Bases pour le traitement d'image
-
Florian Langlois d'après le cours de Julie Delon

Transport optimal de couleurs

Année universitaire 2022-2023

Université Paris Cité

Table des matières

Chapitre 1

Transformée de Fourier discrète 1D

Une image est une espèce de grille constituée de pixels. Par exemple si l'on prend cette image et que l'on s'amuse à zommer dessus, on pourra voir apparaître des cases d'une seule couleur : ce sont les fameux **pixels**.

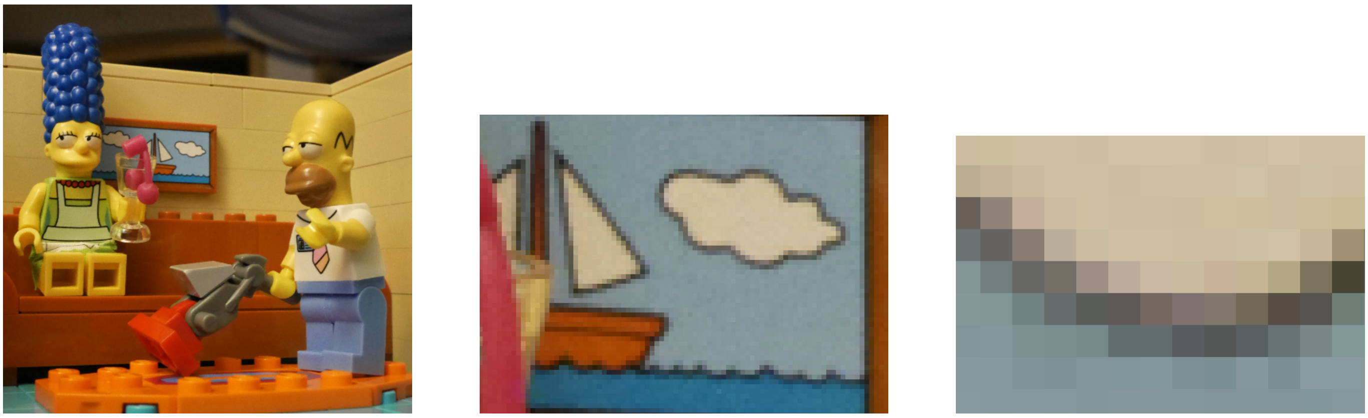

FIGURE 1.1 – *Une image de plus en plus zoomée*

De cette manière, il paraît légitime de modéliser une image par une matrice dont chaque coefficient représente un pixel. Un pixel est alors un triplet (R, V, B), où chaque élément du triplet est un nombre réel qui représente la proportion de rouge, de vert et de bleu qui composent sa couleur. En ayant ainsi modélisé notre image, nous pourrons effectuer dessus des opérations mathématiques comme avec n'importe quelle matrice. Nous aurons ainsi à notre disposition toute une batterie d'outils très pratique pour jouer sur les images, et notamment la **transformée de Fourier**.

Cependant, afin de mieux appréhender ces différents outils, nous commencerons par nous intéresser uniquement des images en nuances de gris, de sorte à ce qu'un pixel ne soit plus un triplet de réels, mais un simple nombre réel. Remarquons aussi qu'une image/matrice est en quelque sorte un objet en deux dimensions (longueur et largeur) : nous allons aussi simplifier cela dans en un premier temps et n'étudier au premier abord que des objets à une seule dimension (par exemple une image sur une seule ligne ou une seule colonne, ou encore un signal sonore). Nous étudierons donc dans un premier temps les matrices lignes.

L'outil au cœur de ce chapitre est la **transformée de Fourier**. La transformée de Fourier fait intervenir les nombres complexes : il est donc essentiel de considérer que les coefficients des matrices lignes peuvent être complexes pour avoir une totale liberté (par exemple considérer que la transformée est elle-même une image).

1 TFD en 1D

1.1 Espaces des suites périodiques

Imaginons qu'on ait une image (sur une seule ligne, pour l'instant) composée de 4 pixels ayant chacun pour valeurs a, b, c et d. Notre image est donc le quadruplet (a, b, c, d). La périodiser, c'est alors former la suite infinie (à gauche comme à droite) $(\dots, b, c, d, a, b, c, d, a, b, c, d, a, b, c, \dots)$.

Définition 1 (Suites périodiques)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$.
On dit que u est **N-périodique** si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{Z}, u(x+N) = u(x)$$

On note $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ l'ensemble des suites $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont N-périodiques.

Proposition 1 (Espace des suites périodiques)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Pour tout u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, posons $\langle u|v\rangle := \sum_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{v(x)}$.
   Alors $\langle \cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

1. L'ensemble des suites $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, dont $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est une partie, est naturellement munit d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ en est un sous-espace vectoriel.

- La suite nulle est évidemment N-périodique donc dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
- Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $(u+\lambda v)(x+N) = u(x+N)+\lambda v(x+N) = u(x)+\lambda v(x) = (u+\lambda v)(x)$.
  Donc $u + \lambda v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Donc $\boxed{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel}}$.

2. $\langle \cdot|\cdot\rangle$ est à symétrie hermitienne.
   Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
   On a alors

$$\overline{\langle v|u\rangle} = \overline{\sum_{x=0}^{N-1} v(x)\overline{u(x)}} = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)\overline{u(x)}} = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)}\,\overline{\overline{u(x)}} = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)}u(x) = \sum_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{v(x)} = \langle u|v\rangle$$

$\langle\bullet|\bullet\rangle$ est linéaire à gauche.

Soient u, v et w dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\langle u+\lambda v|w\rangle &= \sum_{x=0}^{N-1}(u+\lambda v)(x)\overline{w(x)} = \sum_{x=0}^{N-1}\big(u(x)+\lambda v(x)\big)\overline{w(x)} \\ &= \sum_{x=0}^{N-1}u(x)\overline{w(x)} + \lambda\sum_{x=0}^{N-1}v(x)\overline{w(x)} = \langle u|w\rangle + \lambda\,\langle v|w\rangle\end{aligned}$$

$\langle\bullet|\bullet\rangle$ est semi-linéaire à droite.

Soient u, v et w dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors $\langle u|v+\lambda w\rangle \underset{\text{symétrie hermitienne}}{=} \overline{\langle v+\lambda w|u\rangle} \underset{\text{linéarité à gauche}}{=} \overline{\langle v|u\rangle + \lambda\,\langle w|u\rangle}$
$= \overline{\langle v|u\rangle} + \overline{\lambda}\,\overline{\langle w|u\rangle} \underset{\text{symétrie hermitienne}}{=} \langle u|v\rangle + \overline{\lambda}\,\langle u|w\rangle$.

$\langle\bullet|\bullet\rangle$ est définie positive.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On a $\langle u|u\rangle = \sum\limits_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{u(x)} = \sum\limits_{x=0}^{N-1} \big|u(x)\big|^2 \geq 0$, d'où la positivité.

Supposons alors que $\langle u|u\rangle = 0$.
On a donc $\sum\limits_{x=0}^{N-1} \big|u(x)\big|^2 = 0$.
Or une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul.

Donc pour tout $x \in [\![0, N-1]\!]$, on a $\big|u(x)\big|^2 = 0$ et donc $u(x) = 0$.

Donc u est nulle sur $[\![0, N-1]\!]$ et donc sur tout $\mathbb{Z}$ par N-périodicité.

Donc u est la fonction nulle, d'où le côté défini.

Ainsi, $\langle\bullet|\bullet\rangle$ est sesquilinéaire, à symétrie hermitienne, et définie positif.

Donc $\boxed{\langle\bullet|\bullet\rangle \text{ est un produit scalaire hermitien}}$.

CQFD.

Remarque :
Cela permet de munir $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ de la norme issue du produit scalaire hermitien :

$$\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, ||u|| := \sqrt{\langle u|u\rangle} = \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1}\big|u(x)\big|^2}$$

Si besoin est, on peut toujours passer des images périodiques aux images non périodiques simpleme, via l'isométrie suivante.

Proposition 2 (Isométrie avec les uplets)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

L'application $\varphi := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ u & \longmapsto & \big(u(x)\big)_{x\in[\![0,N-1]\!]} \end{pmatrix}$ est une isométrie de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Démonstration

• On peut considérer l'application $\psi : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ qui prend un N-uplet et le prolonge à gauche et à droite par N-périodicité. Il n'est pas difficile de constater que φ et ψ sont réciproques l'une de l'autre, ce qui les rend bijectives.

• Montrons que φ est linéaire.

Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors

$$\begin{aligned} \varphi(u+\lambda v) &= \big((u+\lambda v)(x)\big)_{x\in[\![0,N-1]\!]} = \big(u(x)+\lambda v(x)\big)_{x\in[\![0,N-1]\!]} \\ &= \big(u(x)\big)_{x\in[\![0,N-1]\!]} + \lambda\big(v(x)\big)_{x\in[\![0,N-1]\!]} = \varphi(u)+\lambda\varphi(v) \end{aligned}$$

• Montrons que φ est isométrique.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On a alors $||\varphi(u)||_{\mathbb{C}^N} = \sqrt{\sum_{x=0}^{N} \left|\varphi(u)_x\right|^2} = \sqrt{\sum_{x=0}^{N} \left|u(x)\right|^2} = ||u||_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$

Ainsi, φ est bijective, linéaire et isométrique.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une isométrie}}$.

CQFD.

Définition 2 (Dirac de base des suites périodiques)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![0; N-1]\!]$.

On note δ_a l'application $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \equiv a[N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix}$.

Proposition 3 (Les Dirac de base forment une base)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Alors $(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1})$ est une base de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

• Soit $a \in [\![0, N-1]\!]$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $x+N \equiv x[N]$ donc $(x+N \equiv a[N]) \iff (x \equiv a[N])$ donc $\delta_a(x+N) = \delta_a(x)$.
Donc $\boxed{\delta_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.

• Montrons que $(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1})$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Posons $v := \sum_{a=0}^{N-1} u(a)\delta_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Montrons que $u = v$.
Soit $x \in [\![0, N-1]\!]$.
On a alors $u(x) = u(x)\delta_x(x) = u(x)\delta_x(x) + \sum_{\substack{a=0 \\ a\neq x}}^{N-1} u(a)\delta_a(x) = \sum_{a=0}^{N-1} u(a)\delta_a(x) = v(x)$.
Donc $\forall x \in [\![0, N-1]\!], u(x) = v(x)$.
Donc par N-périodicité, on a $\forall x \in \mathbb{Z}, u(x) = v(x)$.
Donc $u = v$ et donc u est engendré par $(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1})$.
Donc $(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1})$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Or $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^N$ d'après la proposition précédente, donc $\dim(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}) = N$.
Donc $\boxed{(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}) \text{ est une base de } \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.
CQFD.

1.2 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Il est temps comme promis de définir la transformée de Fourier pour nos suites périodiques. Avant cela, pour bien comprendre le lien avec les notions de Fourier vues au semestre précédent, récapitulons-les :

1. Pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, si $f \in L^1$ alors on peut définir sa transformée de Fourier $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi tx}\mathrm{d}x$$

   Pour $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, si g est L^1 alors on peut définir sa transformée de Fourier inverse $\check{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \check{g}(x) := \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{2i\pi tx}\mathrm{d}t$$

   On remarque alors que si $\widehat{f}$ est L^1, alors f est égale presque partout à $\check{\widehat{f}}$.

2. Pour $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, si f est T-périodique et f est L^1 sur $[0, T]$, alors on peut définir sa transformée de Fourier $\widehat{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \widehat{f}(n) := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2i\pi nx}{T}} \mathrm{d}x$$

(on note souvent $c_n(f) = \widehat{f}(n)$, c'est le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f)
Pour $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, si u est ℓ^1, alors on peut définir sa transformée de Fourier inverse $\check{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \check{u}(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n) e^{\frac{2i\pi nx}{T}}$$

On remarque alors que si f est L^2, alors $f = \check{\widehat{f}}$ avec convergence au sens de la norme L^2.

Nous sommes à présents armés pour définir encore une nouvelle transformée de Fourier.

Définition 3 (TFD)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **TFD** de u l'application $\widehat{u} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \widehat{u}(a) := \sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{-\frac{2i\pi xa}{N}}$$

Proposition 4 (La TFD d'une périodique est périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Alors $\widehat{u} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\widehat{u}(a+N) &= \sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{-\frac{2i\pi x(a+N)}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{-\frac{2i\pi xa}{N}} e^{-\frac{2i\pi xN}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{-\frac{2i\pi xa}{N}} e^{-2i\pi x} \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{-\frac{2i\pi xa}{N}} \times 1 = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{-\frac{2i\pi xa}{N}} = \widehat{u}(a)\end{aligned}$$

CQFD.

Définition 4 (TFD inverse)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **TFD inverse** de v l'application $\check{v} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \check{v}(x) = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1} v(a)e^{\frac{2i\pi ax}{N}}$$

Vous remarquerez ici que le choix de diviser par N (la période) a été fait pour la transformée inverse, et non la transformée directe. Pourtant, pour les séries de Fourier on avait divisé par T (la période) lors de la transformée directe. Il n'est pas compliqué de se convaincre que ça n'a aucune importance par linéarité. Il faut juste se fixer une convention, et s'y tenir pour la suite du cours.

Proposition 5 (Réécriture de la TFD inverse avec la TFD directe)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x) = \dfrac{1}{N}\widehat{v}(-x)$.
En particulier, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{v}(x) = N\check{v}(-x)$.

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x) = \dfrac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1} v(a)e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = \dfrac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1} v(a)e^{\frac{-2i\pi a(-x)}{N}} = \dfrac{1}{N}\widehat{v}(-x)$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x) = \dfrac{1}{N}\widehat{v}(-x)$.
En particulier, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(-x) = \dfrac{1}{N}\widehat{v}(x)$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $N\check{v}(-x) = \widehat{v}(x)$.
CQFD.

Proposition 6 (La TFD inverse d'une périodique est périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Alors $\check{v} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

On a vu à la proposition précédente que tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x) = \dfrac{1}{N}\widehat{v}(-x)$.
Or comme $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\widehat{v} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x+N) = \dfrac{1}{N}\widehat{v}(-x-N) = \dfrac{1}{N}\widehat{v}(-x) = \check{v}(x)$.

Donc $\boxed{\check{v} \text{ est } N\text{-périodique}}$.

Lemme 1 (Lemme de la TFD)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in [\![0, N-1]\!]$.

On a alors $\sum\limits_{a=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a = N\mathbb{1}_{x=y}$.

Démonstration

Posons $q := e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}$, de sorte que $\sum\limits_{a=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a = \sum\limits_{a=0}^{N-1} q^a$ et $q^N = e^{\frac{2i\pi(x-y)N}{N}} = e^{2i\pi(x-y)} = 1$.

• Si $x = y$, alors $q = e^{\frac{2i\pi(x-x)}{N}} = e^0 = 1$ et donc $\sum\limits_{a=0}^{N-1} q^a = \sum\limits_{a=0}^{N-1} 1^a = \sum\limits_{\xi=0}^{N-1} 1 = N = N\mathbb{1}_{x=y}$.

• Supposons que $x \neq y$.

Comme $0 \leq x \leq N-1$ et $0 \leq y \leq N-1$ on a $-(N-1) \leq -y \leq 0$ et donc $-(N-1) \leq x-y \leq N-1$.

Or le seul multiple de N dans $[\![-(N-1), N-1]\!]$ est 0.

Donc comme $x - y \neq 0$, $x - y$ n'est pas un multiple de N.

Donc $q = e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}} \neq 1$ et donc $\sum\limits_{a=0}^{N-1} q^a = \dfrac{1-q^N}{1-q} = \dfrac{1-1}{1-q} = 0 = N\mathbb{1}_{x=y}$.

Dans tous les cas, on a bien $\boxed{\sum\limits_{a=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a = N\mathbb{1}_{x=y}}$.

CQFD.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, que ne demande pas d'être L^1 ou ℓ^1 comme c'était le cas dans le cours du semestre précédent, tout simplement parce que les sommes en jeu sont ici finies : ouf, tout va bien !

Théorème 1 (La TFD est un isomorphisme)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

L'application $\varphi := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ u & \longmapsto & \widehat{u} \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

L'application $\psi := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ v & \longmapsto & \check{v} \end{pmatrix}$ est la réciproque de φ.

En particulier, pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\check{\widehat{u}} = u$ et $\widehat{\check{u}} = u$.

Démonstration

• Commençons par montrer que φ est linéaire.

Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\widehat{u+\lambda v}(a) &= \sum_{x=0}^{N-1}(u+\lambda v)(x)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1}\big(u(x)+\lambda v(x)\big)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} \\ &= \sum_{x=0}^{N-1}u(x)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} + \lambda\sum_{x=0}^{N-1}v(x)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} = \widehat{u}(a)+\lambda\widehat{v}(a) \\ &= \big(\widehat{u}+\lambda\widehat{v}\big)(a)\end{aligned}$$

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}, \widehat{u+\lambda v}(a) = \big(\widehat{u}+\lambda\widehat{v}\big)(a)$.

Donc $\widehat{u+\lambda v} = \widehat{u}+\lambda\widehat{v}$.

Donc $\varphi(u+\lambda v) = \varphi(u)+\lambda\varphi(v)$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$.

• Montrons que ψ est linéaire.

Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\widecheck{u+\lambda v}(x) &\underset{5\text{ p. }11}{=} \frac{1}{N}\widehat{u+\lambda v}(-x) = \frac{1}{N}\big(\widehat{u}+\lambda\widehat{v}\big)(-x) = \frac{1}{N}\big(\widehat{u}(-x)+\lambda\widehat{v}(-x)\big) \\ &= \frac{1}{N}\widehat{u}(-x)+\lambda\frac{1}{N}\widehat{v}(-x) \underset{5\text{ p. }11}{=} \widecheck{u}(x)+\lambda\widecheck{v}(x) \\ &= \big(\widecheck{u}+\lambda\widecheck{v}\big)(x)\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}, \widecheck{u+\lambda v}(x) = \big(\widecheck{u}+\lambda\widecheck{v}\big)(x)$.

Donc $\widecheck{u+\lambda v} = \widecheck{u}+\lambda\widecheck{v}$.

Donc $\psi(u+\lambda v) = \psi(u)+\lambda\psi(v)$.

Donc $\boxed{\psi \text{ est linéaire}}$.

• Montrons que pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\widecheck{\widehat{u}} = u$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Soit $x \in [\![0, N-1]\!]$.

On a alors

$$\check{\widehat{u}}(x) = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1}\widehat{u}(a)e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)e^{\frac{-2i\pi ay}{N}}e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{a=0}^{N-1}u(y)e^{\frac{-2i\pi ay}{N}}e^{\frac{2i\pi ax}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)\sum_{a=0}^{N-1}e^{\frac{2i\pi a(x-y)}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)\sum_{a=0}^{N-1}\left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)N\mathbb{1}_{x=y} \text{ d'après le lemme}$$

$$= \sum_{y=0}^{N-1}u(y)\mathbb{1}_{x=y} = u(x)$$

Donc $\check{\widehat{u}}(x) = u(x)$.

Donc pour tout $x \in [\![0, N-1]\!]$, on a $\check{\widehat{u}}(x) = u(x)$.

Par N-périodicité, on a l'égalité sur tout $\mathbb{Z}$, d'où $\check{\widehat{u}} = u$.

Donc pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\check{\widehat{u}} = u$, c'est-à-dire $\boxed{\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}}$.

• Comme $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$, φ est inversible à gauche donc est injective.
Or $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est de dimension finie, et on a montré que $\varphi : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est linéaire.
Donc φ est bijective : c'est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels.
On a alors $\psi = \psi \circ \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}} = \psi \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}} \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1}$.
Donc $\boxed{\psi \text{ est la bijection réciproque de } \varphi}$.
CQFD.

Proposition 7 (Produit scalaire, norme et TFD)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$.

1. $\forall u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, $\langle \widehat{u} | v \rangle = N \langle u | \check{v} \rangle$.
2. $\forall u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, $\langle \widehat{u} | \widehat{v} \rangle = N \langle u | v \rangle$
3. $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, $||\widehat{u}|| = \sqrt{N}\, ||u||$.

Démonstration

1. Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{u} | v \rangle &= \sum_{a=0}^{N-1} \widehat{u}(a)\overline{v(a)} = \sum_{a=0}^{N-1}\sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}\overline{v(a)} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \sum_{a=0}^{N-1} e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}\overline{v(a)} \\
&= \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \sum_{a=0}^{N-1} \overline{v(a)e^{\frac{2i\pi xa}{N}}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \overline{\sum_{a=0}^{N-1} v(a)e^{\frac{2i\pi xa}{N}}} = N \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \overline{\frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1} v(a)e^{\frac{2i\pi xa}{N}}} \\
&= N \sum_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{\check{v}(x)} = N \langle u | \check{v} \rangle
\end{aligned}$$

2. Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On a alors $\langle \widehat{u} | \widehat{v} \rangle \underset{1.}{=} N \left\langle u \middle| \check{\widehat{v}} \right\rangle = N \langle u | v \rangle$ car $\check{\widehat{v}} = v$.

3. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On a alors $||\widehat{u}||^2 = \langle \widehat{u} | \widehat{u} \rangle \underset{2.}{=} N \langle u | u \rangle = N ||u||^2$ donc $||\widehat{u}|| = \sqrt{N}\, ||u||$.

CQFD.

Définition 5 (Spectre d'amplitude et spectre de phase)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

1. On appelle **spectre d'amplitude** de u la fonction $S_u := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ a & \longmapsto & |\widehat{u}(a)| \end{pmatrix}$
2. Soit $E_u := \{a \in \mathbb{Z} \mid \widehat{u}(a) \neq 0\}$.

   On appelle **spectre de phase** de u la fonction $\varphi_u := \begin{pmatrix} E_u & \longrightarrow & [0, 2\pi[\\ a & \longmapsto & \arg(\widehat{u}(a)) \end{pmatrix}$

Quand nous aborderons enfin les images 2D, nous verrons à quoi servent ces deux spectres : le spectre d'amplitude donne des informations sur les "variations brutes" (par exemple sur une photo d'un t-shirt rayé, il porterait l'information des rayures), tandis que le spectre de phase donne des informations sur la géométrie de l'image. Nous verrons à ce moment-là des exemples visuels.

Les images qui nous intéressent sont avant tout des images à coefficients réels. Voyons donc quelques caractéristiques intéressantes des suites périodiques réelles.

Proposition 8 (TFD d'une suite périodique réelle)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Si $\forall x \in \mathbb{Z}, u(x) \in \mathbb{R}$, alors :

1. $\forall a \in \mathbb{Z}, \widehat{u}(-a) = \overline{\widehat{u}(a)}$
2. La fonction $|\widehat{u}| : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est paire.

Démonstration

Supposons que $\forall x \in \mathbb{Z}, u(x) \in \mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$\widehat{u}(-a) = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{\frac{-2i\pi x(-a)}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \overline{e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}} \underset{u(x)\in\mathbb{R}}{=} \sum_{x=0}^{N-1} \overline{u(x) e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}} = \overline{\sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}}$$
$$= \overline{\widehat{u}(a)}$$

2. Soit $a \in \mathbb{Z}$.
On a alors $\left|\widehat{u}(-a)\right| \underset{1.}{=} \left|\overline{\widehat{u}(a)}\right| = \left|\widehat{u}(a)\right|$.
D'où la partié de $\left|\widehat{u}\right|$.
CQFD.

1.3 Base orthogonales des suites périodiques

Théorème 2 (Base orthogonale des suites périodiques)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $a \in [\![0, N-1]\!]$, notons $e_a := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{\frac{2i\pi ax}{N}} \end{pmatrix}$.

Pour tout a et b dans $[\![0, N-1]\!]$, on a

$$\langle e_a | e_b \rangle = N \mathbb{1}_{a=b}$$

En particulier, $(e_a)_{a \in [\![0,N-1]\!]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

• Soit $a \in [\![0, N-1]\!]$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$e_a(x+N) = e^{\frac{2i\pi a(x+N)}{N}} = e^{\frac{2i\pi ax}{N}} e^{\frac{2i\pi aN}{N}} = e^{\frac{2i\pi ax}{N}} e^{2i\pi a} = e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = e_a(x)$$

Donc $e_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

• Soient a et b dans $[\![0, N-1]\!]$.

On a alors

$$\langle e_a|e_b\rangle = \sum_{x=0}^{N-1} e_a(x)\overline{e_b(x)} = \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi ax}{N}}\overline{e^{\frac{2i\pi bx}{N}}} = \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi ax}{N}} e^{-\frac{2i\pi bx}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi(a-b)x}{N}}$$

$$= \sum_{x=0}^{N-1}\left(e^{\frac{2i\pi(a-b)}{N}}\right)^x = N\mathbb{1}_{a=b} \text{ d'après le lemme 1 page 12}$$

• Ainsi, $(e_a)_{a\in[\![0,N-1]\!]}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. En particulier elle est libre, et comme elle comporte N termes, c'est une base de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

CQFD.

Remarque :

Ainsi, $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}e_a\right)_{a\in[\![0,N-1]\!]}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

En effet, on sait que c'est une base orthogonale d'après le théorème précédent.

De plus, pour tout $a \in [\![0, N-1]\!]$, on a $||e_a||^2 = \langle e_a|e_a\rangle = N$ donc $||e_a|| = \sqrt{N}$ donc $\frac{1}{\sqrt{N}}e_a$ est normé.

Exemple :

On prend $N \geq 7$ et $u := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\frac{6\pi x}{N}\right) \end{pmatrix}$.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$u(x+N) = \sin\left(\frac{6\pi(x+N)}{N}\right) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N} + \frac{6\pi N}{N}\right) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N} + 6\pi\right) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N}\right) = u(x)$$

Donc $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$: on peut la décomposer dans la base $(e_a)_{a\in[\![0,N-1]\!]}$.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$u(x) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N}\right) = \frac{e^{i\frac{6\pi x}{N}} - e^{-i\frac{6\pi x}{N}}}{2i} = \frac{e^{\frac{2i\pi 3x}{N}} - e^{\frac{-2i\pi 3x}{N}}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{\frac{2i\pi 3x}{N}} - \frac{1}{2i}e^{\frac{2i\pi(-3)x}{N}} = \frac{1}{2i}e_3(x) - \frac{1}{2i}e_{-3}(x)$$

On a donc $u = \frac{1}{2i}e_3 - \frac{1}{2i}e_{-3}$.

Proposition 9 (Lien entre les deux bases des suites périodiques)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $a \in [\![0, N-1]\!]$, on a $\widehat{\delta_a} = e_{-a}$.

Démonstration

Soit $a \in [\![0, N-1]\!]$.

Pour tout $b \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{\delta_a}(b) = \sum_{x=0}^{N-1} \delta_a(x)e^{\frac{-2i\pi xb}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} \mathbb{1}_{a=x}e^{\frac{-2i\pi xb}{N}} = e^{\frac{-2i\pi ab}{N}} = e_{-a}(b)$.

CQFD.

Notations :
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega_N := e^{-\frac{2i\pi}{N}}$.

Définition 6 (Matrice de Vandermonde-Fourier)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice de Vandermonde-Fourier** d'ordre N la matrice

$$W_N := \left(\omega_N^{jk}\right)_{\substack{0 \leq j \leq N-1 \\ 0 \leq k \leq N-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_N^3 & \omega_N^6 & \dots & \omega_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Proposition 10 (Matrice de Wandermonde-Fourier et TFD)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $j \in [\![0, N-1]\!]$, $\widehat{\delta_j}$ s'identifie à la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de W_N.

   Autrement dit, on a $W_N = \begin{pmatrix} \widehat{\delta_0}(0) & \widehat{\delta_0}(1) & \cdots & \widehat{\delta_0}(N-1) \\ \widehat{\delta_1}(0) & \widehat{\delta_1}(1) & \cdots & \widehat{\delta_1}(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\delta_{N-1}}(0) & \widehat{\delta_{N-1}}(1) & \cdots & \widehat{\delta_{N-1}}(N-1) \end{pmatrix}$.

2. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. Posons $U = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix}$ et $\widehat{U} = \begin{pmatrix} \widehat{u}(0) \\ \widehat{u}(1) \\ \vdots \\ \widehat{u}(N-1) \end{pmatrix}$.

   On a alors $\widehat{U} = W_N U$.

Démonstration

1. Soit $j \in [\![0, N-1]\!]$.
Soit $v_j \in \mathbb{C}^N$ la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de W_N.
On a donc

$$v_j = \begin{pmatrix} 1 & \omega_N^j & \omega_N^{2j} & \dots & \omega_N^{j(N-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\frac{-2i\pi 0j}{N}} & e^{\frac{-2i\pi 1j}{N}} & e^{\frac{-2i\pi 2j}{N}} & \dots & e^{\frac{-2i\pi(N-1)j}{N}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e_{-j}(0) & e_{-j}(1) & e_{-j}(2) & \dots & e_{-j}(N-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \widehat{\delta_j}(0) & \widehat{\delta_j}(1) & \widehat{\delta_j}(2) & \dots & \widehat{\delta_j}(N-1) \end{pmatrix} \text{ d'après la proposition 9 page 17}$$

2. Soit $j \in [\![0, N-1]\!]$.
La $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $W_N U$ est le produit de la $(j+1)^{\text{ème}}$ de W_N par U.
Donc la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $W_N U$ est d'après 1

$$\begin{pmatrix} \widehat{\delta_j}(0) & \dots & \widehat{\delta_j}(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{\delta_j}(k) u(k)$$
$$\underset{\text{9 p. 17}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} u(k) e_{-j}(k)$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} u(k) e^{\frac{-2i\pi jk}{N}}$$
$$= \widehat{u}(j)$$

Donc la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $W_N U$ est la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $\widehat{U}$.
CQFD.

Proposition 11 (Propriétés de la matrice de Vandermonde-Fourier)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Alors W_N est symétrique, inversible avec $W_N^{-1} = \dfrac{1}{N}\overline{W_N}$.
De plus, $\dfrac{1}{\sqrt{N}} W_N$ est unitaire.

Démonstration

• Par définition, la composante à la $k^{\text{ème}}$ligne et à la $j^{\text{ème}}$colonne de W_N est ω_N^{jk}.
Comme $jk = kj$, c'est donc aussi la composante à la $j^{\text{ème}}$ligne et à la $k^{\text{ème}}$colonne de W_N.
Donc $\boxed{W_N \text{ est symétrique}}$.

• Par définition, on a $W_N = \left(\omega_N^{jk}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}} = \left(e^{-\frac{2i\pi kj}{N}}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}}$.
On a donc $\overline{W_N} = \left(\overline{e^{-\frac{2i\pi kj}{N}}}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}} = \left(e^{\frac{2i\pi kj}{N}}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}}$.
La composante à la $k^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\overline{W_N}W_N$ est donc

$$\sum_{\xi=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi k\xi}{N}} e^{-\frac{2i\pi \xi j}{N}} = \sum_{\xi=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(k-j)}{N}}\right)^{\xi} = N\mathbb{1}_{j=k}$$

en ayant utilisé le lemme 1 page 12.

Autrement dit, $\overline{W_N}W_N = \begin{pmatrix} N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & N \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = NI_N$.

Donc $\frac{1}{N}\overline{W_N}W_N = I_N$ et donc $\boxed{W_N \text{ est inversible d'inverse } \frac{1}{N}\overline{W_N}}$.

• Comme W_N est symétrique, son adjointe est juste $\overline{W_N}$, donc l'adjointe de $\frac{1}{\sqrt{N}}W_N$ est $\frac{1}{\sqrt{N}}\overline{W_N}$.
Or on a vu que $\frac{1}{\sqrt{N}}W_N \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}\overline{W_N} = W_N \cdot \frac{1}{N}\overline{W_N} = I_N$.
Donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{N}}W_N \text{ est unitaire}}$.
CQFD.

Remarque :
Il existe un algorithme de calcul de TFD dont la complexité est $O\big(N\ln(N)\big)$.
C'est l'algorithme de **transformée de Fourier rapide** (Fast Fourier Transform, FFT).

2 Convolution périodique en 1D

2.1 Convolution périodique

Définition 7 (Convolution périodique)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **convolution** de u par v l'application $u * v : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (u*v)(x) := \sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y)$$

Lemme 2 (Sommation sur intervalle de longueur N)

Soient $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $c, d \in \mathbb{Z}$.

Si $d - c = N - 1$, c'est-à-dire si $\operatorname{card}\big([\![c, d]\!]\big) = N$, alors $\sum\limits_{k=c}^{d} f(k) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} f(k)$.

Démonstration

Supposons donc que $d - c = N - 1$.

On effectue la division euclidienne de c par N : il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0, N-1]\!]$ tels que $c = qN + r$.

On a alors

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=c}^{d} f(k) = \sum_{k=c}^{c+N-1} f(k) = \sum_{k=qN+r}^{qN+r+N-1} f(k) &= \sum_{k=qN+r}^{qN+N-1} f(k) + \sum_{k=qN+N}^{qN+N+r-1} f(k) \\
&= \sum_{k=qN+r}^{qN+N-1} f(k) + \sum_{k=(q+1)N}^{(q+1)N+r-1} f(k) \\
&= \sum_{x=r}^{N-1} f(x + qN) + \sum_{k=(q+1)N}^{(q+1)N+r-1} f(k) \text{ en posant } x = k - qN \\
&= \sum_{x=r}^{N-1} f(x) + \sum_{k=(q+1)N}^{(q+1)N+r-1} f(k) \text{ par } N\text{-périodicité de } f \\
&= \sum_{x=r}^{N-1} f(x) + \sum_{y=0}^{r-1} f\big(y + (q+1)N\big) \text{ en posant } y = k - (q+1)N \\
&= \sum_{x=r}^{N-1} f(x) + \sum_{y=0}^{r-1} f(y) \text{ par } N\text{-périodicité de } f \\
&= \sum_{k=r}^{N-1} f(k) + \sum_{k=0}^{r-1} f(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)
\end{aligned}
$$

CQFD.

Proposition 12 (Propriétés de la convolution périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

1. $u * v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$
2. $u * v = v * u$
3. $\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}$
4. $\widehat{uv} = \dfrac{1}{N}\widehat{u} * \widehat{v}$

Démonstration

1. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $(u*v)(x+N) = \sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x+N-y) \underset{v\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}{=} \sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y) = (u*v)(x)$.

Donc $\boxed{u * v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.

2. Pour tout $x \in [\![0, N-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
(u * v)(x) &= \sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y) \\
&= \sum_{z=x-(N-1)}^{x} u(x-z)v(z) \text{ en posant } z = x - y \\
&= \sum_{z=0}^{N-1} u(x-z)v(z) \text{ d'après le lemme 2 page 21} \\
&= \sum_{z=0}^{N-1} v(z)u(x-z) = (v * u)(x)
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in [\![0, N-1]\!], (u * v)(x) = (v * u)(x)$.

Or on a prouvé que $u * v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $v * u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ en 1.

Donc par N-périodicité, $\forall x \in \mathbb{Z}, (u * v)(x) = (v * u)(x)$.

Donc $\boxed{u * v = v * u}$.

3.

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\widehat{u * v}\,(a) &= \sum_{x=0}^{N-1} (u * v)(x) e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} \\
&= \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y)e^{\frac{-2i\pi(x-y+y)a}{N}} \\
&= \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} u(y)e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} v(x-y)e^{\frac{-2i\pi(x-y)a}{N}} \\
&= \sum_{y=0}^{N-1}\sum_{x=0}^{N-1} u(y)e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} v(x-y)e^{\frac{-2i\pi(x-y)a}{N}} \\
&= \sum_{y=0}^{N-1} u(y)e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} v(x-y)e^{\frac{-2i\pi(x-y)a}{N}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{y=0}^{N-1} u(y) e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} \sum_{z=-y}^{N-1-y} v(z) e^{\frac{-2i\pi za}{N}} \text{ en posant } z = x - y \\
&= \sum_{y=0}^{N-1} u(y) e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} \sum_{z=0}^{N-1} v(z) e^{\frac{-2i\pi za}{N}} \text{ d'après le lemme 2 page 21} \\
&= \left(\sum_{y=0}^{N-1} u(y) e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} \right) \left(\sum_{z=0}^{N-1} v(z) e^{\frac{-2i\pi za}{N}} \right) \\
&= \widehat{u}(a)\widehat{v}(a) = \left(\widehat{u}\widehat{v}\right)(a)
\end{aligned}
$$

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\widehat{u * v}(a) = \left(\widehat{u}\widehat{v}\right)(a)$.

Donc $\boxed{\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}}$.

4.

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$
\begin{aligned}
\widehat{\widehat{u} * \widehat{v}}(a) &= \widehat{\widehat{u}}\widehat{\widehat{v}}(a) \text{ d'après 3.} \\
&= \widehat{\widehat{u}}(a)\widehat{\widehat{v}}(a) \\
&= N\check{\widehat{u}}(-a)N\check{\widehat{v}}(-a) \text{ d'après la proposition 5 page 11} \\
&= N^2 u(-a)v(-a) \text{ d'après le théorème 1 page 12} \\
&= N^2 uv(-a) \\
&= N^2 \check{\widehat{uv}}(-a) \text{ d'après le théorème 1 page 12} \\
&= N\widehat{\widehat{uv}}(a) \text{ d'après la proposition 5 page 11} \\
&= \widehat{N\widehat{uv}}(a) \text{ par linéarité de la TFD}
\end{aligned}
$$

On a donc $\widehat{\widehat{u} * \widehat{v}}(a) = \widehat{N\widehat{uv}}(a)$.

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\widehat{u} * \widehat{v}}(a) = \widehat{N\widehat{uv}}(a)$.

Donc $\widehat{\widehat{u} * \widehat{v}} = \widehat{N\widehat{uv}}(a)$.

Par injectivité de la TFD, on a donc $\widehat{u} * \widehat{v} = N\widehat{uv}$.

On a ainsi $\boxed{\widehat{uv} = \frac{1}{N}\widehat{u} * \widehat{v}}$.

CQFD.

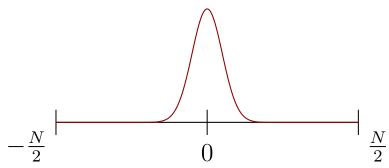

FIGURE 1.2 – *Représentation graphique du spectre d'amplitude d'un noyau de filtre passe-bas*

2.2 Filtrage

Définition 8 (Filtrage)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On appelle **filtrage de noyau** v l'application $\gamma_v := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ u & \longmapsto & v * u \end{pmatrix}$.

Remarque :
On peut tout de suite remarquer l'influence qu'un filtrage a sur le spectre d'amplitude : $\left|\widehat{v * u}\right| = |\widehat{v}|\,|\widehat{u}|$.

Définition 9 (Support d'une suite périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **support de** $\widehat{v}$ l'ensemble $\operatorname{supp}\left(\widehat{v}\right) := \left\{a \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \widehat{v}(a) \neq 0\right\}$.

La définition qui suit n'est pas la plus rigoureuse, mais est là pour donner une idée. On peut au besoin se fixer un seuil à partir duquel les fréquences sont considérées comme hautes ou basses.

Définition 10 (Filtres passe-bas et passe-haut)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

1. On dit que γ_v est un **filtre passe-bas** si et seulement si $\operatorname{supp}\left(\widehat{v}\right)$ ne contient que des basses fréquences.
2. On dit que γ_v est un **filtre passe-haut** si et seulement si $\operatorname{supp}\left(\widehat{v}\right)$ ne contient que des hautes fréquences.

Remarque :
Pour des raisons pratiques, on assouplit parfois cette définition pour englober dans les filtres passe-bas ceux telles que $\widehat{v}$ se concentre essentiellement sur les brasses fréquences, mais peut éventuellement être non nul en des hautes fréquences, tant que cela reste faible. On assouplit de même parfois la définition de filtre passe-haut.

Il peut être parfois bon d'utiliser une écriture matricielle du filtre, car certains langages comme Python sont bien plus efficients quand il s'agit de faire les calculs vectoriellement.

Proposition 13 (Ecriture matricielle d'un filtre)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Soit $K_v := \big(v(j-k)\big)_{\substack{1\leq j\leq N\\1\leq k\leq N}} = \begin{pmatrix} v(0) & v(N-1) & \dots & v(2) & v(1) \\ v(1) & v(0) & \dots & v(3) & v(2) \\ v(2) & v(1) & \dots & v(4) & v(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v(N-1) & v(N-2) & \dots & v(1) & v(0) \end{pmatrix}$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. Posons $U := \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix}$ et $\gamma_v(U) := \begin{pmatrix} (v*u)(0) \\ (v*u)(1) \\ \vdots \\ (v*u)(N-1) \end{pmatrix}$.

On a alors $\gamma_v(U) = K_v U$.

Démonstration

Soit $j \in [\![1, N]\!]$.

Alors la $j^{\text{ème}}$ ligne de K_v est $\begin{pmatrix} v(j-1) & v(j-2) & \dots & v(j-N) \end{pmatrix}$.

Donc la $j^{\text{ème}}$ ligne de $K_v U$ est

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} v(j-1) & v(j-2) & \dots & v(j-N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix} \\ &= v(j-1)u(0) + v(j-2)u(1) + \dots + v(j-N)u(N-1) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} v(j-1-k)u(k) = (u*v)(j-1) \end{aligned}$$

Donc la $j^{\text{ème}}$ ligne de $K_v U$ est a $j^{\text{ème}}$ ligne de $\gamma_v(U)$.

CQFD.

2.3 Opérateurs stationnaires

Définition 11 (Translation d'une suite périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $a \in [\![0, N-1]\!]$.

On appelle **translation** de u par a l'application $\tau_a u := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & u(x-a) \end{pmatrix}$.

Proposition 14 (La translation d'une suite périodique est périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![0, N-1]\!]$.
Alors pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\tau_a u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\tau_a u(x+N) = u(x+N-a) \underset{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}{=} u(x-a) = \tau_a u(x)$.

Donc $\boxed{\tau_a u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.

CQFD.

Exemple :
Supposons que la version non périodique de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Alors la version non périodique de $\tau_2 u$ est $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 15 (Translation et convolution)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![0, N-1]\!]$.
Alors pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\tau_a u = \delta_a * u$.

Démonstration

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\tau_a u(x) = u(x-a) = u(x-a)\delta_a(a) = u(x-a)\delta_a(a) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq a}}^{N-1} u(x-k)\delta_a(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} u(x-k)\delta_a(k) = (\delta_a * u)(x) = (u * \delta_a)(x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}, \tau_a u(x) = (u * \delta_a)(x)$.

Donc $\boxed{\tau_a u = \delta_a * u}$.

CQFD.

Définition 12 (Opérateur stationnaire linéaire)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $T : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On dit que T est un **opérateur stationnaire linéaire** si et seulement si T est linéaire et T commute avec toutes les translations, c'est-à-dire

$$\forall a \in [\![0, N-1]\!], \tau_a \circ T = T \circ \tau_a$$

Proposition 16 (Les filtres sont des opérateurs stationnaires linéaires)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Alors γ_v est un opérateur stationnaire linéaire.

Démonstration

- Par définition, on a bien $\gamma_v : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

- Montrons que γ_v est linéaire.

  Soient u et w dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

  Soit $x \in \mathbb{Z}$.

  On a alors

$$\begin{aligned}\big[v * (u+\lambda w)\big](x) &= \sum_{y=0}^{N-1} v(y)(u+\lambda w)(x-y) = \sum_{y=0}^{N-1} v(y)\big[u(x-y) + \lambda w(x-y)\big] \\ &= \sum_{y=0}^{N-1} v(y)u(x-y) + \lambda \sum_{y=0}^{N-1} v(y)w(x-y) \\ &= (v*u)(x) + \lambda(v*w)(x) = \big[(v*u) + \lambda(v*w)\big](x)\end{aligned}$$

  Donc $\forall x \in \mathbb{Z}, \big[v * (u+\lambda w)\big](x) = \big[(v*u) + \lambda(v*w)\big](x)$.

  Donc $v * (u+\lambda w) = (v*u) + \lambda(v*w)$.

  Donc $\gamma_v(u+\lambda w) = \gamma_v(u) + \lambda\gamma_v(w)$.

Donc γ_v est linéaire.

• Montrons que γ_v est stationnaire.

Soit $a \in [\![0, N-1]\!]$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\big[\tau_a \gamma_v(u)\big](x) &= \gamma_v(u)(x-a) \text{ par définition de } \tau_a \\
&= (v * u)(x-a) \text{ par définition de } \gamma_v \\
&= \sum_{y=0}^{N-1} v(u)u(x-a-y) \text{ par définition de la convolution} \\
&= \sum_{y=0}^{N-1} v(u)u(x-y-a) \\
&= \sum_{y=0}^{N-1} v(u)\tau_a u(x-y) \text{ par définition de } \tau_a \\
&= (v * \tau_a u)(x) \text{ par définition de la convolution} \\
&= \big[\gamma_v(\tau_a u)\big](x) \text{ par défnition de } \gamma_v
\end{aligned}$$

Donc $\big[\tau_a \gamma_v(u)\big](x) = \big[\gamma_v(\tau_a u)\big](x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\big[\tau_a \gamma_v(u)\big](x) = \big[\gamma_v(\tau_a u)\big](x)$.

Donc $\tau_a \gamma_v(u) = \gamma_v(\tau_a u)$.

Donc $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, \tau_a \gamma_v(u) = \gamma_v(\tau_a u)$.

Donc $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, (\tau_a \circ \gamma_v)(u) = (\gamma_v \circ \tau_a)(u)$.

Donc $\tau_a \circ \gamma_v = \gamma_v \circ \tau_a$.

Donc $\forall a \in [\![0, N-1]\!], \tau_a \circ \gamma_v = \gamma_v \circ \tau_a$.

Donc γ_v est stationnaire.

Finalement $\boxed{\gamma_v \text{ est linéaire et stationnaire}}$.

CQFD.

Exemple :
On peut cependant donner un exemple d'une application linéaire n'étant pas stationnaire.

Pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on pose $T(u) := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & u(2x) \end{pmatrix}$.

• Pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a bien $T(u) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

En effet, soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $x \in \mathbb{Z}$.

On a alors $T(u)(x+N) = u\big(2(x+N)\big) = u(2x+2N) \underset{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}{=} u(2x) = T(u)(x)$.

Donc on a bien $T : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

• T est bien linéaire.
En effet, soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$\big[T(u+\lambda v)\big](x) = (u+\lambda v)(2x) = u(2x)+\lambda v(2x) = \big[T(u)\big](x)+\lambda\big[T(v)\big](x) = \big[T(u)+\lambda T(v)\big](x)$$

Donc $T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v)$.
Donc T est linéaire.

• Cependant, T n'est pas stationnaire.
Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On a alors

$$\big[\tau_1 T(u)\big](3) = \big[T(u)\big](3-1) = \big[T(u)\big](2) = u(2\times 2) = u(4)$$

alors que

$$\big[T(\tau_1 u)\big](3) = \tau_1 u(2\times 3) = \tau_1 u(6) = u(6-1) = u(5)$$

Comme en général on n'a pas de raison d'avoir $u(4) = u(5)$, τ_1 et T ne commutent pas, et donc T n'est pas stationnaire.

Théorème 3 (Tout opérateur linéaire stationnaire est un filtre)

Tout opérateur linéaire stationnaire est un filtre.
Autrement dit, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $T : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ linéaire stationnaire, il existe $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ tel que $T = \gamma_v$.
Plus précisément, on a $v = T(\delta_0)$, et on dit que v est **la réponse impulsionnelle** de T.

Démonstration

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $T : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ linéaire stationnaire.
Posons $v := T(\delta_0)$, et montrons que $T = \gamma_v$.
Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

• Commençons par remarquer que $\forall y \in [\![0, N-1]\!], \delta_y = \tau_y \delta_0$.
En effet, soit $y \in [\![0, N-1]\!]$.
Soit $x \in \mathbb{Z}$.
On a $x \equiv y[N] \iff x - y \equiv 0[N]$.
Donc $\delta_y(x) = \delta_0(x-y) = \tau_y \delta_0(x)$.
Donc $\forall x \in \mathbb{Z}, \delta_y(x) = \tau_y \delta_0(x)$.
Donc $\delta_y = \tau_y \delta_0$.
Donc $\forall y \in [\![0, N-1]\!], \delta_y = \tau_y \delta_0$.

• D'après la décomposition de u dans la base $(\delta_0, \dots, \delta_{N-1})$, on a $u = \sum_{y=0}^{N-1} u(y)\delta_y$.

Donc d'après ce qui précède, on a $u = \sum_{y=0}^{N-1} u(y)\tau_y\delta_0$.

On a donc

$$\begin{aligned} T(u) &= T\left(\sum_{y=0}^{N-1} u(y)\tau_y\delta_0\right) \\ &= \sum_{y=0}^{N-1} u(y)T(\tau_y\delta_0) \text{ par linéarité de } T \\ &= \sum_{y=0}^{N-1} u(y)\tau_y T(\delta_0) \text{ par stationnarité de } T \\ &= \sum_{y=0}^{N-1} u(y)\tau_y v \text{ par définition de } v \end{aligned}$$

Et donc pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$\big[T(u)\big](x) = \left[\sum_{y=0}^{N-1} u(y)\tau_y v\right](x) = \sum_{y=0}^{N-1} u(y)\tau_y v(x) = \sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y) = (u*v)(x) = \big[\gamma_v(u)\big](x)$$

Donc $T(u) = \gamma_v(u)$.

Donc $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, T(u) = \gamma_v(u)$.

Donc $\boxed{T = \gamma_v}$.

CQFD.

2.4 Dérivée discrète

• Dans le cas continue, pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on dit que f est **dérivable** en a si et seulement si la limite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie, limite que l'on note alors $f'(a)$. Quand f n'est pas dérivable, on peut parfois quand-même avoir la dérivabilité de f à gauche ou à droite de a en considérant l'existence et la finitude des limites

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ et } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que l'on pourrait noter par exemple $f'_{\rightarrow}(a)$ et $f'_{\leftarrow}(a)$.

• Dans le cas discret d'une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $a \in \mathbb{Z}$, prendre la limite quand h tend vers 0 n'aurait pas de sens puisque h se limite aux entiers. On peut cependant tout simplement considérer

$$\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

quand h est le plus proche de 0 parmi les entiers, c'est-à-dire $h = 1$ ou $h = -1$. On peut donc considérer en quelque sorte

$$u'_{\to}(a) := \frac{u(a-1) - u(a)}{-1} \text{ et } u'_{\leftarrow}(a) := \frac{u(a+1) - u(a)}{1}$$

qui ont l'avantage d'être toujours définies. Même si elles semblent n'être que des versions low-cost de la dérivation, elles remplissent pourtant bien le rôle de "mesure de variations", puisqu'elles mesurent la variation de la valeur de u d'un entier au suivant, ce qui est la plus petite variation possible. Elles ont aussi l'avantage d'être simple à calculer, puisqu'on a tout simplement

$$u'_{\to}(a) = u(a) - u(a-1) \text{ et } u'_{\leftarrow}(a) = u(a+1) - u(a)$$

On remarque au passage que l'on a pas besoin de s'embêter à considérer les deux (gauche et droite) dérivées discrètes, puisqu'en fait

$$u'_{\to}(a) = u(a) - u(a-1) = u\big((a-1)+1\big) - u(a-1) = u'_{\leftarrow}(a-1)$$

ce qui nous indique que l'on a toute l'information utile en considérant seulement les dérivées à droite en tout entier, ou seulement les dérivées à gauche de tout entier. Le choix usuel est de ne simplement considérer que la dérivée à droite, que l'on appelle simplement **dérivée discrète**, d'où la définition suivante.

Définition 13 (Dérivée discrète d'une suite périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$.
   On appelle **dérivée** de u en a la quantité $u'(a) := u(a+1) - u(a)$.
2. On appelle **suite dérivée** de u l'application $u' := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ a & \longmapsto & u'(a) \end{array}\right)$.

On parle aussi de dérivée au sens des **différences finies**.

Proposition 17 (La dérivation est un opérateur linéaire stationnaire)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $u' \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
2. Soit d_x l'application $\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ u & \longmapsto & u' \end{array}\right)$.
   Alors d_x est un opérateur linéaire stationnaire.
3. La réponse impulsionnelle de d_x est la suite $\delta_{-1} - \delta_0$.

Démonstration

1. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
u'(a+N) &= u\big((a+N)+1\big) - u(a+N) \\
&= u(a+1+N) - u(a+N) \\
&= u(a+1) - u(a) \text{ car } u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\
&= u'(a)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{u' \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.

2.

• Montrons que d_x est linéaire.

Soient u et w dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et λ dans $\mathbb{C}$.

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
(u+\lambda w)'(a) &= (u+\lambda w)(a+1) - (u+\lambda w)(a) \\
&= u(a+1) + \lambda w(a+1) - u(a) - \lambda w(a) \\
&= u(a+1) - u(a) + \lambda\Big[w(a+1) - w(a)\Big] \\
&= u'(a) + \lambda w'(a) \\
&= (u' + \lambda w')(a)
\end{aligned}$$

Donc $(u+\lambda w)'(a) = (u' + \lambda w')(a)$.

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}, (u+\lambda w)'(a) = (u' + \lambda w')(a)$.

Donc $(u+\lambda w)' = u' + \lambda w'$.

Donc $\mathrm{d}_x(u+\lambda w) = \mathrm{d}_x u + \lambda \mathrm{d}_x w$.

Donc d_x est linéaire.

• Montrons que d_x est stationnaire.

Soit $b \in \mathbb{Z}$.

Montrons que d_x et τ_b commutent.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Montrons que $\mathrm{d}_x \tau_b u = \tau_b \mathrm{d}_x u$.

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\mathrm{d}_x \tau_b u(a) = \tau_b u(a+1) - \tau_b u(a+1) \text{ par définition de } \mathrm{d}_x$$

$$
\begin{aligned}
&= u\big((a+1)-b\big) - u(a-b) \text{ par définition de } \tau_b \\
&= u\big((a-b)+1\big) - u(a-b) \\
&= \mathrm{d}_x u(a-b) \text{ par définition de } \mathrm{d}_x \\
&= \tau_b \mathrm{d}_x u(a) \text{ par définition de } \tau_b
\end{aligned}
$$

Donc $\mathrm{d}_x \tau_b u(a) = \tau_b \mathrm{d}_x u(a)$.

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}, \mathrm{d}_x \tau_b u(a) = \tau_b \mathrm{d}_x u(a)$.

Donc $\mathrm{d}_x \tau_b u = \tau_b \mathrm{d}_x u$.

Donc $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, \mathrm{d}_x \tau_b u = \tau_b \mathrm{d}_x u$.

Donc $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, \big(\mathrm{d}_x \circ \tau_b\big) u = \big(\tau_b \circ \mathrm{d}_x\big) u$.

Donc $\mathrm{d}_x \circ \tau_b = \tau_b \circ \mathrm{d}_x$.

Donc d_x et τ_b commutent.

Donc pour tout $b \in \mathbb{Z}$, d_x et τ_b commutent.

Donc d_x est stationnaire.

Finalement, $\boxed{\mathrm{d}_x \text{ est un opérateur linéaire stationnaire}}$.

3. Considérons donc $v := \delta_{-1} - \delta_0$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On a alors $v * u = (\delta_{-1} - \delta_0) * u = \delta_{-1} * u - \delta_0 * u \underset{15 \text{ p. } 26}{=} \tau_{-1} u - \tau_0 u = \tau_{-1} u - u$.

Donc pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a

$$
\begin{aligned}
(v * u)(a) &= (\tau_{-1} u - u)(a) = \tau_{-1} u(a) - u(a) \\
&= u\big(a - (-1)\big) - u(a) = u(a+1) - u(a) \\
&= u'(a)
\end{aligned}
$$

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}, (v * u)(a) = u'(a)$.

Donc $v * u = u'$.

Donc $\gamma_v(u) = \mathrm{d}_x u$.

Donc $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, \gamma_v(u) = \mathrm{d}_x u$.

Donc $\gamma_v = \mathrm{d}_x$.

Donc $\boxed{v \text{ est la réponse impulsionnelle de } \mathrm{d}_x}$.

CQFD.

Remarque :
Quand on exprime un opérateur comme un produit de convolution, il est toujours intéressant de regarder l'effet produit sur le spectre d'amplitude.
Dans le cas de la dérivation, on a $\widehat{v} = \widehat{\delta_{-1} - \delta_0} = \widehat{\delta_{-1}} - \widehat{\delta_0} = e_1 - e_0$ d'après la proposition 9 page 17.

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}, \widehat{v}(a) = e_1(a) - e_0(a) = e^{\frac{2i\pi a}{N}} - 1 = e^{\frac{i\pi a}{N}}\left(e^{\frac{i\pi a}{N}} - e^{\frac{-i\pi a}{N}}\right) = 2ie^{\frac{i\pi a}{N}}\dfrac{e^{\frac{i\pi a}{N}} - e^{\frac{-i\pi a}{N}}}{2i}$
$= 2ie^{\frac{i\pi a}{N}}\sin\left(\frac{i\pi a}{N}\right)$ et donc $\forall a \in \mathbb{Z}, \left|\widehat{v}(a)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{i\pi a}{N}\right)\right|$. Autrement dit, dériver u a parmi ses effets de multiplier par $2\left|\sin\left(\frac{i\pi a}{N}\right)\right|$ son spectre d'amplitude.

Définition 14 (Dérivée discrète seconde d'une suite périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$.
   On appelle **dérivée seconde** de u en a le nombre $u''(a) := (u')'(a)$.
2. On appelle **suite dérivée seconde** de u l'application $u'' := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ a & \longmapsto & u''(a) \end{array}\right)$.

On parle aussi de dérivée seconde de u au sens des **différences finies**.

Proposition 18 (Propriétés de la dérivation seconde)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $u''(a) = u(a+2) - 2u(a+1) + u(a)$.
2. Pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $u'' \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
3. Soit d_x^2 l'application $\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ u & \longmapsto & u'' \end{array}\right)$.
   Alors d_x^2 est un opérateur linéaire stationnaire.
4. La réponse impulsionnelle de d_x^2 est $\delta_{-2} - 2\delta_{-1} + \delta_0$.

Démonstration

1. Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned} u''(a) &= (u')'(a) \text{ par définition de la dérivée seconde} \\ &= u'(a+1) - u'(a) \text{ par définition de la dérivée} \\ &= u\big((a+1)+1\big) - u(a+1) - \big(u(a+1) - u(a)\big) \text{ par définition de la dérivée} \\ &= u(a+2) - u(a+1) - u(a+1) + u(a) \\ &= u(a+2) - 2u(a+1) + u(a) \end{aligned}$$

2. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On a alors $u' \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ d'après la proposition 17 page 31.

Donc $(u')' \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ toujours d'après cette même proposition.

Donc $\boxed{u'' \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.

3. Par définition, on a $\mathrm{d}_x^2 = \mathrm{d}_x \circ \mathrm{d}_x$.

Donc d_x^2 est linéaire comme composition de deux applications linéaires.

On sait que d_x est stationnaire d'après la proposition 17 page 31.

Donc pour tout $b \in \mathbb{Z}$, on a $\tau_b \circ \mathrm{d}_x^2 = \tau_b \circ \mathrm{d}_x \circ \mathrm{d}_x = \mathrm{d}_x \circ \tau_b \circ \mathrm{d}_x = \mathrm{d}_x \circ \mathrm{d}_x \circ \tau_b = \mathrm{d}_x^2 \circ \tau_b$.

Donc pour tout $b \in \mathbb{Z}$, d_x^2 commute avec τ_b.

Donc d_x^2 est stationnaire.

Finalement, $\boxed{\mathrm{d}_x^2 \text{ est un opérateur linéaire stationnaire}}$.

4. Posons $v := \delta_{-2} - 2\delta_{-1} + \delta_0$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned} u''(a) &= u(a+2) - 2u(a+1) + u(a) \text{ d'après 1.} \\ &= u\big(a-(-2)\big) - 2u\big(a-(-1)\big) + u(a-0) \\ &= \tau_{-2}u(a) - 2\tau_{-1}u(a) + \tau_0 u(a) \\ &= (\delta_{-2} * u)(a) - (2\delta_{-1} * u) + (\delta_0 * u)(a) \\ &= (\delta_{-2} * u - 2\delta_{-1} * u + \delta_0 * u)(a) \\ &= \big((\delta_{-2} - 2\delta_{-1} + \delta_0) * u\big)(a) \\ &= (v * u)(a) \end{aligned}$$

Donc $u''(a) = (v * u)(a)$.

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}, u''(a) = (v * u)(a)$.

Donc $u'' = v * u$.

Donc $\mathrm{d}_x^2 u = \gamma_v(u)$.

Donc $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, \mathrm{d}_x^2 u = \gamma_v(u)$.

Donc $\boxed{\mathrm{d}_x^2 = \gamma_v}$.

CQFD.

3 Opérations géométriques en 1D

Observons à présent une gamme d'opérations géométriques sur les suites. On peut dès à présent comprendre leur intérêts pour des images, mais nous verrons plus en détails ce qu'elles font dans le chapitre sur les images 2D.

3.1 Sous-échantillonage

Sous-échantillonner une image, c'est prendre uniquement quelques pixels. Une façon "régulière" de le faire, c'est de ne conserver qu'un pixel sur 2, ou un pixel sur 3, etc. Ce nombre-là est appelé le **pas** de l'échantillonnage. Par exemple si en version non-périodique, u est l'image $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$, alors en échantillonnant u avec un pas 2, on obtient $(0, 2, 4)$ et avec un pas 3 on obtient $(0, 3)$.

Définition 15 (Sous-échantillonage)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et p un entier naturel diviseur de N.
Pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on appelle **suite sous-échantillonnée** de u de pas p la suite

$$S_p u := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & u(px) \end{pmatrix}$$

Proposition 19 (Opérateur de sous-échantillonage)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et p un entier naturel diviseur de N.

1. Pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $S_p u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{N/p}}$.
2. L'application de **sous-échantillonage** (de pas p) $S_p := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{N/p}} \\ u & \longmapsto & S_p u \end{pmatrix}$ est linéaire.

Démonstration

1. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a alors $S_p u(x + N/p) = u\big(p(x + N/p)\big) = u(px + N) \underset{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}{=} u(px) = S_p u(x)$.
Donc $\boxed{S_p u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{N/p}}}$.

2. Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et λ dans $\mathbb{C}$.
Soit $x \in \mathbb{Z}$.
On a alors

$$\big[S_p(u + \lambda v)\big](x) = (u + \lambda v)(px) = u(px) + \lambda v(px)$$

$$= S_p u(x) + \lambda S_p v(x) = (S_p u + \lambda S_p v)(x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}, \big[S_p(u + \lambda v)\big](x) = (S_p u + \lambda S_p v)(x)$.
Donc $\boxed{S_p(u + \lambda v) = S_p u + \lambda S_p v}$.
CQFD.

Observons à présent l'effet que cela produit sur la TFD.