Taller Parcial I

Instrucciones: Este taller parcial se realiza en grupos. Pueden discutir y colaborar con los miembros de su grupo, así como utilizar software y apuntes para resolver los problemas. Sin embargo, no está permitido comunicarse con personas externas al grupo ni utilizar herramientas de inteligencia artificial, como ChatGPT, o tener chats abiertos durante el desarrollo del parcial. Cualquier violación de estas normas resultará en la anulación del mismo.

Al finalizar, cargue el archivo en PDF al aula virtual.

Todos los puntos tienen el mismo valor.

1. Considere la función $f(x,y) = e^{ax^2+y^2}$ donde a es una constante. Para diferentes valores de a establecer cómo son las curvas de nivel de f, precisar sus observaciones definiendo intervalos de $\mathbb{R}$ a los cuales a pertenece.

2. Considere la función $g(x,y)$, donde a es una constante.

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ a & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Mediante el uso de trayectorias, estudie si el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ existe o no. Concluya qué observa en este análisis.

   (b) ¿Qué puede concluir sobre la continuidad de $g(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$?
   Ayuda: Asigne algún valor apropiado para a.

3. Se está estudiando la intensidad de un campo ondulatorio, cuya función está dada por $I(x,y) = 2\sqrt{x}\sin(y) - y\ln(x^2)$. Esta función describe cómo varía la intensidad de las ondas en función de las coordenadas x, y.

   (a) Encuentre el vector gradiente y realice la grafica de dicho vector en el punto $\left(\frac{7\pi}{3}, 4\right)$.

   (b) Grafique la curva de nivel que pasa por ese punto.

   (c) Determine la razón de cambio de la intensidad del campo en el punto $\left(\frac{7\pi}{3}, 4\right)$ en dirección de $\vec{v} = \langle 3, 4\rangle$.

   (d) ¿En qué dirección cambia la intensidad más rápidamente en el punto $\left(\frac{7\pi}{3}, 4\right)$? ¿Cuál es la tasa máxima de cambio de dicha intensidad en el punto $\left(\frac{7\pi}{3}, 4\right)$?

4. Un ingeniero electrónico debe analizar la distribución de densidad de corriente eléctrica en una superficie conductora con forma elíptica. La densidad de corriente en cualquier punto (x, y) de la superficie está dada por la función:

$$J(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 2x$$

Esta función representa la densidad de corriente en el conductor, y se desea determinar los puntos de **máxima** y **mínima densidad** en el borde de la elipse, que está definida por:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

(a) Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para resolver el problema.

(b) Grafique la elipse y ubique sobre ella los puntos óptimos obtenidos en el item anterior.

(c) Coloque sobre el borde de la elipse, en los puntos óptimos, los vectores gradiente de J y de g evaluados en dichos puntos, y verifique gráficamente que se cumple la condición

$$\nabla J(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$