Bases pour le traitement d'image

-

Florian Langlois d'après le cours de Julie Delon

Transport optimal de couleurs

Année universitaire 2022-2023

Université Paris Cité

Table des matières

Chapitre 1
Transformée de Fourier discrète

Une image est une espèce de grille constituée de pixels. Par exemple si l'on prend cette image et que l'on s'amuse à zommer dessus, on pourra voir apparaître des cases d'une seule couleur : ce sont les fameux **pixels**.

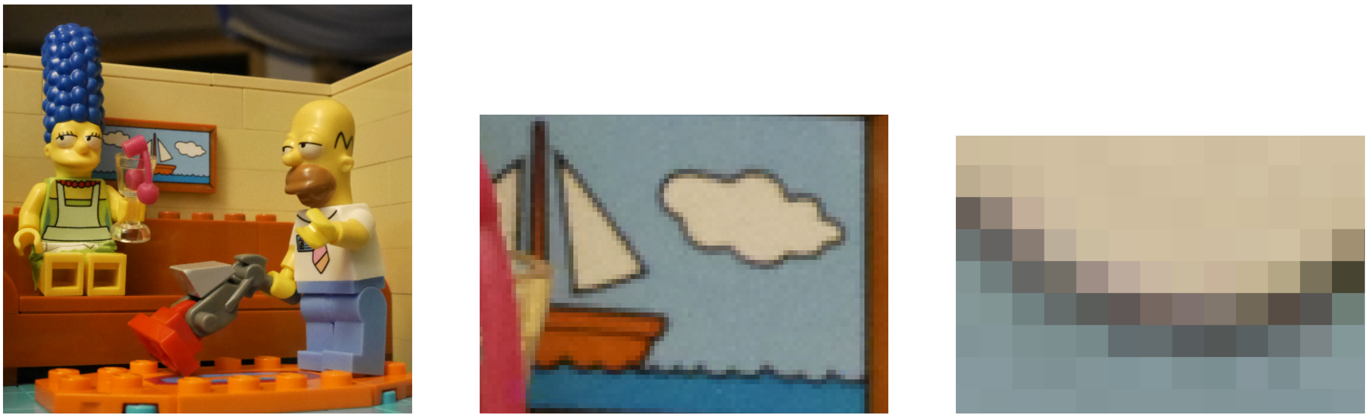

FIGURE 1.1 – *Une image de plus en plus zoomée*

De cette manière, il paraît légitime de modéliser une image par une matrice dont chaque coefficient représente un pixel. Un pixel est alors un triplet (R, V, B), où chaque élément du triplet est un nombre réel qui représente la proportion de rouge, de vert et de bleu qui composent sa couleur. En ayant ainsi modélisé notre image, nous pourrons effectuer dessus des opérations mathématiques comme avec n'importe quelle matrice. Nous aurons ainsi à notre disposition toute une batterie d'outils très pratique pour jouer sur les images, et notamment la **transformée de Fourier**.

Cependant, afin de mieux appréhender ces différents outils, nous commencerons par nous intéresser uniquement des images en nuances de gris, de sorte à ce qu'un pixel ne soit plus un triplet de réels, mais un simple nombre réel. Remarquons aussi qu'une image/matrice est en quelque sorte un objet en deux dimensions (longueur et largeur) : nous allons aussi simplifier cela dans en un premier temps et n'étudier au premier abord que des objets à une seule dimension (par exemple une image sur une seule ligne ou une seule colonne, ou encore un signal sonore). Nous étudierons donc dans un premier temps les matrices lignes.

L'outil au cœur de ce chapitre est la **transformée de Fourier**. Si vous vous souvenez bien du cours sur les séries de Fourier, vous savez que celles-ci concernent les fonctions **périodiques** : nous allons donc considérer virtuellement que nos images (sous forme de matrices lignes) forment en fait des images périodiques, qui se répètent à l'infini à gauche comme à droite. Enfin, la transformée de Fourier fait intervenir les nombres complexes : il est donc essentiel de considérer que les coefficients des matrices lignes peuvent être complexes pour avoir une totale liberté (par exemple considérer que la transformée est elle-même une image).

1 TFD en 1D

1.1 Espaces des suites périodiques

Définition 1 (Espaces des suites périodiques)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont N-périodiques, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, u(x+N) = u(x)$$

Proposition 1 (Produit scalaire sur l'espace des suites périodiques)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Pour tout u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, posons $\langle u|v\rangle := \sum_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{v(x)}$.
   Alors $\langle \cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

1. L'ensemble des applications $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ est naturellement munit d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel, dont $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est un sous-ensemble. Montrons que c'en est un sous-espace.

- L'application nulle est évidemment N-périodique.
- Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a alors

$$(u+\lambda v)(x+N) = u(x+N) + \lambda v(x+N) = u(x) + \lambda v(x) = (u+\lambda v)(x)$$

  Donc $u + \lambda v$ est dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Donc $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$.
Donc $\boxed{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel}}$.

2. $\langle \cdot|\cdot\rangle$ est à symétrie hermitienne.
   Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
   On a alors $\overline{\langle v|u\rangle} = \overline{\sum_{x=0}^{N-1} v(x)\overline{u(x)}} = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)\overline{u(x)}} = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)}\,\overline{\overline{u(x)}} = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)}u(x)$
   $= \sum_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{v(x)} = \langle u|v\rangle$.

$\langle \bullet | \bullet \rangle$ est linéaire à gauche.

Soient u, v et w dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors $\langle u + \lambda v | w \rangle = \sum_{x=0}^{N-1} (u + \lambda v)(x)\overline{w(x)} = \sum_{x=0}^{N-1} \big(u(x) + \lambda v(x)\big)\overline{w(x)}$

$= \sum_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{w(x)} + \lambda \sum_{x=0}^{N-1} v(x)\overline{w(x)} = \langle u|w \rangle + \lambda \langle v|w \rangle$.

$\langle \bullet | \bullet \rangle$ est semi-linéaire à droite.

Soient u, v et w dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors $\langle u|v + \lambda w \rangle \underset{\text{symétrie hermitienne}}{=} \overline{\langle v + \lambda w|u \rangle} \underset{\text{linéarité à gauche}}{=} \overline{\langle v|u \rangle + \lambda \langle w|u \rangle}$

$= \overline{\langle v|u \rangle} + \overline{\lambda}\, \overline{\langle w|u \rangle} \underset{\text{symétrie hermitienne}}{=} \langle u|v \rangle + \overline{\lambda} \langle u|w \rangle$.

$\langle \bullet | \bullet \rangle$ est définie positive.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On a $\langle u|u \rangle = \sum_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{u(x)} = \sum_{x=0}^{N-1} \left|u(x)\right|^2 \geq 0$, d'où la positivité.

Supposons alors que $\langle u|u \rangle = 0$.

On a donc $\sum_{x=0}^{N-1} \left|u(x)\right|^2 = 0$.

Or une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul.

Donc pour tout $x \in [\![0; N-1]\!]$, on a $\left|u(x)\right|^2 = 0$ et donc $u(x) = 0$.

Or $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ donc u est N périodique et donc u est nulle sur tout $\mathbb{Z}$.

D'où le côté défini.

Ainsi, $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est sesquilinéaire, à symétrie hermitienne, et définie positif.

Donc $\boxed{\langle \bullet | \bullet \rangle \text{ est un produit scalaire hermitien}}$.

CQFD.

Remarque :

Cela permet de munir $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ de la norme issue du produit scalaire hermitien : $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, ||u|| = \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} \left|u(x)\right|^2}$.

Proposition 2 (Identification aux uplets)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

L'application $\varphi := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ u & \longmapsto & \big(u(x)\big)_{x \in [\![0;N-1]\!]} \end{array} \right)$ est un isométrie de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Démonstration

• Étant donné $c = (c_0, \ldots, c_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, on peut définir une application $\psi_c \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ en prolongeant c par périodicité. Soit alors $\psi := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ c & \longmapsto & \psi_c \end{pmatrix}$.

• Pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, restreindre u à $[\![0; N-1]\!]$ puis prolonger le résultat par N-périodicité redonne u, d'où le fait que $(\psi \circ \varphi)(u) = u$ et donc $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.
De même, pour tout $c \in \mathbb{C}^N$, prolonger c par N-périodicité puis restreindre le résultat à $[\![0; N-1]\!]$ redonne c, d'où le fait que $(\varphi \circ \psi)(c) = c$ et donc $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^N}$.
Ainsi φ est bijective de réciproque ψ.

• Montrons que φ est linéaire.

Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors $\varphi(u + \lambda v) = \big((u + \lambda v)(x)\big)_{x \in [\![0;N-1]\!]} = \big(u(x) + \lambda v(x)\big)_{x \in [\![0;N-1]\!]}$
$= \big(u(x)\big)_{x \in [\![0;N-1]\!]} + \lambda \big(v(x)\big)_{x \in [\![0;N-1]\!]} = \varphi(u) + \lambda \varphi(v)$.

Donc φ est linéaire.

• Montrons que φ est isométrique.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On a alors $\big|\big|\varphi(u)\big|\big| = \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} \big|\varphi(u)_x\big|^2} = \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} \big|u(x)\big|^2} = ||u||$.

Donc φ est isométrique.

Finalement, φ est bijective, linéaire et isométrique.
Donc $\boxed{\varphi \text{ est une isométrie}}$.
CQFD.

Définition 2 (Dirac de base des suites périodiques)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![0; N-1]\!]$.

On note δ_a l'application $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \equiv a[N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix}$.

Proposition 3 (Les Dirac de base forment une base)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Alors $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

• Soit $a \in [\![0, N-1]\!]$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $x + N \equiv x[N]$ donc $x + N \equiv a[N] \iff x \equiv a[N]$ donc $\delta_a(x+N) = \delta_a(x)$.
Donc $\delta_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

• Montrons que $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Posons $v := \sum\limits_{a=0}^{N-1} u(a)\delta_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Montrons que $u = v$.
Soit $x \in [\![0, N-1]\!]$.
On a alors $u(x) = u(x)\delta_x(x) = u(x)\delta_x(x) + \sum\limits_{\substack{a=0 \\ a \neq x}}^{N-1} u(a)\delta_a(x) = \sum\limits_{a=0}^{N-1} u(a)\delta_a(x) = v(x)$.
Donc $\forall x \in [\![0, N-1]\!], u(x) = v(x)$.
Donc par N-périodicité, on a $\forall x \in \mathbb{Z}, u(x) = v(x)$.
Donc $u = v$ et donc u est engendré par $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$.
Donc $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Or $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^N$ d'après la proposition précédente.
Donc $\dim(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}) = N$.
Donc $\boxed{\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right) \text{ est une base de } \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.
CQFD.

1.2 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Définition 3 (TFD)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **TFD** de u l'application $\widehat{u} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \widehat{u}(a) := \sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{-\frac{2i\pi x a}{N}}$$

Proposition 4 (La TFD d'une périodique est périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Alors $\widehat{u} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{Z}$.
On a alors $\widehat{u}(a+N) = \sum\limits_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi x(a+N)}{N}} = \sum\limits_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}}e^{-\frac{2i\pi xN}{N}} = \sum\limits_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}}e^{-2i\pi x}$
$= \sum\limits_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}} \times 1 = \sum\limits_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}} = \widehat{u}(a)$.
CQFD.

Définition 4 (TFD inverse)

Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **TFD inverse** de v l'application $\check{v} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \check{v}(x) = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1} v(a)e^{\frac{2i\pi ax}{N}}$$

Lemme 1 (Lemme de la TFD)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in [\![0, N-1]\!]$.
On a alors $\sum\limits_{a=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a = N\mathbb{1}_{x=y}$.