Computación Cuántica: Algoritmo de Deutsch y Deutsch-Jozsa

Ciencias Naturales y Tecnología

Daniel Felipe Alfonso[1]

[1] *Ingeniería de Sistemas, Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, Bogotá DC, Colombia*

Fecha: 01/12/2019

Resumen—La computación cuántica, es un paradigma diferente a la computación clásica donde cambiamos los bits, por cubits. Es una herramienta muy poderosa ya que muchos problemas que superan la complejidad o problemas que limitan nuestro hardware en ejecuciones dejan obsoleta la computación clásica, los circuitos digitales y pasan a ser tratables mediante la cuántica, con nuevas compuertas lógicas

Marco Teórico

- Cubit: Es un sistema cuántico con dos estados propios, al igual que un bit que tiene estados de 0 y 1 este puede representar otros estados como una combinación lineal de los estados base que tiene un bit.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

- Compuertas Lógicas Cuánticas: Es un circuito cuántico básico que opera sobre un pequeño número de qubits, estas son para los ordenadores cuánticos, como ejemplos tenemos:

Compuerta CNOT

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Compuerta desplazamiento Fase

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

Compuerta de Hadamard

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Compuerta SWAP

$$\text{SWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

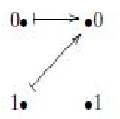
- Algoritmo de Deutsch: Este algoritmo nos indica si una función es constante o balanceada.

- Algoritmo de Deutsch-Jozsa: Dada una función booleana f: (0,1)**n (0,1), se define si es constante o balanceada evaluándola una sola vez

Experimentos

1. Implemente las 4 funciones posibles de (0,1) a (0,1) usando el computador cuántico de IBM.

   - Representación del estado (0,1) a f(0) = 0, f(1) = 0
     Dibujo función:



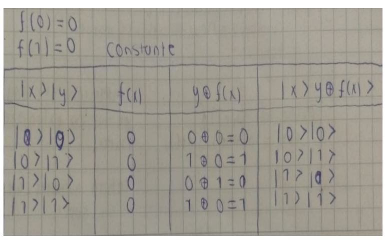
Matriz Estado f(0) = 0 f(1) = 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Uf correspondiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

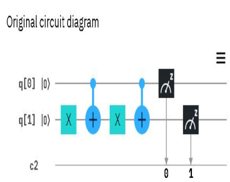
Para calcular esta matriz realizamos la siguiente tabla

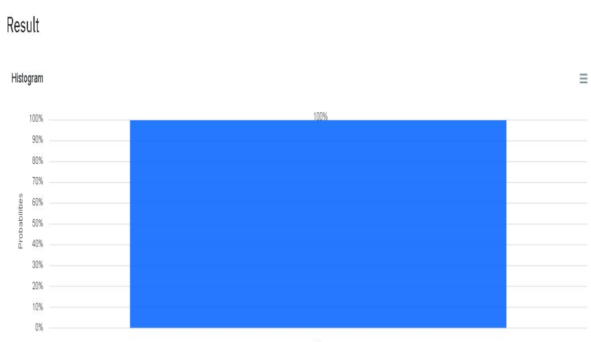


f(0)=0
f(1)=0 Constante

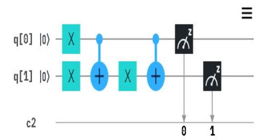
$\|x\rangle\|y\rangle$	f(x)	$y \oplus f(x)$	$\|x\rangle y \oplus f(x)\rangle$
$\|0\rangle\|0\rangle$	0	$0 \oplus 0 = 0$	$\|0\rangle\|0\rangle$
$\|0\rangle\|1\rangle$	0	$1 \oplus 0 = 1$	$\|0\rangle\|1\rangle$
$\|1\rangle\|0\rangle$	0	$0 \oplus 1 = 0$	$\|1\rangle\|0\rangle$
$\|1\rangle\|1\rangle$	0	$1 \oplus 0 = 1$	$\|1\rangle\|1\rangle$

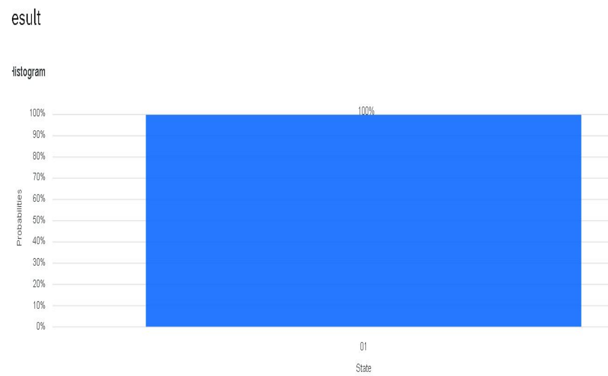
a) Entrada 00: Podemos observar que hay un 100 de probabilidad de terminar en el estado 00



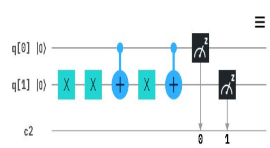


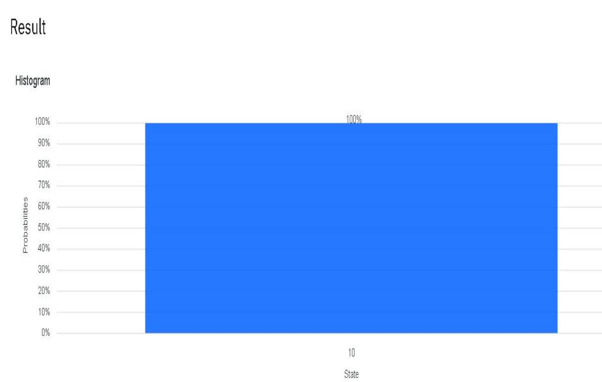
b) Entrada 01: Podemos observar que hay un 100 de probabilidad de terminar en el estado 01



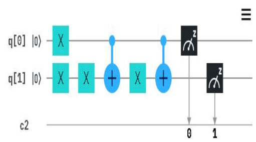


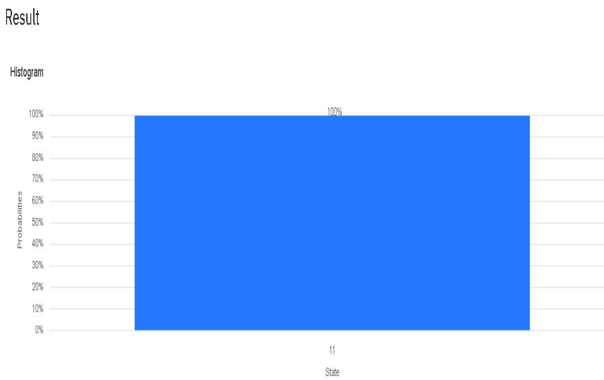
c) Entrada 10: Podemos observar que hay un 100 de probabilidad de terminar en el estado 10





d) Entrada 11: Podemos observar que hay un 100 de probabilidad de terminar en el estado 11





- Representación del estado (0,1) a f(0) = 0 y f(1) = 1 Dibujo funcion:

$$0 \mapsto 0$$

$$1 \mapsto 1$$

Matriz Estado f(0) = 0 f(1) = 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Uf correspondiente:

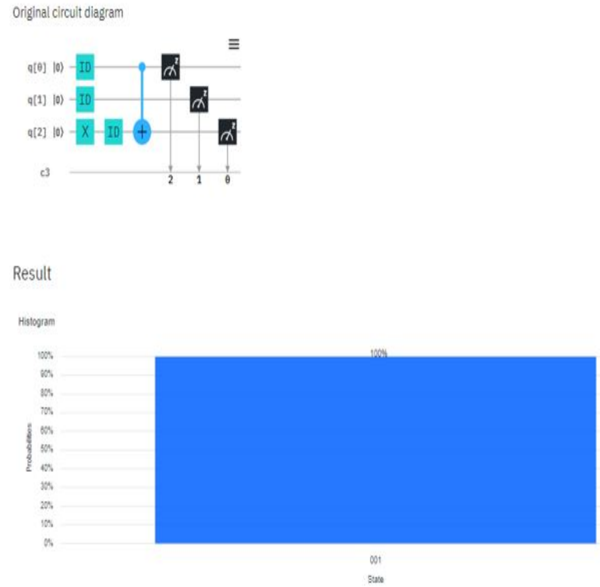
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular esta matriz realizamos la siguiente tabla

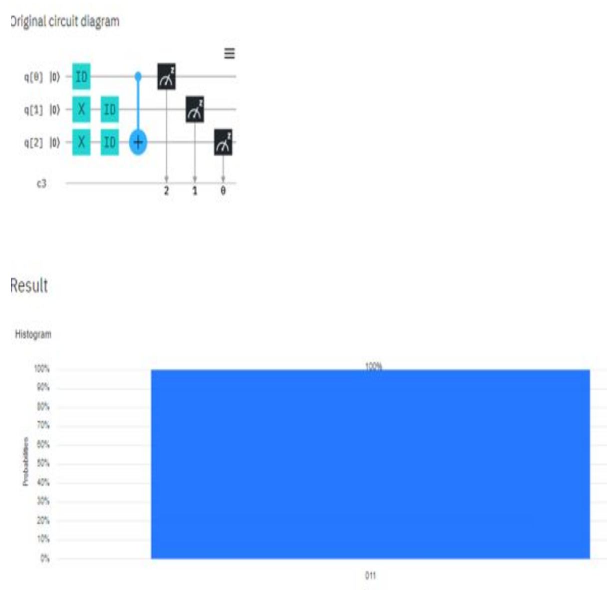
f(0)=0 Balanceado U0
f(1)=1

$\|x\rangle\|y\rangle$	$f(x)$	$y \oplus f(x)$	$\|x\rangle\|y \oplus f(x)\rangle$
$\|0\rangle\|0\rangle$	0	$0 \oplus 0 = 0$	$\|0\rangle\|0\rangle$
$\|0\rangle\|1\rangle$	0	$1 \oplus 0 = 1$	$\|0\rangle\|1\rangle$
$\|1\rangle\|0\rangle$	1	$0 \oplus 1 = 1$	$\|1\rangle\|1\rangle$
$\|1\rangle\|1\rangle$	1	$1 \oplus 1 = 0$	$\|1\rangle\|0\rangle$

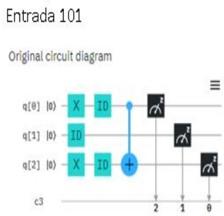
a) Entrada 00:

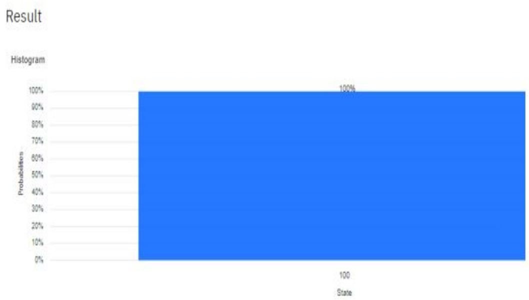


b) Entrada 01:

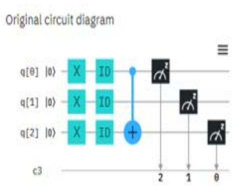


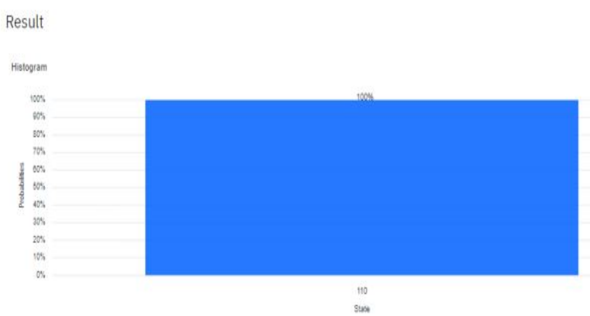
c) Entrada 10:



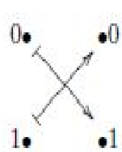


d) Entrada 11:





- Representacion del estado (0,1) a f(0) = 1 y f(1) = 0 Dibujo funcion:



Matriz Estado f(0) = 1 f(1) = 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Uf correspondiente:

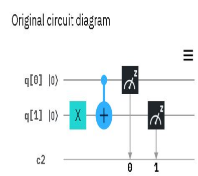
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

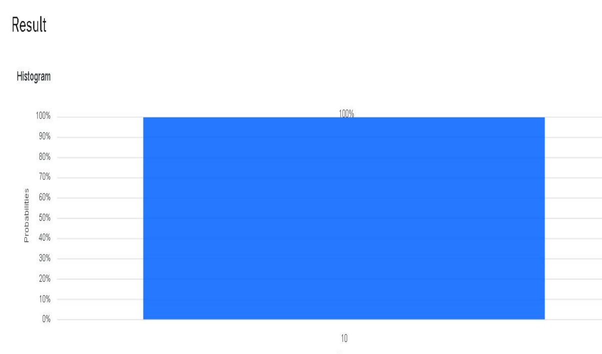
Para calcular esta matriz realizamos la siguiente tabla

f(0) = 1
f(1) = 0

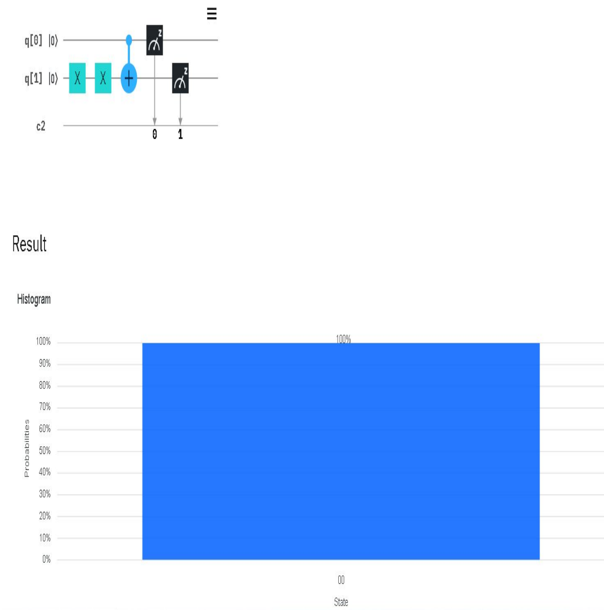
$\|x\rangle\|y\rangle$	f(x)	$y \oplus f(x)$	$\|x\rangle\|y \oplus f(x)\rangle$
$\|0\rangle\|0\rangle$	1	$0 \oplus 1 = 1$	$\|0\rangle\|1\rangle$
$\|0\rangle\|1\rangle$	1	$1 \oplus 1 = 0$	$\|0\rangle\|0\rangle$
$\|1\rangle\|0\rangle$	0	$1 \oplus 0 = 1$	$\|1\rangle\|1\rangle$
$\|1\rangle\|1\rangle$	0	$1 \oplus 0 = 1$	$\|1\rangle\|1\rangle$

a) Entrada 00:

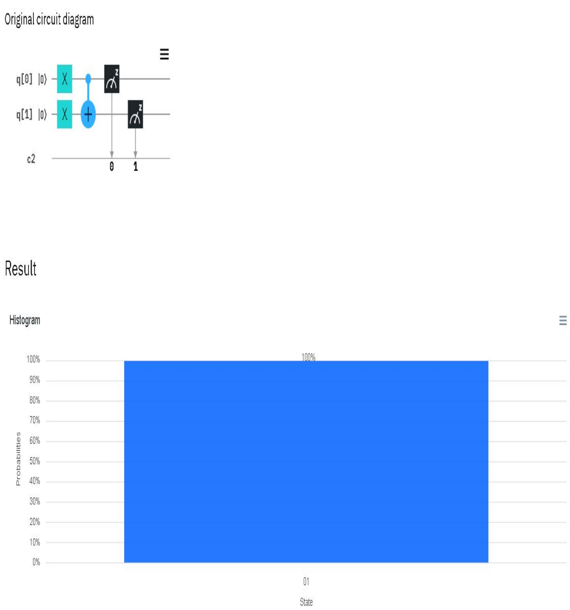




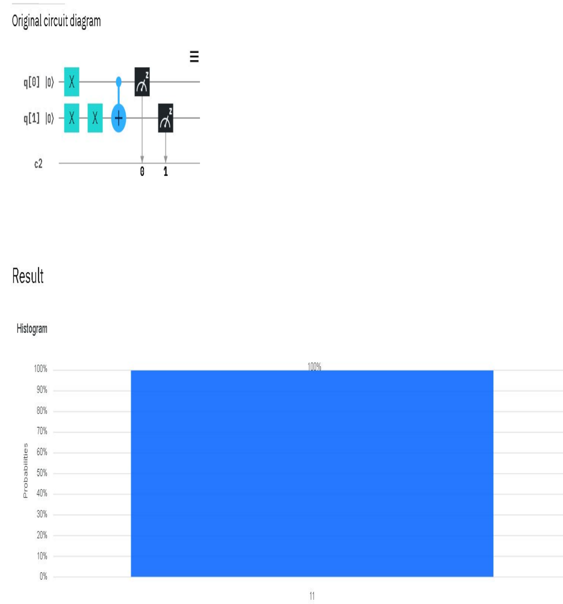
b) Entrada 01:



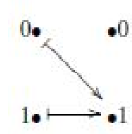
c) Entrada 10:



d) Entrada 11:



- Representacion del estado (0,1) a f(0) = 1 y f(1) = 1 Dibujo funcion:



Matriz Estado f(0) = 1 f(1) = 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Uf correspondiente:

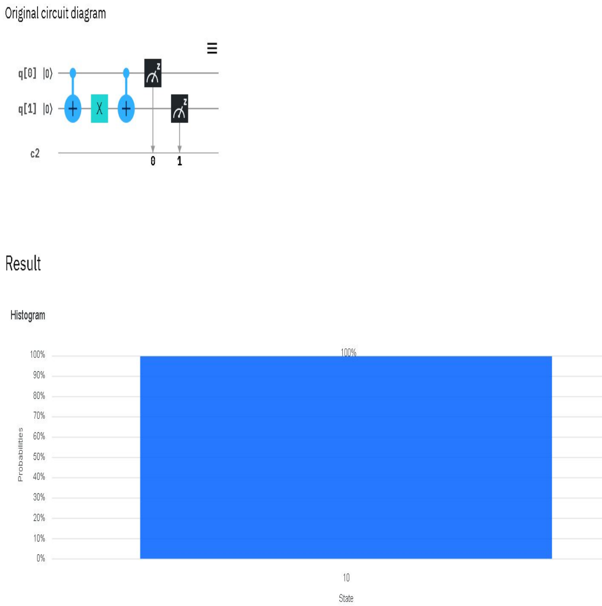
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular esta matriz realizamos la siguiente tabla

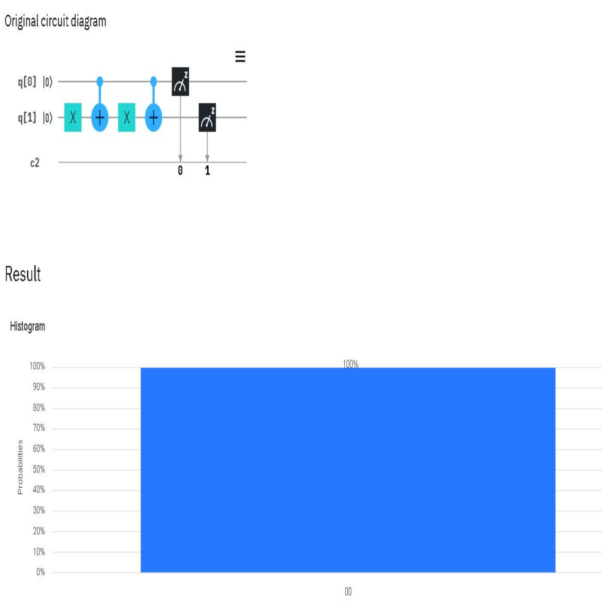
f(0) = 1 constante U_1
f(1) = 1

$\|x\rangle\|y\rangle$	f(x)	$y \oplus f(x)$	$\|x\rangle\|y \oplus f(x)\rangle$
$\|0\rangle\|0\rangle$	1	$0 \oplus 1 = 1$	$\|0\rangle\|1\rangle$
$\|0\rangle\|1\rangle$	1	$1 \oplus 1 = 0$	$\|0\rangle\|0\rangle$
$\|1\rangle\|0\rangle$	1	$0 \oplus 1 = 1$	$\|1\rangle\|1\rangle$
$\|1\rangle\|1\rangle$	1	$1 \oplus 1 = 0$	$\|1\rangle\|0\rangle$

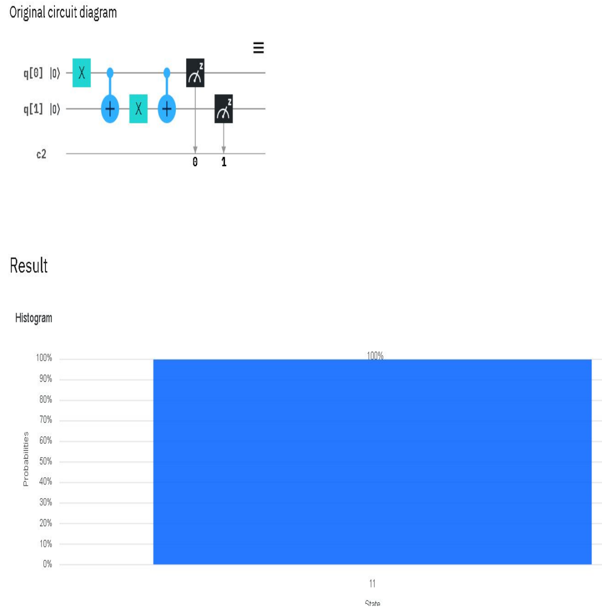
a) Entrada 00:



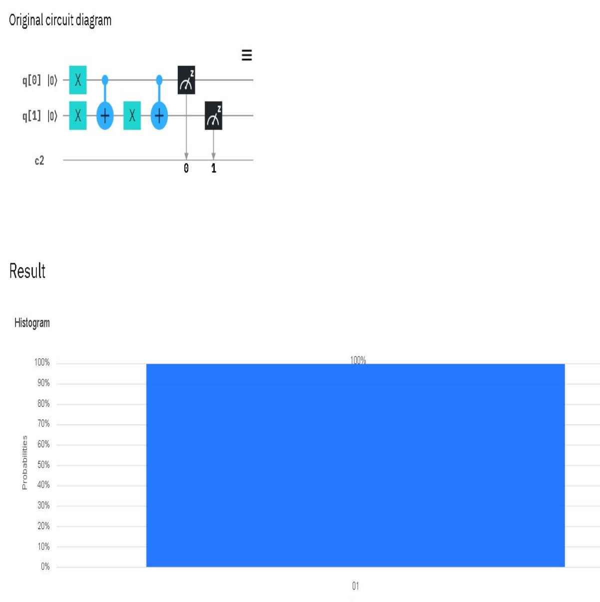
b) Entrada 01:



c) Entrada 10:



d) Entrada 11:



2. Verifique que el algoritmo de Deutsch funciona para comprobar cuáles de estas funciones son balanceadas o constantes.
Analisis Funciones

(H $\otimes$ I):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(H $\otimes$ H):

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

|01>:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resultados:
Primer caso funcion constante matriz Uf seria:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

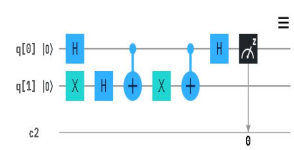
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

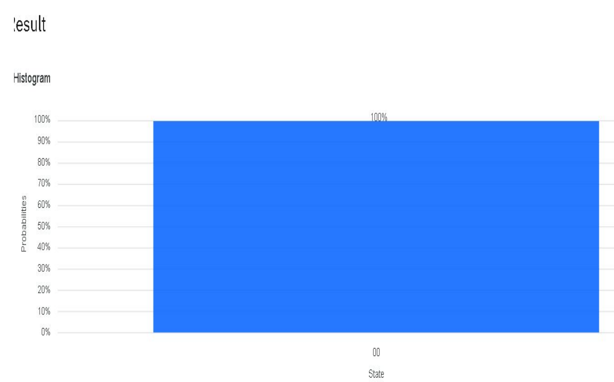
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al ser una funcion constante obtenemos en el estado 00 un 1 de probabilidad





Resultados:
Segundo caso funcion balanceada matriz Uf seria:

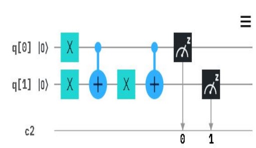
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

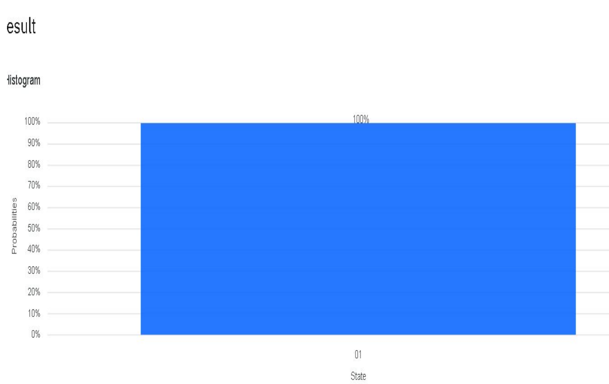
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} * \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$





Resultados:

Tercer caso funcion balanceada matriz Uf seria:

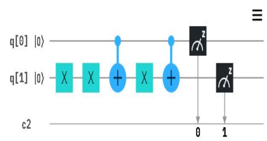
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

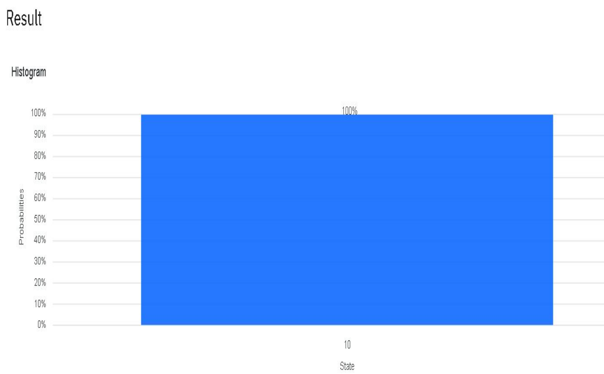
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} * \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$





Resultados:
Cuarto caso función constante matriz Uf seria:

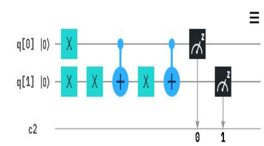
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

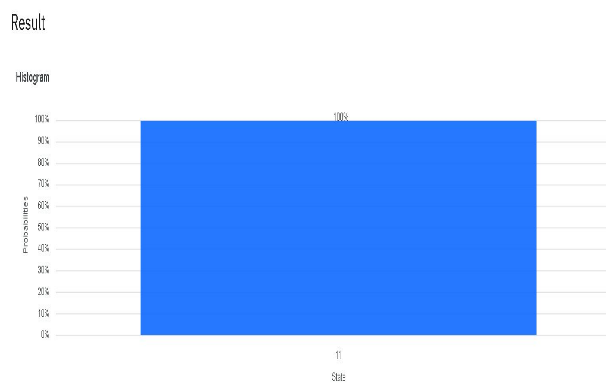
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} | * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} | * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} | * \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

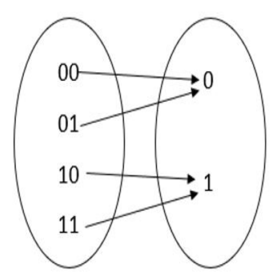
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$





3. Implemente al menos 2 funciones con n= 2 para probar el funcionamiento del algoritmo Deustch-Jozsa

   Función 1 dibujo:

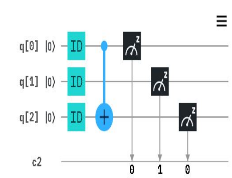


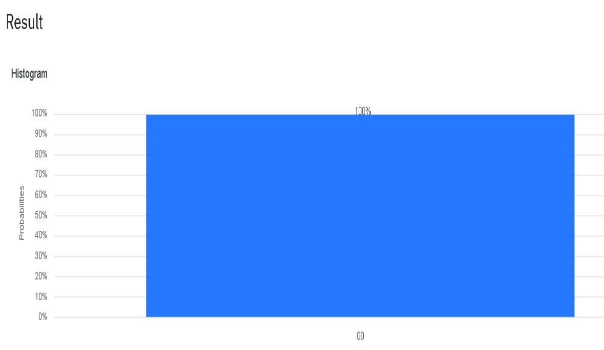
   Matriz de la función:

	00,0	00,1	01,0	01,1	10,0	10,1	11,0	11,1
00 ,0	1	0	0	0	0	0	0	0
00,1	0	1	0	0	0	0	0	0
01,0	0	0	1	0	0	0	0	0
01,1	0	0	0	1	0	0	0	0
10,0	0	0	0	0	0	1	0	0
10,1	0	0	0	0	1	0	0	0
11,0	0	0	0	0	0	0	0	1
11,1	0	0	0	0	0	0	1	0

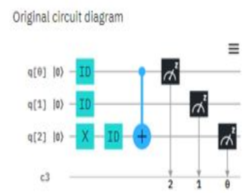
Esta función es balanceada ya que tenemos un 50 por ciento en 0 y 50 en 1

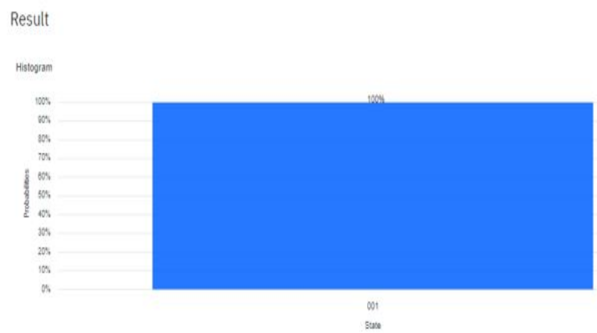
Entrada 000:



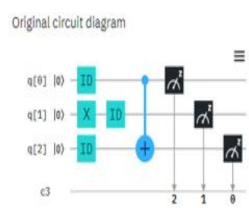


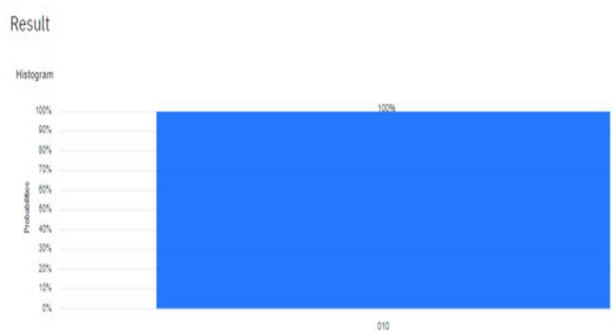
Entrada 001:



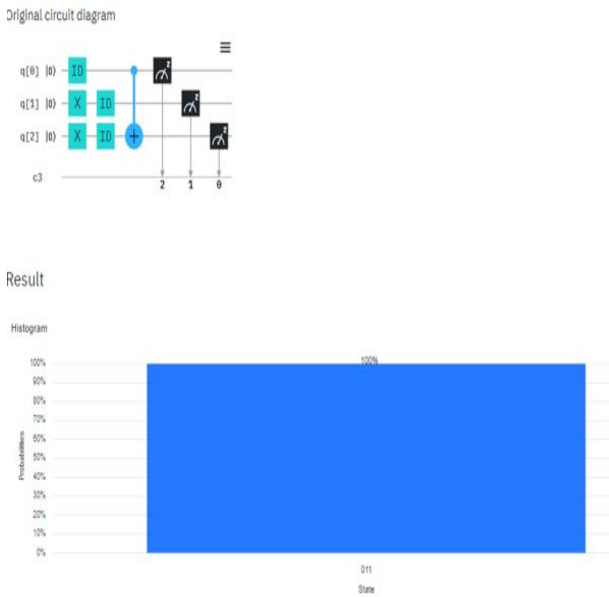


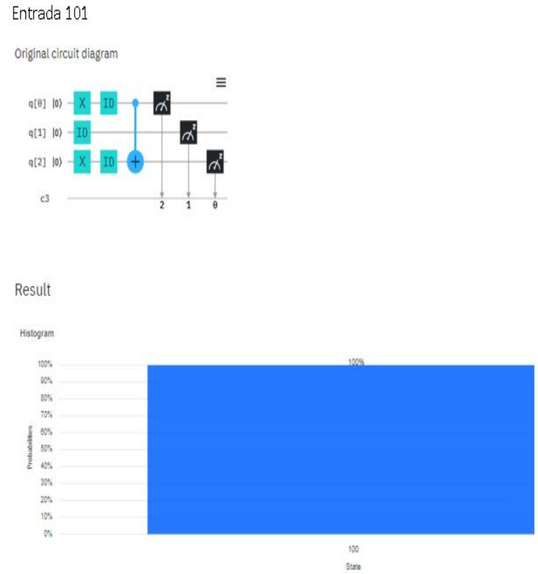
Entrada 010:





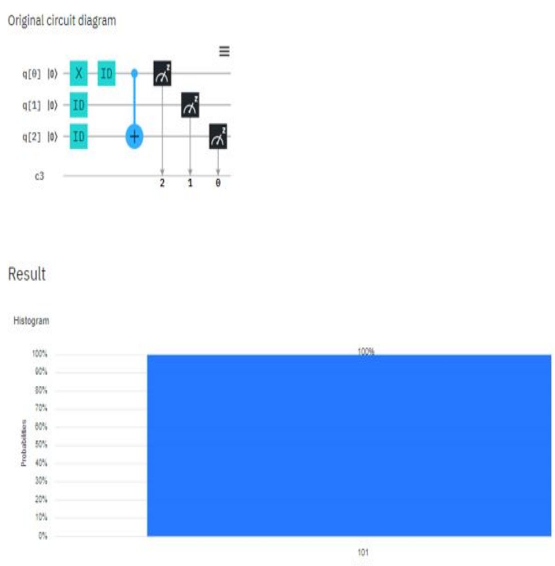
Entrada 011:

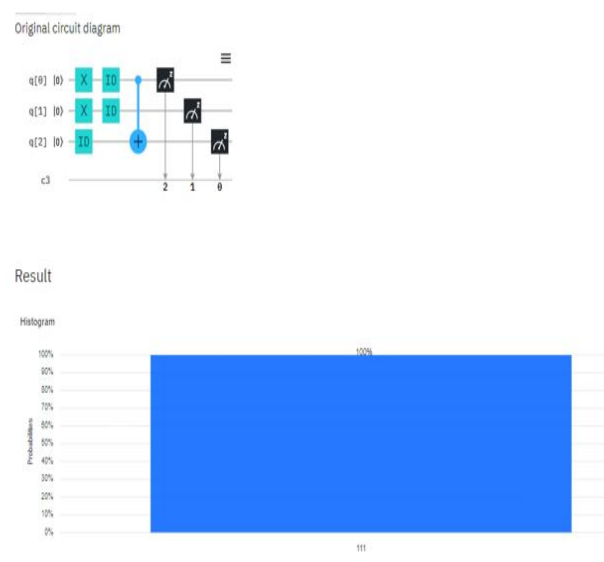




Entrada 100:

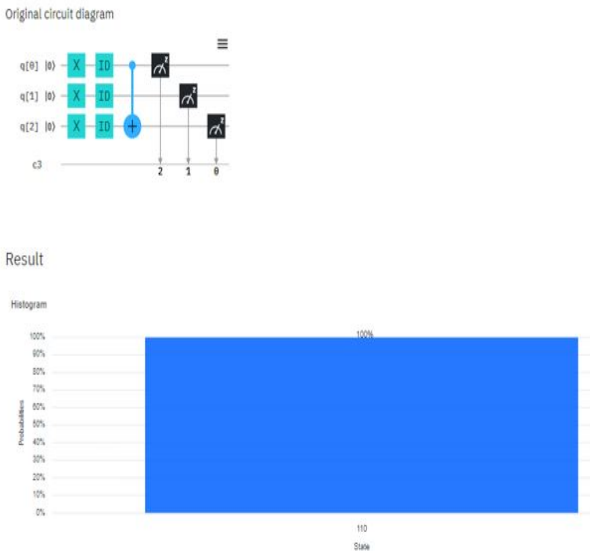
Entrada 110:



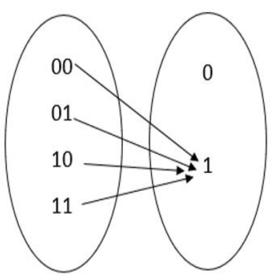


Entrada 101:

Entrada 111:



Funcion 2 dibujo:

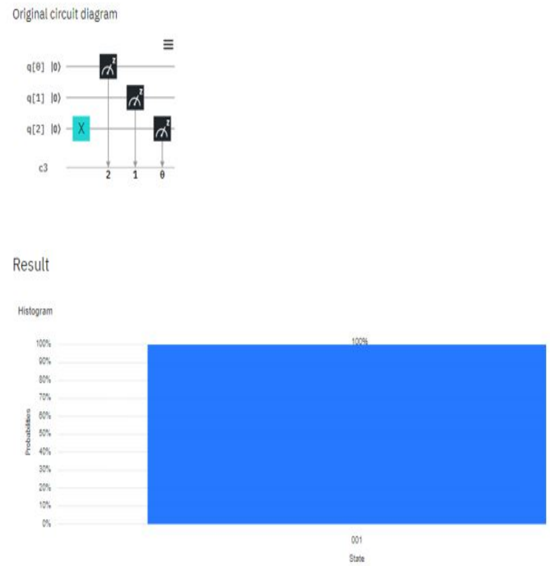


Matriz de la funcion:

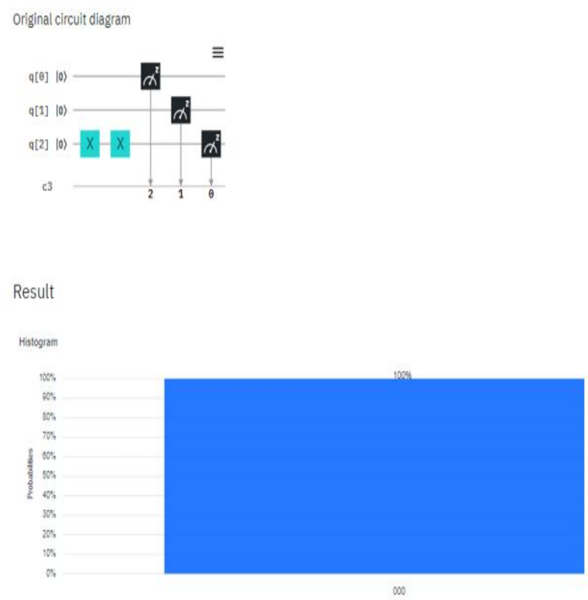
	00,0	00,1	01,0	01,1	10,0	10,1	11,0	11,1
00,0	0	1	0	0	0	0	0	0
00,1	1	0	0	0	0	0	0	0
01,0	0	0	0	1	0	0	0	0
01,1	0	0	1	0	0	0	0	0
10,0	0	0	0	0	0	1	0	0
10,1	0	0	0	0	1	0	0	0
11,0	0	0	0	0	0	0	0	1
11,1	0	0	0	0	0	0	1	0

Esta funcion es balanceada ya que tenemos un 50 por ciento en 0 y 50 en 1

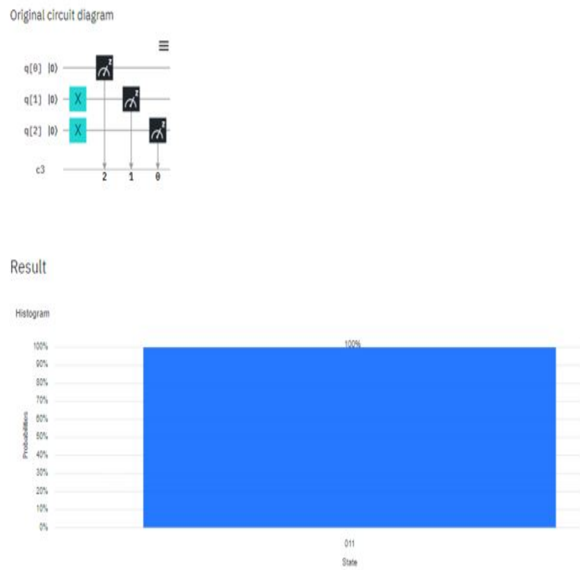
Entrada 000:

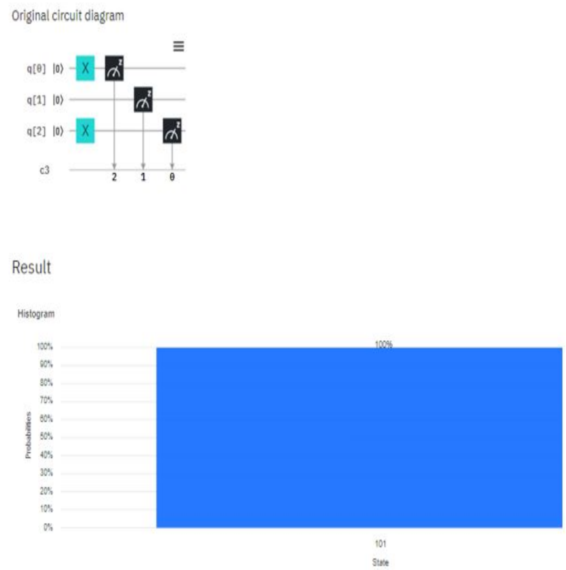


Entrada 001:



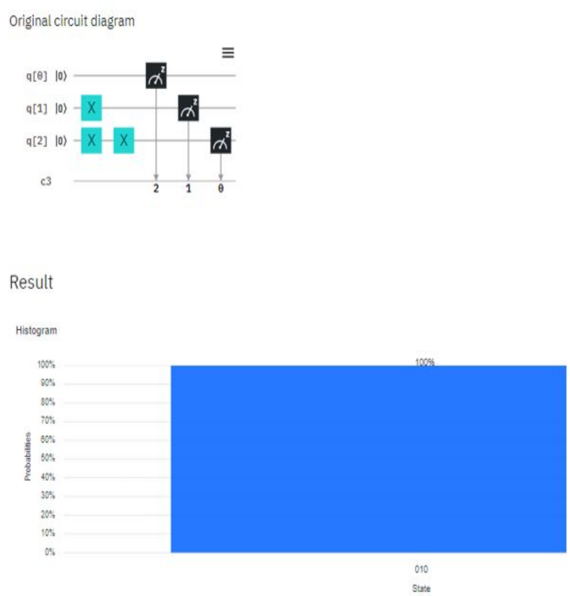
Entrada 010:

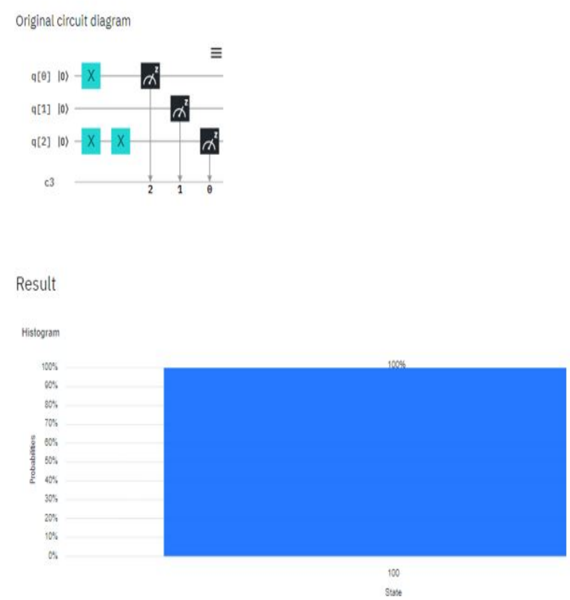




Entrada 011:

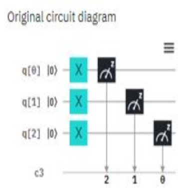
Entrada 101:

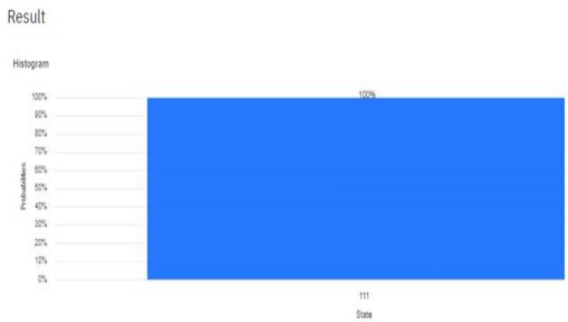




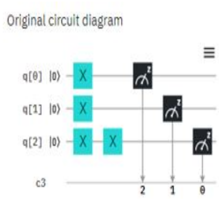
Entrada 100:

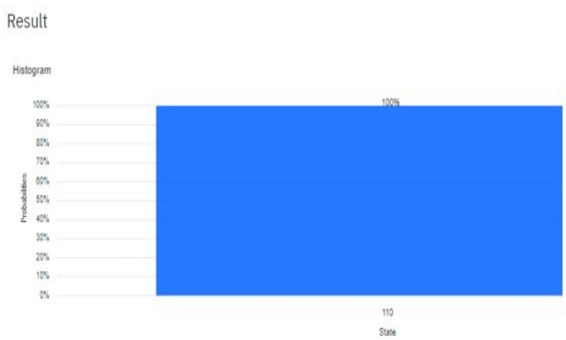
Entrada 110:





Entrada 111:





CONCLUSIONES

- Los algoritmos planteados por medio del simulador de IBM permiten una visualización mucho más próxima al comportamiento cuántico. Así mismo para poder entender estos algoritmos es necesario la interpretación matemática ya que proporciona una mejor perspectiva del funcionamiento de este.

- El algoritmo de Deutsch es un algoritmo determinista ya que consigue la solución con una probabilidad de 1.

- El algoritmo de Deutsch y Jozsa permite determinar si es una función balanceada o constante al medir el ultimo n-Qubit.