

חדו"א מ' (104018) – בחינת סמסטר

הנחיות כלליות: כל חומר עזר אסור. משך הבחינה: שלוש שעות.
יש לנמק היטב כל תשובה – גם בשאלות החישוביות. תשובה לא מנומקת לא תתקבל!
ערך כל סעיף מופיע בסוגריים.

שאלה 6 היא "תחליף מגן" עבור סטודנטים שהיו במילואים במהלך הבחן.

נא לענות על השאלות על גבי השאלון בלבד.

בהצלחה!!

חלק א': ענה על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות. את תופענה תשובות ליותר משתי שאלות, תבדקנה התשובות לשתי השאלות הראשונות בלבד.

שאלה 1. (20 נקודות)

תהי $f(x) = x^3 + 5x + 1$.

א. (12) הוכח ש f היא חד-חד ערכית ועל \mathbb{R} .

ב. (8) חשב $(f^{-1})'(1)$, כלומר, את הנגזרת של הפונקציה ההפוכה בנקודה 1.

שאלה 2. (20 נקודות)

א. (10) חשב ללא שימוש בכלל לופיטל את $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 1)^{\frac{1}{\ln(x^2+1)}}$.

ב. (10) חשב בכל דרך שתבחר את $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 1)^{\frac{1}{\ln(x^2+1)}}$.

שאלה 3. (20 נקודות)

א. (12) חשב את האינטגרל $\int \frac{2e^{2t} + e^t}{e^{2t} + 2e^t + 4} dt$.

ב. (8) בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

חלק ב': ענה על השאלות הבאות.

שאלה 4. (20 נקודות)

א. (5) הגדר בלשון ε, n : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 3$.

ב. (15) הוכח שאם (a_n) היא סדרה מונוטונית עולה וחסומה אז (a_n) מתכנסת.

שאלה 5. (20 נקודות)

א. (10) הוכח ש $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(e^{\frac{1}{n^3}} - 1 \right) = 1$.

ב. (10) השתמש ב א' כדי להראות כי קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $\left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right| \leq e^{\left(\frac{1}{n^3}\right)} - 1$.

שאלה 6. (20 נקודות)

הבא דוגמאות נגדיות לטענות הלא נכונות הבאות:

א. (8) אם f גזירה ב x_0 אז יש סביבה של x_0 שבה f רציפה.

ב. (6) אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sin(x) = 0$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

ג. (6) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.