# Bases pour le traitement d’image
-
# Florian Langlois d’après le cours de Julie Delon

*Transport optimal de couleurs*

Année universitaire 2022-2023

Université Paris Cité

# Table des matières

# Chapitre 1

# Transformée de Fourier discrète

Une image est une espèce de grille constituée de pixels. Par exemple si l'on prend cette image et que l'on s'amuse à zommer dessus, on pourra voir apparaître des cases d'une seule couleur : ce sont les fameux **pixels**.

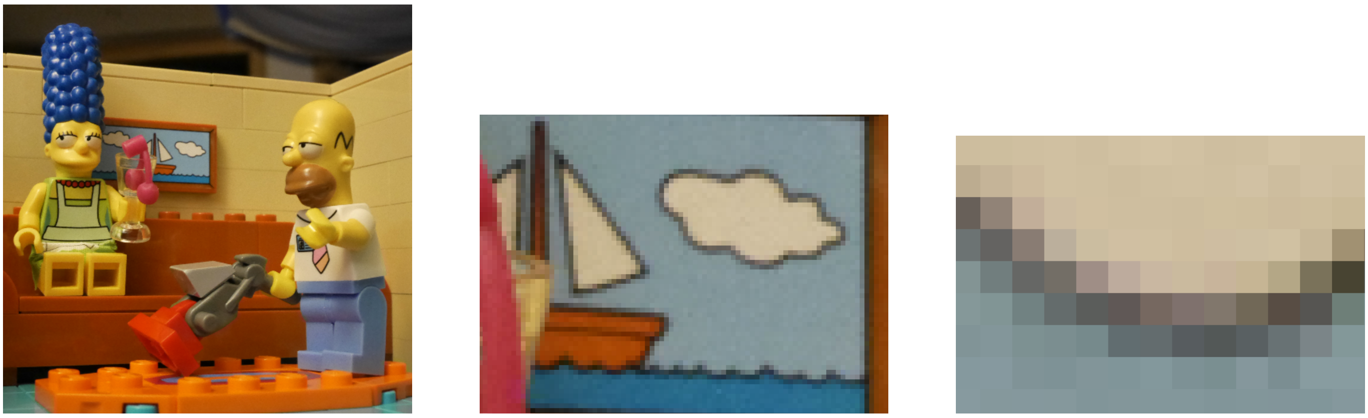

FIGURE 1.1 – *Une image de plus en plus zoomée*

De cette manière, il paraît légitime de modéliser une image par une matrice dont chaque coefficient représente un pixel. Un pixel est alors un triplet $(R, V, B)$, où chaque élément du triplet est un nombre réel qui représente la proportion de rouge, de vert et de bleu qui composent sa couleur. En ayant ainsi modélisé notre image, nous pourrons effectuer dessus des opérations mathématiques comme avec n'importe quelle matrice. Nous aurons ainsi à notre disposition toute une batterie d'outils très pratique pour jouer sur les images, et notamment la **transformée de Fourier**.

Cependant, afin de mieux appréhender ces différents outils, nous commencerons par nous intéresser uniquement des images en nuances de gris, de sorte à ce qu'un pixel ne soit plus un triplet de réels, mais un simple nombre réel. Remarquons aussi qu'une image/matrice est en quelque sorte un objet en deux dimensions (longueur et largeur) : nous allons aussi simplifier cela dans en un premier temps et n'étudier au premier abord que des objets à une seule dimension (par exemple une image sur une seule ligne ou une seule colonne, ou encore un signal sonore). Nous étudierons donc dans un premier temps les matrices lignes.

L'outil au cœur de ce chapitre est la **transformée de Fourier**. La transformée de Fourier fait intervenir les nombres complexes : il est donc essentiel de considérer que les coefficients des matrices lignes peuvent être complexes pour avoir une totale liberté (par exemple considérer que la transformée est elle-même une image).

# 1 TFD en 1D

## 1.1 Espaces des suites périodiques

Imaginons qu'on ait une image (sur une seule ligne, pour l'instant) composée de $4$ pixels ayant chacun pour valeurs $a$, $b$, $c$ et $d$. Notre image est donc le quadruplet $(a, b, c, d)$. La périodiser, c'est alors former la suite infinie (à gauche comme à droite) $(\dots, b, c, d, a, b, c, d, a, b, c, d, a, b, c, \dots)$.

**Définition 1 (Suites périodiques)**

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$.
On dit que $u$ est **$N$-périodique** si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{Z}, u(x + N) = u(x)$$

On note $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ l'ensemble des suites $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont $N$-périodiques.

**Proposition 1 (Espace des suites périodiques)**

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Pour tout $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, posons $\langle u|v\rangle := \sum\limits_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{v(x)}$.
   Alors $\langle \bullet|\bullet\rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

*Démonstration*

1. L'ensemble des suites $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, dont $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est une partie, est naturellement munit d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ en est un sous-espace vectoriel.

- La suite nulle est évidemment $N$-périodique donc dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
- Soient $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $(u+\lambda v)(x+N) = u(x+N)+\lambda v(x+N) = u(x)+\lambda v(x) = (u+\lambda v)(x)$.
  Donc $u + \lambda v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Donc $\boxed{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel}}$.

2. $\langle \bullet|\bullet\rangle$ est à symétrie hermitienne.
   Soient $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
   On a alors

$$\overline{\langle v|u\rangle} = \overline{\sum_{x=0}^{N-1} v(x)\overline{u(x)}} = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)\overline{u(x)}} = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)}\,\overline{\overline{u(x)}} = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{v(x)}u(x) = \sum_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{v(x)} = \langle u|v\rangle$$

$\langle\bullet|\bullet\rangle$ est linéaire à gauche.

Soient $u$, $v$ et $w$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\langle u+\lambda v|w\rangle &= \sum_{x=0}^{N-1}(u+\lambda v)(x)\overline{w(x)} = \sum_{x=0}^{N-1}\big(u(x)+\lambda v(x)\big)\overline{w(x)} \\ &= \sum_{x=0}^{N-1}u(x)\overline{w(x)} + \lambda\sum_{x=0}^{N-1}v(x)\overline{w(x)} = \langle u|w\rangle + \lambda\,\langle v|w\rangle\end{aligned}$$

$\langle\bullet|\bullet\rangle$ est semi-linéaire à droite.

Soient $u$, $v$ et $w$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors $\langle u|v+\lambda w\rangle \underset{\text{symétrie hermitienne}}{=} \overline{\langle v+\lambda w|u\rangle} \underset{\text{linéarité à gauche}}{=} \overline{\langle v|u\rangle + \lambda\,\langle w|u\rangle}$
$= \overline{\langle v|u\rangle} + \overline{\lambda}\,\overline{\langle w|u\rangle} \underset{\text{symétrie hermitienne}}{=} \langle u|v\rangle + \overline{\lambda}\,\langle u|w\rangle$.

$\langle\bullet|\bullet\rangle$ est définie positive.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On a $\langle u|u\rangle = \sum\limits_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{u(x)} = \sum\limits_{x=0}^{N-1}\big|u(x)\big|^2 \geq 0$, d'où la positivité.

Supposons alors que $\langle u|u\rangle = 0$.
On a donc $\sum\limits_{x=0}^{N-1}\big|u(x)\big|^2 = 0$.
Or une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul.

Donc pour tout $x \in [\![0, N-1]\!]$, on a $\big|u(x)\big|^2 = 0$ et donc $u(x) = 0$.

Donc $u$ est nulle sur $[\![0, N-1]\!]$ et donc sur tout $\mathbb{Z}$ par $N$-périodicité.

Donc $u$ est la fonction nulle, d'où le côté défini.

Ainsi, $\langle\bullet|\bullet\rangle$ est sesquilinéaire, à symétrie hermitienne, et définie positif.

Donc $\boxed{\langle\bullet|\bullet\rangle \text{ est un produit scalaire hermitien}}$.

**CQFD**.

**Remarque** :
Cela permet de munir $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ de la norme issue du produit scalaire hermitien :

$$\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}, ||u|| := \sqrt{\langle u|u\rangle} = \sqrt{\sum_{x=0}^{N-1}\big|u(x)\big|^2}$$

Si besoin est, on peut toujours passer des images périodiques aux images non périodiques simpleme, via l'isométrie suivante.

## Proposition 2 (Isométrie avec les uplets)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

L'application $\varphi := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ u & \longmapsto & \big(u(x)\big)_{x\in[\![0,N-1]\!]} \end{pmatrix}$ est une isométrie de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

*Démonstration*

• On peut considérer l'application $\psi : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ qui prend un $N$-uplet et le prolonge à gauche et à droite par $N$-périodicité. Il n'est pas difficile de constater que $\varphi$ et $\psi$ sont réciproques l'une de l'autre, ce qui les rend bijectives.

• Montrons que $\varphi$ est linéaire.

Soient $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\varphi(u+\lambda v) &= \big((u+\lambda v)(x)\big)_{x\in[\![0,N-1]\!]} = \big(u(x)+\lambda v(x)\big)_{x\in[\![0,N-1]\!]} \\ &= \big(u(x)\big)_{x\in[\![0,N-1]\!]} + \lambda\big(v(x)\big)_{x\in[\![0,N-1]\!]} = \varphi(u)+\lambda\varphi(v)\end{aligned}$$

• Montrons que $\varphi$ est isométrique.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On a alors $\big|\big|\varphi(u)\big|\big|_{\mathbb{C}^N} = \sqrt{\sum_{x=0}^{N} \big|\varphi(u)_x\big|^2} = \sqrt{\sum_{x=0}^{N} \big|u(x)\big|^2} = ||u||_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$

Ainsi, $\varphi$ est bijective, linéaire et isométrique.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une isométrie}}$.

**CQFD**.

## Définition 2 (Dirac de base des suites périodiques)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![0; N-1]\!]$.

On note $\delta_a$ l'application $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \equiv a[N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix}$.

**Proposition 3 (Les Dirac de base forment une base)**

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Alors $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

*Démonstration*

• Soit $a \in [\![0, N-1]\!]$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $x+N \equiv x[N]$ donc $\left(x+N \equiv a[N]\right) \iff \left(x \equiv a[N]\right)$ donc $\delta_a(x+N) = \delta_a(x)$.
Donc $\boxed{\delta_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.

• Montrons que $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Posons $v := \sum\limits_{a=0}^{N-1} u(a)\delta_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Montrons que $u = v$.

Soit $x \in [\![0, N-1]\!]$.
On a alors $u(x) = u(x)\delta_x(x) = u(x)\delta_x(x) + \sum\limits_{\substack{a=0 \\ a\neq x}}^{N-1} u(a)\delta_a(x) = \sum\limits_{a=0}^{N-1} u(a)\delta_a(x) = v(x)$.

Donc $\forall x \in [\![0, N-1]\!], u(x) = v(x)$.
Donc par $N$-périodicité, on a $\forall x \in \mathbb{Z}, u(x) = v(x)$.
Donc $u = v$ et donc $u$ est engendré par $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$.

Donc $\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Or $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^N$ d'après la proposition précédente, donc $\dim(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}) = N$.
Donc $\boxed{\left(\delta_0, \ldots, \delta_{N-1}\right) \text{ est une base de } \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.
**CQFD**.

## 1.2 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Il est temps comme promis de définir la transformée de Fourier pour nos suites périodiques. Avant cela, pour bien comprendre le lien avec les notions de Fourier vues au semestre précédent, récapitulons-les :

1. Pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, si $f \in L^1$ alors on peut définir sa transformée de Fourier $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi tx}\mathrm{d}x$$
Pour $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, si $g$ est $L^1$ alors on peut définir sa transformée de Fourier inverse $\check{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \check{g}(x) := \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{2i\pi tx}\mathrm{d}t$$
On remarque alors que si $\widehat{f}$ est $L^1$, alors $f$ est égale presque partout à $\check{\widehat{f}}$.

2. Pour $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, si $f$ est $T$-périodique et $f$ est $L^1$ sur $[0, T]$, alors on peut définir sa transformée de Fourier $\widehat{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \widehat{f}(n) := \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-\frac{2i\pi nx}{T}}\mathrm{d}x$$

(on note souvent $c_n(f) = \widehat{f}(n)$, c'est le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de $f$)
Pour $u : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, si $u$ est $\ell^1$, alors on peut définir sa transformée de Fourier inverse $\check{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \check{u}(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)e^{\frac{2i\pi nx}{T}}$$

On remarque alors que si $f$ est $L^2$, alors $f = \check{\widehat{f}}$ avec convergence au sens de la norme $L^2$.

Nous sommes à présents armés pour définir encore une nouvelle transformée de Fourier.

## Définition 3 (TFD)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **TFD** de $u$ l'application $\widehat{u} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \widehat{u}(a) := \sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}}$$

## Proposition 4 (La TFD d'une périodique est périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Alors $\widehat{u} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

*Démonstration*

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\widehat{u}(a+N) &= \sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi x(a+N)}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}}e^{-\frac{2i\pi xN}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}}e^{-2i\pi x} \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}} \times 1 = \sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{-\frac{2i\pi xa}{N}} = \widehat{u}(a)\end{aligned}$$

**CQFD**.

### Définition 4 (TFD inverse)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **TFD inverse** de $v$ l'application $\check{v} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \check{v}(x) = \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} v(a) e^{\frac{2i\pi ax}{N}}$$

Vous remarquerez ici que le choix de diviser par $N$ (la période) a été fait pour la transformée inverse, et non la transformée directe. Pourtant, pour les séries de Fourier on avait divisé par $T$ (la période) lors de la transformée directe. Il n'est pas compliqué de se convaincre que ça n'a aucune importance par linéarité. Il faut juste se fixer une convention, et s'y tenir pour la suite du cours.

### Proposition 5 (Réécriture de la TFD inverse avec la TFD directe)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x) = \frac{1}{N}\hat{v}(-x)$.
En particulier, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\hat{v}(x) = N\check{v}(-x)$.

*Démonstration*

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x) = \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} v(a) e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} v(a) e^{\frac{-2i\pi a(-x)}{N}} = \frac{1}{N}\hat{v}(-x)$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x) = \frac{1}{N}\hat{v}(-x)$.
En particulier, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(-x) = \frac{1}{N}\hat{v}(x)$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $N\check{v}(-x) = \hat{v}(x)$.
**CQFD**.

### Proposition 6 (La TFD inverse d'une périodique est périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Alors $\check{v} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

*Démonstration*

On a vu à la proposition précédente que tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x) = \frac{1}{N}\hat{v}(-x)$.
Or comme $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\hat{v} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\check{v}(x+N) = \frac{1}{N}\widehat{v}(-x-N) = \frac{1}{N}\widehat{v}(-x) = \check{v}(x)$.

Donc $\boxed{\check{v} \text{ est } N\text{-périodique}}$.

## Lemme 1 (Lemme de la TFD)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in [\![0, N-1]\!]$.

On a alors $\sum\limits_{a=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a = N\mathbb{1}_{x=y}$.

### Démonstration

Posons $q := e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}$, de sorte que $\sum\limits_{a=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a = \sum\limits_{a=0}^{N-1} q^a$ et $q^N = e^{\frac{2i\pi(x-y)N}{N}} = e^{2i\pi(x-y)} = 1$.

• Si $x = y$, alors $q = e^{\frac{2i\pi(x-x)}{N}} = e^0 = 1$ et donc $\sum\limits_{a=0}^{N-1} q^a = \sum\limits_{a=0}^{N-1} 1^a = \sum\limits_{\xi=0}^{N-1} 1 = N = N\mathbb{1}_{x=y}$.

• Supposons que $x \neq y$.

Comme $0 \leq x \leq N-1$ et $0 \leq y \leq N-1$ on a $-(N-1) \leq -y \leq 0$ et donc $-(N-1) \leq x-y \leq N-1$.

Or le seul multiple de $N$ dans $[\![-(N-1), N-1]\!]$ est $0$.

Donc comme $x - y \neq 0$, $x - y$ n'est pas un multiple de $N$.

Donc $q = e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}} \neq 1$ et donc $\sum\limits_{a=0}^{N-1} q^a = \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{1-1}{1-q} = 0 = N\mathbb{1}_{x=y}$.

Dans tous les cas, on a bien $\boxed{\sum\limits_{a=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a = N\mathbb{1}_{x=y}}$.

**CQFD**.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, que ne demande pas d'être $L^1$ ou $\ell^1$ comme c'était le cas dans le cours du semestre précédent, tout simplement parce que les sommes en jeu sont ici finies : ouf, tout va bien !

## Théorème 1 (La TFD est un isomorphisme)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

L'application $\varphi := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ u & \longmapsto & \widehat{u} \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

L'application $\psi := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ v & \longmapsto & \check{v} \end{pmatrix}$ est la réciproque de $\varphi$.

En particulier, pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\check{\widehat{u}} = u$ et $\widehat{\check{u}} = u$.

*Démonstration*

• Commençons par montrer que $\varphi$ est linéaire.

Soient $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\widehat{u+\lambda v}(a) &= \sum_{x=0}^{N-1}(u+\lambda v)(x)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1}\big(u(x)+\lambda v(x)\big)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} \\ &= \sum_{x=0}^{N-1}u(x)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} + \lambda\sum_{x=0}^{N-1}v(x)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} = \widehat{u}(a)+\lambda\widehat{v}(a) \\ &= \big(\widehat{u}+\lambda\widehat{v}\big)(a)\end{aligned}$$

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}, \widehat{u+\lambda v}(a) = \big(\widehat{u}+\lambda\widehat{v}\big)(a)$.

Donc $\widehat{u+\lambda v} = \widehat{u}+\lambda\widehat{v}$.

Donc $\varphi(u+\lambda v) = \varphi(u)+\lambda\varphi(v)$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$.

• Montrons que $\psi$ est linéaire.

Soient $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\widecheck{u+\lambda v}(x) &\underset{5\text{ p. }11}{=} \frac{1}{N}\widehat{u+\lambda v}(-x) = \frac{1}{N}\big(\widehat{u}+\lambda\widehat{v}\big)(-x) = \frac{1}{N}\big(\widehat{u}(-x)+\lambda\widehat{v}(-x)\big) \\ &= \frac{1}{N}\widehat{u}(-x)+\lambda\frac{1}{N}\widehat{v}(-x) \underset{5\text{ p. }11}{=} \widecheck{u}(x)+\lambda\widecheck{v}(x) \\ &= \big(\widecheck{u}+\lambda\widecheck{v}\big)(x)\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}, \widecheck{u+\lambda v}(x) = \big(\widecheck{u}+\lambda\widecheck{v}\big)(x)$.

Donc $\widecheck{u+\lambda v} = \widecheck{u}+\lambda\widecheck{v}$.

Donc $\psi(u+\lambda v) = \psi(u)+\lambda\psi(v)$.

Donc $\boxed{\psi \text{ est linéaire}}$.

• Montrons que pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\widecheck{\widehat{u}} = u$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

Soit $x \in [\![0, N-1]\!]$.

On a alors

$$\check{\widehat{u}}(x) = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1}\widehat{u}(a)e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)e^{\frac{-2i\pi ay}{N}}e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{a=0}^{N-1}u(y)e^{\frac{-2i\pi ay}{N}}e^{\frac{2i\pi ax}{N}}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)\sum_{a=0}^{N-1}e^{\frac{2i\pi a(x-y)}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)\sum_{a=0}^{N-1}\left(e^{\frac{2i\pi(x-y)}{N}}\right)^a$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}u(y)N\mathbb{1}_{x=y} \text{ d'après le lemme}$$
$$= \sum_{y=0}^{N-1}u(y)\mathbb{1}_{x=y} = u(x)$$

Donc $\check{\widehat{u}}(x) = u(x)$.

Donc pour tout $x \in [\![0, N-1]\!]$, on a $\check{\widehat{u}}(x) = u(x)$.

Par $N$-périodicité, on a l'égalité sur tout $\mathbb{Z}$, d'où $\check{\widehat{u}} = u$.

Donc pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on a $\check{\widehat{u}} = u$, c'est-à-dire $\boxed{\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}}$.

• Comme $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$, $\varphi$ est inversible à gauche donc est injective.
Or $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est de dimension finie, et on a montré que $\varphi : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est linéaire.
Donc $\varphi$ est bijective : c'est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels.
On a alors $\psi = \psi \circ \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}} = \psi \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}} \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1}$.
Donc $\boxed{\psi \text{ est la bijection réciproque de } \varphi}$.
**CQFD**.

## Proposition 7 (Produit scalaire, norme et TFD)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$.

1. $\forall u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, $\left\langle \widehat{u} \middle| v \right\rangle = N\left\langle u \middle| \check{v} \right\rangle$.
2. $\forall u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, $\left\langle \widehat{u} \middle| \widehat{v} \right\rangle = N \left\langle u|v \right\rangle$
3. $\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, $\left|\left|\widehat{u}\right|\right| = \sqrt{N}\,||u||$.

*Démonstration*

1. Soient $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\langle \widehat{u} | v \rangle &= \sum_{a=0}^{N-1} \widehat{u}(a)\overline{v(a)} = \sum_{a=0}^{N-1}\sum_{x=0}^{N-1} u(x)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}\overline{v(a)} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \sum_{a=0}^{N-1} e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}\overline{v(a)} \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \sum_{a=0}^{N-1} \overline{v(a)e^{\frac{2i\pi xa}{N}}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \overline{\sum_{a=0}^{N-1} v(a)e^{\frac{2i\pi xa}{N}}} = N\sum_{x=0}^{N-1} u(x) \overline{\frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1} v(a)e^{\frac{2i\pi xa}{N}}} \\ &= N\sum_{x=0}^{N-1} u(x)\overline{\check{v}(x)} = N\langle u | \check{v} \rangle\end{aligned}$$

2. Soient $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On a alors $\langle \widehat{u} | \widehat{v} \rangle \underset{1.}{=} N \left\langle u \middle| \check{\widehat{v}} \right\rangle = N \langle u | v \rangle$ car $\check{\widehat{v}} = v$.

3. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On a alors $||\widehat{u}||^2 = \langle \widehat{u} | \widehat{u} \rangle \underset{2.}{=} N \langle u | u \rangle = N\, ||u||^2$ donc $||\widehat{u}|| = \sqrt{N}\, ||u||$.

**CQFD**.

## Définition 5 (Spectre d'amplitude et spectre de phase)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

1. On appelle **spectre d'amplitude** de $u$ la fonction $S_u := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ a & \longmapsto & |\widehat{u}(a)| \end{pmatrix}$
2. Soit $E_u := \{ a \in \mathbb{Z} \mid \widehat{u}(a) \neq 0 \}$.

   On appelle **spectre de phase** de $u$ la fonction $\varphi_u := \begin{pmatrix} E_u & \longrightarrow & [0, 2\pi[ \\ a & \longmapsto & \arg(\widehat{u}(a)) \end{pmatrix}$

Quand nous aborderons enfin les images 2D, nous verrons à quoi servent ces deux spectres : le spectre d'amplitude donne des informations sur les "variations brutes" (par exemple sur une photo d'un t-shirt rayé, il porterait l'information des rayures), tandis que le spectre de phase donne des informations sur la géométrie de l'image. Nous verrons à ce moment-là des exemples visuels.

Les images qui nous intéressent sont avant tout des images à coefficients réels. Voyons donc quelques caractéristiques intéressantes des suites périodiques réelles.

## Proposition 8 (TFD d'une suite périodique réelle)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
Si $\forall x \in \mathbb{Z}, u(x) \in \mathbb{R}$, alors :

1. $\forall a \in \mathbb{Z}, \widehat{u}(-a) = \overline{\widehat{u}(a)}$
2. La fonction $|\widehat{u}| : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est paire.

*Démonstration*

Supposons que $\forall x \in \mathbb{Z}, u(x) \in \mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$\widehat{u}(-a) = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{\frac{-2i\pi x(-a)}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} u(x) \overline{e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}} \underset{u(x)\in\mathbb{R}}{=} \sum_{x=0}^{N-1} \overline{u(x) e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}} = \overline{\sum_{x=0}^{N-1} u(x) e^{\frac{-2i\pi xa}{N}}}$$
$$= \overline{\widehat{u}(a)}$$

2. Soit $a \in \mathbb{Z}$.
On a alors $\left|\widehat{u}(-a)\right| \underset{1.}{=} \left|\overline{\widehat{u}(a)}\right| = \left|\widehat{u}(a)\right|$.
D'où la partié de $\left|\widehat{u}\right|$.
**CQFD**.

## 1.3 Base orthogonales des suites périodiques

**Théorème 2 (Base orthogonale des suites périodiques)**

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $a \in [\![0, N-1]\!]$, notons $e_a := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{\frac{2i\pi ax}{N}} \end{pmatrix}$.

Pour tout $a$ et $b$ dans $[\![0, N-1]\!]$, on a

$$\langle e_a | e_b \rangle = N \mathbb{1}_{a=b}$$

En particulier, $(e_a)_{a\in[\![0,N-1]\!]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

*Démonstration*

• Soit $a \in [\![0, N-1]\!]$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$e_a(x+N) = e^{\frac{2i\pi a(x+N)}{N}} = e^{\frac{2i\pi ax}{N}} e^{\frac{2i\pi aN}{N}} = e^{\frac{2i\pi ax}{N}} e^{2i\pi a} = e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = e_a(x)$$

Donc $e_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

• Soient $a$ et $b$ dans $[\![0, N-1]\!]$.

On a alors

$$\begin{aligned}\langle e_a | e_b \rangle &= \sum_{x=0}^{N-1} e_a(x)\overline{e_b(x)} = \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi ax}{N}} \overline{e^{\frac{2i\pi bx}{N}}} = \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi ax}{N}} e^{-\frac{2i\pi bx}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi(a-b)x}{N}} \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(a-b)}{N}}\right)^x = N\mathbb{1}_{a=b} \text{ d'après le lemme 1 page 12}\end{aligned}$$

• Ainsi, $(e_a)_{a\in[\![0,N-1]\!]}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. En particulier elle est libre, et comme elle comporte $N$ termes, c'est une base de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

**CQFD**.

**Remarque** :

Ainsi, $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}e_a\right)_{a\in[\![0,N-1]\!]}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
En effet, on sait que c'est une base orthogonale d'après le théorème précédent.
De plus, pour tout $a \in [\![0, N-1]\!]$, on a $||e_a||^2 = \langle e_a | e_a \rangle = N$ donc $||e_a|| = \sqrt{N}$ donc $\frac{1}{\sqrt{N}}e_a$ est normé.

**Exemple** :

On prend $N \geq 7$ et $u := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\frac{6\pi x}{N}\right) \end{pmatrix}$.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$u(x+N) = \sin\left(\frac{6\pi(x+N)}{N}\right) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N} + \frac{6\pi N}{N}\right) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N} + 6\pi\right) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N}\right) = u(x)$$

Donc $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ : on peut la décomposer dans la base $(e_a)_{a\in[\![0,N-1]\!]}$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$u(x) = \sin\left(\frac{6\pi x}{N}\right) = \frac{e^{i\frac{6\pi x}{N}} - e^{-i\frac{6\pi x}{N}}}{2i} = \frac{e^{\frac{2i\pi 3x}{N}} - e^{\frac{-2i\pi 3x}{N}}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{\frac{2i\pi 3x}{N}} - \frac{1}{2i}e^{\frac{2i\pi(-3)x}{N}} = \frac{1}{2i}e_3(x) - \frac{1}{2i}e_{-3}(x)$$

On a donc $u = \frac{1}{2i}e_3 - \frac{1}{2i}e_{-3}$.

## Proposition 9 (Lien entre les deux bases des suites périodiques)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $a \in [\![0, N-1]\!]$, on a $\widehat{\delta_a} = e_{-a}$.

*Démonstration*

Soit $a \in [\![0, N-1]\!]$.

Pour tout $b \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{\delta_a}(b) = \sum_{x=0}^{N-1} \delta_a(x) e^{\frac{-2i\pi xb}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} \mathbb{1}_{a=x} e^{\frac{-2i\pi xb}{N}} = e^{\frac{-2i\pi ab}{N}} = e_{-a}(b)$.

**CQFD**.

**Notations** :
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega_N := e^{-\frac{2i\pi}{N}}$.

## Définition 6 (Matrice de Vandermonde-Fourier)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice de Vandermonde-Fourier** d'ordre $N$ la matrice

$$W_N := \left(\omega_N^{jk}\right)_{\substack{0 \leq j \leq N-1 \\ 0 \leq k \leq N-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_N^3 & \omega_N^6 & \dots & \omega_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

## Proposition 10 (Matrice de Wandermonde-Fourier et TFD)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $j \in [\![0, N-1]\!]$, $\widehat{\delta_j}$ s'identifie à la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $W_N$.

   Autrement dit, on a $W_N = \begin{pmatrix} \widehat{\delta_0}(0) & \widehat{\delta_0}(1) & \cdots & \widehat{\delta_0}(N-1) \\ \widehat{\delta_1}(0) & \widehat{\delta_1}(1) & \cdots & \widehat{\delta_1}(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\delta_{N-1}}(0) & \widehat{\delta_{N-1}}(1) & \cdots & \widehat{\delta_{N-1}}(N-1) \end{pmatrix}$.

2. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. Posons $U = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix}$ et $\widehat{U} = \begin{pmatrix} \widehat{u}(0) \\ \widehat{u}(1) \\ \vdots \\ \widehat{u}(N-1) \end{pmatrix}$.

   On a alors $\widehat{U} = W_N U$.

*Démonstration*

1. Soit $j \in [\![0, N-1]\!]$.
Soit $v_j \in \mathbb{C}^N$ la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $W_N$.
On a donc

$$v_j = \begin{pmatrix} 1 & \omega_N^j & \omega_N^{2j} & \dots & \omega_N^{j(N-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\frac{-2i\pi 0j}{N}} & e^{\frac{-2i\pi 1j}{N}} & e^{\frac{-2i\pi 2j}{N}} & \dots & e^{\frac{-2i\pi (N-1)j}{N}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e_{-j}(0) & e_{-j}(1) & e_{-j}(2) & \dots & e_{-j}(N-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \widehat{\delta_j}(0) & \widehat{\delta_j}(1) & \widehat{\delta_j}(2) & \dots & \widehat{\delta_j}(N-1) \end{pmatrix} \text{ d'après la proposition 9 page 17}$$

2. Soit $j \in [\![0, N-1]\!]$.
La $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $W_N U$ est le produit de la $(j+1)^{\text{ème}}$ de $W_N$ par $U$.
Donc la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $W_N U$ est d'après 1

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \widehat{\delta_j}(0) & \dots & \widehat{\delta_j}(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{\delta_j}(k) u(k) \\
&\underset{9 \text{ p. } 17}{=} \sum_{k=0}^{N-1} u(k) e_{-j}(k) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} u(k) e^{\frac{-2i\pi jk}{N}} \\
&= \widehat{u}(j)
\end{aligned}$$

Donc la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $W_N U$ est la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne de $\widehat{U}$.
**CQFD**.

## Proposition 11 (Propriétés de la matrice de Vandermonde-Fourier)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Alors $W_N$ est symétrique, inversible avec $W_N^{-1} = \dfrac{1}{N}\overline{W_N}$.
De plus, $\dfrac{1}{\sqrt{N}} W_N$ est unitaire.

*Démonstration*

• Par définition, la composante à la $k^{\text{ème}}$ligne et à la $j^{\text{ème}}$colonne de $W_N$ est $\omega_N^{jk}$.
Comme $jk = kj$, c'est donc aussi la composante à la $j^{\text{ème}}$ligne et à la $k^{\text{ème}}$colonne de $W_N$.
Donc $\boxed{W_N \text{ est symétrique}}$.

• Par définition, on a $W_N = \left(\omega_N^{jk}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}} = \left(e^{-\frac{2i\pi kj}{N}}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}}$.
On a donc $\overline{W_N} = \left(\overline{e^{-\frac{2i\pi kj}{N}}}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}} = \left(e^{\frac{2i\pi kj}{N}}\right)_{\substack{0\leq k\leq N-1\\0\leq j\leq N-1}}$.
La composante à la $k^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\overline{W_N}W_N$ est donc

$$\sum_{\xi=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi k\xi}{N}} e^{-\frac{2i\pi \xi j}{N}} = \sum_{\xi=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi(k-j)}{N}}\right)^{\xi} = N\mathbb{1}_{j=k}$$

en ayant utilisé le lemme 1 page 12.

Autrement dit, $\overline{W_N}W_N = \begin{pmatrix} N & 0 & \cdots & 0\\ 0 & N & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & N\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} = NI_N$.

Donc $\frac{1}{N}\overline{W_N}W_N = I_N$ et donc $\boxed{W_N \text{ est inversible d'inverse } \frac{1}{N}\overline{W_N}}$.

• Comme $W_N$ est symétrique, son adjointe est juste $\overline{W_N}$, donc l'adjointe de $\frac{1}{\sqrt{N}}W_N$ est $\frac{1}{\sqrt{N}}\overline{W_N}$.
Or on a vu que $\frac{1}{\sqrt{N}}W_N \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}\overline{W_N} = W_N \cdot \frac{1}{N}\overline{W_N} = I_N$.
Donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{N}}W_N \text{ est unitaire}}$.
**CQFD**.

**Remarque** :
Il existe un algorithme de calcul de TFD dont la complexité est $O\big(N\ln(N)\big)$.
C'est l'algorithme de **transformée de Fourier rapide** (Fast Fourier Transform, FFT).

# 2 Convolution périodique en 1D

## 2.1 Convolution périodique

**Définition 7 (Convolution périodique)**

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On appelle **convolution** de $u$ par $v$ l'application $u * v : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (u*v)(x) := \sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y)$$

### Lemme 2 (Sommation sur intervalle de longueur N)

Soient $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $c, d \in \mathbb{Z}$.

Si $d - c = N - 1$, c'est-à-dire si $\operatorname{card}\big([\![c, d]\!]\big) = N$, alors $\sum\limits_{k=c}^{d} f(k) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} f(k)$.

*Démonstration*

Supposons donc que $d - c = N - 1$.

On effectue la division euclidienne de $c$ par $N$ : il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0, N-1]\!]$ tels que $c = qN + r$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=c}^{d} f(k) = \sum_{k=c}^{c+N-1} f(k) = \sum_{k=qN+r}^{qN+r+N-1} f(k) &= \sum_{k=qN+r}^{qN+N-1} f(k) + \sum_{k=qN+N}^{qN+N+r-1} f(k) \\
&= \sum_{k=qN+r}^{qN+N-1} f(k) + \sum_{k=(q+1)N}^{(q+1)N+r-1} f(k) \\
&= \sum_{x=r}^{N-1} f(x+qN) + \sum_{k=(q+1)N}^{(q+1)N+r-1} f(k) \text{ en posant } x = k - qN \\
&= \sum_{x=r}^{N-1} f(x) + \sum_{k=(q+1)N}^{(q+1)N+r-1} f(k) \text{ par } N\text{-périodicité de } f \\
&= \sum_{x=r}^{N-1} f(x) + \sum_{y=0}^{r-1} f\big(y + (q+1)N\big) \text{ en posant } y = k - (q+1)N \\
&= \sum_{x=r}^{N-1} f(x) + \sum_{y=0}^{r-1} f(y) \text{ par } N\text{-périodicité de } f \\
&= \sum_{k=r}^{N-1} f(k) + \sum_{k=0}^{r-1} f(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)
\end{aligned}$$

**CQFD**.

### Proposition 12 (Propriétés de la convolution périodique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

1. $u * v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$
2. $u * v = v * u$
3. $\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}$
4. $\widehat{uv} = \dfrac{1}{N}\widehat{u} * \widehat{v}$

*Démonstration*

1. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $(u*v)(x+N) = \sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x+N-y) \underset{v\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}{=} \sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y) = (u*v)(x)$.

Donc $\boxed{u * v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}}$.

2. Pour tout $x \in [\![0, N-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
(u*v)(x) &= \sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y) \\
&= \sum_{z=x-(N-1)}^{x} u(x-z)v(z) \text{ en posant } z = x-y \\
&= \sum_{z=0}^{N-1} u(x-z)v(z) \text{ d'après le lemme 2 page 21} \\
&= \sum_{z=0}^{N-1} v(z)u(x-z) = (v*u)(x)
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in [\![0, N-1]\!], (u*v)(x) = (v*u)(x)$.
Or on a prouvé que $u * v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $v * u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ en 1.
Donc par $N$-périodicité, $\forall x \in \mathbb{Z}, (u*v)(x) = (v*u)(x)$.
Donc $\boxed{u * v = v * u}$.

3.

Soit $a \in \mathbb{Z}$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\widehat{u*v}\,(a) &= \sum_{x=0}^{N-1} (u*v)(x) e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y)e^{\frac{-2i\pi xa}{N}} \\
&= \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} u(y)v(x-y)e^{\frac{-2i\pi(x-y+y)a}{N}} \\
&= \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} u(y)e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} v(x-y)e^{\frac{-2i\pi(x-y)a}{N}} \\
&= \sum_{y=0}^{N-1}\sum_{x=0}^{N-1} u(y)e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} v(x-y)e^{\frac{-2i\pi(x-y)a}{N}} \\
&= \sum_{y=0}^{N-1} u(y)e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} v(x-y)e^{\frac{-2i\pi(x-y)a}{N}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{y=0}^{N-1} u(y) e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} \sum_{z=-y}^{N-1-y} v(z) e^{\frac{-2i\pi za}{N}} \text{ en posant } z = x - y \\
&= \sum_{y=0}^{N-1} u(y) e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} \sum_{z=0}^{N-1} v(z) e^{\frac{-2i\pi za}{N}} \text{ d'après le lemme 2 page 21} \\
&= \left( \sum_{y=0}^{N-1} u(y) e^{\frac{-2i\pi ya}{N}} \right) \left( \sum_{z=0}^{N-1} v(z) e^{\frac{-2i\pi za}{N}} \right) \\
&= \widehat{u}(a)\widehat{v}(a) = \left(\widehat{u}\widehat{v}\right)(a)
\end{aligned}
$$

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\widehat{u * v}(a) = \left(\widehat{u}\widehat{v}\right)(a)$.

Donc $\boxed{\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}}$.

4.

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$
\begin{aligned}
\widehat{\widehat{u} * \widehat{v}}(a) &= \widehat{\widehat{u}\widehat{v}}(a) \text{ d'après 3.} \\
&= \widehat{\widehat{u}}(a)\widehat{\widehat{v}}(a) \\
&= N\check{\widehat{u}}(-a)N\check{\widehat{v}}(-a) \text{ d'après la proposition 5 page 11} \\
&= N^2 u(-a)v(-a) \text{ d'après le théorème 1 page 12} \\
&= N^2 uv(-a) \\
&= N^2 \check{\widehat{uv}}(-a) \text{ d'après le théorème 1 page 12} \\
&= N\widehat{\widehat{uv}}(a) \text{ d'après la proposition 5 page 11} \\
&= \widehat{N\widehat{uv}}(a) \text{ par linéarité de la TFD}
\end{aligned}
$$

On a donc $\widehat{\widehat{u} * \widehat{v}}(a) = \widehat{N\widehat{uv}}(a)$.

Donc $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\widehat{u} * \widehat{v}}(a) = \widehat{N\widehat{uv}}(a)$.

Donc $\widehat{\widehat{u} * \widehat{v}} = \widehat{N\widehat{uv}}(a)$.

Par injectivité de la TFD, on a donc $\widehat{u} * \widehat{v} = N\widehat{uv}$.

On a ainsi $\boxed{\widehat{uv} = \frac{1}{N}\widehat{u} * \widehat{v}}$.

**CQFD**.

## 2.2 Filtrage

**Définition 8 (Filtrage)**

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On appelle **filtrage de noyau** $v$ l'application $\gamma_v := \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ u & \longmapsto & u * v \end{pmatrix}$.