERRE

ACTIVIDAD 2

INSTRUCCIONES: Organizados en pareja, realicen lo siguiente:

1. En un plano cartesiano diseñado en una cartulina, calculen la distancia más corta entre la escuela y sus casas, así como entre sus respectivas casas.

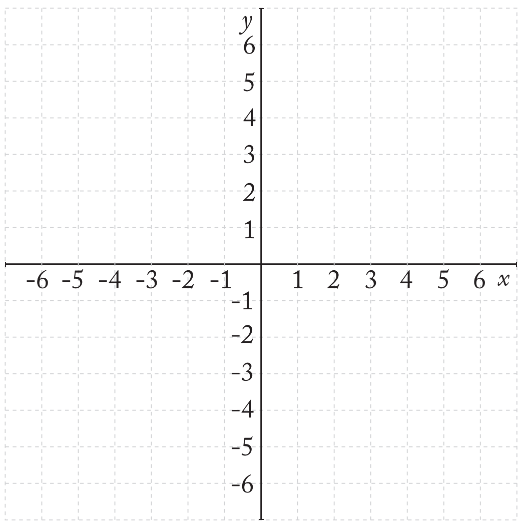
2. Sean creativos y utilicen recursos didácticos para que su presentación sea agradable.

3. Compartan el trabajo con sus compañeros.

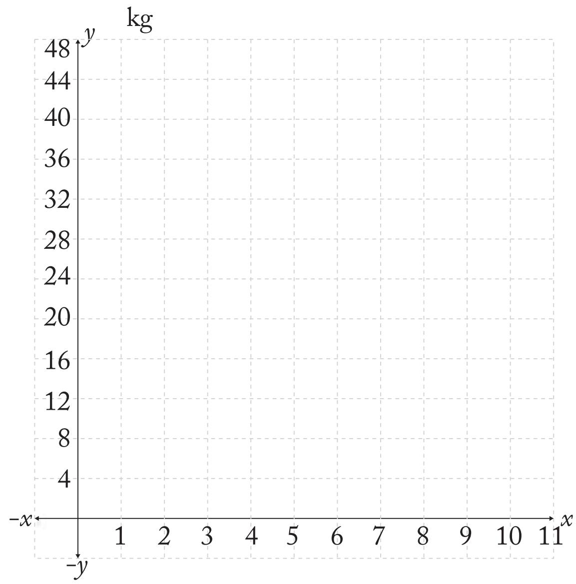
ACTIVIDAD 3

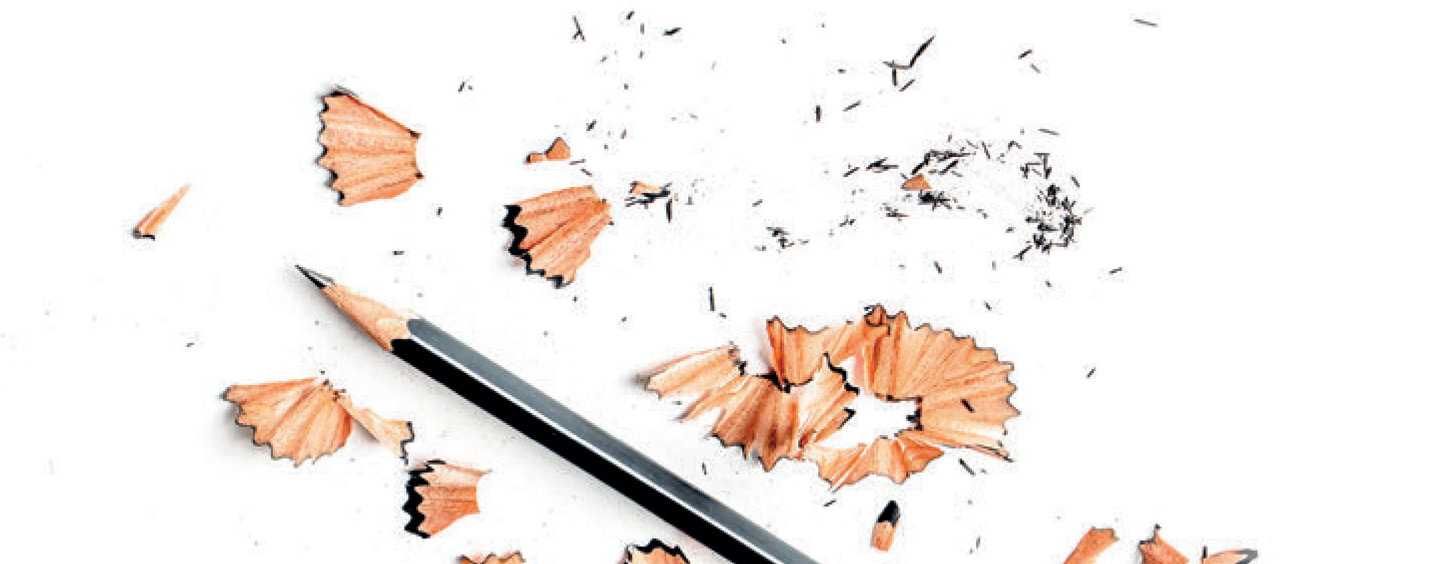
INSTRUCCIONES: De manera individual, realiza lo siguiente:

1. En el siguiente plano cartesiano, localiza los puntos *M* (-4, 2), *N* (3, 2), *P* (3, -2) y *Q* (-4, -2). Une los puntos alfabéticamente e indica la figura generada.



2. En el municipio de El Seco, el kilogramo de aguacate se vende en $8.00. ¿Cuánto cuestan 2, 3, 4, 5 y 6 kilogramos? Localiza y grafica los puntos en el plano cartesiano, indicando el lugar geométrico generado.





3. Una máquina ensambladora de autos coloca puntos de soldadura sobre una barra de metal que tiene como coordenadas $A\,(-6{,}4)$ y $B\,(-18{,}-8)$. Si la ensambladora coloca un punto $P\,(-14{,}-4)$ con soldadura, ¿cuál es la razón en la que se divide la barra de metal?

ELABORA AQUÍ TUS OPERACIONES

4. Determina las coordenadas del punto P que divide al segmento de recta que va de $A\,(-2{,}5)$ a $B\,(10{,}-2)$ en una razón $r = \frac{2}{3}$

ELABORA AQUÍ TUS OPERACIONES

5. Dadas las parejas de puntos, calcula la distancia entre ellos.

a. $A\,(-5{,}5)$ y $B\,(3{,}5)$

....

....

b. $C\,(-3{,}-2)$ y $D\,(5{,}-2)$

....

....

c. $P\,(-6{,}3)$ y $Q\,(7{,}3)$

....

....

d. $M(-2,7)$ y $N(-2,-2)$

....

....

e. $P(2,6)$ y $C(2,1)$

....

....

6. Dados dos puntos, determina las coordenadas del punto medio en forma gráfica y analítica.

a. $A(-5,-4)$, $B(6,-4)$

....

....

b. $A(-4,2)$, $B(2,2)$

....

....

c. $A(-4,4)$, $B(4,-4)$

....

....

d. $A(-3, 1)$, $B(5, -5)$

....

....

e. $A(-5, 4)$, $B(4, -2)$

....

....

f. $A\left(\frac{3}{5}, 4\right)$, $B\left(-\frac{27}{8}, -\frac{39}{7}\right)$

....

....

ACTIVIDAD 4

INSTRUCCIONES: De manera individual, realiza lo siguiente:

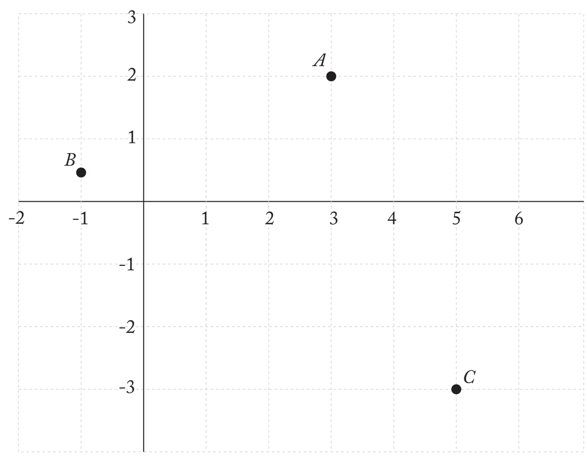
1. Para cada ejercicio determina las coordenadas que faltan y realiza su representación gráfica.

   a. Los extremos de un segmento rectilíneo son P_1 (3, 7) y P_2 (-5, 2). Encuentra las coordenadas del punto medio y la distancia entre ellos.

   b. El extremo superior de un segmento se ubica en P_1 (2, 1), su punto medio es P_m (0, 1). ¿Cuáles son las coordenadas del punto extremo inferior $P_2 (x_2, y_2)$? y ¿qué distancia existe entre los tres puntos?

   c. Calcula los puntos medios de los lados de un triángulo, con vértices en las coordenadas: P_1(3,0), P_2 (0,4) y P_3 (-3, 0). Determina el perímetro y el área del triángulo. (Se sugiere utilizar la fórmula de Herón para calcular el área $A = \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}$

   d. En la ciudad hay un parque ubicado en un terreno con forma triangular, se desea delimitar el parque con malla, reforestar con césped y colocar lámparas en el centro de cada uno de sus lados.



   - ¿Cuántos metros de malla se requieren?
   - ¿Cuántos metros cuadrados de césped se ocupan?
   - ¿Cuáles son las coordenadas adecuadas para ubicar las lámparas?

   e. Determina los puntos medios de un rectángulo con vértices en las coordenadas: P_1 (-6, 7), P_2 (-6, 1), P_3 (2, 1) y P_4 (2, 7). Calcule el perímetro y el área de la figura.

   f. El punto medio de un segmento se ubica en las coordenadas P_m (-3, -6); su punto superior está ubicado en P_1 (-8, 7). ¿Cuáles son las coordenadas del punto inferior P_2 (x_2, y_2)?

   g. En una pared se quiere construir un mural de mosaicos con tres niveles y los colores de la bandera: verde, blanco y rojo; partiendo de los puntos medios en cada lado de la pared. Sus vértices se ubican en los puntos: A (-3, 4), B (5,4), C (5, -2), D (-3, -2).

   - Realiza la representación gráfica de cada nivel
   - ¿Cuántos metros cuadrados de mosaicos se ocupan en cada color?