טורי חזקות, תחום התכנסות

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right) x^n$$

פתרון:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sin \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{\sin \frac{1}{n}}{1/n} \cdot \frac{1/n}{1/(n+1)}}{\frac{\sin \frac{1}{n+1}}{1/(n+1)}}\right| = 1$$

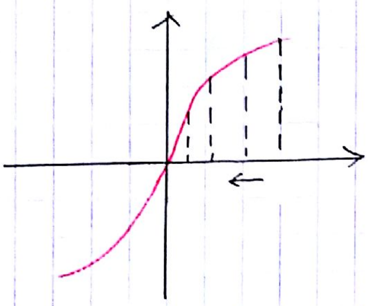
$\Leftarrow$ $R=1$ ← הטור מתכנס עבור $|x|<1$.

נבדוק מה קורה עבור $x=1$ ו- $x=-1$.

<u>$x=1$</u>: מקבלים את הטור $\sum \sin \frac{1}{n}$ שמתבדר ע"פ השוואה ל- $\sum \frac{1}{n}$ ($\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1/n}{1/n} = 1$).

<u>$x=-1$</u>: מקבלים את הטור $\sum (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ שמתכנס כיון שמתקיים לייב' $\sin \frac{1}{n}$ מונוטונית יורדת ל-0.

($\sin \frac{1}{n}$ ברור שהוא חיובי).



$\Leftarrow$ תחום ההתכנסות $[-1,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right) x^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n+1}}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad R=1$$

<u>$x=1$</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 1/n$

$\lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{n} = 1 \neq 0$ ולכן הטור מתבדר.

<u>$x=-1$</u>: כנ"ל $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{1}{n}$ מתבדר

לכן תחום ההתכנסות $(-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) (x-2)^{2n}$$

אנו רוצים צורה $\sum a_n x^n$ ולכן נבצע הצבה.

נסמן: $t=(x-2)^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) t^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log(1+1/n+1)}$$ כך נחשב את הגבול

ונשתמש בלופיטל עבור (x)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{x})}{\log(1+\frac{1}{x+1})} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{1+\frac{1}{x+1}}\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^2 = 1.$$

לכן לפי משפט היינה לגבול כי לכל סדרה $\{a_n\}$ המתכנסת ל-∞, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{a_n})}{\log(1+\frac{1}{a_{n+1}})} = 1$$

$\Leftarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log(1+\frac{1}{n+1})} = 1$$

מכאן רדיוס ההתכנסות הוא 1. לכן הטור מתכנס עבור

$$|t| < 1$$

$$|(x-2)^2| < 1$$

$$|x-2|^2 < 1$$

$$-1 < x-2 < 1 \qquad /+2$$

$$1 < x < 3$$

נבדוק קצוות!

$x=1$: $$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$x=3$: $$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

מתנהג כמו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ שהרי

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/(x+1)}{1} = 1.$$

(הרמוני) *

עפ"י מבחן ההשוואה הגבולי ב-: $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{1/n} = 1$

הטור מתבדר.

לכן תחום ההתכנסות $(1,3)$.

26/3

טור טיילור - טורי חזקות

פולינום טיילור / אינסופי

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

שארית

סופי

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\dots = \sum\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$|x|<\infty$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$|x|<\infty$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \qquad -1<x\le 1$$

בפולינום טיילור יש שארית!
בטור טיילור אין שארית!

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\dots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \qquad |x|<1$$

$f(x) = (1+x)^\alpha$

$f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

סדרה הנדסית.

$$1+x+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n = \Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots \qquad |x|<1$$

במקום x ניקח $-x$

$$\frac{1}{1-(-x)} = 1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\dots \qquad |x|<1$$

במקום x נניח x^2

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\dots \qquad |x|<1$$

נקבל טורים "מכל מיני סוגים"!

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} = \int_0^t (1-x+x^4-x^6+\dots) =$$

$$\Rightarrow \arctan t = t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\dots \qquad |t|<1$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots \qquad |x|<1$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

$$\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^t x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad |x|<\infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |x|<\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad |x|<\infty$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

לכל x מתקיים: