Théorie des distributions et échantillonage
Cas en une dimension

-

Florian Langlois

Année universitaire 2022-2023

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions tests

La théorie des distributions que nous allons aborder a été introduite par le mathématicien français Laurent Schwartz, ce qui lui vaudra en 1950 la médaille Fields. L'un des intérêts de cette théorie, et l'angle par lequel nous allons aborder la notion, est qu'elle permet de généraliser la notion usuelle de fonctions numériques de façon à pouvoir dériver des fonctions qui habituellement ne sont pas dérivables (par exemple la valeur absolue, ou l'indicatrice de $\mathbb{R}_+$). Ce polycopié ne traitera que des distributions en une dimension, mais la généralisation aux dimensions supérieures se fait facilement.

1 Motivations par la physique

Nous pouvons motiver par les sciences physiques l'envie de dériver des fonctions non dérivables. Bien qu'il n'est pas nécessaire de lire ce passage pour la suite, celui-ci peut aider à la compréhension : la théorie des distributions tire son origine de l'envie de formaliser et justifier des affirmations physiques où l'on se permet justement à faire ces choses-là.

En cours d'EDP, vous avez vu ou verrez l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t u(t;x) + \mathbf{v} \cdot \nabla_x u(t;x) & \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^d \\ u(0;x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

où **v** est un vecteur non nul et constant (tant en t qu'en x) donné, et u_0 une fonction donnée qui représente la situation initiale puisque $t = 0$. Cette équation peut par exemple représenter l'écoulement d'un fluide à vitesse **v**, par exemple un polluant se déversant dans une rivière, $u(t;x)$ étant la quantité de polluant au temps t et à la position x. Si jamais u_0 est de classe $\mathscr{C}^1$, alors on peut montrer par analyse-synthèse qu'on a

$$u(t;x) = u_0(x - t\mathbf{v}) \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

Cependant quelque chose saute alors aux yeux : quand bien même nous n'aurions pas initialement supposé u_0 de classe $\mathscr{C}^1$, le résultat final obtenu aurait quand même du sens. Au contraire, l'équation de transport fait intervenir la différentiabilité de u et donc de u_0 et n'a donc pas de sens dans ce cas-là. Pour autant, ne peut-on pas définir une sorte de dérivée généralisée qui permettrait de donner du sens à l'équation de transport dans ce cas et permettrait de retrouver alors le résultat final ? La théorie des distributions va répondre oui !

Nous verrons que par exemple nous pourrons donner du sens à l'équation de transport dès que $u_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est localement intégrable, c'est-à-dire intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}^d$. Un autre cas intéressant est celui d'une distribution initiale ponctuelle : par exemple un grain de sable lâché dans l'eau, que l'on pourrait par exemple formaliser par δ_0 la mesure de Dirac en 0 (c'est-à-dire que le grain de sable est précisément localisé en $x = 0$). Il ne s'agit là même plus d'une fonction $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$. Pourtant la théorie des distributions permettra quand même de donner du sens à l'équation de transport dans ce cas-là ! On trouvera alors

$$u(t) = \delta_{t\mathbf{v}} \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+$$

ce qui correspond bien à l'intuition : le grain de sable se déplace dans le cours d'eau en se retrouvant à la position $t\mathbf{v}$ au temps t.

2 Fonctions tests

Quand on souhaite généraliser une notion en mathématiques, une façon parfois fructueuse est de partir d'une propriété que vérifie la notion en question, et de se servir de cette propriété dans un cadre plus général en tant que définition. Plaçons-nous sur l'intervalle $[2;5]$ à titre d'exemple et considérons $f : [2;5] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle. Pour toute autre fonction $\varphi : [2;5] \longrightarrow \mathbb{R}$ elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$, la formule d'intégration par partie nous dit que

$$\int_2^5 f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)\varphi(x)\Big]_2^5 - \int_2^5 f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

Supposons à présent que φ s'annule à la fois en 2, et en 5. Le terme $\Big[f(x)\varphi(x)\Big]_2^5$ va alors disparaître, et il ne nous restera plus que l'égalité

$$\int_2^5 f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_2^5 f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

À y regarder de plus près, le terme de gauche ne fait pas intervenir la dérivée de f : que f soit dérivable ou non n'empêche pas le fait de pouvoir définir le terme de gauche. Supposons à présent que f n'est pas nécessairement dérivable : si jamais il existe une fonction $h : [2;5] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\int_2^5 f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_2^5 h(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

et ce pour toute fonction dérivable φ qui s'annule en 2 et en 5, alors nous avons là avec h un candidat pour être une **dérivée généralisée** de f.

Dans la suite du cours, nous allons définir des objets qui peuvent sembler complexes au premier abord, et demander des restrictions à nos objets qui peuvent sembler inutiles. Tout cela a, vous vous en doutez, une raison d'être, la principale raison étant le confort de calculs, mais aussi certaines notions qui ne fonctionnent bien que quand ces conditions sont réunies. Nous tenterons toutefois de les justifier dans la mesure du possible.

Bien évidemment, nous n'allons pas faire tout le cours sur l'intervalle $[2;5]$, qui n'a été choisit qu'à titre d'exemple. Dans toute la suite, nous nous placerons sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}$: voilà un exemple de condition qui peut sembler arbitraire mais qui nous permettra de faire d'effectuer nos démarches confortablement ; il n'est par exemple pas aberrant de vouloir dériver des fonctions sur des ensembles ouverts !

Pour faire disparaître les crochets dans l'intégration par partie, nous avons demandé à φ de s'annuler aux bornes de l'intervalle. Il est donc naturel de s'intéresser plus généralement aux points où une fonction s'annule ou ne s'annule pas.

Définition 1 (Support d'une fonction)

Soit $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
On appelle **support** de φ l'ensemble $\mathrm{supp}(\varphi) := \overline{\left\{x \in \Omega \,\middle|\, \varphi(x) \neq 0\right\}}$.

Attention, on parle là de l'adhérence **dans** Ω.

Remarque :
Pour rappel, il n'y a pas de raison que l'adhérence dans Ω coïncide avec l'adhérence dans $\mathbb{R}$.
Prenons par exemple $\Omega =]-1;1[$ et $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \Omega, \varphi(x) = 1 - x^2$.
Alors $\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\} = \Omega =]-1;1[$. L'adhérence de $]-1;1[$ dans lui-même est encore $]-1;1[$, alors que dans $\mathbb{R}$ cela donne $[-1;1]$! Le support de φ n'est donc même pas un fermé de $\mathbb{R}$!

En prenant l'adhérence de l'ensemble des points où φ ne s'annule pas, on fait du support le plus petit fermé de Ω contenant tous les points où φ ne s'annule pas. De manière équivalente, $\Omega \backslash \mathrm{supp}(\varphi)$ est le plus grand ouvert de Ω tel que φ s'annule sur cet ouvert : si φ s'annule sur un ouvert U de Ω, alors $U \subseteq \Omega \backslash \mathrm{supp}(\varphi)$.

Observons à présent le lien entre le support et les opérations usuelles.

Proposition 1 (Support et opérations)

1. Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On a $\mathrm{supp}(f+g) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)$.
2. Soient $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a $\mathrm{supp}(\lambda f) = \mathrm{supp}(f)$.
3. Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On a $\mathrm{supp}(fg) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g)$.
4. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{supp}\big[f(\bullet - a)\big] = a + \mathrm{supp}(f)$.
5. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. On a $\mathrm{supp}\big[f\big(\frac{\bullet}{a}\big)\big] = a \cdot \mathrm{supp}(f)$.
6. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convolables. On a $\mathrm{supp}(f * g) \subseteq \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$.
7. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On a $\mathrm{supp}(f') \subseteq \mathrm{supp}(f)$.

Démonstration

1.

Soit $x \in \Omega$ tel que $f(x) + g(x) \neq 0$.

On a donc $f(x) \neq 0$ ou $g(x) \neq 0$.

Donc $x \in \mathrm{supp}(f)$ ou $x \in \mathrm{supp}(g)$.

Donc $x \in \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)$.

Ainsi, $\{x \in \Omega \mid f(x) + g(x) \neq 0\} \subseteq \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)$.
Or $\mathrm{supp}(f)$ et $\mathrm{supp}(g)$ sont fermés donc $\mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)$ est fermé car union finie de fermés.
Donc $\boxed{\mathrm{supp}(f+g) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)}$ par minimalité de l'adhérence.

2. Pour tout $x \in \Omega$, on a $\lambda f(x) \neq 0 \iff f(x) \neq 0$.
Donc $\{x \in \Omega \mid \lambda f(x) \neq 0\} = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$.
Donc $\boxed{\mathrm{supp}(\lambda f) = \mathrm{supp}(f)}$.

3.

Soit $x \in \Omega$ tel que $f(x)g(x) \neq 0$.

On a donc $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$.

Donc $x \in \operatorname{supp}(f)$ et $x \in \operatorname{supp}(g)$.

Donc $x \in \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)$.

Donc $\{x \in \Omega \mid f(x)g(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)$.

Or $\operatorname{supp}(f)$ et $\operatorname{supp}(g)$ sont fermés donc $\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)$ est fermé car intersection de fermés.

Donc $\boxed{\operatorname{supp}(fg) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)}$ par minimalité de l'adhérence.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in \{y \in \mathbb{R} \mid f(y-a) \neq 0\} \iff f(x-a) \neq 0$
$\iff x - a \in \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\} \iff x \in a + \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\}$.

On a donc $\{y \in \mathbb{R} \mid f(y-a) \neq 0\} = a + \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\}$.

Donc $\operatorname{supp}\big[f(\bullet - a)\big] = \overline{a + \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\}}$.

Or l'application $\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & a+z \end{pmatrix}$ est un homéomorphisme.

Donc $\overline{a + \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\}} = a + \overline{\{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\}} = a + \operatorname{supp}(f)$.

Donc $\boxed{\operatorname{supp}\big[f(\bullet - a)\big] = a + \operatorname{supp}(f)}$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in \{y \in \mathbb{R} \mid f\big(\frac{y}{a}\big) \neq 0\} \iff f\big(\frac{x}{a}\big) \neq 0$
$\iff \frac{x}{a} \in \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\} \iff x \in a \cdot \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\}$.

On a donc $\{y \in \mathbb{R} \mid f\big(\frac{y}{a}\big) \neq 0\} = a \cdot \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\}$.

Donc $\operatorname{supp}\big[f\big(\frac{\bullet}{a}\big)\big] = \overline{a \cdot \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\}}$.

Or l'application $\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & az \end{pmatrix}$ est un homéomorphisme.

Donc $\overline{a \cdot \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\}} = a \cdot \overline{\{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \neq 0\}} = a \cdot \operatorname{supp}(f)$.

Donc $\boxed{\operatorname{supp}\big[f\big(\frac{\bullet}{a}\big)\big] = a \cdot \operatorname{supp}(f)}$.

6.

Soit $x \notin \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}$.

On a alors $\big[x - \operatorname{supp}(f)\big] \cap \operatorname{supp}(g) = \varnothing$.

En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $y \in \big[x - \operatorname{supp}(f)\big] \cap \operatorname{supp}(g)$.

On a donc $y \in \operatorname{supp}(g)$ et il existe $z \in \operatorname{supp}(f)$ tel que $y = x - z$.

Donc $x = y + z \in \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$.

C'est absurde car $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g) \subseteq \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}$ et $x \notin \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}$.

Or $x - \operatorname{supp}(f) \underset{5.}{=} x + \operatorname{supp}\big[f\big(\frac{\bullet}{-1}\big)\big] \underset{4.}{=} \operatorname{supp}\big[f\big(\frac{\bullet - x}{-1}\big)\big] = \operatorname{supp}\big[f(x - \bullet)\big]$.

Donc $\mathrm{supp}\big[f(x-\bullet)\big] \cap \mathrm{supp}(g) = \varnothing$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}, f(x-y)g(y) = 0$.

Donc $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = 0$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \notin \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$ alors $(f * g)(x) = 0$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $(f * g)(x) \neq 0$ alors $x \in \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$ par contraposition.

Donc $\big\{x \in \mathbb{R} \;\big|\; (f * g)(x) \neq 0\big\} \subseteq \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$.

Donc $\boxed{\mathrm{supp}(f * g) \subseteq \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}}$ par minimalité de l'adhérence.

7.

Soit U un ouvert de Ω tel que $U \subseteq \Omega \backslash \mathrm{supp}(f)$.

Pour tout $x \in U$, on a donc $x \notin \mathrm{supp}(f)$ et donc $f(x) = 0$.

En particulier, f est constante sur l'ouvert U donc $\forall x \in U, f'(x) = 0$.

Comme f' s'annule sur l'ouvert U, on a donc $U \subseteq \Omega \backslash \mathrm{supp}(f')$.

En particulier, en prenant $U := \Omega \backslash \mathrm{supp}(f)$, on obtient $\Omega \backslash \mathrm{supp}(f) \subseteq \Omega \backslash \mathrm{supp}(f')$.

Donc $\boxed{\mathrm{supp}(f') \subseteq \mathrm{supp}(f)}$.

CQFD.

Pour la définition qui va suivre, que nous allons justifier juste après, il est bon de se rappeler que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement ses parties qui sont fermées et bornées. Un des intérêts (parmi tant d'autres !) de la notion de compact est que contrairement à la notion de fermé (et donc d'adhérence), cela ne dépend pas du sur-ensemble dans lequel on se place. Le fait d'être un compact de Ω fait immédiatement de nous un compact de $\mathbb{R}$ (et la réciproque est vraie, tant qu'on est inclus dans Ω) : la notion de compact est **intrinsèque**.

Définition 2 (Fonction à support compact)

Soit $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que φ est **à support compact** si et seulement si $\mathrm{supp}(\varphi)$ est compact.

En demandant aux supports des fonctions φ d'être compacts alors que l'espace de départ est un ouvert, nous obligerons de telles fonctions à s'annuler aux bords de celui-ci. Par exemple si $\Omega =]2;5[$ et si φ est à support compact, alors $\mathrm{supp}(\varphi)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$. En particulier, il existe $a, b \in]2;5[$ tels que $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [a;b]$. Il existe donc $c \in]2;a[$ tel que $c \notin \mathrm{supp}(\varphi)$, et donc $\varphi(c) = 0$, et plus généralement $\forall x \in]2;a[, \varphi(x) = 0$. Cela implique que si φ est continue, on a nécessairement $\varphi(a) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2} \varphi(x) = 0$, ce qui rempli bien le rôle que l'on voulait. Il en va de même pour b et 5.

Bien que les fonctions φ que nous avons manipulées jusque là n'étaient que dérivables, si nous voulons pouvoir dériver plus qu'une fois nos fonctions, nous allons devoir réitérer l'intégration par partie autant de fois que nos nécessaire. Autant s'armer dès à présent de ce qu'il faut en demandant aux fonctions en questions d'être indéfiniment dérivables, pour ne pas avoir à se poser de questions là-dessus.

Définition 3 (Fonctions tests)

On appelle **fonction test** sur Ω toute fonction $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et à support compact.
On notera $\mathscr{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions tests sur Ω.

Exemple :

Considérons la fonction $\varphi := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right)$.

Alors φ est une fonction test sur $\mathbb{R}$.

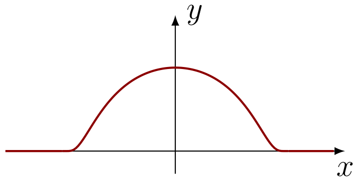

FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction φ

En effet, on peut montrer par récurrence que φ est bien $\mathscr{C}^\infty$. De plus, $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\} =]-1;1[$ donc $\text{supp}(\varphi) = \overline{]-1;1[} = [-1;1]$, qui est bien compact.

Proposition 2 (Espace vectoriel des fonctions tests)

1. L'ensemble des fonctions à support compact $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
   Plus précisément, pour $\varphi, \psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ à supports compacts, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
   i) $\varphi + \lambda\psi$ est à support compact.
   ii) $\varphi\psi$ est à support compact.

2. $\mathscr{D}(\Omega)$ est une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ à support compact.
   Plus précisément :
   i) $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi + \lambda\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$.
   ii) $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega), \varphi\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

3. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a $\varphi' \in \mathscr{D}(\Omega)$.
   Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi^{(n)} \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Démonstration

1. i) D'après la proposition 1 page 7, on a $\text{supp}(\varphi + \lambda\psi) \subseteq \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$.
Or $\text{supp}(\varphi + \lambda\psi)$ est un fermé de Ω par définition.

De plus, $\text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi) \subseteq \Omega$ par définition.

Donc $\text{supp}(\varphi + \lambda\psi)$ est un fermé de $\text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$.

Or $\text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$ est compact comme union finie de deux compacts.

Donc $\text{supp}(\varphi + \lambda\psi)$ est compact car partie fermée d'un compact.

Donc $\boxed{\varphi + \lambda\psi \text{ est à support compact}}$.

ii) D'après la proposition 1 page 7, on a $\text{supp}(\varphi\psi) \subseteq \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi) \subseteq \text{supp}(\varphi)$.

Or $\text{supp}(\varphi\psi)$ est un fermé de Ω par définition.

De plus, $\text{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$ par définition.

Donc $\text{supp}(\varphi\psi)$ est un fermé de $\text{supp}(\varphi)$.

Donc $\text{supp}(\varphi\psi)$ est compact car partie fermée d'un compact.

Donc $\boxed{\varphi\psi \text{ est à support compact}}$.

2. Cela vient de 1 et du fait que $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ est aussi une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

3. D'après la proposition 1 page 7, on a $\text{supp}(\varphi') \subseteq \text{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$.

Or par définition $\text{supp}(\varphi')$ est un fermé de Ω.

Donc $\text{supp}(\varphi')$ est un fermé de $\text{supp}(\varphi)$.

Or φ est à support compact par définition donc $\text{supp}(\varphi)$ est compact.

Donc $\text{supp}(\varphi')$ est compact car partie fermée d'un compact.

Donc φ' est à support compact, et finalement $\boxed{\varphi' \in \mathscr{D}(\Omega)}$.

Par récurrence, on obtient donc que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi^{(n)} \in \mathscr{D}(\Omega)$.

CQFD.

3 Une première tentative : la dérivée faible

Maintenant que nous avons les outils pour généraliser la dérivation, il faut nous demander quelles sont les fonctions f qui peuvent prétendre à potentiellement être dérivable en ce nouveau sens. Dans notre utilisation de l'intégration par partie, nous avons eu besoin d'intégrer f (plus précisément son produit par les fonctions φ'). Demander à f d'être intégrable sur Ω semble donc être le strict minimum, mais nous pouvons en fait demander un petit peu moins ! En effet nous l'avons dit, nous prendrons des fonctions φ (et donc φ') à support compact : en dehors de ce compact, intégrer un produit par φ' donne forcément 0. Tout ce que nous voulons, c'est que f soit intégrable sur n'importe quel compact, pas spécifiquement sur tout Ω !

Définition 4 (Fonction localement intégrable)

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est **localement intégrable** si et seulement si f est intégrable sur tout compact de Ω.
On note $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ localement intégrables.

Comme va nous le montrer la proposition qui suit, cela concerne tout de même plein de fonctions usuelles. Nous aurons donc la possibilité de généraliser la dérivation à beaucoup de fonctions.

Proposition 3 (Espaces Lp et fonction localement intégrable)

Soit $p \in [1; +\infty[$.
Alors $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Démonstration

Soit $f \in L^p(\Omega)$.

Soit K un compact de Ω.

Comme K est compact et $K \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}$, K est un compact de $\mathbb{R}$.

Donc K est en particulier borné, et donc K est de mesure finie.

On a donc $L^p(K) \subseteq L^1(K)$.

Comme $f \in L^p(\Omega)$, $|f|^p$ est intégrable sur Ω et donc sur K puisque $K \subseteq \Omega$.

On a donc $f_{|K} \in L^p(K)$, et donc $f_{|K} \in L^1(K)$.

Donc f est intégrable sur K.

Donc f est intégrable sur tout compact de Ω.

Donc $\boxed{f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)}$.

CQFD.

De plus, toute fonction continue est intégrable sur n'importe quel compact, si bien que les fonctions continues sont aussi localement intégrable.

Définition 5 (Fonction faiblement dérivable)

Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.
On dit que f est **faiblement dérivable** si et seulement s'il existe $h \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \int_\Omega f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_\Omega h(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

On dit alors que h est **une dérivée faible** de f.

Bien heureusement, au vu de ce que nous avons dit au tout début, si f est dérivable au sens usuel, alors d'après la formule d'intégration par partie, f' est aussi une dérivée au sens faible. Autrement dit, la notion de dérivée faible généralise la notion de dérivée au sens usuel.

A priori, dans la définition que nous avons donnée de dérivation faible, il se peut très bien qu'il y ait plusieurs dérivées faibles. Heureusement, ce n'est pas le cas, car nous allons prouver que deux dérivées faibles d'une même fonction sont nécessairement égales presque partout.
Entamons un début de preuve : prenons g et h deux dérivées faibles de f.
Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a alors

$$-\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

On obtient alors que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \big(g(x) - h(x)\big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

On aimerait bien pouvoir alors conclure que $g - h \underset{\text{pp}}{=} 0$ et donc $g \underset{\text{pp}}{=} h$.
À cette fin, introduisons la notation suivante.

Notations :
Pour tout $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, on note T_f l'application $\left(\begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \end{array}\right)$.

Quand nous aborderons enfin les distributions, nous verrons que l'application T_f jouera un rôle de premier plan. Pour l'heure, prouvons que $f \longmapsto T_f$ est linéaire et injective, ce qui nous permettra de conclure.

Proposition 4 (Propriétés de l'injection canonique)

1. Pour tout $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, l'application $T_f : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.
2. L'application $\Phi := \left(\begin{array}{ccc} L^1_{\text{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & \mathscr{D}(\Omega)^* \\ f & \longmapsto & T_f \end{array}\right)$ est linéaire et injective.

Démonstration

1. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.
   Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On a alors

$$T_f(\varphi+\lambda\psi) = \int_\Omega f(x)\big(\varphi(x)+\lambda\psi(x)\big)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega f(x)\psi(x)\mathrm{d}x = T_f(\varphi)+\lambda T_f(\psi)$$

Donc $\boxed{T_f \text{ est linéaire}}$.

2. Montrons que Φ est linéaire.

Soient $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

On a alors

$$\begin{aligned} T_{f+\lambda g}(\varphi) &= \int_\Omega \big(f(x) + \lambda g(x)\big)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= T_f(\varphi) + \lambda T_g(\varphi) = \big[T_f + \lambda T_g\big](\varphi) \end{aligned}$$

Donc $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), T_{f+\lambda g}(\varphi) = \big[T_f + \lambda T_g\big](\varphi)$.

Donc $T_{f+\lambda g} = T_f + \lambda T_g$ et donc $\Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda \Phi(g)$.

Donc $\boxed{\Phi \text{ est linéaire}}$.

Montrons que Φ est injective.

Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tel que $\Phi(f) = 0_{\mathscr{D}(\Omega)^*}$.

Ainsi, $T_f = 0_{\mathscr{D}(\Omega)^*}$, c'est-à-dire $\forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega), \displaystyle\int_\Omega f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Montrons que $f = 0_{L^1_{\text{loc}}(\Omega)}$.

Soit $x_0 \in \Omega$.

Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $[x_0 - 2r; x_0 + 2r] \subseteq \Omega$.

Posons alors $g := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]x_0 - 2r; x_0 + 2r[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right)$.

Comme g est nulle en dehors d'un intervalle borné et $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, on a $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subseteq]-r; r[$.

Soit $x \in]x_0 - r; x_0 + r[$.

Soit $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall y \in \Omega, \psi(y) := \varphi(x - y)$.

ψ est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Soit $y \in \Omega$ tel que $\psi(y) \neq 0$.

On a donc $\varphi(x - y) \neq 0$ donc $x - y \in \text{supp}(\varphi)$, donc $x - y \in]-r; r[$ donc $y \in]x - r; x + r[$. Or $x \in]x_0 - r; x_0 + r[$ donc $y \in]x_0 - 2r; x_0 + 2r[$.

Ainsi $\big\{y \in \Omega \;\big|\; \psi(y) \neq 0\big\} \subseteq]x_0 - 2r; x_0 + 2r[$.

On a donc $\text{supp}(\psi) \subseteq [x_0 - 2r; x_0 + 2r] \subseteq \Omega$.

En particulier $\text{supp}(\psi)$ est un fermé de $[x_0 - 2r; x_0 + 2r]$.

Donc $\text{supp}(\psi)$ est compact car partie fermée d'un compact.

Ainsi, $\text{supp}(\psi) \in \mathscr{D}(\Omega)$, avec $\text{supp}(\psi) \subseteq [x_0 - 2r; x_0 + 2r]$.

Donc $(g*\varphi)(x) = \displaystyle\int_\mathbb{R} g(y)\varphi(x - y)\,\mathrm{d}y = \int_{x_0-2r}^{x_0-2r} g(y)\varphi(x - y)\,\mathrm{d}y = \int_{x_0-2r}^{x_0+2r} f(y)\varphi(x - y)\,\mathrm{d}y$

$$= \int_{x_0-2r}^{x_0+2r} f(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega} f(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Donc $\forall x \in]x_0 - 2r; x_0 + 2r[$, $(g * \varphi)(x) = 0$.

Donc pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq]-r; r[$, $g * \varphi$ est nulle sur $]x_0 - 2r; x_0 + 2r[$.

Soit alors $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction test de $\mathbb{R}$, de support inclus dans $]-1; 1[$ et d'intégrale 1. (on peut par exemple prendre la fonction test de l'exemple, réduire légèrement son support par dilatation, puis diviser par son intégrale pour obtenir une telle fonction).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) := n\varphi(nx)$.

On a évidemment φ_n de classe $\mathscr{C}^\infty$.

D'après la proposition 1 page 7, on a $\operatorname{supp}(\varphi_n) = \frac{1}{n}\cdot\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \frac{1}{n}\cdot]-1; 1[=]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}[$.

En particulier $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$.

Or par définition $\operatorname{supp}(\varphi_n)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Donc $\operatorname{supp}(\varphi_n)$ est un fermé de $\left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$.

Comme $\left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$ est compact, $\operatorname{supp}(\varphi_n)$ est compact car partie fermée d'un compact.

Donc φ_n est à support compact et donc $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, de support inclus dans $\left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, de support inclus dans $\left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[$.

En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N, \operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq]-r; r[$.

Donc d'après ce qui précède, pour tout $n \geq N$, on a $g * \varphi_n$ nulle sur $]x_0 - 2r; x_0 + 2r[$.

Or par définition $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.

Donc comme $g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $g * \varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} g$.

Or sur $]x_0 - 2r; x_0 + 2r[$, la suite $(g * \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Donc g est nulle presque partout sur $]x_0 - 2r; x_0 + 2r[$.

Or g et f coïncident sur $]x_0 - 2r; x_0 + 2r[$.

Donc f est nulle presque partout sur $]x_0 - 2r; x_0 + 2r[$.

Donc pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ telle que f est nulle presque partout sur $]x_0 - 2r; x_0 + 2r[$.

Donc f est nulle presque partout sur Ω. En effet, soit $\mathcal{N} := \left\{x \in \Omega \;\middle|\; f(x) \neq 0\right\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $K_n := \left\{x \in [-n; n] \;\middle|\; d(x; \mathbb{R}\backslash\Omega) \geq \frac{1}{n}\right\}$.

$d(\bullet; \mathbb{R}\backslash\Omega) : [-n; n] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue donc K_n est une partie fermée de $[-n; n]$.

Comme $[-n; n]$ est compact, cela fait de K_n un compact également.

On a alors $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} K_n$.

$\boxed{\subseteq}$ Soit $x \in \Omega$.

Comme $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in [-n_1; n_1]$.

Comme Ω est ouvert, $\mathbb{R}\backslash\Omega$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Donc comme $x \notin \mathbb{R}\backslash\Omega$, on a $d(x; \mathbb{R}\backslash\Omega) > 0$.

Il existe donc $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(x;\mathbb{R}\backslash\Omega) \geq \frac{1}{n_2}$.

En posant $n := \max(n_1;n_2)$, on a donc $x \in K_n \subseteq \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}^*} K_m$.

$\boxed{\supseteq}$ Soit $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} K_n$.

Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in K_n$.

En particulier $d(x;\mathbb{R}\backslash\Omega) \geq \frac{1}{n} > 0$ donc $x \notin \mathbb{R}\backslash\Omega$ et donc $x \in \Omega$.

On a dit plus haut que pour tout $x \in \Omega$, il existe $r_x > 0$ tel que f est nulle presque partout sur $]x-r_x;x+r_x[\subseteq \Omega$.

On a donc $\Omega = \bigcup\limits_{x\in\Omega}]x-r_x;x+r_x[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $K_n \subseteq \Omega$, on a $K_n \subseteq \bigcup\limits_{x\in\Omega}]x-r_x;x+r_x[$.

Or K_n est compact.

Il existe donc $x_1;\ldots;x_{m_n} \in \Omega$ tels que $K_n \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m_n}]x_i-r_{x_i};x_i+r_{x_i}[$.

Comme $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} K_n$, on a donc $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup\limits_{i=1}^{m_n}]x_i-r_{x_i};x_i+r_{x_i}[$.

Comme $\mathcal{N} \subseteq \Omega$, on a donc $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup\limits_{i=1}^{m_n} \Big(\mathcal{N}\cap]x_i-r_{x_i};x_i+r_{x_i}[\Big)$.

Or on a dit que pour tout $x \in \Omega$, f est nulle presque partout sur $]x-r_x;x+r_x[$.

Donc pour tout $x \in \Omega$, $\mathcal{N}\cap]x-r_x;x+r_x[$ est de mesure nulle.

Donc $\mathcal{N}$ est de mesure nulle comme réunion dénombrable de parties de mesures nulles.

Donc f est nulle presque partout (sur Ω tout entier).

Donc $f = 0_{L^1_{\text{loc}}(\Omega)}$.

Donc si $\Phi(f) = T_f = 0_{\mathscr{D}(\Omega)^*}$, alors $f = 0_{L^1_{\text{loc}}(\Omega)}$.

Comme Φ est linéaire, cela implique que $\boxed{\Phi \text{ est injective}}$.

CQFD.

Cette lourde preuve nous a permis de donner pleinement du sens à la dérivée faible : si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est faiblement dérivable, on notera donc naturellement f' sa dérivée faible. Comme cela généralise la dérivée usuelle quand celle-ci existe, il n'y a donc pas de conflit de notation. On prendra cependant bien garde au fait que la dérivée faible est définie de manière unique mais seulement presque partout, c'est-à-dire que c'est avant tout une classe d'équivalence de fonctions !

Exemple :

Soit $f := \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{pmatrix}$ la fonction valeur absolue. Nous pouvons maintenant pleinement la dériver. Intuitivement, nous aimerions que la dérivée usuelle sur $\mathbb{R}^*_-$, à savoir -1, et la dérivée usuelle sur $\mathbb{R}^*_+$, à savoir 1, soient conservées. La question est alors de savoir quelle valeur mettre en 0. Cependant, si vous avez compris que la dérivée faible n'est uniquement définie que presque partout, vous vous rendez alors compte que la valeur en 0 n'a aucune espèce d'importance : toutes les valeurs possibles conviennent ! Ainsi, prenons par exemple

$$h := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}$$

et montrons que h est la dérivée faible de f, plus précisément un de ses représentants.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} |x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} |x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} -x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-x\varphi(x) \Big]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} -1\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \Big[x\varphi(x) \Big]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} 1\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\infty}^{0} -1\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{+\infty} 1\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x \text{ car } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \big(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x) \big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Donc h est bien (un représentant de) la dérivée faible de f !

Remarque :
Le fait que, pour déterminer la dérivée faible de f, nous ne faisons intervenir celle-ci que dans une intégrale implique que le résultat reste le même pour une autre fonction qui serait égale presque partout à f : deux fonctions faiblement dérivables qui sont égales presque partout admettent la même dérivée faible. Une conséquence de cela est la faible dérivabilité de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. En effet, celle-ci est égale presque partout à la fonction nulle. Or la fonction nulle est dérivable au sens usuel donc au sens faible !
Ainsi au sens de la dérivée faible on a $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}' = 0$, alors que celle-ci n'est dérivable nulle part au sens usuel.

Malheureusement, cela ne suffit pas à dériver toutes les fonctions localement intégrables.

Exemple :
Considérons $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et montrons que $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ n'admet pas dérivée faible. Pour cela, supposons par l'absurde qu'il existe $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\Big[\varphi(x)\Big]_{0}^{+\infty} \\ = \varphi(0) \text{ car } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ainsi, $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ vérifie que $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$.
En particulier pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}_+^*$, on a $0 \notin \operatorname{supp}(\varphi)$ donc $\varphi(0) = 0$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

En considérant alors g la restriction de h à $\mathbb{R}_+^*$, on obtient que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*), \int_{\mathbb{R}_+^*} g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

D'après la proposition 4 page 13, cela implique que g est nulle presque partout, et donc h est nulle presque partout sur $\mathbb{R}_+^*$. En raisonnant de même sur $\mathbb{R}_-^*$, on obtient que h est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$ tout entier. Oui, mais on a pourtant dit que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

ce qui voudrait dire que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

ce qui est absurde bien sûr.

Ainsi, il nous faut développer une version encore plus générale que juste la dérivée faible.

4 Une deuxième tentative : avec les mesures

Quand nous avons défini la notion de dérivée faible, il semblait naturel de demander que h soit une fonction localement intégrable. Cela semblait être le cadre minimal pour pouvoir tenter quoi que ce soit via l'approche de l'intégration par partie et des fonctions tests. Pourtant, nous nous sommes rendu compte que nous aimerions avoir

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

Malheureusement, comme nous l'avons expliqué, une telle fonction $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ n'existe pas. Cependant, l'expression $h(x)\mathrm{d}x$ dans l'intégrale du terme de gauche peut aussi se voir dans le cadre plus général des mesures : nous avons vu au semestre 1 que l'on pouvait multiplier une mesure (ici Lebesgue avec $\mathrm{d}x$) par une fonction (ici h) pour obtenir une autre mesure. Il ne semble donc pas déraisonnable de vouloir essayer de remplacer $h(x)\mathrm{d}x$ par une autre mesure $\mu(x)$. Cette approche s'avère fructueuse ! En effet, en prenant δ_0 la mesure de Dirac en 0, c'est-à-dire que pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, on a $\delta_0(A) = \mathbb{1}_A(0)$, on obtient précisément que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\delta_0(x) = \varphi(0)$$

Cela semble donc naturel de proposer alors que δ_0 soit la dérivée faible de $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, en un sens encore plus général de la dérivée faible qui autorise cette fois toutes les mesures. Comme la notion de mesure généralise déjà la notion d'intégration contre une fonction, il n'y a pas d'effort supplémentaire à fournir.

Malheureusement, cela ne suffit toujours pas ! En effet, si dans notre nouvelle théorie δ_0 est la dérivée d'une fonction, alors nous pourrions être amenés à vouloir dériver δ_0 elle-même, pour continuer le processus. Il n'existe pourtant pas de dérivée généralisée de δ_0, même au sens des mesures ! En effet, supposons par l'absurde qu'il existe une mesure μ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\,\mathrm{d}\delta_0(x) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

En particulier, on a donc

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \varphi'(0) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Soit alors $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ la fonction test de l'exemple. On peut voir que $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ et donc considérer $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) := \frac{1}{\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)}\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right)$, de sorte que $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\psi'(0) = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $\psi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \psi_n(x) := \frac{1}{n}\psi(nx)$, de sorte que $\psi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\psi_n'(0) = 1$. Comme ψ est à support compact, $\operatorname{supp}(\psi)$ est borné donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, nx \notin \operatorname{supp}(\psi)$, donc $\forall n \geq N, \psi(nx) = 0$ et donc $\forall n \geq N, \psi_n(x) = 0$. Ainsi, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \psi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or ψ est continue, donc est bornée sur son support car celui-ci est compact. De fait, la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dominée par une constante, qui est donc intégrable sur $\operatorname{supp}(\psi)$, et donc d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or, par définition de μ, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \psi_n'(0) = -\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Autrement dit, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = -1$$

ce qui est absurde. Ainsi, même cette deuxième généralisation s'avère insuffisante pour traiter tous les cas qui nous intéressent. C'est là qu'intervient la théorie des distributions, qui va s'avérer être le bon cadre pour pouvoir dériver.

Avant de poursuivre vers le monde merveilleux des distributions, on se propose un dernier outil qui sera très utile par la suite. Il s'agit d'une version régulière, lisse, de l'indicatrice d'une partie : la fonction plateau. En multipliant par une telle fonction, on pourra ainsi restreindre notre étude à la partie, tout en conservant le caractère lisse.

Proposition 5 (Fonction plateau)

Soit K un compact de Ω.
Alors il existe $\rho_K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

- ρ_K est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
- $\forall x \in K, \rho_K(x) = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\Omega, \rho_K(x) = 0$.

On dit alors que ρ_K est une **fonction plateau** pour K à support dans Ω.

Démonstration

Nous allons construire une succession d'applications, jusqu'à aboutir à la bonne.

• Premièrement, considérons la fonction test $\varphi := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right)$.

Posons alors $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \psi_1(x) := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors ψ_1 est, à une constante multiplicative près, une primitive de φ donc ψ_1 est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

De plus, $\forall x \in]-\infty; -1], \psi_1(x) = \dfrac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

Enfin, $\forall x \in [1; +\infty[, \psi_1(x) = \dfrac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

• À présent, posons $\psi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \psi_2(x) := \psi_1(2x+3)$.

ψ_2 est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Big(x \leq -2 \iff 2x+3 \leq -1\Big)$ et $\Big(x \geq -1 \iff 2x+3 \geq 1\Big)$.

Donc $\forall x \in]-\infty; -2], \psi_2(x) = 0$ et $\forall x \in [-1; +\infty[, \psi_2(x) = 1$.

• Posons ensuite $\psi_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \psi_3(x) := \psi_2(x)\psi_2(-x)$.

ψ_3 est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$.

De plus, si $x \in [-1; 1]$, alors $x \geq -1$ et $-x \geq -1$ donc $\psi_3(x) = \psi_2(x)\psi_2(-x) = 1 \times 1 = 1$.

De même, si $x \in \mathbb{R}\backslash]-2; 2[$, alors $x \leq -2$, auquel cas $\psi_2(x) = 0$, ou bien $-x \leq -2$, auquel cas $\psi_2(-x) = 0$. Dans les deux cas, on a $\psi_3(x) = \psi_2(x)\psi_2(-x) = 0$.

• Par définition, $K \subseteq \Omega$ et Ω est ouvert.

Soit $x \in K$.

Il existe donc $r_x > 0$ tel que $]x - 2r_x; x + 2r_x[\subseteq \Omega$.

Soit alors $\rho_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall y \in \mathbb{R}, \rho_x(y) := \psi_3\left(\dfrac{y-x}{r_x}\right)$.

ρ_x est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Pour tout $y \in]x - r_x; x + r_x[$, on a $\dfrac{y-x}{r_x} \in]-1; 1[$ donc $\rho_x(y) = 1$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}\backslash]x - 2r_x; x + 2r_x[$, on a $\dfrac{y-x}{r_x} \in \mathbb{R}\backslash]-2; 2[$ donc $\rho_x(y) = 0$.

Posons alors $U_x := \rho_x^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\right)$, qui est ouvert car ρ_x est continue.

On remarque alors que $\rho_x(x) = \psi_3\left(\dfrac{x-x}{r_x}\right) = \psi_3(0) = 1 > \dfrac{1}{2}$ donc $x \in U_x$.

On a donc $K = \bigcup\limits_{x \in K} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x \in K} U_x$ donc $(U_x)_{x \in K}$ est un recouvrement ouvert de K.

Or K est compact donc il existe $x_1; \ldots; x_n \in K$ tels que $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$.

Posons alors $\sigma := \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_{x_i}$. On a $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et σ est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Soit $y \in \mathbb{R}\backslash\Omega$.

Pour tout $i \in \{1; \ldots; n\}$, on a dit que $]x_i - 2r_{x_i}; x_i + 2r_{x_i}[\subseteq \Omega$.

Donc pour tout $i \in \{1;\ldots;n\}$, $y \notin]x_i - 2r_{x_i}; x_i + 2r_{x_i}[$ et donc $\rho_{x_i}(y) = 0$.

Ainsi, $\sigma(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_{x_i}(y) = 0$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\Omega, \sigma(y) = 0$.

Soit $y \in K$.

On a dit que $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$ et donc il existe $j \in \{1;\ldots;n\}$ tel que $y \in U_{x_j}$.

On a donc $\rho_{x_j}(y) > \dfrac{1}{2}$ par définition de U_{x_j}.

Donc $\sigma(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_{x_i}(y) \geq \rho_{x_j}(y) > \dfrac{1}{2}$.

Donc $\forall y \in K, \sigma(y) > \dfrac{1}{2}$.

• Nous avons dit que $\psi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^\infty$, vaut 0 sur $]-\infty;-1]$ et 1 sur $[1;+\infty[$.

Considérons alors $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \tau(x) := \psi_1(4x-1)$.

τ est évidement de classe $\mathscr{C}^\infty$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Big(x \leq 0 \iff 4x-1 \leq -1\Big)$ et $\Big(x \geq \frac{1}{2} \iff 4x-1 \geq 1\Big)$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \in]-\infty;0]$ alors $\tau(x) = 0$ et si $x \in [\frac{1}{2};+\infty[$, alors $\tau(x) = 1$.

• Il ne reste plus qu'à poser $\rho_K := \tau \circ \sigma$.

On a bien évidemment $\rho_K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\rho_K \in \mathscr{C}^\infty$.

Pour tout $x \in K$, on a $\sigma(x) > \frac{1}{2}$ donc $\rho_K(x) = \tau\big(\sigma(x)\big) = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\Omega$, on a $\sigma(x) = 0$ donc $\rho_K(x) = \tau\big(\sigma(x)\big) = \tau(0) = 0$.

CQFD.

Chapitre 2

Distributions