Bases pour le traitement d'image
-
Florian Langlois d'après le cours de Julie Delon



Transport optimal de couleurs

Année universitaire 2022-2023

Université Paris Cité

Table des matières

Chapitre 1

Transformée de Fourier discrète

Une image est une espèce de grille constituée de pixels. Par exemple si l'on prend cette image et que l'on s'amuse à zommer dessus, on pourra voir apparaître des cases d'une seule couleur : ce sont les fameux **pixels**.

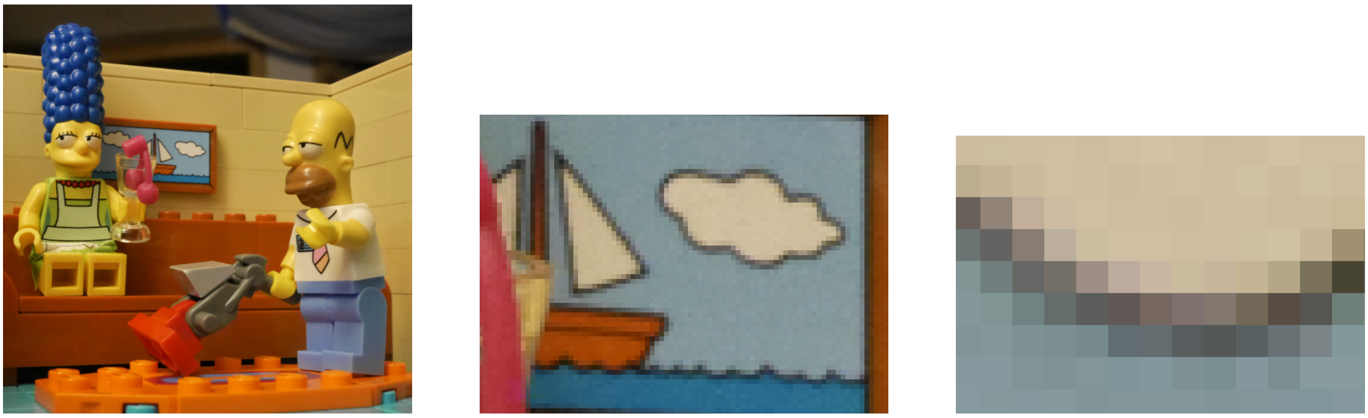

FIGURE 1.1 – *Une image de plus en plus zoomée*

De cette manière, il paraît légitime de modéliser une image par une matrice dont chaque coefficient représente un pixel. Un pixel est alors un triplet (R, V, B), où chaque élément du triplet est un nombre réel qui représente la proportion de rouge, de vert et de bleu qui composent sa couleur. En ayant ainsi modélisé notre image, nous pourrons effectuer dessus des opérations mathématiques comme avec n'importe quelle matrice. Nous aurons ainsi à notre disposition toute une batterie d'outils très pratique pour jouer sur les images, et notamment la **transformée de Fourier**.

Cependant, afin de mieux appréhender ces différents outils, nous commencerons par nous intéresser uniquement des images en nuances de gris, de sorte à ce qu'un pixel ne soit plus un triplet de réels, mais un simple nombre réel. Remarquons aussi qu'une image/matrice est en quelque sorte un objet en deux dimensions (longueur et largeur) : nous allons aussi simplifier cela dans en un premier temps et n'étudier au premier abord que des objets à une seule dimension (par exemple une image sur une seule ligne ou une seule colonne, ou encore un signal sonore). Nous étudierons donc dans un premier temps les matrices lignes.

L'outil au cœur de ce chapitre est la **transformée de Fourier**. Si vous vous souvenez bien du cours sur les séries de Fourier, vous savez que celles-ci concernent les fonctions **périodiques** : nous allons donc considérer virtuellement que nos images (sous forme de matrices lignes) forment en fait des images périodiques, qui se répètent à l'infini à gauche comme à droite. Enfin, la transformée de Fourier fait intervenir les nombres complexes : il est donc essentiel de considérer que les coefficients des matrices lignes peuvent être complexes pour avoir une totale liberté (par exemple considérer que la transformée est elle-même une image).

1 TFD en 1D

1.1 Espaces des suites périodiques

Imaginons qu'on ait une image (sur une seule ligne, pour l'instant) composée de 4 pixels ayant chacun pour valeurs a, b, c et d. Notre image est donc le quadruplet (a, b, c, d). La périodiser, c'est alors former la suite infinie (à gauche comme à droite) $(\dots, b, c, d, a, b, c, d, a, b, c, d, a, b, c, \dots)$. Nous allons donc ci-dessous nous intéresser directement aux versions périodiques de nos images, mais nous ferons rapidement le lien avec les images non périodiques.

Définition 1 (Espaces des suites périodiques)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont N-périodiques, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, u(x + N) = u(x)$$

Proposition 1 (Produit scalaire sur l'espace des suites périodiques)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Pour tout u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, posons $\langle u|v\rangle := \sum_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{v(x)}$.
   Alors $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

1. L'ensemble des applications $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ est naturellement munit d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel, dont $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est un sous-ensemble. Montrons que c'en est un sous-espace.

- L'application nulle est évidemment N-périodique.
- Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a alors

  $$(u + \lambda v)(x + N) = u(x + N) + \lambda v(x + N) = u(x) + \lambda v(x) = (u + \lambda v)(x)$$

  Donc $u + \lambda v$ est dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Donc $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$.
Donc $\boxed{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel}}$.

2. $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est à symétrie hermitienne.

Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On a alors $\overline{\langle v|u\rangle} = \sum\limits_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)\overline{u(x)}} = \sum\limits_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)\overline{u(x)}} = \sum\limits_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)}\,\overline{\overline{u(x)}} = \sum\limits_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)}u(x)$

$= \sum\limits_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{v(x)} = \langle u|v\rangle$.

$\langle\bullet|\bullet\rangle$ est linéaire à gauche.

Soient u, v et w dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors $\langle u + \lambda v|w\rangle = \sum\limits_{x=0}^{N-1} (u + \lambda v)(x)\overline{w(x)} = \sum\limits_{x=0}^{N-1} \big(u(x) + \lambda v(x)\big)\overline{w(x)}$

$= \sum\limits_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{w(x)} + \lambda \sum\limits_{x=0}^{N-1} v(x)\overline{w(x)} = \langle u|w\rangle + \lambda \langle v|w\rangle$.

$\langle\bullet|\bullet\rangle$ est semi-linéaire à droite.

Soient u, v et w dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors $\langle u|v + \lambda w\rangle \underset{\text{symétrie hermitienne}}{=} \overline{\langle v + \lambda w|u\rangle} \underset{\text{linéarité à gauche}}{=} \overline{\langle v|u\rangle + \lambda \langle w|u\rangle}$

$= \overline{\langle v|u\rangle} + \overline{\lambda}\,\overline{\langle w|u\rangle} \underset{\text{symétrie hermitienne}}{=} \langle u|v\rangle + \overline{\lambda} \langle u|w\rangle$.

$\langle\bullet|\bullet\rangle$ est définie positive.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On a $\langle u|u\rangle = \sum\limits_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{u(x)} = \sum\limits_{x=0}^{N-1} \big|u(x)\big|^2 \geq 0$, d'où la positivité.

Supposons alors que $\langle u|u\rangle = 0$.

On a donc $\sum\limits_{x=0}^{N-1} \big|u(x)\big|^2 = 0$.

Or une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul.

Donc pour tout $x \in [\![0; N-1]\!]$, on a $\big|u(x)\big|^2 = 0$ et donc $u(x) = 0$.

Or $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ donc u est N périodique et donc u est nulle sur tout $\mathbb{Z}$.

D'où le côté défini.

Ainsi, $\langle\bullet|\bullet\rangle$ est sesquilinéaire, à symétrie hermitienne, et définie positif.

Donc $\boxed{\langle\bullet|\bullet\rangle \text{ est un produit scalaire hermitien}}$.

CQFD.

Remarque :

Cela permet de munir $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ de la norme issue du produit scalaire hermitien : $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, ||u|| = \sqrt{\sum\limits_{x=0}^{N-1} \big|u(x)\big|^2}$.

Fort heureusement, même si on périodise artificiellement nos images, on a une isométrie naturelle entre les images périodiques et leur version non périodique : on peut donc jongler entre les deux.

Proposition 2 (Identification aux uplets)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

L'application $\varphi := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ u & \longmapsto & \big(u(x)\big)_{x\in[\![0;N-1]\!]} \end{pmatrix}$ est un isométrie de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Démonstration

• Étant donné $c = (c_0, \ldots, c_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, on peut définir une application $\psi_c \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ en prolongeant c par périodicité. Soit alors $\psi := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ c & \longmapsto & \psi_c \end{pmatrix}$.

• Pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, restreindre u à $[\![0; N-1]\!]$ puis prolonger le résultat par N-périodicité redonne u, d'où le fait que $(\psi \circ \varphi)(u) = u$ et donc $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.
De même, pour tout $c \in \mathbb{C}^N$, prolonger c par N-périodicité puis restreindre le résultat à $[\![0; N-1]\!]$ redonne c, d'où le fait que $(\varphi \circ \psi)(c) = c$ et donc $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^N}$.
Ainsi φ est bijective de réciproque ψ.

• Montrons que φ est linéaire.

Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
On a alors $\varphi(u + \lambda v) = \big((u + \lambda v)(x)\big)_{x\in[\![0;N-1]\!]} = \big(u(x) + \lambda v(x)\big)_{x\in[\![0;N-1]\!]}$
$= \big(u(x)\big)_{x\in[\![0;N-1]\!]} + \lambda\big(v(x)\big)_{x\in[\![0;N-1]\!]} = \varphi(u) + \lambda\varphi(v)$.

Donc φ est linéaire.

• Montrons que φ est isométrique.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On a alors $\big|\big|\varphi(u)\big|\big| = \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} \big|\varphi(u)_x\big|^2} = \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1} \big|u(x)\big|^2} = ||u||$.

Donc φ est isométrique.

Finalement, φ est bijective, linéaire et isométrique.
Donc $\boxed{\varphi \text{ est une isométrie}}$.
CQFD.

Définition 2 (Dirac de base des suites périodiques)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![0; N-1]\!]$.

On note δ_a l'application $\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \equiv a[N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right)$.

Proposition 3 (Les Dirac de base forment une base)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Alors $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

• Soit $a \in [\![0, N-1]\!]$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $x + N \equiv x[N]$ donc $x + N \equiv a[N] \iff x \equiv a[N]$ donc $\delta_a(x+N) = \delta_a(x)$.
Donc $\delta_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

• Montrons que $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Posons $v := \sum\limits_{a=0}^{N-1} u(a)\delta_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Montrons que $u = v$.

Soit $x \in [\![0, N-1]\!]$.
On a alors $u(x) = u(x)\delta_x(x) = u(x)\delta_x(x) + \sum\limits_{\substack{a=0 \\ a \neq x}}^{N-1} u(a)\delta_a(x) = \sum\limits_{a=0}^{N-1} u(a)\delta_a(x) = v(x)$.

Donc $\forall x \in [\![0, N-1]\!], u(x) = v(x)$.
Donc par N-périodicité, on a $\forall x \in \mathbb{Z}, u(x) = v(x)$.
Donc $u = v$ et donc u est engendré par $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$.

Donc $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Or $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^N$ d'après la proposition précédente.
Donc $\dim(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}) = N$.
Donc $\boxed{\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right) \text{ est une base de } \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.
CQFD.

1.2 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Il est temps comme promis de définir la transformée de Fourier pour nos suites périodiques. Avant cela, pour bien comprendre le lien avec les notions de Fourier vues au semestre précédent, récapitulons-les :

1. Pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, si $f \in L^1$ alors on peut définir sa transformée de Fourier $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi t x} \, \mathrm{d}x$$
Pour $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, si g est L^1 alors on peut définir sa transformée de Fourier inverse $\check{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \check{g}(x) := \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{2i\pi t x} \, \mathrm{d}t$$
On remarque alors que si $\widehat{f}$ est L^1, alors f est égale presque partout à $\check{\widehat{f}}$.

2. Pour $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, si f est T-périodique et f est L^1 sur $[0, T]$, alors on peut définir sa transformée de Fourier $\widehat{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ par
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \widehat{f}(n) := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2i\pi n x}{T}} \, \mathrm{d}x$$
(on note souvent $c_n(f) = \widehat{f}(n)$, c'est le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f)
Pour $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, si u est ℓ^1, alors on peut définir sa transformée de Fourier inverse $\check{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \check{u}(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n) e^{\frac{2i\pi n x}{T}}$$
On remarque alors que si f est L^2, alors $f \underset{L^2}{=} \check{\widehat{f}}$.

Nous sommes à présents armés pour définir encore une nouvelle transformée de Fourier.

Définition 3 (TFD)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **TFD** de u l'application $\widehat{u} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par
$$\forall a \in \mathbb{Z}, \widehat{u}(a) := \sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{-\frac{2i\pi x a}{N}}$$

Proposition 4 (La TFD d'une périodique est périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Alors $\widehat{u} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{Z}$.
On a alors $\widehat{u}(a+N) = \sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi x(a+N)}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}}e^{-\frac{2i\pi xN}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}}e^{-2i\pi x}$
$= \sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}} \times 1 = \sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}} = \widehat{u}(a)$.
CQFD.

Définition 4 (TFD inverse)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **TFD inverse** de v l'application $\check{v} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \check{v}(x) = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1} v(a)e^{\frac{2i\pi ax}{N}}$$

Vous remarquerez ici que le choix de diviser par N (la période) a été fait pour la transformée inverse, et non la transformée directe. Pourtant, pour les séries de Fourier on avait divisé par T (la période) lors de la transformée directe. Il n'est pas compliqué de se convaincre que ça n'a aucune importance par linéarité. Il faut juste se fixer une convention, et s'y tenir pour la suite du cours.

Proposition 5 (Réécriture de la TFD inverse avec la TFD directe)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x) = \frac{1}{N}\widehat{v}(-x)$.
En particulier, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{v}(x) = N\check{v}(-x)$.

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x) = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1} v(a)e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1} v(a)e^{\frac{-2i\pi a(-x)}{N}} = \frac{1}{N}\widehat{v}(-x)$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x) = \frac{1}{N}\widehat{v}(-x)$.
En particulier, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(-x) = \frac{1}{N}\widehat{v}(x)$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $N\check{v}(-x) = \widehat{v}(x)$.
CQFD.

Proposition 6 (La TFD inverse d'une périodique est périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Alors $\widecheck{v} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

On a vu à la proposition précédente que tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\widecheck{v}(x) = \dfrac{1}{N}\widehat{v}(-x)$.

Or comme $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\widehat{v} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\widecheck{v}(x+N) = \dfrac{1}{N}\widehat{v}(-x-N) = \dfrac{1}{N}\widehat{v}(-x) = \widecheck{v}(x)$.

Donc $\boxed{\widecheck{v} \text{ est } N\text{-périodique}}$.

Lemme 1 (Lemme de la TFD)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in [\![0, N-1]\!]$.
On a alors $\sum\limits_{a=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a = N\mathbb{1}_{x=y}$.

Démonstration

Posons $q := e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}$, de sorte que $\sum\limits_{a=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a = \sum\limits_{a=0}^{N-1} q^a$ et $q^N = e^{\frac{2i\pi(x-y)N}{N}} = e^{2i\pi(x-y)} = 1$.

• Si $x = y$, alors $q = e^{\frac{2i\pi(x-x)}{N}} = e^0 = 1$ et donc $\sum\limits_{a=0}^{N-1} q^a = \sum\limits_{a=0}^{N-1} 1^a = \sum\limits_{\xi=0}^{N-1} 1 = N = N\mathbb{1}_{x=y}$.

• Supposons que $x \neq y$.

Comme $0 \leq x \leq N-1$ et $0 \leq y \leq N-1$ on a $-(N-1) \leq -y \leq 0$ et donc $-(N-1) \leq x-y \leq N-1$.

Or le seul multiple de N dans $[\![-(N-1), N-1]\!]$ est 0.

Donc comme $x - y \neq 0$, $x - y$ n'est pas un multiple de N.

Donc $q = e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}} \neq 1$ et donc $\sum\limits_{a=0}^{N-1} q^a = \dfrac{1-q^N}{1-q} = \dfrac{1-1}{1-q} = 0 = N\mathbb{1}_{x=y}$.

Dans tous les cas, on a bien $\boxed{\sum\limits_{a=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a = N\mathbb{1}_{x=y}}$.

CQFD.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, que ne demande pas d'être L^1 ou ℓ^1 comme c'était le cas dans le cours du semestre précédent, tout simplement parce que les sommes en jeu sont ici finies : ouf, tout va bien !

Théorème 1 (La TFD est un isomorphisme)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

L'application $\varphi := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ u & \longmapsto & \widehat{u} \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

L'application $\psi := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ v & \longmapsto & \widecheck{v} \end{pmatrix}$ est la réciproque de φ.

En particulier, pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\widecheck{\widehat{u}} = u$ et $\widehat{\widecheck{u}} = u$.

Démonstration

• Commençons par montrer que φ est linéaire.

Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\widehat{u+\lambda v}\,(a) &= \sum_{x=0}^{N-1}(u+\lambda v)(x)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1}\big(u(x)+\lambda v(x)\big)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} \\ &= \sum_{x=0}^{N-1}u(x)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} + \lambda\sum_{x=0}^{N-1}v(x)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} = \widehat{u}(a)+\lambda\widehat{v}(a) \\ &= \big(\widehat{u}+\lambda\widehat{v}\big)(a)\end{aligned}$$

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\widehat{u+\lambda v}\,(a) = \big(\widehat{u}+\lambda\widehat{v}\big)(a)$.

Donc $\widehat{u+\lambda v} = \widehat{u}+\lambda\widehat{v}$.

Donc $\varphi(u+\lambda v) = \varphi(u)+\lambda\varphi(v)$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$.

• Montrons que ψ est linéaire.

Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\widecheck{u+\lambda v}\,(x) &\underset{5\text{ p. }11}{=} \frac{1}{N}\widehat{u+\lambda v}\,(-x) = \frac{1}{N}\big(\widehat{u}+\lambda\widehat{v}\big)(-x) = \frac{1}{N}\big(\widehat{u}(-x)+\lambda\widehat{v}(-x)\big) \\ &= \frac{1}{N}\widehat{u}(-x)+\lambda\frac{1}{N}\widehat{v}(-x) \underset{5\text{ p. }11}{=} \widecheck{u}(x)+\lambda\widecheck{v}(x) \\ &= \big(\widecheck{u}+\lambda\widecheck{v}\big)(x)\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\widecheck{u+\lambda v}\,(x) = \big(\widecheck{u}+\lambda\widecheck{v}\big)(x)$.

Donc $\widecheck{u + \lambda v} = \check{u} + \lambda \check{v}$.

Donc $\psi(u + \lambda v) = \psi(u) + \lambda\psi(v)$.

Donc $\boxed{\psi \text{ est linéaire}}$.

• Montrons que pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\check{\widehat{u}} = u$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Soit $x \in [\![0, N-1]\!]$.

On a alors

$$\check{\widehat{u}}(x) = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1}\widehat{u}(a)e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)e^{\frac{-2i\pi ay}{N}}e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{a=0}^{N-1}u(y)e^{\frac{-2i\pi ay}{N}}e^{\frac{2i\pi ax}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)\sum_{a=0}^{N-1}e^{\frac{2i\pi a(x-y)}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)\sum_{a=0}^{N-1}\left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)N\mathbb{1}_{x=y} \text{ d'après le lemme}$$

$$= \sum_{y=0}^{N-1}u(y)\mathbb{1}_{x=y} = u(x)$$

Donc $\check{\widehat{u}}(x) = u(x)$.

Donc pour tout $x \in [\![0, N-1]\!]$, on a $\check{\widehat{u}}(x) = u(x)$.

Soit $z \in \mathbb{Z}$.

Soit x le reste dans la division euclidienne de z par N.

On a que $z - x$ est un multiple de N et $x \in [\![0, N-1]\!]$.

Donc d'après ce qui précède, on a $\check{\widehat{u}}(x) = u(x)$.

Or u, $\widehat{u}$ et donc $\check{\widehat{u}}$ sont N-périodiques.

Donc $\check{\widehat{u}}(z) = \check{\widehat{u}}(x + z - x) = \check{\widehat{u}}(x) = u(x) = u(x + z - x) = u(z)$.

Donc pour tout $z \in \mathbb{Z}$, on a $\check{\widehat{u}}(z) = u(z)$.

Donc $\check{\widehat{u}} = u$.

Donc pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\check{\widehat{u}} = u$, c'est-à-dire $\boxed{\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}}$.

• Comme $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$, φ est inversible à gauche donc est injective.

Or $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est de dimension finie, et on a montré que φ est linéaire.

Donc φ est bijective : c'est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On a alors $\psi = \psi \circ \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}} = \psi \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}} \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1}$.

Donc $\boxed{\psi \text{ est la bijection réciproque de } \varphi}$.

CQFD.

Proposition 7 (Produit scalaire, norme et TFD)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$.

1. $\forall u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, \langle \widehat{u} | v \rangle = N \langle u | \check{v} \rangle$.
2. $\forall u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, \langle \widehat{u} | \widehat{v} \rangle = N \langle u | v \rangle$
3. $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, \left|\left|\widehat{u}\right|\right| = \sqrt{N}\, ||u||$.

Démonstration

1. Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{u} | v \rangle &= \sum_{a=0}^{N-1} \widehat{u}(a)\overline{v(a)} = \sum_{a=0}^{N-1}\sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{\frac{-2i\pi x a}{N}} \overline{v(a)} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \sum_{a=0}^{N-1} e^{\frac{-2i\pi x a}{N}} \overline{v(a)} \\
&= \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \sum_{a=0}^{N-1} \overline{v(a) e^{\frac{2i\pi x a}{N}}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \overline{\sum_{a=0}^{N-1} v(a) e^{\frac{2i\pi x a}{N}}} = N \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \overline{\frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} v(a) e^{\frac{2i\pi x a}{N}}} \\
&= N \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \overline{\check{v}(x)} = N \langle u | \check{v} \rangle
\end{aligned}$$

2. Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On a alors $\langle \widehat{u} | \widehat{v} \rangle \underset{1.}{=} N \left\langle u \middle| \check{\widehat{v}} \right\rangle = N \langle u | v \rangle$ car $\check{\widehat{v}} = v$.

3. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On a alors $\left|\left|\widehat{u}\right|\right|^2 = \langle \widehat{u} | \widehat{u} \rangle \underset{2.}{=} N \langle u | u \rangle = N\, ||u||^2$ donc $\left|\left|\widehat{u}\right|\right| = \sqrt{N}\, ||u||$.
CQFD.

Définition 5 (Spectre d'amplitude et spectre de phase)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

1. On appelle **spectre d'amplitude** de u la fonction $S_u := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ a & \longmapsto & \left|\widehat{u}(a)\right| \end{pmatrix}$
2. Soit $E_u := \left\{ a \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \widehat{u}(a) \neq 0 \right\}$.

   On appelle **spectre de phase** de u la fonction $\varphi_u := \begin{pmatrix} E_u & \longrightarrow & [0, 2\pi[\\ a & \longmapsto & \arg\left(\widehat{u}(a)\right) \end{pmatrix}$

Quand nous aborderons enfin les images 2D, nous verrons à quoi servent ces deux spectres : le spectre d'amplitude donne des informations sur les "variations brutes" (par exemple sur une photo d'un t-shirt rayé, il porterait l'information des rayures), tandis que le spectre de phase donne des informations sur la géométrie de l'image. Nous verrons à ce moment-là des exemples visuels.

Les images qui nous intéressent sont avant tout des images à coefficients réels. Voyons donc quelques caractéristiques intéressantes des suites périodiques réelles.

Proposition 8 (TFD d'une suite périodique réelle)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Si $\forall x \in \mathbb{Z}, u(x) \in \mathbb{R}$, alors :

1. $\forall a \in \mathbb{Z}, \widehat{u}(-a) = \overline{\widehat{u}(a)}$
2. La fonction $\left|\widehat{u}\right| : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est paire.

Démonstration

Supposons que $\forall x \in \mathbb{Z}, u(x) \in \mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$\widehat{u}(-a) = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{\frac{-2i\pi x(-a)}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}} \underset{u(x)\in\mathbb{R}}{=} \sum_{x=0}^{N-1} \overline{u(x) e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}} = \overline{\sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}}$$
$$= \overline{\widehat{u}(a)}$$

2. Soit $a \in \mathbb{Z}$.
On a alors $\left|\widehat{u}(-a)\right| \underset{1.}{=} \left|\overline{\widehat{u}(a)}\right| = \left|\widehat{u}(a)\right|$.
D'où la partié de $\left|\widehat{u}\right|$.
CQFD.

1.3 Base orthogonales des suites périodiques

Théorème 2 (Base orthogonale des suites périodiques)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $a \in [\![0, N-1]\!]$, notons $e_a := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{\frac{2i\pi ax}{N}} \end{pmatrix}$.

Pour tout a et b dans $[\![0, N-1]\!]$, on a

$$\langle e_a | e_b \rangle = N \mathbb{1}_{a=b}$$

En particulier, $(e_a)_{a\in[\![0,N-1]\!]}$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Démonstration

• Soit $a \in [\![0, N-1]\!]$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$e_a(x+N) = e^{\frac{2i\pi a(x+N)}{N}} = e^{\frac{2i\pi ax}{N}} e^{\frac{2i\pi aN}{N}} = e^{\frac{2i\pi ax}{N}} e^{2i\pi a} = e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = e_a(x)$$

Donc $e_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

• Soient a et b dans $[\![0, N-1]\!]$.
On a alors

$$\begin{aligned}\langle e_a | e_b \rangle &= \sum_{x=0}^{N-1} e_a(x)\overline{e_b(x)} = \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi ax}{N}} \overline{e^{\frac{2i\pi bx}{N}}} = \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi ax}{N}} e^{-\frac{2i\pi bx}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi(a-b)x}{N}} \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(a-b)}{N}}\right)^x = N\mathbb{1}_{a=b} \text{ d'après le lemme 1 page 12}\end{aligned}$$

CQFD.

Remarque :
Ainsi, $\left(\frac{1}{\sqrt{N}} e_a\right)_{a \in [\![0,N-1]\!]}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
En effet, on sait que c'est une base orthogonale d'après le théorème précédent.
De plus, pour tout $a \in [\![0, N-1]\!]$, on a $||e_a||^2 = \langle e_a | e_a \rangle = N$ donc $||e_a|| = \sqrt{N}$ donc $\frac{1}{\sqrt{N}} e_a$ est normé.

Exemple :

On prend $N \geq 7$ et $u := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\frac{6\pi x}{N}\right) \end{array}\right)$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$u(x+N) = \sin\left(\frac{6\pi(x+N)}{N}\right) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N} + \frac{6\pi N}{N}\right) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N} + 6\pi\right) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N}\right) = u(x)$$

Donc $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$: on peut la décomposer dans la base $(e_a)_{a \in [\![0,N-1]\!]}$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$u(x) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N}\right) = \frac{e^{i\frac{6\pi x}{N}} - e^{-i\frac{6\pi x}{N}}}{2i} = \frac{e^{\frac{2i\pi 3x}{N}} - e^{\frac{-2i\pi 3x}{N}}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{\frac{2i\pi 3x}{N}} - \frac{1}{2i} e^{\frac{2i\pi(-3)x}{N}} = \frac{1}{2i} e_3(x) - \frac{1}{2i} e_{-3}(x)$$

On a donc $u = \frac{1}{2i} e_3 - \frac{1}{2i} e_{-3}$.

Proposition 9 (Lien entre les deux bases des suites périodiques)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $a \in [\![0, N-1]\!]$, on a $\widehat{\delta_a} = e_{-a}$.

Démonstration

Soit $a \in [\![0, N-1]\!]$.

Pour tout $b \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{\delta_a}(b) = \sum_{x=0}^{N-1} \delta_a(x) e^{\frac{-2i\pi xb}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} \mathbb{1}_{a=x} e^{\frac{-2i\pi xb}{N}} = e^{\frac{-2i\pi ab}{N}} = e_{-a}(b)$.

CQFD.

Notations :
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega_N := e^{-\frac{2i\pi}{N}}$.

Définition 6 (Matrice de Vandermonde-Fourier)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice de Vandermonde-Fourier** d'ordre N la matrice

$$W_N := \left(\omega_N^{jk}\right)_{\substack{0 \leq j \leq N-1 \\ 0 \leq k \leq N-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_N^3 & \omega_N^6 & \dots & \omega_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Proposition 10 (Matrice de Wandermonde-Fourier et TFD)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $j \in [\![0, N-1]\!]$, $\widehat{\delta_j}$ s'identifie à la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de W_N.

   Autrement dit, on a $W_N = \begin{pmatrix} \widehat{\delta_0}(0) & \widehat{\delta_0}(1) & \cdots & \widehat{\delta_0}(N-1) \\ \widehat{\delta_1}(0) & \widehat{\delta_1}(1) & \cdots & \widehat{\delta_1}(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\delta_{N-1}}(0) & \widehat{\delta_{N-1}}(1) & \cdots & \widehat{\delta_{N-1}}(N-1) \end{pmatrix}$.

2. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. Posons $U = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix}$ et $\widehat{U} = \begin{pmatrix} \widehat{u}(0) \\ \widehat{u}(1) \\ \vdots \\ \widehat{u}(N-1) \end{pmatrix}$.

   On a alors $\widehat{U} = W_N U$.

Démonstration

1. Soit $j \in [\![0, N-1]\!]$.
Soit $v_j \in \mathbb{C}^N$ la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de W_N.
On a donc

$$\begin{aligned} v_j &= \begin{pmatrix} 1 & \omega_N^j & \omega_N^{2j} & \dots & \omega_N^{j(N-1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{-2i\pi 0 j}{N}} & e^{\frac{-2i\pi 1 j}{N}} & e^{\frac{-2i\pi 2 j}{N}} & \dots & e^{\frac{-2i\pi (N-1) j}{N}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_{-j}(0) & e_{-j}(1) & e_{-j}(2) & \dots & e_{-j}(N-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widehat{\delta_j}(0) & \widehat{\delta_j}(1) & \widehat{\delta_j}(2) & \dots & \widehat{\delta_j}(N-1) \end{pmatrix} \text{ d'après la proposition 9 page 17} \end{aligned}$$

2. Soit $j \in [\![0, N-1]\!]$.
La $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $W_N U$ est le produit de la $(j+1)^{\text{ème}}$ de W_N par U.
Donc la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $W_N U$ est d'après 1

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widehat{\delta_j}(0) & \dots & \widehat{\delta_j}(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{\delta_j}(k) u(k) \\ &\underset{9 \text{ p. } 17}{=} \sum_{k=0}^{N-1} u(k) e_{-j}(k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} u(k) e^{\frac{-2i\pi jk}{N}} \\ &= \widehat{u}(j) \end{aligned}$$

Donc la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $W_N U$ est la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $\widehat{U}$.
CQFD.

Proposition 11 (Propriétés de la matrice de Vandermonde-Fourier)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Alors W_N est symétrique, inversible avec $W_N^{-1} = \dfrac{1}{N}\overline{W_N}$.
De plus, $\dfrac{1}{\sqrt{N}} W_N$ est unitaire.

Démonstration

• Par définition, la composante à la $k^{\text{ème}}$ligne et à la $j^{\text{ème}}$colonne de W_N est ω_N^{jk}.
Comme $jk = kj$, c'est donc aussi la composante à la $j^{\text{ème}}$ligne et à la $k^{\text{ème}}$colonne de W_N.
Donc $\boxed{W_N \text{ est symétrique}}$.

• Par définition, on a $W_N = \left(\omega_N^{jk}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}} = \left(e^{-\frac{2i\pi kj}{N}}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}}$.
On a donc $\overline{W_N} = \left(\overline{e^{-\frac{2i\pi kj}{N}}}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}} = \left(e^{\frac{2i\pi kj}{N}}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}}$.
La composante à la $k^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\overline{W_N}W_N$ est donc

$$\sum_{\xi=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi k\xi}{N}} e^{-\frac{2i\pi \xi j}{N}} = \sum_{\xi=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(k-j)}{N}}\right)^{\xi} = N\mathbb{1}_{j=k}$$

en ayant utilisé le lemme 1 page 12.

Autrement dit, $\overline{W_N}W_N = \begin{pmatrix} N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & N \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = NI_N$.

Donc $\frac{1}{N}\overline{W_N}W_N = I_N$ et donc $\boxed{W_N \text{ est inversible d'inverse } \frac{1}{N}\overline{W_N}}$.

• Comme W_N est symétrique, son adjointe est juste $\overline{W_N}$.
Donc l'adjointe de $\frac{1}{\sqrt{N}}W_N$ est $\frac{1}{\sqrt{N}}\overline{W_N}$.
Or on a vu que $\frac{1}{\sqrt{N}}W_N \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}\overline{W_N} = W_N \cdot \frac{1}{N}\overline{W_N} = I_N$.
Donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{N}}W_N \text{ est unitaire}}$.
CQFD.

Remarque :
Il existe un algorithme de calcul de TFD dont la complexité est $O\big(N\ln(N)\big)$.
C'est l'algorithme de **transformée de Fourier rapide** (Fast Fourier Transform, FFT).

2 Convolution périodique en 1D

2.1 Convolution périodique

Définition 7 (Convolution périodique)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **convolution** de u par v l'application $u * v : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (u * v)(x) := \sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y)$$

Proposition 12 (Propriétés de la convolution périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

1. $u * v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
2. $\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}$
3. $\widehat{uv} = \frac{1}{N}\widehat{u} * \widehat{v}$