Ordinaux, cardinaux et entiers

-

Le Barbuki 2

Florian Langlois

Mars 2024 – Mai 2024

Collection

Bienvenue dans ce livre ! C'est le deuxième d'une collection qui tente d'exposer et démontrer les mathématiques de niveau licence et master. Le nom BARBUKI est une référence au célèbre groupe BOURBAKI, dont la démarche de cette collection est inspirée.

1 – Théorie élémentaire des ensembles.

2 – Ordinaux, cardinaux et entiers.

Avant-propos

Cet ouvrage est là pour me permettre de coucher sur le papier les différentes mathématiques que j'ai apprises durant mes études supérieures : je le rédige principalement pour moi-même et il n'a pas pour but d'être pédagogique. Il va me permettre de conserver sur le long terme une trace de ces connaissances, mais aussi d'organiser celles-ci pour en avoir une vue d'ensemble.

Bien que ce livre reste assez personnel, il est possible qu'il vous soit utile. Afin de comprendre pleinement son contenu, il est nécessaire d'être au courant du contenu du premier ouvrage, c'est-à-dire des bases de la théorie des ensembles, notamment à travers les différents axiomes de ZFC.

Il vous faut aussi savoir mener un raisonnement, ou tout du moins en suivre un, puisque c'est l'un des objets principaux de ce livre. Il est à noter que la construction de cette collection se fait sous la manière d'un escalier à gravir : nous n'utiliserons pas des résultats postérieurs pour démontrer des résultats antérieurs, les seules exceptions étant les exemples donnés pour illustrer, puisque ceux-ci ne sont là que pour aider à la lecture, et non permettre une quelconque démonstration, mais aussi certaines digressions abordant d'autres démonstrations que celles proposées.

Remerciements

Merci à Lyra, GrothenDitQue, Chæris et Cassis pour leur pinaillage.

Table des matières

Chapitre 1

Ordinaux

Sommaire

1 Bons ordres

Proposition 1 (Élément minimal et ordre strict)

Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné non vide, $<$ l'ordre strict associé à $\leq$ et $a \in E$.

1. a est minimal pour $(E, \leq)$ si et seulement si $\forall x \in E, \mathrm{non}(x < a)$.
2. a est maximal pour $(E, \leq)$ si et seulement si $\forall x \in E, \mathrm{non}(a < x)$.

Démonstration

1. Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que a est minimal pour $(E, \leq)$.

Soit $x \in E$.

Supposons par l'absurde que $x < a$.

On a donc $x \leq a$ et $x \neq a$.

Comme $x \leq a$ et a est minimal pour $(E, \leq)$, on a $x = a$.

Ainsi on a à la fois $x \neq a$ et $x = a$: c'est absurde.

Par l'absurde, on a donc montré que $\mathrm{non}(x < a)$.

Donc $\forall x \in E, \mathrm{non}(x < a)$.

Donc $\boxed{\text{si } a \text{ est minimal pour } (E, \leq) \text{ alors } \forall x \in E, \mathrm{non}(x < a)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall x \in E, \mathrm{non}(x < a)$.

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \leq a$.

On a donc $x < a$ ou $x = a$.

Or on a $\mathrm{non}(x < a)$ par hypothèse donc nécessairement $x = a$.

Donc si $x \leq a$ alors $x = a$.

Donc $\forall x \in E, \Big(x \leq a \implies x = a\Big)$.

Donc a est minimal pour $(E, \leq)$.

Donc si $\boxed{\forall x \in E, \mathrm{non}(x < a) \text{ alors } a \text{ est minimal pour } (E, \leq)}$.

2. La preuve repose sur la même idée que 1.

CQFD.

Définition 1 (Ordre bien fondé et bon ordre)

Soit E un ensemble ordonné.

1. On dit que E est **bien fondé** si et seulement si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal.
2. On dit que E est **bien ordonné** si et seulement si toute partie non vide de E admet un minimum.

Remarque :
Étant donné une relation d'ordre $\leq$ et son ordre strict associé $<$, on dit que $<$ est bien fondé si et seulement si $\leq$ est bien fondé. De même, on dit que $<$ est un bon ordre strict si et seulement si $\leq$ est un bon ordre.

Plus généralement on étendra les définitions de tout l'ouvrage aux ordres stricts de cette manière via leurs ordres (larges) associés.

Proposition 2 (Caractérisation des bons ordres)

Soit E un ensemble ordonné.
E est bien ordonné si et seulement si E est bien fondé et totalement ordonné.

Démonstration

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que E est bien ordonné.

Alors toute partie non vide de E admet un minimum.

Or un minimum est un élément minimal (c'est alors le seul).

Donc toute partie non vide de E admet un élément minimal.

Donc $\boxed{E \text{ est bien fondé}}$.

Soient x et y dans E.

Alors $\{x, y\}$ est une partie non vide de E.

Elle admet donc un minimum m.

Si $m = x$ alors on a $x = m \leq y$.

Si $m = y$ alors on a $y = m \leq x$.

Dans les deux cas on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Donc tous les éléments de E sont comparables : $\boxed{E \text{ est totalement ordonné}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que E est bien fondé et totalement ordonné.

Soit A une partie non vide de E.

Comme E est bien fondé, A admet au moins un élément minimal m.

Montrons que m est le minimum de A.

Supposons par l'absurde que m n'est pas le minimum de A.

Il existe donc $a \in A$ tel que l'on a pas $m \leq a$.

Or E est totalement ordonné par hypothèse donc on a $a \leq m$.

Comme m est un élément minimal de A on a $a = m$ et en particulier $m \leq a$, ce qui est absurde.

Donc m est le minimum de A.

Donc toute partie non vide de E admet un minimum.

Donc $\boxed{E \text{ est bien ordonné}}$.

CQFD.

Proposition 3 (Partie d'un ensemble bien ordonné)

Soient E un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.

1. Si E est bien fondé alors A est bien fondé.
2. Si E est bien ordonné alors A est bien ordonné.

Démonstration

1. Supposons que E est bien fondé.

Soit B une partie non vide de A.

Comme $A \subseteq E$, B est aussi une partie non vide de E.

Or E est bien fondé par hypothèse.

Donc B admet au moins un élément minimal.

Donc toute partie non vide de A admet au moins un élément minimal.

Donc $\boxed{A \text{ est bien fondé}}$.

Supposons que E est bien ordonné.

Soit B une partie non vide de A.

Comme $A \subseteq E$, B est aussi une partie non vide de E.

Or E est bien ordonné par hypothèse.

Donc B admet un minimum.

Donc toute partie non vide de A admet un minimum.

Donc $\boxed{A \text{ est bien ordonné}}$.

CQFD.

Proposition 4 (Bons ordres et ordre lexicographique)

Soient $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$ deux ensembles ordonnés.
Soit $\trianglelefteq$ l'ordre lexicographique associé sur $E \times F$.
Si $\leq$ et $\preceq$ sont des bons ordres alors $\trianglelefteq$ est un bon ordre.

Démonstration

Supposons que $\leq$ et $\preceq$ sont des bons ordres.

Soit A une partie non vide de $E \times F$.

Considérons $B := \{x \in E \mid \exists y \in F, (x, y) \in A\}$.

Comme A est non vide, B est une partie non vide de E.

Or E est bien ordonné donc B admet un minimum b_0.

Considérons alors $F_{b_0} := \{y \in F \mid (b_0, y) \in A\}$.

Par définition de b_0, F_{b_0} est une partie non vide de F.

Or F est bien ordonné donc F_{b_0} admet un minimum c_0.

Considérons alors $a_0 := (b_0, c_0)$ et montrons que a_0 est le minimum de A.

Soit $z = (x, y) \in A$.

Par définition de B on a $x \in B$.

Or b_0 est le minimum de B donc $b_0 \leq x$.

Si $b_0 < x$ alors par définition de $\trianglelefteq$ on a $(b_0, c_0) \trianglelefteq (x, y)$.

Supposons à présent que $b_0 = x$.

On a donc $(b_0, y) = (x, y) \in A$ donc par définition de F_{b_0} on a $y \in F_{b_0}$.

Or c_0 est le minimum de F_{b_0} donc $c_0 \preceq y$.

On a donc $b_0 = x$ et $c_0 \preceq y$ donc $(b_0, c_0) \trianglelefteq (x, y)$.

Dans les deux cas on a bien $a_0 \trianglelefteq z$.

Donc pour tout $z \in A$, on a $a_0 \trianglelefteq z$.

Donc a_0 est le minimum de A.

Donc toute partie non vide de $E \times F$ admet un minimum.

Donc $\boxed{E \times F \text{ est bien ordonné}}$.

CQFD.

Définition 2 (Segment initial)

Soient E un ensemble ordonné et A une partie de E.
On dit que A est un **segment initial** de E si et seulement si pour tout x et y dans E, on a

$$\big(x \in A \text{ et } y \leq x\big) \implies y \in A$$

Remarque :
Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $<$ l'ordre strict associé et $x \in E$.
On rappelle que $x{\downarrow} = \{y \in E \mid y < x\}$.

Proposition 5 (Segments initiaux d'un ensemble bien ordonné)

Soient E un ensemble bien ordonné et A une partie de E.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est un segment initial propre de E.
2. Il existe $x \in E$ tel que $A = x{\downarrow}$.

Démonstration

Soient $\leq$ la relation d'ordre sur E et $<$ l'ordre strict associé à $\leq$.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Supposons que A est un segment initial propre de E.

Comme A est une partie propre de E, on a $E \backslash A \neq \varnothing$.

Or E est bien ordonné par définition donc $E \backslash A$ possède un minimum x.

Montrons que $A = x{\downarrow}$.

> $\boxed{\subseteq}$ Soit $a \in A$.
>
> Comme E est bien ordonné, E est totalement ordonné d'après la prop. 2 p. 3.
>
> On a donc $x \leq a$ ou $a < x$.
>
> > Supposons par l'absurde que $x \leq a$.
> >
> > On a $a \in A$ et A est un segment initial de E par hypothèse.
> >
> > Donc $x \in A$, ce qui est absurde car $x \in E \backslash A$.
>
> Donc par l'absurde on a $a < x$, c'est-à-dire $a \in x{\downarrow}$.

On a donc $A \subseteq x{\downarrow}$.

> $\boxed{\supseteq}$ Soit $y \in x{\downarrow}$.
>
> On a alors $y < x$.
>
> Or par définition x est le minimum de $E \backslash A$.
>
> Donc $y \notin E \backslash A$ d'après la proposition 1 page 2 et donc $y \in A$.

Donc $A \supseteq x{\downarrow}$ et donc $\boxed{A = x{\downarrow}}$.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$ Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $A = x\downarrow$.

Soient y et z dans E.

Supposons que $y \in A$ et $z \leq y$.

Par hypothèse on a $A = x\downarrow$ donc $y \in x\downarrow$ et donc $y < x$.

Comme $z \leq y$ on a donc $z < x$ par transitivité et donc $z \in x\downarrow = A$.

Donc si $y \in A$ et $z \leq y$ alors $z \in A$.

Donc $\boxed{A \text{ est un segment initial de } E}$.

De plus, on n'a pas $x < x$ par antiréflexivité donc $x \notin x\downarrow = A$.

Ainsi $x \in E$ et $x \notin A$, donc $E \neq A$ et donc $\boxed{A \text{ est une partie propre de } E}$.

CQFD.

2 Ordinaux

Définition 3 (Ensemble transitif)

Soit E un ensemble.
On dit que E est **transitif** si et seulement si $\forall x \in E, x \subseteq E$.

Remarque :
Remarquons la chose suivante :

$$\begin{aligned} E \text{ est transitif} &\iff \forall x \in E, x \subseteq E \\ &\iff \forall x, \big(x \in E \implies x \subseteq E\big) \\ &\iff \forall x, \forall y, \big(y \in x \in E \implies y \in E\big) \end{aligned}$$

Ainsi, la transitivité de E signifie une certaine transitivité de $\in$.

Définition 4 (Ordinaux)

Soit E un ensemble.
On dit que E est un **ordinal** si et seulement si

1. E est transitif.
2. $\in$ est un bon ordre strict sur E.

Pour la petite histoire

John von Neumann (28 décembre 1903 – 8 février 1957) est un mathématicien et physicien américano-hongrois. Il a apporté d'importantes contributions en mécanique quantique, en analyse fonctionnelle, en logique mathématique, en informatique théorique, en sciences économiques et dans beaucoup d'autres domaines des mathématiques et de la physique. Il a de plus participé aux programmes militaires américains.

C'est à lui que l'on doit cette définition d'ordinaux.

Exemple :
$\varnothing$ est un ordinal. En effet, par vérité creuse, on a les quatre points suivants :

1. On a $\forall x \in \varnothing, x \subseteq \varnothing$ donc $\varnothing$ est transitif.
2. On a $\forall x \in \varnothing, x \notin x$ donc $\in$ est antiréflexive sur $\varnothing$.
3. On a $\forall x \in \varnothing, \forall y \in \varnothing, \forall z \in \varnothing, \Big((x \in y \text{ et } y \in z) \implies x \in z)\Big)$ donc $\in$ est transitive sur $\varnothing$.
4. Enfin comme aucune partie de $\varnothing$ n'est non vide, on a bien que toutes les parties non vides de $\varnothing$ admettent un minimum pour $\in$.

Les points 2 et 3 font de $\in$ un ordre strict sur $\varnothing$.
Combinés au point 4, on en conclut que $\in$ est un bon ordre strict sur $\varnothing$.
Enfin, combiné au point 1 on en conclut que $\varnothing$ est un ordinal.

Proposition 6 (Les éléments d'un ordinal sont des ordinaux)

Soient α un ordinal et x un ensemble.
Si $x \in \alpha$ alors x est un ordinal.

Démonstration

Supposons que $x \in \alpha$.

• Par définition α est un ordinal donc α est transitif et $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.
Comme $x \in \alpha$, on a donc $x \subseteq \alpha$ par définition de la transitivité.
Or $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné donc $\boxed{(x, \in) \text{ est strictement bien ordonné}}$ d'après la proposition 3 page 4.

• Il reste donc à montrer que x est transitif.

Soit $y \in x$.
On a vu que $x \subseteq \alpha$ donc $y \in \alpha$ par définition de l'inclusion.
On a donc $y \subseteq \alpha$ car α est transitif car ordinal.
Montrons que $y \subseteq x$.

Soit $z \in y$.
Comme $y \subseteq \alpha$, on a en particulier $z \in \alpha$ par définition de l'inclusion.
On a donc $z \in y$ et $y \in x$, et x, y et z sont tous des éléments de α.
Or $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné car α est un ordinal.
En particulier $\in$ est transitif sur α.
On a donc $z \in x$ par transitivité.

Donc $\forall z \in y, z \in x$ et donc $y \subseteq x$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall y \in x, y \subseteq x$.
Ainsi $\boxed{x \text{ est transitif}}$.

Finalement, $(x, \in)$ est strictement bien ordonné et x est transitif.
Donc $\boxed{x \text{ est un ordinal}}$.
CQFD.

Proposition 7 (L'intersection de deux ordinaux est un ordinal)

Soient α et β deux ordinaux.
Alors $\alpha \cap \beta$ est un ordinal.

Démonstration

Comme α est un ordinal, $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.
Or $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ donc $\boxed{(\alpha \cap \beta, \in) \text{ est strictement bien ordonné}}$ d'après la prop. 3 p. 4.

Il reste à montrer que $\alpha \cap \beta$ est transitif.

Soit $x \in \alpha \cap \beta$.
On a donc $x \in \alpha$ et $x \in \beta$.
Or α et β sont des ordinaux donc sont transitifs donc $x \subseteq \alpha$ et $x \subseteq \beta$.
On a donc $x \subseteq \alpha \cap \beta$ par maximalité de l'intersection.

Donc $\forall x \in \alpha \cap \beta, x \subseteq \alpha \cap \beta$.
Donc $\boxed{\alpha \cap \beta \text{ est transitif}}$.

Finalement $(\alpha \cap \beta, \in)$ est strictement bien ordonné et $\alpha \cap \beta$ est transitif.
On a donc $\boxed{\alpha \cap \beta \text{ est un ordinal}}$.
CQFD.

Proposition 8 (Ordre large sur les ordinaux)

Soient α et β deux ordinaux.
On a l'équivalence

$$\alpha \subseteq \beta \iff \big(\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta\big)$$

Démonstration

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\alpha \subseteq \beta$ et $\alpha \neq \beta$.
Montrons que $\alpha \in \beta$.
Posons $X := \beta \backslash \alpha$: par hypothèse on a $X \neq \varnothing$.
Or β est un ordinal donc $(\beta, \in)$ est strictement bien ordonné.

Donc comme $X \subseteq \beta$ et $X \neq \varnothing$, on en déduit que X admet un minimum ξ pour $\in$.
Comme $\xi \in X$ et $X \subseteq \beta$, on a $\xi \in \beta$ par définition de l'inclusion.

On peut donc montrer $\xi = \alpha$ pour conclure.
Soit $\mu \in \xi$.
Comme $\xi \in \beta$ et β est transitif (car ordinal), on a $\mu \in \beta$.
Comme $\mu \in \xi$ et que ξ est le minimum de $(X, \in)$, on a $\mu \notin X$.
On a donc $\mu \in \beta$ et $\mu \notin X$ donc $\mu \in \beta \backslash X = \alpha$.
Donc $\xi \subseteq \alpha$.
Supposons par l'absurde que $\xi \neq \alpha$, c'est-à-dire $\xi \subsetneq \alpha$ d'après ce qui précède.
Il existe donc $\mu \in \alpha \backslash \xi$.
En particulier on a $\mu \in \alpha$.
Comme $\alpha \subseteq \beta$ par hypothèse, on a $\mu \in \beta$ par définition de l'inclusion.
Ainsi on a $\xi \in \beta$ et $\mu \in \beta$.
Or β est un ordinal donc $(\beta, \in)$ est strictement bien ordonné et donc $\in$ est un ordre strict total sur β. On a donc $\mu \in \xi$ ou $\xi \in \mu$ ou $\mu = \xi$.

- $\mu \in \xi$ est impossible.
  En effet par définition on a $\mu \in \alpha \backslash \xi$ donc $\mu \notin \xi$.
- $\xi \in \mu$ est impossible.
  En effet on aurait $\xi \in \mu \in \alpha$ donc $\xi \in \alpha$ car α est transitif car ordinal.
  Or on a $\xi \in X = \beta \backslash \alpha$ donc $\xi \notin \alpha$.
- $\mu = \xi$ est impossible.
  En effet on a $\xi \in X = \beta \backslash \alpha$ donc $\xi \notin \alpha$ alors que $\mu \in \alpha \backslash \xi$ donc $\mu \in \alpha$.
  On a donc $\xi \notin \alpha$ et $\mu \in \alpha$ donc on ne peut pas avoir $\mu = \xi$.

On aboutit donc à une contradiction.
Par l'absurde, on a prouvé que $\xi = \alpha$.
Comme $\xi \in \beta$, on a donc $\alpha \in \beta$.
Donc $\big(\alpha \subseteq \beta \text{ et } \alpha \neq \beta\big) \implies \alpha \in \beta$.
Donc $\boxed{\alpha \subseteq \beta \implies \big(\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta\big)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$.
Si $\alpha \in \beta$ alors $\alpha \subseteq \beta$ car β est transitif car ordinal.
Si $\alpha = \beta$ alors en particulier $\alpha \subseteq \beta$.
Dans tous les cas on a $\alpha \subseteq \beta$.
Donc si $\boxed{\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta \text{ alors } \alpha \subseteq \beta}$.
CQFD.

Théorème 1 (Bon ordre strict sur les ordinaux)

Soient α, β et γ trois ordinaux.

1. Si $\alpha \in \beta$ et $\beta \in \gamma$ alors $\alpha \in \gamma$.
   Ainsi $\in$ est **transitif** sur les ordinaux.
2. On a $\alpha \notin \alpha$.
   Ainsi $\in$ est **antiréflexive** sur les ordinaux.

Ainsi par 1 et 2, $\in$ peut être vu comme un **ordre strict** sur les ordinaux.

3. On a $\alpha \in \beta$ ou $\beta \in \alpha$ ou $\alpha = \beta$.
   Autrement dit $\in$ est un ordre strict **total** sur les ordinaux.
4. Soit E un ensemble non vide dont les éléments sont tous des ordinaux.
   Alors $(E, \in)$ possède un minimum.
   Ainsi $\in$ est un **bon** ordre strict sur les ordinaux.

Ainsi, $\in$ est un **bon ordre strict total** sur les ordinaux.

Démonstration

1. Supposons que $\alpha \in \beta \in \gamma$.

On a alors $\boxed{\alpha \in \gamma}$ car γ est transitif car ordinal.

2.

Supposons par l'absurde que $\alpha \in \alpha$.

En prenant $x := \alpha$, on a l'existence d'un $x \in \alpha$ tel que $x \in x$.

Or α est un ordinal donc $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné donc $\in$ est antiréflexive sur α. En particulier $\forall x \in \alpha, x \notin x$, d'où l'absurdité.

Par l'absurde, on a donc $\boxed{\alpha \notin \alpha}$.

3. Considérons $\delta := \alpha \cap \beta$.

Alors δ est un ordinal d'après la proposition 7 page 10.

Or on a $\delta \subseteq \alpha$ donc $\delta \in \alpha$ ou $\delta = \alpha$ d'après la proposition 8 page 10.

De même on a $\delta \subseteq \beta$ donc $\delta \in \beta$ ou $\delta = \beta$ d'après la proposition 8 page 10.

- Si $\delta = \alpha$ alors comme $\delta \in \beta$ ou $\delta = \beta$ on a $\boxed{\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta}$.
- Si $\delta = \beta$ alors comme $\delta \in \alpha$ ou $\delta = \alpha$ on a $\boxed{\beta \in \alpha \text{ ou } \beta = \alpha}$.
- Sinon si $\delta \neq \alpha$ et $\delta \neq \beta$ alors d'après ce qui précède on a $\delta \in \alpha$ et $\delta \in \beta$.
  On a donc $\delta \in \alpha \cap \beta$ par définition de l'intersection.
  Comme $\delta = \alpha \cap \beta$ par définition, on a donc $\delta \in \delta$, ce qui contredit 1.

Finalement, on a bien $\boxed{\alpha \in \beta \text{ ou } \beta \in \alpha \text{ ou } \alpha = \beta}$.

4. Comme E est non vide, il existe $\varepsilon \in E$.

Si ε est le minimum de $(E, \in)$ c'est bon.

Supposons donc que ε n'est pas le minimum de $(E, \in)$.

Il existe donc $\mu \in E$ tel que l'on n'a pas $\varepsilon \in \mu$ ou $\varepsilon = \mu$.

Or tous les éléments de E sont des ordinaux donc $\mu \in \varepsilon$ d'après 3.

En particulier on a $\mu \in \varepsilon \cap E$ et donc $\varepsilon \cap E \neq \varnothing$.

Donc $\varepsilon \cap E$ est une partie non vide de ε.

Or $(\varepsilon, \in)$ est strictement bien ordonné donc $\varepsilon \cap E$ possède un minimum ξ.

Montrons que ξ est le minimum de E.

Soit $\nu \in E$.

Comme tous les éléments de E sont des ordinaux, on a $\nu \in \varepsilon$ ou $\varepsilon \in \nu$ ou $\nu = \varepsilon$ d'après 3.

- Si $\nu \in \varepsilon$ alors $\nu \in \varepsilon \cap E$ donc $\xi \in \nu$ car ξ est le minimum de $\varepsilon \cap E$.
- Si $\varepsilon \in \nu$, comme $\xi \in \varepsilon \cap E$ on a $\xi \in \varepsilon$ donc $\xi \in \varepsilon \in \nu$ et donc $\xi \in \nu$ d'après 1.
- Si $\nu = \varepsilon$, comme $\xi \in \varepsilon \cap E$ on a $\xi \in \varepsilon$ donc $\xi \in \nu$.

Dans tous les cas on a $\xi \in \nu$.

Donc ξ est le minimum de E.

Dans tous les cas, $\boxed{E \text{ admet un minimum}}$.

CQFD.

Théorème 2 (Paradoxe de Burali-Forti)

Il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ordinaux.

Démonstration

Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble E tel que tout ordinal en est un élément.

Considérons alors $X := \{x \in E \mid x \text{ est un ordinal}\}$.

• Montrons X est transitif.

Soit $\alpha \in X$.

Par définition α est un ordinal.

Soit $\beta \in \alpha$.

Alors β est un ordinal d'après la proposition 6 page 9.

On a donc $\beta \in E$ par définition de E et donc $\beta \in X$ par définition de X.

Donc $\forall \beta \in \alpha, \beta \in X$ donc $\alpha \subseteq X$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall \alpha \in X, \alpha \subseteq X$ donc $\boxed{X \text{ est transitif}}$.

• D'après le théorème 1 page 12 $\boxed{(X, \in) \text{ est strictement bien ordonné}}$ car tous ses éléments sont des ordinaux.

Ainsi X est transitif et $(X, \in)$ est strictement bien ordonné.
Donc X est un ordinal donc $X \in E$ par définition de E donc $X \in X$ par définition de X.
C'est en contradiction avec l'antiréflexivité de $\in$ chez les ordinaux.
CQFD.

Pour la petite histoire

Cesare Burali-Forti (13 août 1861 – 21 janvier 1931) est un mathématicien italien.

Cesare Burali-Forti est assistant de Giuseppe Peano à Turin de 1894 à 1896. Bertrand Russell a nommé paradoxe de Burali-Forti, le paradoxe du plus grand ordinal en théorie des ensembles, en référence à un article de 1897 où le mathématicien italien, croyant démontrer que deux ordinaux ne sont pas toujours comparables, fait le raisonnement qui conduit au paradoxe décrit par Russell.

Proposition 9 (Union et intersection d'ordinaux)

Soient α et β deux ordinaux.

1. $\alpha \cup \beta$ est un ordinal et $\alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)$.
2. $\alpha \cap \beta$ est un ordinal et $\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)$.

Soit X un ensemble dont tous les éléments sont des ordinaux.

3. $\bigcup X$ est un ordinal et $\bigcup X = \sup(X)$.
   La notion de borne supérieure est à comprendre ici "*parmi les ordinaux*".
4. Si $X \neq \varnothing$ alors $\bigcap X$ est un ordinal et $\bigcap X = \min(X)$.

Démonstration

Comme α et β sont deux ordinaux, on a $\alpha \in \beta$ ou $\beta \in \alpha$ ou $\alpha = \beta$ d'après le théorème 1 page 12.

1.

- Si $\alpha \in \beta$ alors $\beta = \max(\alpha, \beta)$ par définition du maximum.

Or β est un ordinal donc est transitif donc $\alpha \subseteq \beta$ donc $\alpha \cup \beta = \beta$.

En particulier $\alpha \cup \beta$ est un ordinal, et on a donc $\alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)$.

- Si $\beta \in \alpha$ alors on raisonne de la même manière.
- Si $\alpha = \beta$ alors $\alpha \cup \beta = \alpha$ qui est bien un ordinal.

  On a donc $\alpha \cup \beta = \alpha = \max(\alpha, \alpha) = \max(\alpha, \beta)$.

Dans tous les cas $\boxed{\alpha \cup \beta \text{ est un ordinal et } \alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)}$.

2. On a déjà vu lors de la proposition 7 page 10 que $\boxed{\alpha \cap \beta \text{ est un ordinal}}$.

- Si $\alpha \in \beta$ alors $\alpha = \min(\alpha, \beta)$ par définition du minimum.

  Or β est un ordinal donc est transitif donc $\alpha \subseteq \beta$ donc $\alpha \cap \beta = \alpha$.

  On a donc $\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)$.
- Si $\beta \in \alpha$ alors on raisonne de la même manière.
- Si $\alpha = \beta$ alors $\alpha \cap \beta = \alpha$ qui est bien un ordinal.

  On a donc $\alpha \cap \beta = \alpha = \min(\alpha, \alpha) = \min(\alpha, \beta)$.

Dans tous les cas on a $\boxed{\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)}$.

3. Commençons par montrer que $\bigcup X$ est un ordinal.

• Montrons que $\bigcup X$ est transitif.

En effet soit $x \in \bigcup X$.

Il existe donc $\alpha \in X$ tel que $x \in \alpha$.

Or α est un ordinal donc est transitif donc $x \subseteq \alpha$.

Comme $\alpha \in X$, on a $\alpha \subseteq \bigcup X$ donc $x \subseteq \bigcup X$ par transitivité de l'inclusion.

Donc $\forall x \in \bigcup X, x \subseteq \bigcup X$ donc $\boxed{\bigcup X \text{ est transitif}}$.

• Montrons que $\in$ est un bon ordre strict sur $\bigcup X$.

- $\in$ est antiréflexive sur $\bigcup X$.

  Soit $x \in \bigcup X$.

  Il existe donc $\alpha \in X$ tel que $x \in \alpha$.

  Or α est un ordinal donc x est un ordinal d'après la proposition 6 page 9.

  En particulier $x \notin x$ par antiréflexivité de $\in$ sur les ordinaux.

  Donc $\forall x \in \bigcup X, x \notin x$ donc $\in$ est antiréflexive sur $\bigcup X$.

- $\in$ est transitive sur $\bigcup X$.

  Soient x, y et z dans $\bigcup X$.

  Il existe donc α, β et γ dans X tels que $x \in \alpha$, $y \in \beta$ et $z \in \gamma$.

Or tous les éléments de X sont des ordinaux donc α, β et γ sont des ordinaux.

En particulier d'après 1 $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ est un ordinal, dont x, y et z sont des éléments.

Supposons que $x \in y \in z$.

Comme $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ est un ordinal, $(\alpha \cup \beta \cup \gamma, \in)$ est strictement bien ordonné. Donc $\in$ est transitive sur $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ et donc $x \in z$.

Donc si $x \in y \in z$ alors $x \in z$.

Donc $\in$ est transitive sur $\bigcup X$.

Ainsi $\in$ est un ordre strict sur $\bigcup X$.

► $\in$ est un bon ordre strict sur $\bigcup X$.

Soit A une partie non vide de $\bigcup X$.

Soit $a \in A$.

Comme $A \subseteq \bigcup X$ on a $a \in \bigcup X$.

Il existe donc $\alpha \in X$ tel que $a \in \alpha$.

Or tous les éléments X sont des ordinaux donc α est un ordinal.

Donc a est un ordinal d'après la proposition 6 page 9.

Donc tous les éléments de A sont des ordinaux.

Comme A est non vide, il possède un minimum d'après le théorème 1 page 12.

Donc toutes les parties non vides de $\bigcup X$ possèdent un minimum.

Donc $\in$ est un bon ordre strict sur $\bigcup X$.

Donc $\boxed{\bigcup X \text{ est un ordinal}}$.

• Montrons que $\bigcup X = \sup(X)$.

Soit $\alpha \in X$.

Comme X ne contient que des ordinaux, α est un ordinal.

On a $\alpha \subseteq \bigcup X$ donc $\alpha \in \bigcup X$ ou $\alpha = \bigcup X$ d'après la proposition 8 page 10.

Donc pour tout $\alpha \in X$, on a $\alpha \in \bigcup X$ ou $\alpha = \bigcup X$ donc $\boxed{\bigcup X \text{ est un majorant de } (X, \in)}$.

Soit β un ordinal qui est majorant de $(X, \in)$.

Chez les ordinaux, l'ordre large associé à $\in$ est $\subseteq$ d'après la proposition 8 page 10.

Donc par définition d'un majorant, pour tout $\alpha \in X$, on a $\alpha \subseteq \beta$.

On a donc $\bigcup X \subseteq \beta$ par minimalité de la réunion pour l'inclusion.

Donc tout ordinal majorant de $(X, \in)$ est plus grand ou égal à $\bigcup X$.

Ainsi, $\bigcup X$ est le plus petit ordinal majorant de $(X, \in)$.

Donc $\boxed{\sup(X) = \bigcup X}$.

4. Supposons que X est non vide.

Commençons par montrer que $\bigcap X$ est un ordinal.

• $\bigcap X$ est transitif.

En effet, soit $x \in \bigcap X$.

Pour tout $\alpha \in X$, on a $x \in \alpha$.

Or tous les éléments de X sont des ordinaux donc sont transitifs..

Donc pour tout $\alpha \in X$, on a $x \subseteq \alpha$.

Donc $x \subseteq \bigcap X$ par minimalité de l'intersection pour l'inclusion.

Donc $\forall x \in \bigcap X, x \subseteq \bigcap X$.

Donc $\bigcap X$ est transitif.

• Comme X est non vide, il existe $\alpha \in X$.

On a alors $\bigcap X \subseteq \alpha$.

Or tous les éléments de X sont des ordinaux donc α est un ordinal.

Donc $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné et donc $\left(\bigcap X, \in\right)$ est strictement bien ordonné d'après la proposition 3 page 4.

On en conclut que $\boxed{\bigcap X \text{ est un ordinal}}$.

• Montrons que $\bigcap X = \min(X)$.

Par définition X est un ensemble non vide d'ordinaux.

Donc X admet un minimum ξ d'après le théorème 1 page 12.

Or $\subseteq$ est l'ordre large associé à $\in$ chez les ordinaux d'après la proposition 8 page 10.

Donc $\forall \alpha \in X, \xi \subseteq \alpha$ donc $\xi \subseteq \bigcap X$ par maximalité de l'intersection pour l'inclusion.

Or on a $\xi \in X$ par définition du minimum, donc $\bigcap X \subseteq \xi$ et donc $\bigcap X = \xi$.

Or par définition $\xi = \min(X)$ donc $\boxed{\bigcap X = \min(X)}$.

CQFD.

3 Ordinaux successeurs, limites et entiers naturels

Définition 5 (Successeur d'un ensemble)

Soit x un ensemble.
On appelle **successeur** de x l'ensemble $S(x) := x \cup \{x\}$.

Exemple :
Il est temps de définir les dix premiers entiers naturels.
On pose $0 := \varnothing$.
On pose $1 := S(0) = 0 \cup \{0\} = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\}$.
On pose $2 := S(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$.
On pose $3 := S(2) = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$.
On pose $4 := S(3) = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$.
On pose $5 := S(4) = 4 \cup \{4\} = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
On pose $6 := S(5) = 5 \cup \{5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
On pose $7 := S(6) = 6 \cup \{6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
On pose $8 := S(7) = 7 \cup \{7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
On pose $9 := S(8) = 8 \cup \{8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
D'une manière générale quand ton aura bien été défini, on pourra remarquer qu'intuitivement pour un entier naturel n on a $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.
On pourra alors remarquer que n a exactement n éléments.

Proposition 10 (Successeur d'un ordinal)

Soient α et β deux ordinaux.

1. On a l'équivalence $\beta \in S(\alpha) \iff \beta \subseteq \alpha$.
2. $S(\alpha)$ est un ordinal tel que $\alpha \in S(\alpha)$.

Démonstration

1. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \beta \in S(\alpha) &\iff \beta \in \alpha \cup \{\alpha\} \\ &\iff \beta \in \alpha \text{ ou } \beta \in \{\alpha\} \\ &\iff \beta \in \alpha \text{ ou } \beta = \alpha \\ &\iff \beta \subseteq \alpha \text{ d'après la prop. 8 p. 10} \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence $\boxed{\beta \in S(\alpha) \iff \beta \subseteq \alpha}$.

2. Comme $\alpha \subseteq \alpha$, on obtient $\boxed{\alpha \in S(\alpha)}$ d'après 1.

• Montrons que $S(\alpha)$ est transitif.

Soit $x \in S(\alpha)$.

On a alors $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ par définition donc $x \in \alpha$ ou $x \in \{\alpha\}$.

- Si $x \in \alpha$ alors $x \subseteq \alpha$ car α est transitif car ordinal.
- Si $x \in \{\alpha\}$ alors $x = \alpha$ et donc $x \subseteq \alpha$ en particulier.

Dans les deux cas on a $x \subseteq \alpha$.

Comme $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ on a $\alpha \subseteq S(\alpha)$ et donc $x \subseteq S(\alpha)$.

Donc $\forall x \in S(\alpha), x \subseteq S(\alpha)$.

Donc $S(\alpha)$ est réflexif.

• Montrons que $\in$ est un bon ordre strict sur $S(\alpha)$.

Comme $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, chaque élément de $S(\alpha)$ est soit un élément de α, soit α lui-même.

Or α est un ordinal donc tous les éléments de α sont des ordinaux d'après la proposition 6 page 9. Donc tous les éléments de $S(\alpha)$ sont des ordinaux.

En particulier $\in$ est transitive et antiréflexive sur $S(\alpha)$ d'après le théorème 1 page 12.

De même, toute partie non vide de $S(\alpha)$ est alors un ensemble non vide d'ordinaux.

Donc toute partie non vide de $S(\alpha)$ admet un minimum d'après ce même théorème.

On en conclut que $\in$ est un bon ordre strict sur $S(\alpha)$.

Finalement $\boxed{S(\alpha) \text{ est un ordinal}}$.

CQFD.

Définition 6 (Ordinaux successeurs, limites et entiers naturels)

Soit β un ordinal.

1. On dit que β est **successeur** si et seulement s'il existe un ordinal α tel que $\beta = S(\alpha)$.
2. Supposons que β est non vide.
   On dit que β est **limite** si et seulement si β n'est pas successeur.
3. On dit que β est un **entier naturel** (ou un **ordinal fini**) si et seulement si pour tout ordinal $\alpha \subseteq \beta$, ou bien $\alpha = \varnothing$ ou bien α est un ordinal successeur.

Exemple :

1. Comme $0 = \varnothing$, on a déjà vu que 0 est un ordinal.
   1 en tant que successeur de 0 est aussi un ordinal.
   0 et 1 sont tous les deux des entiers naturels.
   1 est un successeur (de 0 donc) mais 0 n'est ni successeur ni limite.

Proposition 11 (Successeur d'un entier naturel)

Soit n un entier naturel.

1. $S(n)$ est un entier naturel.
2. Pour tout $x \in n$, x est aussi un entier naturel.

Démonstration

1.

Soit un ordinal $\alpha \subseteq S(n)$.

Par définition n est un entier naturel donc est un ordinal.

Donc $S(n)$ est un ordinal d'après la proposition 10 page 18.

Ainsi on a $\alpha \subseteq S(n)$ avec α et $S(n)$ deux ordinaux.

On a donc ou bien $\alpha \in S(n)$ ou bien $\alpha = S(n)$ d'après la proposition 8 page 10.

- Supposons que $\alpha \in S(n)$.
  On a alors $\alpha \subseteq n$ d'après la proposition 10 page 18.
  Ainsi α est un ordinal qui est une partie de l'entier naturel n.
  On a donc par définition ou bien $\alpha = \varnothing$ ou bien α est un successeur.
- Supposons que $\alpha = S(n)$.
  Comme n est un entier naturel, n est un ordinal.
  Donc $\alpha = S(n)$ est un successeur.

Dans les deux cas, ou bien $\alpha = \varnothing$ ou bien α est un successeur.

Donc tous les ordinaux inclus dans $S(n)$ sont ou bien vides ou bien un successeur.

Comme $S(n)$ est un ordinal, c'est donc par définition $\boxed{\text{un entier naturel}}$.

2. Soit $x \in n$.

Par définition n est un entier naturel donc est un ordinal.

Donc x est un ordinal d'après la proposition 6 page 9.

Comme $x \in n$, on a donc $x \subseteq n$ car n est transitif car ordinal.

Soit un ordinal $\alpha \subseteq x$.

On a donc $\alpha \subseteq n$ par transitivité de l'inclusion.

Or n est un entier naturel et α un ordinal.

Donc ou bien α est vide ou bien α est un successeur.

Donc tous les ordinaux inclus dans x sont ou bien vides ou bien un successeur.

Comme x est un ordinal, par définition $\boxed{x \text{ est un entier naturel}}$.

CQFD.

Théorème 3 (Principe d'induction chez les entiers naturels)

Soit X un ensemble.
Supposons que

1. $\varnothing \in X$
2. Pour tout $x \in X$ on a $S(x) \in X$.

Alors X contient tous les entiers naturels.

Démonstration

Soit n un entier naturel.

Supposons par l'absurde que $n \notin X$.

Considérons $Y := S(n) \backslash X$.

Comme n est un entier naturel, $S(n)$ est un entier naturel d'après la prop. 11 p. 20.

Donc tous les éléments de $S(n)$ sont des entiers naturels d'après la prop. 11 p. 20.

Donc comme $Y \subseteq S(n)$, tous les éléments de Y sont des entiers naturels.

On a $n \in S(n)$ d'après la proposition 10 page 18 et $n \notin X$ par hypothèse.

On a donc $n \in Y$ donc Y est un ensemble non vide d'entiers naturels.

Il possède donc un entier naturel minimum k d'après le théorème 1 page 12.

On a $k \subseteq k$ donc k est un ordinal inclus dans un entier naturel.

Donc k est ou bien vide ou bien un successeur par définition.

Or $k \in Y = S(n) \backslash X$ donc $k \notin X$. Comme $\varnothing \in X$ par hypothèse, on a donc $k \neq \varnothing$.

Donc k est un successeur : il existe un ordinal i tel que $k = S(i)$.

Or on a $i \in S(i) = k$ d'après la proposition 10 page 18.

Donc $i \notin Y$ car k est le minimum de Y.

Mais $i \in k \subseteq n \in S(n)$ donc comme tous ici sont des ordinaux, on a $i \in S(n)$ par transitivité. Ainsi $i \in S(n) \backslash Y = X$ mais alors $k = S(i) \in X$ par hypothèse.

C'est absurde puisque $k \in Y$ par définition et $Y = S(n) \backslash X$.

Donc par l'absurde on a $\boxed{n \in X}$.

CQFD.

Axiome 1 (de l'infini)

Il existe au moins un ensemble X tel que

1. $\varnothing \in X$
2. Pour tout $x \in X$ on a $S(x) \in X$.

Proposition 12 (Ensemble des entiers naturels)

Il existe un unique ensemble $\mathbb{N}$ tel que pour tout ensemble n, on a l'équivalence

$$n \in \mathbb{N} \iff n \text{ est un entier naturel}$$

On dit donc que $\mathbb{N}$ est l'**ensemble des entiers naturels**, et on le note aussi parfois ω.

Démonstration

D'après l'axiome de l'infini, il existe un ensemble X tel que

1. $\varnothing \in X$
2. Pour tout $x \in X$ on a $S(x) \in X$.

Posons alors $\mathbb{N} := \{x \in X \mid x \text{ est un entier naturel}\}$.

Soit n un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $n \in \mathbb{N}$ alors par définition n est un entier naturel.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que n est un entier naturel.

Alors $n \in X$ d'après le principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc $n \in X$ et n est un entier naturel.

Donc $n \in \mathbb{N}$ par définition.

Donc si n est un entier naturel alors $\mathbb{N}$.

Ainsi pour tout ensemble n, on a bien l'équivalence $\boxed{n \in \mathbb{N} \iff n \text{ est un entier naturel}}$.

L'unicité est garantie par le fait que cette équivalence caractérise l'appartenance à $\mathbb{N}$.

CQFD.

Proposition 13 (Segment initiaux des ordinaux)

Soit X un ensemble.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est un ordinal.
2. Tous les éléments de X sont des ordinaux et X est transitif.
3. Tous les éléments de X sont des ordinaux et X est un segment initial des ordinaux.
   Autrement dit pour tous ordinaux α et β, on a

$$\big(\alpha \in X \text{ et } \beta \in \alpha\big) \implies \beta \in X$$

Démonstration

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Supposons que X est un ordinal.

En particulier $\boxed{X \text{ est transitif}}$ par définition.

De plus $\boxed{\text{tous les éléments de } X \text{ sont des ordinaux}}$ d'après la proposition 6 page 9.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$ Supposons que tous les éléments de X sont des ordinaux et X est transitif.

Alors $(X, \in)$ est strictement bien ordonné d'après le théorème 1 page 12.

Comme X est transitif, on en conclut que $\boxed{X \text{ est un ordinal}}$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Supposons que tous les éléments de X sont des ordinaux et X est transitif.

Soient α et β deux ordinaux.

Supposons que $\alpha \in X$ et $\beta \in \alpha$.

Comme X est transitif par hypothèse, on a alors $\alpha \subseteq X$.

Comme $\beta \in \alpha$ on a donc $\beta \in X$ par définition de l'inclusion.

Donc si $\alpha \in X$ et $\beta \in \alpha$ alors $\beta \in X$.

Donc $\boxed{X \text{ est un segment initial des ordinaux}}$.

$\boxed{2 \Leftarrow 3}$ Supposons que tous les éléments de X sont des ordinaux et X est un segment initial des ordinaux.

Soit $\alpha \in X$.

Par hypothèse α est donc un ordinal.

Soit $\beta \in \alpha$.

Alors β est un ordinal d'après la proposition 6 page 9.

Ainsi α et β sont des ordinaux tels que $\alpha \in X$ et $\beta \in \alpha$.

Donc $\beta \in X$ car X est un segment initial des ordinaux.

Donc $\forall \beta \in \alpha, \beta \in X$ donc $\alpha \subseteq X$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall \alpha \in X, \alpha \subseteq X$ et donc $\boxed{X \text{ est transitif}}$.

CQFD.

Remarque :
On a vu grâce au théorème 1 page 12 que les ordinaux sont munis d'un bon ordre.
X est un segment initial des ordinaux est donc équivalent à l'existence d'un ordinal ξ tel que $X = \xi\downarrow$ d'après la proposition 5 page 6. Ici ξ est tout trouvé : c'est X lui-même d'après cette proposition. C'est d'ailleurs assez logique puisque la relation d'ordre strict sur les ordinaux est l'appartenance et donc $X = \{\alpha \mid \alpha \in X\} = X\downarrow$.

Proposition 14 (omega est le plus petit ordinal limite)

ω est le plus petit ordinal limite, c'est-à-dire que pour tout ordinal limite α on a $\omega \subseteq \alpha$.

Démonstration

• ω ne contient que des entiers naturels (et les contient tous) par définition.

En particulier ω est un ensemble d'ordinaux.

Montrons que ω est transitif.

Soit $n \in \omega$.

Alors n est un entier naturel par définition de ω.

Soit $m \in n$.

Alors m est un entier naturel d'après la proposition 11 page 20.

Donc $m \in \omega$ par définition de ω.

Donc $\forall m \in n, m \in \omega$ donc $n \subseteq \omega$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall n \in \omega, n \subseteq \omega$ donc ω est transitif.

Ainsi ω est un ensemble d'ordinaux qui est transitif.

Donc $\boxed{\omega \text{ est un ordinal}}$ d'après la proposition 13 page 22.

• Montrons que ω est un ordinal limite.

Supposons par l'absurde que ω est successeur.

Il existe donc un ordinal α tel que $\omega = S(\alpha)$.

On a alors $\alpha \in \omega$ d'après la proposition 10 page 18.

Donc α est un entier naturel par définition de ω.

Donc $S(\alpha)$ est un entier naturel d'après la proposition 11 page 20.

Donc $S(\alpha) \in \omega$ par définition de ω, donc $\omega \in \omega$.

C'est absurde par antiréflexivité de $\in$ chez les ordinaux.

Donc ω n'est pas un successeur.

N'étant pas vide, $\boxed{\omega \text{ est donc limite}}$.

• Soit α un ordinal limite.

Soit $n \in \omega$.

Par définition n est un entier naturel.

On a $n \subseteq n$ donc n est un ordinal inclus dans un entier naturel.

Donc n est vide ou n est un successeur.

Donc n n'est pas un ordinal limite.

Donc les éléments de ω ne sont pas des ordinaux limites et donc $\alpha \notin \omega$.

Or α et ω sont des ordinaux donc on a $\omega = \alpha$ ou $\omega \in \alpha$ d'après le théorème 1 page 12.

On a donc $\boxed{\omega \subseteq \alpha}$ d'après la proposition 8 page 10.

CQFD.

Proposition 15 (Plus petit majorant strict d'ordinaux)

Soit X un ensemble d'ordinaux.
Alors il existe un unique ordinal α tel que

1. $\forall \xi \in X, \xi \in \alpha$.
   Ainsi α est un majorant strict de X.
2. Pour tout ordinal β, si $\forall \xi \in X, \xi \in \beta$ alors $\alpha \subseteq \beta$.
   Ainsi α est plus petit que tout majorant strict de X.

Démonstration

D'après la proposition 9 page 14, $\bigcup X$ est un ordinal.

Posons alors $\alpha := \begin{cases} \bigcup X & \text{si } \bigcup X \notin X \\ S(\bigcup X) & \text{si } \bigcup X \in X \end{cases}$.

1.

On a vu lors de la proposition 9 page 14 que $\bigcup X$ est un majorant de X.

- Si $\bigcup X \notin X$ alors $\alpha = \bigcup X$ est un majorant strict de X.
- Supposons à présent que $\bigcup X \in X$.
  On a donc $\alpha = S(\bigcup X)$.
  Or on sait que $\forall \xi \in X, \xi \subseteq \bigcup X$.
  Donc $\forall \xi \in X, \xi \in \alpha$ d'après la proposition 10 page 18.
  Ainsi α est un majorant de X.
  Par l'absurde, si $\alpha \in X$ alors $\alpha \subseteq \bigcup X$, ce qui contredirait $\bigcup X \in \alpha$.
  Ainsi $\alpha \notin X$ et donc α est un majorant strict de X.

Dans les deux cas, $\boxed{\alpha \text{ est un majorant strict de } X}$.

2. Soit β un ordinal majorant strict de X.

Comme α et β sont deux ordinaux, on a $\beta \in \alpha$ ou $\alpha \subseteq \beta$ d'après le théorème 1 page 12.

Supposons par l'absurde que $\beta \in \alpha$.

- Supposons que $\bigcup X \notin X$.
  Dans ce cas-là on a $\alpha = \bigcup X$ donc $\beta \in \bigcup X$.
  Il existe donc $\xi \in X$ tel que $\beta \in \xi$ donc β n'est pas un majorant de X.
  C'est absurde.
- Supposons que $\bigcup X = X$.
  Dans ce cas-là on a $\alpha = S(\bigcup X)$ donc $\beta \in S(\bigcup X)$.
  On a donc $\beta \subseteq \bigcup X$ d'après la proposition 10 page 18.
  Or $\bigcup X \in X$ par hypothèse donc β n'est pas un majorant strict de X.

C'est absurde.

Dans les deux cas on aboutit à une absurdité.
Donc par l'absurde on a montré que $\beta \notin \alpha$ et donc $\boxed{\alpha \subseteq \beta}$.
CQFD.

4 Isomorphisme avec les ordinaux

Proposition 16 (Ensemble des segments initiaux)

Soit E un ensemble bien ordonné.
Soit $X := \{A \subseteq E \mid A \text{ est un segment initial propre de } E\}$.
On munit X de la relation d'ordre $\subseteq$.
Soit $f := \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & x\!\downarrow \end{pmatrix}$.

On a alors :

1. f est un isomorphisme d'ordre de E vers X.
2. Si de plus E est un ordinal alors $f = \mathrm{id}_E$ et en particulier $E = X$.

Démonstration

Soient $\leq$ la relation d'ordre sur E et $<$ l'ordre strict associé à $\leq$.

1.
• Montrons que f est strictement croissante.
Soient x et y dans E.
Supposons que $x < y$.
On a alors $x \in y\!\downarrow$ par définition.
Or on n'a pas $x < x$ par antiréflexivité donc $x \notin x\!\downarrow$.
Comme $x \in y\!\downarrow$ et $x \notin x\!\downarrow$ on a $x\!\downarrow \neq y\!\downarrow$.
Soit $z \in x\!\downarrow$.
On a donc $z < x$ et donc $z < y$ par transitivité.
On a donc $z \in y\!\downarrow$.
Donc $x\!\downarrow \subseteq y\!\downarrow$ par définition de l'inclusion et donc $x\!\downarrow \subsetneq y\!\downarrow$
Ainsi on a $f(x) \subsetneq f(y)$ par définition de f.
Donc si $x < y$ alors $f(x) \subsetneq f(y)$.
Donc f est strictement croissante.
En particulier $\boxed{f \text{ est croissante et injective}}$.

• Montrons que f est surjective dans X.
Par définition de f on sait déjà que $\mathrm{im}(f) \subseteq X$.
Soit $A \in X$.
Alors A est un segment initial de E par définition de X.
Or E est bien ordonné donc il existe $x \in E$ tel que $A = x\!\downarrow$ d'après la prop. 5 p. 6.

On a donc $A = f(x)$ et donc $A \in \text{im}(f)$.

Donc $\text{im}(f) \supseteq X$ et donc $\text{im}(f) = X$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est surjective dans } X}$.

• Ainsi f est croissante, injective et surjective dans X.

Or E est bien ordonné donc est totalement ordonné d'après la proposition 2 page 3.

Donc $\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } E \text{ vers } X}$.

2. Supposons que E est un ordinal.

Remarquons pour commencer que f et id_E ont le même domaine E.

Soit $\alpha \in E$.

Comme E est un ordinal, α est aussi un ordinal d'après la proposition 6 page 9.

Alors α est un segment initial de E d'après la proposition 13 page 22.

Plus précisément, montrons que $\alpha = \alpha\downarrow$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $\beta \in \alpha$.

Comme α est un ordinal, β est aussi un ordinal d'après la proposition 6 page 9.

Ainsi $\beta \in \alpha \in E$ et les trois sont des ordinaux.

Donc $\beta \in E$ par transitivité de E.

Ainsi $\beta \in E$ et $\beta \in \alpha$ donc $\beta \in \{x \in E \mid x \in \alpha\} = \alpha\downarrow$.

Donc $\alpha \subseteq \alpha\downarrow$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $\beta \in \alpha\downarrow$.

Par définition on a $\alpha\downarrow = \{x \in E \mid x \in \alpha\}$ donc en particulier $\beta \in \alpha$.

Donc $\alpha \supseteq \alpha\downarrow$ et donc $\alpha = \alpha\downarrow$.

En particulier $f(\alpha) = \alpha\downarrow = \alpha = \text{id}_E(\alpha)$.

Donc $\forall \alpha \in E, f(\alpha) = \text{id}_E(\alpha)$.

Donc $\boxed{f = \text{id}_E}$.

En particulier $\boxed{E = \text{im}(\text{id}_E) = \text{im}(f) = X}$.

CQFD.

Remarque :

On peut remarquer que $g := \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & \min(E \backslash A) \end{pmatrix}$ est la réciproque de f.

Proposition 17 (Isomorphisme entre ordinaux)

Soient α et β deux ordinaux et $f : \alpha \longrightarrow \beta$.

Si f est un isomorphisme de α vers β alors $f = \text{id}_\alpha$ et donc $\alpha = \beta$.

Démonstration

Supposons que f est un isomorphisme de α vers β.

En particulier f est injective, surjective sur β et croissante.

- Montrons que pour tout $\xi \in \alpha$, on a $f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)$.

  Soit $\xi \in \alpha$.

  Montrons que $f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)$.

  $\boxed{\subseteq}$

  Soit $\gamma \in f(\xi)$.

  Comme f est surjective sur β on a $\mathrm{im}(f) = \beta$ donc $f(\xi) \in \beta$.

  On a donc $f(\xi) \subseteq \beta$ car β est transitif car ordinal et donc $\gamma \in \beta$.

  Comme $\mathrm{im}(f) = \beta$ on a $\gamma \in \mathrm{im}(f)$ donc il existe $\mu \in \alpha$ tel que $\gamma = f(\mu)$.

  On a alors $\mu \in \xi$ ou $\mu = \xi$ ou $\xi \in \mu$ d'après le théorème 1 page 12.

  ► Si $\mu = \xi$ alors $\gamma = f(\mu) = f(\xi)$.
  Or par définition on a $\gamma \in f(\xi)$, donc $\gamma \in \gamma$.

  ► Si $\xi \in \mu$ alors $f(\xi) \subseteq f(\mu) = \gamma$ par croissance de f.
  On a donc $f(\xi) \in \gamma$ ou $f(\xi) = \gamma$ d'après la proposition 8 page 10.
  Or par définition on a $\gamma \in f(\xi)$.
  Donc si $f(\xi) \in \gamma$ alors $\gamma \in \gamma$ par transitivité de $\in$ chez les ordinaux.
  Et si $f(\xi) = \gamma$ on a directement $\gamma \in \gamma$.

  Dans ces deux cas-là on a donc nécessairement $\gamma \in \gamma$.

  C'est absurde par antiréflexivité de $\in$ chez les ordinaux.

  On a donc nécessairement $\mu \in \xi$.

  Comme $\gamma = f(\mu)$, on a donc $\gamma \in f^{\rightarrow}(\xi)$.

  Donc $f(\xi) \subseteq f^{\rightarrow}(\xi)$.

  $\boxed{\supseteq}$

  Soit $\gamma \in f^{\rightarrow}(\xi)$.

  Il existe donc $\mu \in \xi$ tel que $\gamma = f(\mu)$.

  Par croissante de f on a alors $\gamma = f(\mu) \subseteq f(\xi)$.

  On a donc $\gamma \in f(\xi)$ ou $\gamma = f(\xi)$ d'après la proposition 8 page 10.

  Supposons par l'absurde que $\gamma = f(\xi)$.

  Comme $\gamma = f(\mu)$, on a alors $\mu = \xi$ par injectivité de f.

  Or on a $\mu \in \xi$ donc $\xi \in \xi$.

  C'est absurde par antiréflexivité de $\in$ chez les ordinaux.

  Donc $\gamma \in f(\xi)$.

  Donc $f(\xi) \supseteq f^{\rightarrow}(\xi)$.

Finalement on a bien $f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } \xi \in \alpha, \text{ on a } f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)}$ $(\star)$.

• On veut montrer que $f = \mathrm{id}_\alpha$.

Comme elles ont le même domaine, cela revient à montrer que $\forall \xi \in \alpha, f(\xi) = \xi$.

Pour cela, considérons $X := \left\{\xi \in \alpha \;\middle|\; f(\xi) \neq \xi\right\}$.

Supposons par l'absurde que X est non vide.

Par définition X est donc une partie non vide de l'ordinal α.

Il possède donc un ordinal minimum ξ d'après le théorème 1 page 12.

Soit $\mu \in \xi$.

Comme ξ est minimum de X, on a $\mu \notin X$.

On a donc $f(\mu) = \mu$ par définition de X.

Donc $\forall \mu \in \xi, f(\mu) = \mu$.

Donc $f(\xi) \underset{(\star)}{=} f^{\rightarrow}(\xi) = \left\{f(\mu) \;\middle|\; \mu \in \xi\right\} = \{\mu \mid \mu \in \xi\} = \xi$.

Donc $\xi \notin X$: c'est absurde.

Par l'absurde, on a donc que X est vide.

Donc $\forall \xi \in \alpha, f(\xi) = \xi$.

Finalement, on a donc $\boxed{f = \mathrm{id}_\alpha}$.

On a en particulier $\alpha = \mathrm{im}(\mathrm{id}_\alpha) = \mathrm{im}(f) = \beta$ par surjectivité de f sur β.

CQFD.

Proposition 18 (Au plus un ordinal associé à un bon ordre)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
Supposons qu'il existe au moins un ordinal α tel que $(E, \leq)$ et $(\alpha, \subseteq)$ sont isomorphes.
Alors un tel α est unique, et l'isomorphisme de $(E, \leq)$ vers $(\alpha, \subseteq)$ est unique.

Démonstration

• Unicité de l'ordinal

Soit $f : E \longrightarrow \alpha$ un isomorphisme.

Soit β un ordinal tel que $(E, \leq)$ et $(\beta, \subseteq)$ sont isomorphes.

Il existe donc un isomorphisme $g : E \longrightarrow \beta$.

Comme $f : E \longrightarrow \alpha$ un isomorphisme, $f^{-1} : \alpha \longrightarrow E$ est un isomorphisme.

Donc $g \circ f^{-1} : \alpha \longrightarrow \beta$ est un isomorphisme.

Donc $\alpha = \beta$ d'après la proposition 17 page 28.

On a donc $\boxed{\text{unicité de l'ordinal } \alpha \text{ isomorphe à } E}$.

• **Unicité de l'isomorphisme**.

Soit $g : E \longrightarrow \alpha$ un isomorphisme.

Alors $g^{-1} : \alpha \longrightarrow E$ est un isomorphisme.

Donc $f \circ g^{-1} : \alpha \longrightarrow \alpha$ est un isomorphisme.

Donc $f \circ g^{-1} = \mathrm{id}_\alpha$ d'après la proposition 17 page 28.

Donc $f = f \circ \mathrm{id}_E = f \circ g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_\alpha \circ g = g$.

On a donc $\boxed{\text{unicité de l'isomorphisme de } E \text{ vers } \alpha}$.

CQFD.

Théorème 4 (Unique ordinal associé à un bon ordre)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble bien ordonné.
Alors il existe un unique ordinal α tel que $(E, \leq)$ et $(\alpha, \subseteq)$ sont isomorphes.
On note alors $\mathrm{type}(E, \leq) := \alpha$.

Démonstration

• Soit $<$ l'ordre strict associé à $\leq$.

Soit $x \in E$.

Rappelons-nous que $x\!\downarrow = \{y \in E \mid y < x\}$.

Comme $x\!\downarrow$ est une partie de E, $x\!\downarrow$ est aussi bien ordonné d'après la prop. 3 p. 4.

Pour la suite de cette démonstration, on dira que x est **bon** si et seulement s'il existe au moins un ordinal ξ tel que $(x\!\downarrow, \leq)$ est isomorphe à $(\xi, \subseteq)$.

Dans ce cas-là, un tel ordinal ξ est unique d'après la proposition 17 page 28.

Soit $G := \{x \in E \mid x \text{ est bon }\}$.

Considérons alors $f : G \longrightarrow ?$ l'application qui à $x \in G$ associe l'unique ordinal ξ tel que $(x\!\downarrow, \leq)$ est isomorphe à $(\xi, \subseteq)$. Cette fonction existe grâce à l'axiome de remplacement.

Pour tout $x \in G$, l'isomorphisme de $(x\!\downarrow, \leq)$ vers $\big(f(x), \subseteq\big)$ est unique d'après la proposition 18 page 30 : on le notera h_x.

• Montrons que pour tout $x \in G$ et pour tout $y \in x\!\downarrow$ on a $y \in G$.

Soient $x \in G$ et $y \in x\!\downarrow$.

Pour cela, montrons que $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est un isomorphisme de $y\!\downarrow$ vers $h_x(y)$.

Par définition on sait déjà que $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ a pour domaine $y\!\downarrow$.

Par définition h_x est injectif donc $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est injectif.

Par définition h_x est croissant donc $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est croissante.

Montrons que $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est surjectif sur $h_x(y)$.

$\boxed{\subseteq}$ Soit $z \in y\!\downarrow$.

On a donc $z < y$ donc par croissance de h_x on a $h_x(z) \subseteq h_x(y)$.

Or h_x est à valeur dans l'ordinal $f(x)$.

Donc $h_x(z)$ et $h_x(y)$ sont des ordinaux d'après la prop. 6 p. 9.

On a donc $h_x(z) \in h_x(y)$ ou $h_x(z) = h_x(y)$ d'après la prop. 8 p. 10.

Or h_x est injectif donc $h_x(z) = h_x(y)$ impliquerait $z = y$, ce qui est absurde et donc on a $h_x(z) \in h_x(y)$.

On a donc $\operatorname{im}\big((h_x)_{|(y\downarrow)}\big) \subseteq h_x(y)$.

$\boxed{\supseteq}$ Soit $\beta \in h_x(y)$.

Par définition de h_x on a $h_x(y) \in f(x)$.

Or $f(x)$ est un ordinal par définition de f.

On a donc $\beta \in h_x(y) \in f(x)$ et donc $\beta \in f(x)$.

Or par définition h_x est surjectif dans $f(x)$.

Il existe donc $b \in x\!\downarrow$ tel que $h_x(b) = \beta$.

Comme $\leq$ est total sur E, on a $b < y$ ou $y \leq b$.

Or $y \leq b$ impliquerait $h_x(y) \subseteq h_x(b) = \beta$ par croissance de h_x, ce qui serait absurde puisque par définition on a $\beta \in h_x(y)$ chez les ordinaux.

On a donc $b < y$ c'est-à-dire $b \in y\!\downarrow$.

Comme $\beta = h_x(b)$, on a donc $\beta \in \operatorname{im}\big((h_x)_{|(y\downarrow)}\big)$.

On a donc $\operatorname{im}\big((h_x)_{|(y\downarrow)}\big) \supseteq h_x(y)$ et donc $\operatorname{im}\big((h_x)_{|(y\downarrow)}\big) = h_x(y)$.

Ainsi $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est surjective sur $h_x(y)$.

On a donc $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est croissante, injective et surjective sur $h_x(y)$.

Or $(E, \leq)$ est bien ordonné donc $\leq$ est total d'après la proposition 2 page 3.

Donc $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est un isomorphisme de $y\!\downarrow$ vers $h_x(y)$.

Ainsi $y\!\downarrow$ et $h_x(y)$ sont isomorphes.

Or on a dit que $h_x(y)$ est un ordinal puisqu'élément de $f(x)$.

Donc $y \in G$ par définition de G.

On note au passage que par unicité de l'ordinal on a $f(y) = h_x(y)$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in G \text{ et tout } y \in x\!\downarrow, \text{ on a } y \in G \text{ avec } f(y) = h_x(y)}$ $(\star)$.

- Montrons que f est croissante et injective.

Soient x et y dans G.

Supposons que $y < x$.

On a donc $y \in x\!\downarrow$.

D'après $(\star)$ on a alors $f(y) = h_x(y)$.

Or par définition h_x est à valeurs dans $f(x)$.

On a donc $h_x(y) \in f(x)$ et donc $f(y) \in f(x)$.

Donc si $y < x$ alors $f(y) \in f(x)$.

Donc f est strictement croissante.

En particulier $\boxed{f \text{ est croissante et injective}}$.

• Montrons que $\mathrm{im}(f)$ est un ordinal.

▶ Montrons que $\mathrm{im}(f)$ est transitif.

Soit $a \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc $x \in G$ tel que $a = f(x)$.

Soit $b \in a$.

Par définition h_x est bijective sur a.

Il existe donc $y \in x\downarrow$ tel que $b = h_x(y)$.

Or on a $h_x(y) = f(y)$ d'après $(\star)$.

Donc $b \in \mathrm{im}(f)$.

Donc $a \subseteq \mathrm{im}(f)$.

Donc $\forall a \in \mathrm{im}(f), a \subseteq \mathrm{im}(f)$.

Donc $\mathrm{im}(f)$ est transitif.

▶ Par définition de f, tous les éléments de $\mathrm{im}(f)$ sont des ordinaux.

Donc $\in$ est un bon ordre strict sur $\mathrm{im}(f)$ d'après le théorème 1 page 12.

Ainsi $\boxed{\mathrm{im}(f) \text{ est un ordinal}}$.

• Ainsi $f : G \longrightarrow \mathrm{im}(f)$ est une application croissante et bijective sur l'ordinal $\mathrm{im}(f)$.

Or $\leq$ est un bon ordre par définition donc est total d'après la proposition 2 page 3.

Donc f est un isomorphisme de G vers l'ordinal $\mathrm{im}(f)$.

Il ne reste plus qu'à prouver que $G = E$ pour conclure.

Supposons par l'absurde que $G \subsetneq E$.

Alors $E \backslash G$ est une partie non vide de l'ensemble bien ordonné E.

Elle admet donc un minimum e.

Montrons que $e\downarrow = G$.

$\boxed{\subseteq}$ Soit $x \in e\downarrow$.

Par définition on a $x < e$ donc $x \notin E \backslash G$ car e en est minimum.

On a donc $x \in G$.

Donc $e\downarrow \subseteq G$.

$\boxed{\supseteq}$ Soit $x \in G$.

Comme $\leq$ est un bon ordre, il est total d'après la proposition 2 page 3.

On a donc $x < e$ ou $x = e$ ou $e < x$.

- Si $x = e$ alors $e \in G$.
- Si $e < x$ alors $e \in x\downarrow$ et donc $e \in G$ d'après $(\star)$.

Dans ces deux cas-là on a donc $e \in G$ ce qui est absurde puisque $e \in E \backslash G$.

On a donc nécessairement $x < e$ et donc $x \in e\downarrow$.

Donc $e\downarrow \supseteq G$ et donc $e\downarrow = G$.

Or G est isomorphe à l'ordinal $\mathrm{im}(f)$ d'après ce qui précède.

Donc $e\downarrow$ est isomorphe à l'ordinal $\mathrm{im}(f)$.

Donc $e \in G$ par définition de G, ce qui est absurde puisque $e \in E \backslash G$.

On a donc $E = G$.

Or G est isomorphe à l'ordinal $\mathrm{im}(f)$ d'après ce qui précède.

Donc $\boxed{E \text{ est isomorphe à l'ordinal } \mathrm{im}(f)}$.

L'unicité est garantie par la proposition 18 page 30.

CQFD.

Proposition 19 (Ordinal associé et inclusion)

Soient $(A, \leq)$ un ensemble bien ordonné et X une partie de A.
On a $\mathrm{type}(X, \leq) \subseteq \mathrm{type}(A, \leq)$.

Démonstration

• Commençons par supposer que A est un ordinal et que la relation $\leq$ est $\subseteq$.

Comme X est une partie de A, on a donc X est un ensemble d'ordinaux.

Posons alors $\delta := \mathrm{type}(X, \subseteq)$ et $f : (X, \subseteq) \longrightarrow (\delta, \subseteq)$ l'isomorphisme associé.

Montrons que $\forall \xi \in X, f(\xi) \subseteq \xi$.

Pour cela posons $E := \{\xi \in X \mid f(\xi) \subseteq \xi\}$.

Supposons par l'absurde que $E \subsetneq X$.

Alors $X \backslash E$ est un ensemble non vide d'ordinaux.

Il admet donc un minimum ξ d'après le théorème 1 page 12.

Comme $\xi \in X \backslash E$, on a $\xi \notin E$ donc $\mathrm{non}\big(f(\xi) \subseteq \xi\big)$.

Or $\in$ est total chez les ordinaux donc $\xi \in f(\xi)$.

Or $\mathrm{im}(f) = \delta$ par définition de f donc $f(\xi) \in \delta$.

Ainsi $\xi \in f(\xi) \in \delta$ donc $\xi \in \delta$ par transitivité de $\in$ chez les ordinaux.

Comme $\mathrm{im}(f) = \delta$ on a donc $\xi \in \mathrm{im}(f)$ donc il existe $\gamma \in E$ tel que $\xi = f(\gamma)$.

Comme $\xi \in f(\xi)$ on a donc $f(\gamma) \in f(\xi)$.

Comme f est un isomorphisme, f^{-1} est croissante donc $\gamma \in \xi$.

Comme ξ est le minimum de $X \backslash E$, on a donc $\gamma \notin X \backslash E$ donc $\gamma \in E$.

On a donc $f(\gamma) \subseteq \gamma$ par définition de E, c'est-à-dire $\xi \subseteq \gamma$ par définition de γ.

C'est absurde puisque l'on a dit que $\gamma \in \xi$.

Par l'absurde, on a donc montré que $E = X$.

Ainsi, $\boxed{\forall \xi \in X, f(\xi) \subseteq \xi}$ $(\star_1)$.

Montrons que $\delta \subseteq \alpha$.

Soit $\varepsilon \in \delta$.

Par définition de f on a $\mathrm{im}(f) = \delta$ donc $\varepsilon \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc $\gamma \in X$ tel que $\varepsilon = f(\gamma)$.

D'après $(\star_1)$ on a $f(\gamma) \subseteq \gamma$ donc $\varepsilon \subseteq \gamma$.

Or on a $\gamma \in X \subseteq A$ donc $\gamma \in A$.

Ainsi on a $\varepsilon \subseteq \gamma \in A$ et tous sont des ordinaux donc $\varepsilon \in A$ par transitivité.

Donc $\delta \subseteq A$ par définition de l'inclusion.

Or par définition $\delta = \mathrm{type}(X, \leq)$ donc $\mathrm{type}(X, \leq) \subseteq A$.

Or A est un ordinal et $\leq$ est l'inclusion donc $A = \mathrm{type}(A, \leq)$.

On a donc bien $\boxed{\mathrm{type}(X, \leq) \subseteq \mathrm{type}(A, \leq)}$ $(\star_2)$.

• Plus généralement on ne suppose plus spécialement que A est un ordinal.

Soient alors $\alpha := \mathrm{type}(A, \leq)$ et $g : A \longrightarrow \alpha$ l'isomorphisme associé.

Considérons $Y := g^{\rightarrow}(X)$, de telle que sorte que Y est une partie de α.

On se retrouve dans la situation précédente : d'après $(\star_2)$ on a $\mathrm{type}(Y, \subseteq) \subseteq \mathrm{type}(\alpha, \subseteq)$.

Or g est un isomorphisme donc est croissant, injectif et de réciproque croissante.

Donc $g_{|X} : X \longrightarrow Y$ est croissant, injectif et de réciproque croissante.

Donc g est un isomorphisme de X vers Y donc X et Y sont isomorphes.

Donc X et $\mathrm{type}(Y, \subseteq)$ sont isomorphes par transitivité de l'isomorphie.

Donc $\mathrm{type}(X, \leq) = \mathrm{type}(Y, \subseteq)$ par unicité de l'ordinal associé.

On a donc $\boxed{\mathrm{type}(X, \leq) \subseteq \mathrm{type}(A, \leq)}$.

CQFD.

5 Récurrence : Induction et récursion

Théorème 5 (Principe d'induction transfinie)

Soit P une assertion pouvant dépendre d'un paramètre.
Supposons que pour tout ordinal α, on a

$$\Big(\forall \beta \in \alpha, P(\beta)\Big) \implies P(\alpha)$$

Alors pour tout ordinal α, on a $P(\alpha)$.

Démonstration

Supposons que pour tout ordinal α, on a $\Big(\forall \beta \in \alpha, P(\beta)\Big) \implies P(\alpha)$.

Supposons par l'absurde qu'il existe au moins un ordinal α tel que l'on n'a pas $P(\alpha)$.

Considérons alors $X := \big\{\beta \subseteq \alpha \bigm| \beta$ est un ordinal et non $P(\beta)\big\}$.

Par définition on a $\alpha \in X$ donc X est un ensemble non vide d'ordinaux.

Il admet donc un minimum ξ d'après le théorème 1 page 12.

Soit $\mu \in \xi$.

Alors μ est un ordinal d'après la proposition 6 page 9.

De plus $\mu \notin X$ car ξ est minimum de X.

Or $\xi \in X$ donc $\xi \subseteq \alpha$ et donc $\mu \in \xi \subseteq \alpha$ avec tous trois des ordinaux.

On a donc $\mu \subseteq \alpha$ par transitivité.

Ainsi on a $\mu \notin X$ alors que $\mu \subseteq \alpha$ et que μ est un ordinal.

Donc nécessairement on a $P(\mu)$ par définition de X.

Donc $\forall \mu \in \xi, P(\mu)$ donc $P(\xi)$ par hypothèse.

C'est absurde puisque $\xi \in X$ et donc $P(\xi)$ est faux.

Donc par l'absurde on a montré que $\boxed{\text{pour tout ordinal } \alpha \text{ on a } P(\alpha)}$.

CQFD.

Théorème 6 (Principe faible d'induction transfinie)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.
Supposons que :

1. On a $P(0)$.
2. Pour tout ordinal α, si $P(\alpha)$ alors $P\big(S(\alpha)\big)$.
3. Pour tout ordinal limite α, si $\forall \beta \in \alpha, P(\beta)$ alors $P(\alpha)$.

Alors pour tout ordinal α on a $P(\alpha)$.

Démonstration

Soit α un ordinal.

Supposons par l'absurde qu'il existe au moins un $\beta \in \alpha$ qui ne vérifie pas P.

Considérons alors $X := \{\gamma \in \alpha \mid \gamma$ ne vérifie pas $P\}$.

Par hypothèse $\beta \in X$ est non vide.

Or tous ses éléments sont des éléments de α donc des ordinaux d'après la proposition 6 page 9. Donc X admet un minimum ξ d'après le théorème 1 page 12.

En particulier comme $\xi \in X$, on a ξ ne vérifie pas P.

Soit $\mu \in \xi$.

En particulier $\mu \notin X$ car ξ est minimum de X.

De plus $\mu \in \xi \in \alpha$ avec tous trois des ordinaux donc $\mu \in \alpha$ par transitivité.

Ainsi $\mu \notin X$ alors que $\mu \in \alpha$ donc μ vérifie P.

On a donc $\forall \mu \in \xi, P(\mu)$.

- Si $\xi = 0$ c'est absurde puisque par hypothèse 1 on a $P(0)$.
- Supposons que ξ est un successeur.
  Alors il existe un ordinal μ tel que $\xi = S(\mu)$.
  On a alors $\mu \in \xi$ d'après la proposition 10 page 18.
  En particulier on a $P(\mu)$ par ce qui précède.
  C'est absurde puisqu'alors par hypothèse 2 on a $P(\xi)$.
- Supposons que ξ est un ordinal limite.
  D'après ce qui précède on a $\forall \mu \in \xi, P(\mu)$.
  C'est absurde puisqu'alors par hypothèse 3 on a $P(\xi)$.

Dans les trois cas on arrive à une absurdité.

Donc par l'absurde on a montré que $\forall \beta \in \alpha, P(\beta)$.

Donc $\boxed{\alpha \text{ vérifie } P}$ d'après le principe d'induction transfinie.

CQFD.

Bibliographie

- Wikipédia
- Kenneth Kunen, *The Foundations of Mathematics*, 29 octobre 2007.
- Jean-Louis Krivine, *Théorie des ensembles*, 1998, éditions Cassini.

Mathématiciens

- (1861 – 1931) Cesare Burali-Forti page 14.
- (1903 – 1957) John von Neumann page 8.