Théorie des distributions et échantillonage
Cas en une dimension

-

Florian Langlois d'après le cours de Sylvain Durand

Année universitaire 2022-2023

Université Paris Cité

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions tests et distributions

1 Introduction

La théorie des distributions que nous allons aborder a été introduite par le mathématicien français Laurent Schwartz, ce qui lui vaudra en 1950 la médaille Fields. L'un des intérêts de cette théorie, et l'angle par lequel nous allons aborder la notion, est qu'elle permet de généraliser la notion usuelle de fonctions numériques de façon à pouvoir dériver des fonctions qui habituellement ne sont pas dérivables (par exemple la valeur absolue, ou l'indicatrice de $\mathbb{R}_+$).

1.1 Une première tentative : la dérivée faible

Quand on souhaite généraliser une notion en mathématiques, une façon parfois fructueuse est de partir d'une propriété que vérifie la notion en question, et de partir de cette propriété dans un cadre plus général pour s'en servir de définition. Plaçons-nous sur l'intervalle $[2;5]$ à titre d'exemple et considérons $f : [2;5] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable sur cet intervalle. Pour toute autre fonction $g : [2;5] \longrightarrow \mathbb{R}$ elle aussi dérivable, la formule d'intégration par partie nous dit que

$$\int_2^5 f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_2^5 - \int_2^5 f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Supposons à présent que g s'annule à la fois en 2, et en 5. Le terme $\Big[f(x)g(x)\Big]_2^5$ va alors disparaître, et il ne nous restera plus que l'égalité

$$\int_2^5 f(x)g'(x)\mathrm{d}x = -\int_2^5 f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

À y regarder de plus près, le terme de gauche ne fait pas intervenir la dérivée de f : que f soit dérivable ou non n'empêche pas le fait de pouvoir définir le terme de gauche. Supposons à présent que f n'est pas nécessairement dérivable : si jamais il existe une fonction $h : [2;5] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\int_2^5 f(x)g'(x)\mathrm{d}x = -\int_2^5 h(x)g(x)\mathrm{d}x$$

et ce pour toute fonction dérivable g qui s'annule en 2 et en 5, alors nous avons là un candidat pour être une dérivée généralisée de f.

Dans la suite du cours, nous allons définir des objets qui peuvent sembler complexes au premier abord, et demander des restrictions à nos objets qui peuvent sembler inutiles. Tout cela a vous vous en doutez une raison d'être, la principale raison étant le confort de calculs, mais aussi certaines notions qui ne fonctionnent bien que quand ces conditions sont réunies. Nous tenterons toutefois de les justifier dans la mesure du possible.

Bien évidemment, nous n'allons pas faire tout le cours sur l'intervalle $[2;5]$, qui n'a été choisit qu'à titre d'exemple. Dans toute la suite, nous nous placerons sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}$: voilà un exemple de condition qui peut sembler arbitraire mais qui nous permettra de faire d'effectuer nos démarches confortablement ; il n'est par exemple pas aberrant de vouloir dériver des fonctions sur des ensembles ouverts !

Pour faire disparaître les crochets dans l'intégration par partie, nous avons demander à g de s'annuler aux bornes de l'intervalle. Il est donc naturel de s'intéresser plus généralement aux points où la fonction s'annule ou ne s'annule pas.

Définition 1 (Support d'une fonction)

Soit $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. On appelle **support** de φ l'ensemble $\operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\left\{x \in \Omega \,\middle|\, \varphi(x) \neq 0\right\}}$.
2. On dit que φ est **à support compact** si et seulement si $\operatorname{supp}(\varphi)$ est compact.

Remarque :
Pour rappel, les compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties de $\mathbb{R}$ qui sont fermées et bornées.

En demandant aux supports des fonctions g d'être compacts alors que l'espace de départ est un ouvert, nous obligerons de telles fonctions à s'annuler aux bords de celui-ci. Par exemple si $\Omega =]2;5[$ et si g est à support compact, alors $\operatorname{supp}(g)$ est un fermé borné de Ω. En particulier, il existe $a, b \in]2;5[$ tels que $\operatorname{supp}(g) \subseteq [a;b]$. Il existe donc $c \in]2;a[$ tel que $c \notin \operatorname{supp}(g)$, et donc $g(c) = 0$, et plus généralement $\forall x \in]2;a[, g(x) = 0$. On remarquera d'ailleurs que si g est dérivable, elle est continue et donc $g(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} g(x) = 0$. On montre de même que $g(b) = 0$.

Bien que les fonctions g que nous avons manipulées jusque là n'étaient que dérivables, si nous voulons pouvoir dériver plus qu'une fois nos fonctions, nous allons devoir réitérer l'intégration par partie autant de fois que nos nécessaire. Autant s'armer dès à présent de ce qu'il faut en demander aux fonctions en questions d'être indéfiniment dérivables, pour ne pas avoir à se poser de questions là-dessus.

Définition 2 (Fonctions tests)

On appelle **fonction test** sur Ω toute fonction $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et à support compact. On notera $\mathscr{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions tests sur Ω.

Exemple :

Considérons la fonction $\varphi := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right)$.

Alors φ est une fonction test sur $\mathbb{R}$.

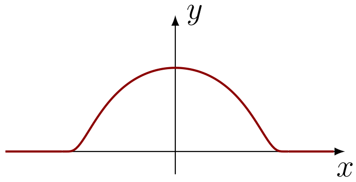

FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction φ

En effet, on peut montrer par récurrence que φ est bien $\mathscr{C}^\infty$. De plus, $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\right\} =]-1;1[$ donc $\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{]-1;1[} = [-1;1]$, qui est bien compact.

Proposition 1 (Espace vectoriel des fonctions tests)

1. Pour tout $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\varphi + \lambda\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$.
   Ainsi, $\mathscr{D}(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. Pour tout $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a $\varphi\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$.
   Ainsi, $\mathscr{D}(\Omega)$ est une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
3. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a $\varphi' \in \mathscr{D}(\Omega)$.
   Plus généralement $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi^{(n)} \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Démonstration

1. Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Maintenant que nous avons les outils pour généraliser la dérivation, il faut nous demander quelles sont les fonctions f qui peuvent prétendre à potentiellement être dérivable en ce nouveau sens. Dans notre utilisation de l'intégration par partie, nous avons eu besoin d'intégrer f (plus précisément sont produit par les fonctions g'). Demander à f d'être intégrable sur Ω semble donc être le strict minimum, mais nous pouvons en fait demander un petit peu moins ! En effet nous l'avons dit, nous prendrons des fonctions g à support compact !