סדרות

גבול של סדרה – הגדרה:

תהי $\{a_n\}$ סדרה כלשהי, נאמר שמספר ממשי L הוא הגבול של הסדרה אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$. סימון: $\lim_{n\to\infty}(a_n)=L$

התכנסות במובן הרחב – הגדרה:

תהי $\{a_n\}$ סדרה כלשהי, נאמר שהיא מתכנסת לאינסוף אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $a_n>M$. סימון: $\lim_{n\to\infty}(a_n)=\infty$ (התכנסות ל $-\infty \Leftarrow a_n<-M$)

תת סדרה – הגדרה:

תהי $\{a_n\}$ סדרה נתונה ו-$\{n_k\}$ סדרה מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים, $k\in\mathbb{N}$ נגדיר $b_k=a_{n_k}$. אז כל סדרה $\{b_k\}$, נאמר שהיא תת סדרה של $\{a_n\}$.

משפטים על סדרות מתכנסות:

1. הגבול הוא יחיד.
2. כל סדרה מתכנסת היא חסומה (לא עובד בכיוון ההפוך).
3. אם a_n מתכנסת ל-L, אז $|a_n|$ מתכנסת ל-$|L|$ (לא עובד בכיוון ההפוך).
4. $\lim(a_n)=A$, $\lim(b_n)=B$, c קבוע כלשהו
   - $\lim(c\cdot a_n)=c\cdot A$
   - $\lim(b_n+a_n)=A+B$
   - $\lim(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$
   - $\lim(a_n/b_n)=A/B$ ($B\neq 0$, $b_n\neq 0$ לכל n)
5. אם $\{b_n\}$ חסומה (לאו דוקא מתכנסת) ו-$\{a_n\}$ מתכנסת ל-0, אז $\{a_n\cdot b_n\}$ מתכנסת ל-0.
6. $\{a_n\}$ מתכנסת ל-L, b מספר ממשי כלשהו. אם קיים $n_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n\geq n_0$, $a_n\geq b$ אז $L\geq b$.
7. אם $\{a_n\}$ ו-$\{b_n\}$ מתכנסות ו- $a_n\geq b_n$ כמעט לכל n, אז $\lim(a_n)\geq\lim(b_n)$.
8. משפט הסנדוויץ'- $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ו-$\{c_n\}$ סדרות מתכנסות. אם $\lim(a_n)=\lim(c_n)=L$ ואם קיים $n_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n\geq n_0$, $c_n\geq b_n\geq a_n$ אז $\{b_n\}$ מתכנסת ו- $\lim(b_n)=L$.
9. אם $\{a_n\}$ שואפת ל-0 אבל שונה מ-0, אז הסדרה $1/|a_n|$ שואפת לאינסוף.

10. כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת לגבול סופי.

11. כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

12. הלמה של קנטור- $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית עולה, $\{b_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת, ומתקיים $a_n<b_n$ לכל n ו- $\lim(b_n-a_n)=0$, אז שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול.

ניסוח "גיאומטרי" של המשפט: $\{[a_n,b_n]\}$ היא סדרה של קטעים סגורים כך שכל קטע מוכל ממש בקודם ו- $\lim(b_n-a_n)=0$ (המרחק בין קצוות הקטעים שואף ל-0), אז קיימת נקודה אחת c כך ש- $c\in[a_n,b_n]$ לכל n.

13. אם הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת (גם במובן הרחב), אז כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול. מסקנה: אם לסדרה יש שתי תת סדרות שלא מתכנסות לאותו גבול, אז היא לא מתכנסת.

14. משפט Bolzano-Weierstrass- לכל סדרה חסומה (גם אם היא מתבדרת) יש תת סדרה מתכנסת.

<u>חישובי גבולות:</u>

1. לפי כלל הסנדוויץ' (משתמשים בדרך כלל בתרגילים של סכום אינסופי).

2. מבחן המנה- $\{a_n\}$ סדרה חיובית. אם $\lim(a_{n+1}/a_n)=q$ אז: $q<1 \Leftarrow$ a_n שואפת ל-0

$q>1 \Leftarrow$ a_n שואפת ל- ∞

(משתמשים בדרך כלל בחזקות ועצרות)

$q=1 \Leftarrow$ אי אפשר לדעת

3. מבחן השורש- $\{a_n\}$ סדרה חיובית. אם $\lim(\sqrt[n]{a_n})=c$ אז: $c<1 \Leftarrow$ a_n שואפת ל-0

$c>1 \Leftarrow$ a_n שואפת ל- ∞

$c=1 \Leftarrow$ אי אפשר לדעת

4. שורש n-י של סדרה- $\{a_n\}$ סדרה חיובית. אם קיים $\lim(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ אז הסדרה $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ מתכנסת ומתקיים $\lim(\frac{a_{n+1}}{a_n})=\lim(\sqrt[n]{a_n})$.

בפרט, סדרה שהיא שורש n-י של פולינום מתכנסת תמיד ל-1.

5. מנת פולינומים- אם חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה – הגבול הוא ∞ או $-\infty$

אם חזקת המונה קטנה מחזקת המכנה – הגבול הוא 0

אם חזקת המונה שווה לחזקת המכנה – הגבול הוא מנת המקדמים של החזקות הגבוהות.

6. הגבול e- $\lim\left(1+\frac{k}{a_n}\right)^{a_n}=e^k$, בתנאי ש-$a_n$ שואפת לאינסוף.

7. גבול של ממוצע חשבוני/הנדסי/הרמוני של הסדרה שווה לגבול הסדרה.

פונקציות

<u>הגדרה:</u>
תהיינה D ,E שתי קבוצות של מספרים ממשיים ($E,D\subseteq\mathbb{R}$), פונקציה f מן הקבוצה D לקבוצה E היא כלל מוגדר הייטב על פיו מתאימים ל**כל** מספר x∍D מספר **יחיד** y∍E.
סימון: $f(x)=y$, $f: D\to E$

<u>מונחים:</u>
- הקבוצה D נקראת תחום ההגדרה של פונקציה f.
- הקבוצה E נקראת הטווח של פונקציה f.
- המשתנה x נקרא המשתנה הבלתי תלוי של פונקציה f.
- המשתנה y נקרא המשתנה התלוי של פונקציה f.
- אם $f(x)=y$, x נקרא המקור של y, ו-y נקרא התמונה של x. המקור הוא לא בהכרח יחיד.

<u>תחום ההגדרה של הפונקציה</u>- תהי f(x) פונקציה הנתונה ע"י נוסחא/ות. תחום ההגדרה הטבעי שלה הוא קבוצת המספרים הממשיים הגדולה ביותר עבורה הביטוי f(x) מוגדר.

<u>תמונה</u>- אם $f: D\to E$ פונקציה, אז התמונה מוגדרת ע"י קבוצת כל התמונות של איברי D.
סימון: $\mathrm{Im}(f)=\{f(x)\,|\,x\in D\}$ (image)

<u>פונקציה חסומה</u>- נאמר שפונקציה $y=f(x)$ היא חסומה מעל התחום D אם קיים מספר ממשי M כך ש $|f(x)|<M$ לכל $x\in D$.

<u>פונקציה חד-חד-ערכית (חח"ע)</u>- פונקציה חח"ע $f: D\to E$ היא פונקציה המקיימת:
$f(x_1)=f(x_2)\ \Leftrightarrow\ x_1=x_2$ (המקור x הוא **יחיד** לכל y).

<u>פונקציה על</u>- פונקציה נקראת על (E), כאשר $\mathrm{Im}(f)=E$, אם לכל $y\in E$ יש מקור ב- $x\in D$.

<u>פונקציית הזהות</u>- $I: D\to D$, $I(x)=x$ (היא גם חח"ע וגם על).

<u>הרכבה של פונקציות</u>- $f: C\to D$, $g: D\to E$ ההרכבה $f\circ g$: $(f\circ g): C\to E$, $(f\circ g)(x)=g(f(x))$

<u>פונקציה הפוכה</u>- $f: C\to D$. אם קיימת פונקציה $g: D\to C$ כך ש $g\circ f=I_C$ ו- $f\circ g=I_D$ אז נאמר ש-f(x) היא פונקציה הפיכה וש-g(x) היא הפונקציה ההפוכה שלה.
רק פונקיצה שהיא חח"ע וגם על יכולה להיות הפיכה. סימון: $g(x)=f^{-1}(x)$

<u>הגדרת גבול של פונקציה לפי Heine</u>- תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, (פרט, אולי, לנקודה $x=a$ עצמה), אז מספר ממשי L יקרא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל-a. סימון: $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)=L$. אם לכל סדרה $\{x_n\}$, $x_n\neq a$ לכל n, עבורה x_n שואף ל-a כאשר n שואף לאינסוף, מתקיים שהסדרה $\{f(x_n)\}$ שואפת ל-L כאשר n שואף לאינסוף.

<u>הגדרת גבול של פונקציה לפי Cauchy</u>- תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, (פרט, אולי, לנקודה $x=a$ עצמה), אז מספר ממשי L יקרא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל-a, אם לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

<u>גבול סופי כש-x שואף לאינסוף – הגדרה</u>- תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, נאמר שמספר ממשי L הוא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף לאינסוף, אם לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$ קיים מספר E כך שלכל $x>E$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

<u>גבול אינסופי כש-x שואף ל- a – הגדרה</u>- תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, נאמר שהגבול של $f(x)$ הוא אינסוף כאשר x שואף ל- a, אם לכל מספר ממשי $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $f(x)>M$.

<u>גבול אינסופי כש-x שואף לאינסוף – הגדרה</u>- תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת על החצי הימני של הציר $=(0,\infty)$, נאמר שהגבול של $f(x)$ הוא אינסוף כאשר x שואף לאינסוף, אם לכל מספר ממשי $M>0$ קיים מספר D כך שלכל $x>D$ מתקיים $f(x)>M$.

<u>גבולות חד צדדיים – הגדרה</u>- תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבה הימנית של הנקודה $x=a$ (כלומר בקטע פתוח $(a,a+\delta)$), נאמר שמספר ממשי L הוא הגבול הימני של $f(x)$ כאשר x שואף ל-a^+ (מצד ימין), אם לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\ni(a,a+\delta)$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

<u>רציפות של פונקציה – הגדרה</u>- תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=x_0$, נאמר ש-$f(x)$ רציפה בנקודה $x=x_0$ אם מתקיימים התנאים הבאים:
1. קיים הגבול בנקודה $x=x_0$.
2. ערך הגבול בנקודה $x=x_0$ שווה לערך הפונקציה בנקודה $x=x_0$ ($f(x_0)$).

<u>רציפות חד צדדית – הגדרה</u>- תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בנקודה $x=x_0$, נאמר ש-$f(x)$ רציפה מימין ל-x_0 אם מתקיימים התנאים הבאים:
1. קיים הגבול הימני בנקודה $x=x_0$.
2. ערך הגבול הימני בנקודה $x=x_0$ שווה לערך הפונקציה בנקודה $x=x_0$ ($f(x_0)$).

<u>סוגי נקודות אי רציפות:</u>

1. אי רציפות סליקה – הגדרה- תהי f(x) פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=x_0$, נאמר ש-x_0 היא נקודת אי רציפות סליקה אם:
   א) קיים הגבול בנקודה $x=x_0$.
   ב) ערך הגבול בנקודה $x=x_0$ לא שווה לערך הפונקציה בנקודה $x=x_0$, או ש-f(x) לא מוגדרת בנקודה $x=x_0$.
2. אי רציפות ממין ראשון (קפיצה) – הגדרה- תהי f(x) פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=x_0$, נאמר ש-x_0 היא נקודת אי רציפות ממין ראשון אם הגבולות החד צדדיים בנקודה $x=x_0$ קיימים וסופיים, אבל לא שווים.
3. אי רציפות ממין שני (עיקרית) – הגדרה- תהי f(x) פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=x_0$, נאמר ש-x_0 היא נקודת אי רציפות ממין שני אם לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים בנקודה $x=x_0$ לא קיים (כלומר, לא סופי).

<u>משפטים:</u>

1. פונקציה היא הפיכה אם"ם היא חח"ע ועל.
2. $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)=A$, $\lim_{x\to a}\left(g(x)\right)=B$, c קבוע ממשי כלשהו
   - $\lim(c\cdot f(x))=c\cdot A$
   - $\lim(f(x)+g(x))=A+B$
   - $\lim(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$
   - $\lim(f(x)/g(x))=A/B$ ($B\neq 0$, וקיימת סביבה כלשהי של a כך ש $g(x)\neq 0$)
3. משפט הסנוויץ'- f(x), g(x), h(x) פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה x=a. נניח כי לכל x בסביבה זו מתקיים $h(x)\geq f(x)\geq g(x)$. אם קיימים הגבולות $\lim(h(x))=\lim(g(x))=L$, אז $\lim(f(x))=L$.
4. אם f(x) חסומה בסביבת הנקודה a, והגבול של g(x) הוא 0 כש- $x\to a$ אז:
   $\lim(f(x)\cdot g(x))=0$
5. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=1$ (זה עובד רק ברדיאנים)
6. אם f(x) פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה x=a, וקיים הגבול $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)=L$, אז קיימת סביבה של a אשר בה f(x) חסומה.

7. אם $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, וקיים הגבול $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)=L$
כך ש- $L\neq 0$, אז:
- $L>0$ $\Leftarrow$ בסביבה הזאת $f(x)>0$ לכל x.
- $L<0$ $\Leftarrow$ בסביבה הזאת $f(x)<0$ לכל x.

8. לפונקציה $f(x)$ קיים גבול בנקודה $x=a$ אם ורק אם קיימים ושווים שני הגבולות החד צדדיים ב-$x=a$.
9. כל פונקציה אלמנטרית (כלומר, פונקציה המתקבלת מפעולות הרכבה, כפל, חילוק, חיבור וחיסור על הפונקציות הבסיסיות: $f(x)=c$, $f(x)=x$, $f(x)=a^x$ $(a>0)$, $f(x)=\sin x$) היא רציפה בתחום ההגדרה הטבעי שלה.
10. $f(x)$, $g(x)$ – פונקציות רציפות ב-x_0, c קבוע כלשהו
- $c\cdot f(x)$ – פונקציה רציפה ב-x_0
- $f(x)+g(x)$ – פונקציה רציפה ב-x_0
- $f(x)\cdot g(x)$ – פונקציה רציפה ב-x_0
- $g(x_0)\neq 0$, $f(x)/g(x)$ – פונקציה רציפה ב-x_0

11. $f(x)$ רציפה ב-x_0 אם ורק אם היא רציפה מימין ומשמאל ב-x_0.
12. $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אם $f(a)\cdot f(b)<0$, אז קיימת לפחות נקודה אחת $a<c<b$, כך ש-$f(c)=0$.
13. $f: [a,b]\to[a,b]$ היא פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. קיימת לפחות נקודה אחת $a<c<b$, כך ש- $f(c)=c$ (נקודת שבת).
14. משפט ערך הביניים של Cauchy- $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$, y_0 הוא מספר ממשי בין $f(a)$ ל-$f(b)$. אז קיימת לפחות נקודה אחת $a<c<b$, כך ש- $f(c)=y_0$.
15. משפט Weierstrass- אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז $f(x)$ חסומה, והיא מקבלת מקסימום ומינימום בקטע הזה.

נגזרות

<u>הגדרה:</u> $\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ או $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

<u>כללים בסיסיים:</u>

$$\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot f'(x)$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},\quad g(x)\neq 0$$

כלל השרשרת: $h'(t_0)=\left[f\left(g(x)\right)\right]'=f'(x_0)\cdot g'(t_0)$ או: $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

<u>נגזרות בסיסיות:</u>

$$c'=0$$

$$x'=1$$

$$(ax)'=a$$

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

$$\left(\sin(x)\right)'=\cos(x)$$

$$\left(\cos(x)\right)'=-\sin(x)$$

$$\tan(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\cot(x)=-\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\ln(x)=\frac{1}{x}$$

$$(a^x)'=a^x\ln(a)$$

$$(e^x)'=e^x$$

$$\left(\arcsin(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\arccos(x)\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\arctan(x)\right)'=\frac{1}{1+x^2}$$

* הנגזרת $f'(x_0)$ היא שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x_0.

לכן, משוואת הישר המשיק לגרף היא: $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

<u>משפטים</u>:

1. אם $f(x)$ גזירה בנק' x_0, אזי היא רציפה שם. מסקנה: אם $f(x)$ אינה רציפה ב-x_0, אזי היא אינה גזירה שם.

2. משפט Fermat- תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע פתוח (a,b), וגזירה בנקודה פנימית $x_0 \in (a,b)$. אם $f(x)$ מקבלת בנקודה x_0 את ערכה הגדול ביותר או הקטן ביותר ב-(a,b), אז $f'(x_0)=0$.

3. משפט Rolle- תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע סגור $[a,b]$, ומקיימת את התנאים הבאים:
   - $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.
   - $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b).
   - $f(a)=f(b)$

אז קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש- $f'(c)=0$.

4. משפט ערך הביניים של Lagrange- תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע סגור $[a,b]$, ומקיימת את התנאים הבאים:
   - $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.
   - $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b).

אז קיימת נקודה $c \in (a,b)$ עבורה $f'(c)=[f(b)-f(a)]/(b-a)$.

5. משפט ערך הביניים המוכלל של Cauchy- תהיינה $f(x)$, $g(x)$ מוגדרות בקטע סגור $[a,b]$, ומקיימת את התנאים הבאים:
   - $f(x)$, $g(x)$ רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
   - $f(x)$, $g(x)$ גזירות בקטע הפתוח (a,b).

נניח ש- $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

אז קיימת נקודה $a<c<b$ עבורה $f'(c)/g'(c)=[f(b)-f(a)]/[g(b)-g(a)]$.

6. תחומי עלייה וירידה – משפט- תהי $f(x)$ גזירה בקטע פתוח (a,b), אז:
   - $f(x)$ מונוטונית עולה בקטע (a,b) $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ לכל (a,b)
   - $f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע (a,b) $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ לכל (a,b)

(במקרה שהפונקציה עולה/יורדת ממש רק הכיוון [$\Rightarrow$ $f'(x)>0$] עובד).

7. כלל לופיטל- מקרה של "$\frac{0}{0}$" :

f(x), g(x) גזירות בסביבת הנקודה x=a, פרט, אולי, ל-a עצמה, ומקיימת את התנאים הבאים:

- $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)=\lim_{x\to a}\left(g(x)\right)=0$
- קיים $\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

אז הגבול $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ קיים ו- $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

אנלוגיות:

המשפט נכון גם כאשר $x\to a^+$ או $x\to a^-$.

המשפט נכון גם כאשר $x\to\infty$ או $x\to-\infty$.

f(x), g(x) גזירות ב-(a,∞), ומקיימת את אותם התנאים כאשר $x\to\infty$

אז $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

מקרה של "$\frac{\infty}{\infty}$":

f(x), g(x) גזירות בסביבת x=a, פרט, אולי, ל-a עצמה, ומקיימת את התנאים הבאים:

- $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)=\lim_{x\to a}\left(g(x)\right)=0$
- קיים $\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$
- $g'(x)\neq 0$ לכל $x\neq a$

אז $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

אנלוגיות:

המשפט נכון גם כאשר $x\to a^+$ או $x\to a^-$.

המשפט נכון גם כאשר $x\to\infty$ או $x\to-\infty$.

8. משפט טיילור:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\left(x-a\right)+\frac{f''(a)}{2!}\left(x-a\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\left(x-a\right)^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1}$$

טורי מקלורן ידועים:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

$$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

$$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

$$\left(1+x\right)^m=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)}{k!}x^k$$

אינטגרלים לא מסויימים

<u>אינטגרלים מיידיים:</u>

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \sin(y(x))y'(x)dx = -\cos(y(x)) + c$$

$$\int \cos(y(x))y'(x)dx = \sin(y(x))$$

$$\int \frac{y'(x)dx}{y(x)} = \ln|y(x)| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{y'(x)}{\sin^2(y(x))}dx = -\cot(y(x)) + c$$

$$\int \frac{y'(x)}{\cos^2(y(x))}dx = \tan(y(x)) + c$$

$$\int \frac{y'(x)}{a^2 + y^2(x)}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{y(x)}{a}) + c$$

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{a^2 - y^2(x)}}dx = \arcsin(\frac{y(x)}{a}) + c$$

$$\int a^{y(x)}y'(x)dx = \frac{a^{y(x)}}{\ln(a)} + c$$

<u>כללים בסיסיים:</u>

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

$$\int f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)dx = f\left(g(x)\right) + c$$

אינטגרלים מסויימים

<u>סכום רימן:</u> $\sigma_T(c_1,c_2,\ldots,c_n)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$

נותן קירוב לשטח הסגור בין גרף הפונקציה לציר ה-x, בקטע [a,b], כאשר $n\to\infty$.

$T: a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ היא חלוקה של הקטע [a,b].

$\Delta x_i=$אורך הקטע $\left[x_{i-1},x_i\right]=x_i-x_{i-1}$, c_i נקודות שרירותיות כך ש $c_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$

$\Delta(T)=\max\left\{\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n\right\}$ הוא פרמטר החלוקה.

<u>פונקציה אינטגרבילית – הגדרה:</u>

פונקציה נקראת אינטגרבילית בקטע סגור [a,b] אם קיים הגבול

$$I=\lim_{\Delta(T)\to 0}\sigma_T(c_1,c_2,\ldots,c_n)=\lim_{\Delta(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$$

(אם הוא בלתי תלוי בבחירת T ו- $\{c_i\}$, כל עוד פרמטר החלוקה שואף ל-0)

לכל $\varepsilon>0$ קיים $n\in\mathbb{N}$, חלוקה T של [a,b], עם $\Delta(T)<\delta$, ונקודות ביניים $\{c_i\}$

כך ש $\left|I-\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i\right|<\varepsilon$

<u>משפטים:</u>

1. פונקציה רציפה בקטע [a,b] היא אינטגרבילית, ויותר מזה:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

במקרה של פונקציה קבועה: $\int_a^b c\ dx=c(b-a)$

2. תכונות של פונקציה אינטגרבילית:

- פונקציה אינטגרבילית ב-[a,b] בהכרח חסומה ב-[a,b] (לא עובד הפוך).
- פונקציה רציפה למקוטעין היא אינטגרבילית. בפרט, כל פונקציה אלמנטרית היא אינטגרבילית בקטע סגור בו היא מוגדרת.
- $\int_a^a f(x)dx=0$
- $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

- $\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx$

  $\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

3. תהי f(x) פונק' אינטגרבילית ב-[a,b], נניח ש- $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$ אז

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

4. אם $f(x)\le g(x)$ שתי פונקציות אינטגרביליות אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

5. משפט ערך הביניים האינטגרלי: אם f(x) רציפה ב-[a,b], אז קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

6. המשפט היסודי של החדו"א: f(x) אינטגרבילית ב-[a,b], אז f(x) אינטגרבילית ב-[a,t]. $c\in[a,b]$ נקודה כלשהי, אפשר להגדיר פונקציה על [a,b],

$F(x)=\int_c^x f(t)dt \quad F:[a,b]\to\mathbb{R}$, וזו הפונקציה הקדומה של f(x) ב-[a,b].

נוסחה: $\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)' = f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$

7. משפט ניוטון-לייבניץ: תהי f(x) פונק' רציפה ב-[a,b], ותהי F(x) הפונקציה הקדומה של f(x), אז: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ סימון לאגף הימיני: $F(x)\Big|_a^b$

8. תהיינה f(x) ו-g(x) פונקציות אינטגרביליות ב-[a,b], ולכל x בקטע מתקיים $m\le f(x)\le M$, ו- $g(x)\ge 0$, אז $m\cdot\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b\left(f(x)\cdot g(x)\right)dx\le M\cdot\int_a^b g(x)dx$

<u>אינטגרלים מוכללים:</u>

אם f(x) פונק' רציפה ב- $[a,\infty)/(-\infty,a]/(-\infty,\infty)$

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^\infty f(x)dx$ (הגבול קיים **וסופי** $\Leftarrow$ האינטגרל מתכנס), כנ"ל ל- $-\infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

אינטגרל של פונקציה לא חסומה:

נניח ש-f(x) מוגדרת ב-[a,b), ולא חסומה ב-b, ונניח ש-f(x) אינטגרבילית בכל קטע מהצורה [a,b-ε] (ε>0 קטן). האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס, אם הגבול $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ קיים וסופי. בצורה דומה ניתן להגדיר $\int_a^b f(x)dx$ עבור פונק' מוגדרת ב-(a,b]:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

אם f(x) לא חסומה בנקודה פנימית c אז $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס אם קיים $\int_c^b f(x)dx$ וגם $\int_a^c f(x)dx$, ואז: $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$.

<u>מבחני השוואה:</u>

אינטגרלים ידועים: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס עבור $\alpha > 1$, מתבדר עבור $\alpha \le 1$

$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{du}{u^p}$ מתכנס עבור $p > 1$, מתבדר עבור $p \le 1$

1. אם f(x) ו-g(x) שתי פונקציות לא שליליות ב- $[a,\infty)$ ואינטגרביליות ב-$[a,b]$, ומתקיים $f(x) \le g(x)$, אז:

- $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ גם מתכנס.
- $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר $\Leftarrow$ $\int_a^\infty g(x)dx$ גם מתבדר.

2. מבחן המנה: אם f(x) ו-g(x) שתי פונקציות לא שליליות, וקיים הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$

- $0 < L < \infty \Leftarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ ו- $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנסים ומתבדרים יחד.
- $L = 0 \Leftarrow$ אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס, $\int_a^\infty f(x)dx$ גם מתכנס.
- $L = \infty \Leftarrow$ אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס, $\int_a^\infty g(x)dx$ גם מתכנס.

3. תהי f(x) אינטגרבילית בכל [a,b], כאשר a נקודה קבועה. אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט (=מתכנס), אחרת, אומרים שהוא מתכנס בתנאי.
(לא עובד הפוך)

4. מבחן Abel: f(x) ו-g(x) אינטגרביליות. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס ו-g(x) מונוטונית וחסומה אז $\int_a^\infty \left(f(x)\cdot g(x)\right)dx$ מתכנס.

5. מבחן דיריכלה: f(x) ו-g(x) אינטגרביליות. אם קיים M, כך ש $b \in [a,\infty)$
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M$, g(x) מונוטונית, ו-$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, אז $\int_a^\infty \left(f(x)\cdot g(x)\right)dx$ מתכנס.

טורים

הגדרה:

$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. ניתן להגדיר את הסכום החלקי ה-n-י:

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\ldots+a_n$. נקבל סדרה של הסכומים החלקים $\left\{S_n\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$a_1\ ,\ a_1+a_2\ ,\ a_1+a_2+a_3,\ \ldots$ שהיא סדרה של מספרים ממשיים. אם קיים הגבול (במובן הצר) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ל-S. סימון: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$.

סוגי טורים:

1. טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n>0$ החל מ-n מסויים.

2. טור לייבניץ (סימנים מתחלפים) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n$, $a_n>0$.

3. טור כללי.

4. טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot x^n$ עם רדיוס התכנסות R, כלומר, הטור מתכנס עבור $|x|<R$. (ייתכן $R=\infty$ או $R=0$). תחום ההתכנסות הוא $(-R,R)$, בקצוות יש לבדוק כל מקרה בנפרד.

משפטים:

1. קריטריון Cauchy: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אם"ם לכל ε>0 קיים N טבעי, כך שלכל n>N ולכל k טבעי מתקיים: $\left|S_{n+k}-S_n\right|<\varepsilon$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ שני טורים מתכנסים, c מספר ממשי. אז גם הטורים הבאים מתכנסים: $\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\pm b_n\right)$.

3. תנאי הכרחי להתכנסות של טור הוא $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

4. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט (=מתכנס).

5. טור לייבניץ מתכנס אם a_n מונוטונית יורדת ו- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

6. מציאת רדיוס התכנסות של טור חזקות: (Cauchy -ו D'Alembert)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{R} \;,\; \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{R}$$

7. שימוש לטורי חזקות: תהי f(x) מוגדרת וגזירה אינסוף פעמים ב- $\left(-R,R\right)$, אם קיים קבוע M>0 כך ש- $\left|f^{(k)}(0)\right| < M$ לכל k, אז $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k$

(מבוסס על טורי טיילור, כאשר השארית שואפת ל-0 כש-n שואף לאינסוף)

<u>מבחני השוואה:</u>

טורים ידועים: הטור ההנדסי $\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot q^n$ מתכנס עבור $\left|q\right| < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\left(\ln n\right)^{\beta}}$ עבור $\alpha > 1$, מתכנס לכל β. עבור $\alpha < 1$, מתבדר לכל β

עבור $\alpha = 1$, מתכנס לכל $\beta > 1$ מתבדר לכל $\beta \le 1$

עבור טורים חיוביים:

1. אם החל ממקום מסויים $a_n \le b_n$ אז:

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גם מתכנס.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גם מתבדר.

2. אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = L$ $\left(b_n \ne 0\right)$ אז:

- $0 < L < \infty \Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.
- $L = 0 \Leftarrow$ אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גם מתכנס.
- $L = \infty \Leftarrow$ אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גם מתכנס.

3. אם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ אז:
   - $0 \le L < 1 \Leftarrow$ הטור מתכנס.
   - $L > 1 \Leftarrow$ הטור מתבדר.
   - $L = 1 \Leftarrow$ אין לדעת.
4. מבחן השורש: אם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ אז:
   - $0 \le L < 1 \Leftarrow$ הטור מתכנס.
   - $L > 1 \Leftarrow$ הטור מתבדר.
   - $L = 1 \Leftarrow$ אין לדעת.
5. מבחן האינטגרל: a_n מונוטונית יורדת, f(x) מוגדרת, רציפה, ומונוטונית יורדת ב- $[1,\infty)$, עבור $f(n)=a_n$ האינטגרל $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ והטור $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.
6. אם $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n=\infty$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ מתבדר.
7. אם $\sum\limits_{n=1}^\infty (a_n)^2$ מתבדר, אז גם $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ מתבדר.