Théorie élémentaire des ensembles

-

Le Barbuki 1

Livre complet

Florian Langlois

Février 2024

Collection

Bienvenue dans ce livre ! C'est le premier d'une collection qui tente de d'exposer et démontrer les mathématiques de niveau licence et master. Le nom BARBUKI est une référence au célèbre groupe BOURBAKI, dont la démarche de cette collection est inspirée.

1 – Théorie élémentaire des ensembles

Avant-propos

Cet ouvrage est là pour me permettre de coucher sur le papier les différentes mathématiques que j'ai apprises durant mes études supérieures : je le rédige principalement pour moi-même et il n'a pas pour but d'être pédagogique. Il va me permettre de conserver sur le long terme une trace de ces connaissances, mais aussi d'organiser celles-ci pour en avoir une vue d'ensemble.

Bien que ce livre reste assez personnel, il est possible qu'il vous soit utile. Afin de comprendre pleinement son contenu, il est nécessaire de connaître la logique élémentaire. En particulier, il vous faut connaître :

— la notion d'assertion

— la notion de négation d'une assertion

— la notion de conjonction et la notion de disjonction

— la notion d'implication, ainsi que la notion de contraposée et de réciproque

— la notion d'équivalence

— les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$

Il vous faut aussi savoir mener un raisonnement, ou tout du moins en suivre un, puisque c'est l'un des objets principaux de ce livre. Il est à noter que la construction de cette collection se fait sous la manière d'un escalier à gravir : nous n'utiliserons pas des résultats postérieurs pour démontrer des résultats antérieurs, les seules exceptions étant les exemples donnés pour illustrer, puisque ceux-ci ne sont là que pour aider à la lecture, et non permettre une quelconque démonstration, mais aussi certaines digressions abordant d'autres démonstrations que celles proposées.

Remerciements

Merci à Lyra, GrothenDitQue, Chæris et Cassis pour leur pinaillage, à Tom pour le LaTeX, et à Maxtimax pour m'avoir fortement débloqué !

Table des matières

Chapitre 1

Théorie élémentaire des ensembles

Note de l'auteur

Dans ce chapitre, nous allons définir et développer la notion d'ensemble en mathématique. Ce chapitre est fondamental pour deux raisons :

— premièrement, à beaucoup d'endroits en mathématiques, les ensembles interviennent (ensembles de solutions, une droite peut être vue comme un ensemble de points, les structures algébriques reposent sur la notion d'ensembles, etc.).

— deuxièmement, cette collection de livres a pour parti pris de construire tous les objets mathématiques à partir de cette simple notion d'ensembles, pour ne considérer fondamentalement qu'un seul type d'objet. Pas de panique cependant puisqu'il s'agit d'une façon de faire très fréquente dans la plupart des ouvrages de mathématiques. De plus, comme il est question de fondements des mathématiques, le reste ne sera pas affecté par ce parti pris.

Sommaire

1 Généralités sur les ensembles

1.1 Appartenance et égalité

Comme nous l'avons dit, l'objet au cœur de notre discours est celui d'**ensemble**.
Un ensemble est intuitivement un sac dans lequel on peut placer un ou plusieurs objets mathématiques, mais que l'on peut aussi laisser vide. Un objet ne peut cependant pas être présent en plusieurs exemplaires : il est dans l'ensemble (auquel cas on dira qu'il **appartient** à cet ensemble), ou il n'est pas dans l'ensemble. Cette particularité de ne pas compter le nombre d'occurrences d'un objet dans un ensemble est aussi accompagnée du fait qu'un ensemble est entièrement caractérisé par son contenu : deux ensembles ayant les mêmes **éléments** seront égaux, ce qui tranche avec l'intuition du sac puisqu'à titre d'exemple dans la vie courante, mettre ses affaires scolaires dans un sac de course ne fait pas de celui-ci un cartable, alors que c'est le cas avec les ensembles mathématiques. De même, on ne peut conserver un ensemble mathématique si l'on change son contenu, alors que rajouter un cahier dans un cartable de la vie quotidienne ne va changer le fait que c'est le même cartable.

Cependant, il s'agit d'un objet *primitif*, c'est-à-dire que nous n'allons pas lui donner de définition à proprement parler. Au lieu de cela, nous allons dire que tous les objets que nous allons manipuler (en dehors des assertions, propositions, théorèmes, etc.) seront des ensembles. Nous pouvons alors nous demander en quoi il est légitime de les appeler *ensembles*, et en quoi ils correspondent à cette notion intuitive de sacs. En fait, c'est par le biais d'axiomes que nous allons imposer certaines propriétés à nos objets, de sortent qu'ils *miment* l'idée intuitive que nous avons décrite.

Définition 1 (Ensembles et appartenance)

En dehors des assertions, tous les objets que nous allons manipuler seront appelés **ensembles**.

Pour deux ensembles x et E, il est possible de former une assertion notée $x \in E$ dont la démontrabilité se déduira des axiomes et des définitions. On dit alors x **appartient** à E, ou encore que x est un **élément** de E.

Sa négation sera quant-à-elle notée $x \notin E$.

Afin de pouvoir travailler, il nous faut nous assurer l'existence d'au moins un objet mathématique, c'est-à-dire un ensemble (au vu du formalisme que nous avons adopté dans ces ouvrages). C'est l'axiome suivant, le tout premier de ce livre, qui va nous en assurer.

Axiome 1 (Axiome de l'existence)

Il existe au moins un ensemble.

Remarque :
Pour E un ensemble et P une proposition pouvant dépendre de paramètres, on notera parfois :

- $\forall x \in E, P(x)$ à la place de $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow P(x)\big)$
- $\exists x \in E, P(x)$ à la place de $\exists x, \big(x \in E \text{ et } P(x)\big)$

Comme nous l'avons dit plus tôt, un ensemble est caractérisé par son contenu : deux ensembles sont alors **égaux** si et seulement si ils sont les mêmes éléments.

Axiome 2 (de l'extensionnalité)

Soient E et F deux ensembles.

$$E = F \iff \forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big)$$

De cet axiome, nous pouvons démontrer trois propriétés essentielles de l'égalité.

Proposition 1 (Propriétés de l'égalité)

Soient E, F et G trois ensembles.

1. $E = E$: on dit que l'égalité est **réflexive**.
2. Si $E = F$, alors $F = E$: on dit que l'égalité est **symétrique**.
3. Si $E = F$ et $F = G$, alors $E = G$: on dit que l'égalité est **transitive**.

Démonstration

1. Par réflexivité de l'équivalence, on a $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in E\big)$.
Donc $\boxed{E = E}$ par extensionnalité.

2. Supposons que $E = F$.
Par extensionnalité, on a $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big)$.
Donc par symétrie de l'équivalence, on a $\forall x, \big(x \in F \Leftrightarrow x \in E\big)$.
Donc $\boxed{F = E}$ par extensionnalité.

3. Supposons que $E = F$ et $F = G$.
Par extensionnalité, on a $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big)$ et $\forall x, \big(x \in F \Leftrightarrow x \in G\big)$.
On a donc $\forall x, \Big[\big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big) \text{ et } \big(x \in F \Leftrightarrow x \in G\big)\Big]$.
Donc $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in G\big)$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\boxed{E = G}$ par extensionnalité.
CQFD.

Remarque :
Nous verrons lors du chapitre **??** que cela fait de l'égalité une **relation d'équivalence**.

L'axiome d'extensionnalité, s'il nous donne une caractérisation de l'égalité, en fait de même pour l'inégalité puisqu'il suffit alors de prendre la négation de cette caractérisation : deux ensembles sont inégaux si et seulement s'il existe au moins un élément dans un des deux ensembles qui n'est pas présent dans l'autre.

Proposition 2 (Caractérisation de l'inégalité)

Soient E et F deux ensembles.

$$E \neq F \iff \Big[\big(\exists x \in E, x \notin F\big) \text{ ou } \big(\exists x \in F, x \notin F\big)\Big]$$

Démonstration

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
E \neq F &\iff \neg(E = F) \\
&\iff \neg\Big[\forall x, \big(x \in E \iff x \in F\big)\Big] \\
&\iff \exists x, \neg\big(x \in E \iff x \in F\big) \\
&\iff \exists x, \neg\Big[\big(x \in E \implies x \in F\big) \text{ et } \big(x \in F \implies x \in E\big)\Big] \\
&\iff \exists x, \Big[\neg\big(x \in E \implies x \in F\big) \text{ ou } \neg\big(x \in F \implies x \in E\big)\Big] \\
&\qquad \text{d'après les Lois de De Morgan} \\
&\iff \exists x, \Big[\neg\big(x \notin E \text{ ou } x \in F\big) \text{ ou } \neg\big(x \notin F \text{ ou } x \in E\big)\Big] \\
&\iff \exists x, \Big[\big(x \in E \text{ et } x \notin F\big) \text{ ou } \big(x \in F \text{ et } x \notin E\big)\Big] \\
&\qquad \text{d'après les Lois de De Morgan} \\
&\iff \Big[\exists x, \big(x \in E \text{ et } x \notin F\big)\Big] \text{ ou } \Big[\exists x, \big(x \in F \text{ et } x \notin E\big)\Big] \\
&\iff \big(\exists x \in E, x \notin F\big) \text{ ou } \big(\exists x \in F, x \notin E\big)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E \neq F \iff \Big[\big(\exists x \in E, x \notin F\big) \text{ ou } \big(\exists x \in F, x \notin F\big)\Big]}$ par transitivité de l'équivalence.

CQFD.

1.2 Inclusion

Nous venons de voir ce que cela veut dire pour un objet mathématique d'appartenir à un ensemble, et ce que ça veut dire que deux ensembles sont égaux.

Voyons à présent une façon de *comparer* deux ensembles : nous dirons qu'un premier ensemble est **inclus** dans un second ensemble si tous les éléments du premier sont aussi des éléments du second. Cette comparaison intervient fréquemment en mathématique : par exemple tous les nombres entiers sont aussi des nombres rationnels, et c'est en cela que nous disons que $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$. C'est au fond quelque chose que l'on voit aussi dans la vie courante, puisque par exemple toutes les pommes sont des fruits.

Définition 2 (Inclusion et sous-ensemble)

Soient E et F deux ensembles.

On dit que E est **inclus** dans F si et seulement si $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in F\big)$.
On note alors $E \subseteq F$, ou encore $F \supseteq E$.

On dit aussi que

- E est un **sous-ensemble** de F.
- E est une **partie** de F.
- E est **contenu** dans F.
- F est un **sur-ensemble** de E.
- F **contient** E.

Dans le cas contraire, on notera $E \nsubseteq F$.

Remarque :
Certains auteurs, notamment francophones, notent cela $E \subset F$. Cela ne sera pas le cas dans cet ouvrage, car il pourrait y avoir une confusion avec la stricte inclusion.

L'axiome d'extensionnalité fait le lien entre l'égalité et l'équivalence : nous avons pu d'ailleurs en déduire trois propriétés de l'égalité, qui découlaient toutes de celles de l'équivalence. La définition de l'inclusion fait de même pour lier l'inclusion et l'implication. Ainsi, la décomposition de l'équivalence en deux implications va se traduire par une décomposition de l'égalité en deux inclusions.

Proposition 3 (Décomposition de l'égalité en inclusions)

Soient E et F deux ensembles.

Si $E = F$, alors $E \subseteq F$ et $E \supseteq F$.

Démonstration

Supposons que $E = F$.
On a donc $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big)$ par extensionnalité.
Donc $\forall x, \Big[\big(x \in E \Rightarrow x \in F\big)$ et $\big(x \in E \Leftarrow x \in F\big)\Big]$.
Donc $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in F\big)$ et $\forall x, \big(x \in E \Leftarrow x \in F\big)$.
Donc $\boxed{E \subseteq F \text{ et } F \supseteq E}$ par définition de l'inclusion.
CQFD.

Observons à présent les trois propriétés de l'inclusion, qui découlent de celles de l'implication.

Proposition 4 (Propriétés de l'inclusion)

Soient E, F et G trois ensembles.

1. $E \subseteq E$: on dit que l'inclusion est **réflexive**.
2. si $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$, alors $E = F$: on dit que l'inclusion est **antisymétrique**.
3. si $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$, alors $E \subseteq G$: on dit que l'inclusion est **transitive**.

Démonstration

1. On a $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in E\big)$ par réflexivité de l'implication.
Donc $\boxed{E \subseteq E}$ par définition.

2. Supposons que l'on a $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.
On a donc $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in F\big)$ et $\forall x, \big(x \in F \Rightarrow x \in E\big)$ par définition.
Donc $\forall x, \Big[\big(x \in E \Rightarrow x \in F\big) \text{ et } \big(x \in F \Rightarrow x \in E\big)\Big]$.
Donc $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big)$.
Donc $\boxed{E = F}$ par extensionnalité.

3. Supposons que l'on a $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$.
On a donc $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in F\big)$ et $\forall x, \big(x \in F \Rightarrow x \in G\big)$ par définition.
Donc $\forall x, \Big[\big(x \in E \Rightarrow x \in F\big) \text{ et } \big(x \in F \Rightarrow x \in G\big)\Big]$.
Donc $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in G\big)$ par transitivité de l'implication.
Donc $\boxed{E \subseteq G}$ par définition.
CQFD.

Remarque :
Nous verrons au chapitre **??** que cela fait de l'inclusion une **relation d'ordre**.

De la même manière que l'on est amené à distinguer « *a est inférieur ou égal à b* » de « *a est strictement inférieur à b* », nous allons être amenés à distinguer l'inclusion de l'inclusion stricte.

Définition 3 (Inclusion stricte)

Soient E et F deux ensembles.

On dit que E est **inclus strictement** dans F si et seulement si $E \subseteq F$ et $E \neq F$.
On note alors $E \subsetneq F$.

On dit aussi que :

- E est un **sous-ensemble propre** de F.
- E est une **partie propre** de F.
- F est un **sur-ensemble propre** de E.
- F **contient strictement** E.

Attention !

Il ne faut pas confondre l'assertion « *E est inclus strictement dans F* », qui se note $E \subsetneq F$, avec l'assertion « *E n'est pas inclus dans F* », qui se note $E \not\subseteq F$.

1.3 Compréhension

Très souvent en mathématiques, nous sommes amenés à rassembler en un ensemble des objets qui partagent une propriété commune (par exemple rassembler ensembles les entiers pairs, qui partagent la propriété d'être divisibles par 2). Le célèbre paradoxe de Russell a montré que l'on ne pouvait pas faire cela n'importe comment : les objets que nous allons rassembler devront préalablement appartenir à un autre ensemble donné.

Nous pouvons formuler ainsi l'axiome suivant, qui va nous permettre de rassembler les éléments d'un même ensemble partageant une même propriété.

Axiome 3 (de compréhension)

Soient E un ensemble et P une proposition pouvant dépendre de paramètres.

Alors il existe une partie de E dont les éléments sont exactement ceux de E qui vérifient P. On le note $\{x \in E \mid P(x)\}$.

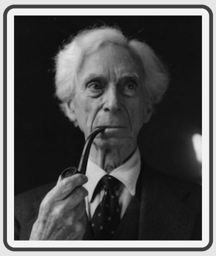
Autrement dit, $\forall y, \Big(y \in \{x \in E \mid P(x)\} \iff [y \in E \text{ et } P(y)]\Big)$.

Exemple :
L'ensemble des entiers pairs peut s'écrire $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$.

Remarque :

1. Dans la notation $\{x \in E \mid P(x)\}$, le x est dit **muet**, c'est-à-dire que l'on peut la remplacer par n'importe quel caractère autre que x, sans que cela ne change quoi que ce soit. Il faut bien entendu prendre garde à ne pas utiliser un caractère déjà utilisé, au risque de produire des contre-sens. Ainsi on a par exemple
$$\{x \in E \mid P(x)\} = \{y \in E \mid P(y)\} = \{z \in E \mid P(z)\}$$
2. On peut remarquer qu'en réalité, cela nous fournit autant d'axiomes différents que l'on peut fournir de propositions à paramètres. C'est pour cette raison que cela est communément appelé un **schéma d'axiomes** plutôt qu'un simple axiome. Celui-ci porte tout naturellement le nom de **schéma d'axiomes de compréhension**. L'auteur de ce livre a préféré ne pas s'appesantir sur cette distinction, mais c'est comme cela que vous pourrez le trouver si vous faites des recherches annexes.

Pour la petite histoire



Bertrand Arthur William Russell (18 mai 1872 – 2 février 1970), est un mathématicien, logicien, philosophe, épistémologue, homme politique et moraliste britannique.

Russell est, avec FREGE, l'un des fondateurs de la logique contemporaine qui fait de cette dernière le fondement des mathématiques. Son ouvrage majeur, écrit avec Whitehead, a pour titre *Principia Mathematica*. À la suite des travaux d'axiomatisation de l'arithmétique de Peano, Russell a tenté d'appliquer ses propres travaux de logique à la question du fondement des mathématiques (cf. logicisme). Son œuvre littéraire est aussi couronnée par le prix Nobel de littérature en 1950, « *en reconnaissance des divers écrits, toujours de premier plan, qui le posent en champion des idéaux humanistes et de la liberté de pensée* ».

Dans une lettre envoyée en 1902 à Frege, Russell explicite le paradoxe qui porte aujourd'hui son nom : ne pas restreindre le schéma d'axiomes de compréhension aux éléments d'un ensemble permet alors de construire l'ensemble $A := \{x \mid x \notin x\}$, et vient alors la possibilité de se demander si $A \in A$, ou si $A \notin A$, ce qui dans les deux cas apporte une contradiction. C'est pour cette raison que le schéma d'axiome de compréhension sous sa forme actuelle est souvent dénommé « *schéma d'axiomes de compréhension restreint* ».

Nous pourrions à partir de là nous demander ce qu'il se passe si nous remplaçons une proposition P par une autre proposition Q qui lui est équivalente, ou même qui lui est nécessaire. La proposition suivante répond à la question.

Proposition 5 (Compréhension, implications et équivalences)

Soient E un ensemble, et P et Q deux propositions pouvant dépendre de paramètres.

1. $\forall x \in E, \big[P(x) \Rightarrow Q(x)\big]$ si et seulement si $\big\{x \in E \bigm| P(x)\big\} \subseteq \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\}$.
2. $\forall x \in E, \big[P(x) \Leftrightarrow Q(x)\big]$ si et seulement si $\big\{x \in E \bigm| P(x)\big\} = \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\}$.

Démonstration

1. $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall x \in E, \big[P(x) \Rightarrow Q(x)\big]$.

Soit $y \in \big\{x \in E \bigm| P(x)\big\}$.

On a donc $y \in E$ et $P(y)$ par définition.

Donc $y \in E$ et $Q(y)$ par hypothèse.

Donc $y \in \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\}$ par définition.

Donc $\forall y \in \{x \in E \mid P(x)\}, y \in \{x \in E \mid Q(x)\}$.
Donc $\boxed{\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in E \mid Q(x)\}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Supposons que $\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in E \mid Q(x)\}$.

Soit $y \in E$.

Supposons que $P(y)$.

Alors $y \in E$ et $P(y)$ donc $y \in \{x \in E \mid P(x)\}$ par définition.

Donc $y \in \{x \in E \mid Q(x)\}$ par hypothèse.

Donc $y \in E$ et $Q(y)$ par définition.

Donc $P(y) \Rightarrow Q(y)$.

Donc $\boxed{\forall y \in E, [P(x) \Rightarrow Q(x)]}$.

2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in E, [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \\
\iff & \forall x \in E, \Big([P(x) \Rightarrow Q(x)] \text{ et } [P(x) \Leftarrow Q(x)]\Big) \\
\iff & \Big(\forall x \in E, [P(x) \Rightarrow Q(x)]\Big) \text{ et } \Big(\forall x \in E, [P(x) \Leftarrow Q(x)]\Big) \\
\underset{1.}{\iff} & \{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in E \mid Q(x)\} \text{ et } \{x \in E \mid P(x)\} \supseteq \{x \in E \mid Q(x)\} \\
\iff & \{x \in E \mid P(x)\} = \{x \in E \mid Q(x)\}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'équivalence recherchée.

CQFD

Nous venons de voir comment se comporte l'axiome de compréhension quand on modifie les propositions. Voyons à présent le comportement vis à vis du changement du sur-ensemble choisi.

Proposition 6 (Compréhension et sous-ensemble)

Soient E et F deux ensembles, et P une proposition pouvant dépendre de paramètres.
Si $E \subseteq F$, alors $\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in F \mid P(x)\}$.

Démonstration

Supposons que $E \subseteq F$.

Soit $y \in \{x \in E \mid P(x)\}$.

Par définition, on a $y \in E$ et $P(y)$.

Or $E \subseteq F$ par hypothèse, donc $y \in F$.

Ainsi, on a $y \in F$ et $P(y)$.

Donc $y \in \{x \in F \mid P(x)\}$ par définition.

Donc $\forall y \in \{x \in E \mid P(x)\}, y \in \{x \in F \mid P(x)\}$.

Donc $\boxed{\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in F \mid P(x)\}}$ par définition de l'inclusion.

CQFD

1.4 Ensemble vide

Nous l'avons dit lors de l'introduction, un ensemble peut être vide, c'est-à-dire n'avoir aucun élément.

Définition 4 (Ensemble vide)

Soit E un ensemble.
On dit que E est **vide** si et seulement si $\forall x, x \notin E$.

La proposition qui suit nous assure de l'existence d'au moins un ensemble vide.

Proposition 7 (Existence d'un ensemble vide)

Il existe au moins un ensemble vide.

Démonstration

Il existe au moins un ensemble E d'après l'axiome d'existence.

On peut donc définir $F := \{x \in E \mid x \neq x\}$ d'après l'axiome de compréhension.

Soit x un ensemble.

Par réflexivité de l'égalité, on a $x = x$ donc $x \notin F$.

Ainsi, $\forall x, x \notin F$, si bien que $\boxed{F \text{ est vide}}$.

CQFD.

Si nous venons de prouver l'existence d'au moins un ensemble vide, nous allons maintenant prouver qu'il n'y en a en fait qu'un seul.

Proposition 8 (Unicité de l'ensemble vide)

Soient E et E' deux ensembles **vides**.
On a $E = E'$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Comme E et E' sont vides, on a $x \notin E$ et $x \notin E'$, et donc $x \in E \iff x \in E'$.

Ainsi, $\forall x, \left(x \in E \iff x \in E'\right)$, donc par extensionnalité on a $\boxed{E = E'}$.
CQFD.

Cela nous permet d'affirmer la chose suivante : il existe un unique ensemble vide, et donc nous pouvons désormais poser la définition suivante.

Définition 5 (L'ensemble vide)

On appelle **ensemble vide** l'unique ensemble vide.
On le note $\varnothing$.

Remarque :
Certains auteurs le notent aussi $\emptyset$.

Dans bien des cas, l'ensemble vide pourra se présenter comme un exemple ou un contre-exemple de certains résultats. Cela reposera en grande partie sur les assertions suivantes, qui peuvent perturber à première vue.

Proposition 9 (Vide et quantificateurs)

Soit P une proposition pouvant dépendre de paramètres.

1. L'assertion $\forall x \in \varnothing, P(x)$ est vraie.
2. L'assertion $\exists x \in \varnothing, P(x)$ est fausse.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

Par définition du vide, on a $x \notin \varnothing$ donc l'implication $x \in \varnothing \implies P(x)$.

Ainsi, $\forall x, \left(x \in \varnothing \implies P(x)\right)$, c'est-à-dire $\boxed{\forall x \in \varnothing, P(x)}$.

2. D'après 1, on a $\forall x \in \varnothing, \neg P(x)$, donc $\neg\left(\exists x \in \varnothing, \neg\neg P(x)\right)$, c'est-à-dire $\neg\left(\exists x \in \varnothing, P(x)\right)$. Autrement dit, $\boxed{\text{l'assertion } \exists x \in \varnothing, P(x) \text{ est fausse}}$.
CQFD.

L'ensemble vide a la particularité d'être une partie de n'importe quel ensemble, dont lui-même. Il est d'ailleurs sa seule partie.

Proposition 10 (Ensemble vide et inclusion)

Soit E un ensemble.

1. $\varnothing \subseteq E$.
2. $E \subseteq \varnothing \iff E = \varnothing$

Démonstration

1. On a $\forall x \in \varnothing, x \in E$ d'après la proposition 9 page 11, et donc $\boxed{\varnothing \subseteq E}$.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $E \subseteq \varnothing$, on a aussi $\varnothing \subseteq E$ d'après 1, si bien que $E = \varnothing$ par antisymétrie de l'inclusion.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $E = \varnothing$, alors $E \subseteq \varnothing$ par réflexivité de l'inclusion.

CQFD.

1.5 Paires et singletons

À de nombreuses occasions, nous voulons pouvoir écrire explicitement les éléments qui composent un ensemble, c'est-à-dire en dresser la liste. Par exemple, nous aimerons pouvoir définir l'ensemble $\{A, 1, \clubsuit\}$, qui a pour éléments A,1 et $\clubsuit$, et seulement ceux-là. Pour l'heure, l'axiome qui suit va nous permettre de le faire dans le cas où nous n'aurions que deux éléments à mettre, et nous verrons plus tard comment faire dans le cas général.

Axiome 4 (de la paire)

Soient x et y deux ensembles.
Il existe un ensemble dont les éléments sont exactement x et y.
On le note $\{x, y\}$.

Ainsi, $\forall z, \Big(z \in \{x, y\} \iff [z = x \text{ ou } z = y]\Big)$.

Définition 6 (Paires et singletons)

Soit E un ensemble.

1. On dit que E est une **paire** si et seulement s'il existe x et y tels que $E = \{x, y\}$ et $x \neq y$.
2. On dit que E est un **singleton** si et seulement s'il existe x tel que $E = \{x, x\}$, auquel cas on note plutôt $E = \{x\}$.

Proposition 11 (L'ordre n'importe pas dans une paire)

Soient x et y deux ensembles.
On a $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Démonstration

Soit z un ensemble.

On a alors

$$z \in \{x, y\} \iff z = x \text{ ou } z = y \iff z = y \text{ ou } z = x \iff z \in \{y, x\}$$

Donc $\forall z, \Big(z \in \{x, y\} \iff z \in \{y, x\}\Big)$.

Donc $\boxed{\{x, y\} = \{y, x\}}$.

CQFD.

1.6 Ensemble des parties

Il est souvent très utile en mathématiques de réunir dans un même ensemble toutes les parties d'un ensemble. C'est l'axiome suivant qui va nous permettre de le faire.

Axiome 5 (des parties)

Soit E un ensemble.
Il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les parties de E. On le note $\mathscr{P}(E)$.

Ainsi on a $\forall F, \Big(F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subseteq E\Big)$.

Comme un ensemble est toujours inclus dans lui-même, et comme le vide est une partie de tout ensemble, on retrouve naturellement la proposition suivante.

Proposition 12 (Parties triviales d'un ensemble)

Soit E un ensemble.
On a alors $E \in \mathscr{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.
On dit que ce sont les parties **triviales** de E.

Démonstration

La réflexivité de l'inclusion nous dit que $E \subseteq E$, et donc $E \in \mathscr{P}(E)$ par définition de $\mathscr{P}(E)$. De même, on a vu à la proposition 10 page 11 que $\varnothing \subseteq E$, si bien que $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

CQFD.

La transitivité de l'inclusion nous assure que si un ensemble est inclus dans un autre, alors il en est de même pour leurs ensembles de parties respectifs, ce qui n'est pas sans rappeler la notion plus générale de croissance d'une application.

Proposition 13 (Croissance de l'ensemble des parties)

Soient E et F deux ensembles.

1. On a l'équivalence $E \subseteq F \iff \mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.
   L'implication directe $\Rightarrow$ s'appelle la **croissance** du passage à l'ensemble des parties.
2. On a l'équivalence $E = F \iff \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$.
   L'implication réciproque $\Leftarrow$ s'appelle l'**injectivité** du passage à l'ensemble des parties.

Démonstration

1. Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $E \subseteq F$.

Soit $G \in \mathscr{P}(E)$. On a donc $G \subseteq E$ par définition.

Donc $G \subseteq F$ par transitivité de l'inclusion. Donc $G \in \mathscr{P}(F)$ par définition.

Donc $\forall G \in \mathscr{P}(E), G \in \mathscr{P}(F)$ et donc $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.

On a vu $E \in \mathscr{P}(E)$ lors de la proposition 12 page 13, donc $E \in \mathscr{P}(F)$ et donc $E \subseteq F$ par définition.

Finalement, on a bien l'équivalence $\boxed{E \subseteq F \iff \mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)}$.

2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} E = F &\iff E \subseteq F \text{ et } E \supseteq F \text{ par antisymétrie de l'inclusion} \\ &\underset{1.}{\iff} \mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F) \text{ et } \mathscr{P}(E) \supseteq \mathscr{P}(F) \\ &\iff \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F) \text{ par antisymétrie de l'inclusion} \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence $\boxed{E = F \iff \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)}$.

CQFD.

2 Opérations sur les ensembles

Intéressons-nous à présent à différentes opérations que l'on est souvent amené à effectuer sur les ensembles : réunir dans un même ensemble le contenu de plusieurs autres ensembles, ou ne considérer que ce qu'ils ont en commun par exemple. Commençons par la réunion.

2.1 Réunion

Quand on dispose de deux ensembles, il est souvent utile de pouvoir réunir leurs éléments dans un même ensemble, afin de pouvoir tous les manipuler. Par exemple, si on a $E = \{1, a\}$ et $F = \{\bullet, \clubsuit\}$, on aimerait pouvoir disposer de l'ensemble $\{1, a, \bullet, \clubsuit\}$. Comme nous allons apporter un nouvel axiome pour réaliser cet objectif, nous pourrions simplement nous contenter de demander à cet axiome de permettre la réunion de deux ensembles, mais cela limiterait grandement les possibilités : comment ferions-nous pour réunir 100 ou 1 000 voire une infinité d'ensembles à partir de là ? C'est pourquoi l'axiome qui va suivre est un peu plus élaboré : il va nous permettre d'accéder aux éléments des éléments d'un ensemble !

Axiome 6 (de la réunion)

Soit E un ensemble.

Il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de E. On le note $\bigcup E$ et on dit que c'est la **réunion** de E.

Ainsi, on a $\forall x, \Big(x \in \bigcup E \iff \exists A \in E, x \in A\Big)$.

Exemple :
Pour $E = \big\{\{1\}, \{2\}\big\}$, on a $\bigcup E = \{1, 2\}$.

L'exemple ci-dessus laisse entrevoir comment définir la réunion de deux ensembles, mais pour l'heure observons quelques propriétés de la réunion.

Proposition 14 (Réunion du vide)

On a $\bigcup \varnothing = \varnothing$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

L'assertion $\exists A \in \varnothing, x \in A$ est fausse d'après la proposition 9 page 11.

Donc par définition, l'assertion $x \in \bigcup \varnothing$ est fausse.

Ainsi, $\forall x, x \notin \bigcup \varnothing$.

On a donc $\boxed{\bigcup \varnothing = \varnothing}$ par définition de l'ensemble vide.

CQFD.

Proposition 15 (Minimalité de l'union)

Soit E un ensemble.
Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $\forall A \in E, A \subseteq F$
2. Pour tout ensemble X, si $\forall A \in E, A \subseteq X$ alors $F \subseteq X$.

Alors $\bigcup E$ est l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.
Ainsi $\bigcup E$ est **le plus petit** (*au sens de l'inclusion*) ensemble qui contient tous les éléments de E.

Démonstration

• Commençons par montrer que $\bigcup E$ vérifie 1 et 2.

1.

Soit $A \in E$.

Soit $x \in A$.

Comme $A \in E$, il existe $B \in E$ tel que $x \in B$ en prenant $B := A$.

Donc $x \in \bigcup E$ par définition de la réunion.

Donc $A \subseteq \bigcup E$.

Donc $\boxed{\forall A \in E, A \subseteq \bigcup E}$.

2. Soit X un ensemble tel que $\forall A \in E, A \subseteq X$.

Soit $x \in \bigcup E$.

Par définition de la réunion, il existe $A \in E$ tel que $x \in A$.

Or on a $A \subseteq X$ par hypothèse.

Donc $x \in X$.

On a donc $\boxed{\bigcup E \subseteq X}$.

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{\bigcup E \text{ vérifie les points 1 et 2}}$.

• Montrons que $\bigcup E$ est le seul à vérifier les points 1 et 2.

Soit G un ensemble vérifiant les points 1 et 2.

Comme $\bigcup E$ vérifie 1 et G vérifie 2, en prenant $X := \bigcup E$ dans 2 on obtient $G \subseteq \bigcup E$.

Comme G vérifie 1 et $\bigcup E$ vérifie 2, en prenant $X := G$ dans 2 on obtient $G \supseteq \bigcup E$.

Finalement, on a $\boxed{G = \bigcup E}$ d'où l'unicité.

CQFD.

Remarque :
On peut résumer cette proposition en énonçant que pour tout ensemble F, on a l'équivalence suivante :

$$F = \bigcup E \iff \left[\forall X, \left(\forall A \in E, A \subseteq X\right) \Leftrightarrow F \subseteq X\right]$$

Le passage à l'ensemble des parties et la réunion agissent d'une certaine façon en sens contraire, un peu à la manière d'une application et sa réciproque. Ce n'est pas tout à fait exact, mais on a tout de même la proposition suivante.

Proposition 16 (Réunion et ensemble des parties)

Soit E un ensemble.

1. $E = \bigcup \mathscr{P}(E)$
2. $E \subseteq \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)$

Démonstration

1. Raisonnons par double inclusion.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x \in E$.

On a vu que $E \in \mathscr{P}(E)$ lors de la proposition 12 page 13.

Il existe donc bien $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $x \in A$, en prenant $A := E$.

Donc $x \in \bigcup \mathscr{P}(E)$ par définition de la réunion.

On a donc $E \subseteq \bigcup \mathscr{P}(E)$.

$\boxed{\supseteq}$ Par définition, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, on a $A \subseteq E$.

On a donc $\bigcup \mathscr{P}(E) \subseteq E$ d'après la proposition 15 page 16.

Finalement, on a bien $\boxed{E = \bigcup \mathscr{P}(E)}$.

2.

Soit $A \in E$.

Soit $x \in A$.

Il existe donc $B \in E$ tel que $x \in B$ en prenant $B := A$.

Donc $x \in \bigcup E$ par définition de la réunion.

Donc $A \subseteq \bigcup E$ et donc $A \in \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)$.

Ainsi, on a bien $\boxed{E \subseteq \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)}$.

CQFD.

Remarque :

- L'inclusion réciproque $E \supseteq \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)$ n'est généralement pas vraie.
  Par exemple pour $E = \left\{\{1\}\right\}$, on a $\bigcup E = \{1\}$ donc $\mathscr{P}\left(\bigcup E\right) = \left\{\varnothing, \{1\}\right\}$.
- On peut retrouver le fait que le passage à l'ensemble des parties est injectif.
  En effet si l'on a $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$, alors $\bigcup \mathscr{P}(E) = \bigcup \mathscr{P}(F)$ donc d'après ce que l'on vient de voir, on a $E = F$.

On retrouve aussi pour la réunion une propriété de croissance : si un ensemble est inclus dans un autre, alors il en va de même pour leurs réunions respectives.

Proposition 17 (Croissance de la réunion)

Soient E et F deux ensembles.
Si $E \subseteq F$, alors $\bigcup E \subseteq \bigcup F$.
On dit que la réunion est **croissante** (*pour l'inclusion*).

Démonstration

Supposons que $E \subseteq F$.

Soit $x \in \bigcup E$.

Il existe donc $A \in E$ tel que $x \in A$.

Comme $E \subseteq F$, on a $A \in F$.

Comme $x \in A$, on a donc $x \in \bigcup F$.

On a donc bien $\boxed{\bigcup E \subseteq \bigcup F}$.

CQFD.

Remarque :
L'implication réciproque n'est pas nécessairement vraie.
Par exemple si $E = \big\{\{1\}, \{2\}\big\}$ et $F = \big\{\{1, 2\}\big\}$ alors $\bigcup E = \{1, 2\} = \bigcup F$.

On peut à présent définir la réunion de deux ensembles donnés, comme suggéré par l'exemple vu plus tôt.

Définition 7 (Union de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles.
On appelle **union** de A et de B l'ensemble $\bigcup\{A, B\}$, que l'on note $A \cup B$.

Nous avons vu plus tôt que l'égalité entre ensembles est liée à l'équivalence entre assertions, et qu'il en est de même pour l'inclusion et l'implication. Continuons dans cette lancée avec l'union et la disjonction.

Proposition 18 (Union et disjonction)

Soient A et B deux ensembles.
Pour tout ensemble x, on a l'équivalence

$$x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Démonstration

Soit x un ensemble.

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in A \cup B$.

Par définition, on a donc $x \in \bigcup\{A, B\}$.

Par définition, il existe donc $C \in \{A, B\}$ tel que $x \in C$.

Comme $C \in \{A, B\}$, on a $C = A$ ou $C = B$.

Comme $x \in C$, on a donc $x \in A$ ou $x \in B$.

Donc si $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in A$ ou $x \in B$.

Plaçons-nous dans le cas où $x \in A$.

Comme $A \in \{A, B\}$, il existe donc $C \in \{A, B\}$ tel que $x \in C$.

Donc $x \in \bigcup\{A, B\}$ par définition.

On montre de même que $x \in \bigcup\{A, B\}$ dans le cas où $x \in B$.

Donc dans les deux cas, on a $x \in \bigcup\{A, B\}$.

Donc $x \in A \cup B$ par définition.

Donc si $x \in A$ ou $x \in B$, alors $x \in A \cup B$.

Finalement, on a bien l'équivalence $\boxed{x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)}$.

CQFD.

On retrouve alors différentes propriétés issues de ce lien avec la disjonction.

Proposition 19

Soient A, B et C trois ensembles.

1. On a $A \cup A = A$: on dit que l'union est **idempotente**.
2. On a $A \cup B = B \cup A$: on dit que l'union est **commutative**.
3. On a $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$: on dit que l'union est **associative**.

Démonstration

1. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$x \in A \cup A \underset{18 \text{ p. } 18}{\iff} (x \in A \text{ ou } x \in A) \iff x \in A$$

On a donc bien $\boxed{A \cup A = A}$.

2. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$x \in A \cup B \underset{18 \text{ p. } 18}{\iff} (x \in A \text{ ou } x \in B) \iff (x \in B \text{ ou } x \in A) \underset{18 \text{ p. } 18}{\iff} x \in B \cup A$$

On a donc bien $\boxed{A \cup B = B \cup A}$.

3. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cup C &\underset{18\text{ p. }18}{\iff} (x \in A \cup B \text{ ou } x \in C) \\
&\underset{18\text{ p. }18}{\iff} \Big((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C\Big) \\
&\iff \Big(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C)\Big) \\
&\underset{18\text{ p. }18}{\iff} (x \in A \text{ ou } x \in B \cup C) \\
&\underset{18\text{ p. }18}{\iff} x \in A \cup (B \cup C)
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$.
CQFD.

Remarque :

1. Du fait de l'associativité de l'union, on notera $A \cup B \cup C$ pour désigner indifféremment $(A \cup B) \cup C$ et $A \cup (B \cup C)$ puisqu'il n'y a plus d'ambiguïté.
2. On obtient au passage le fait que pour tout ensemble A, on a $\bigcup\{A\} = A$, puisque $\bigcup\{A\} = \bigcup\{A, A\} = A \cup A = A$.

La proposition 15 page 16 concernant la minimalité de l'union s'applique dans le cas particulier de l'union de deux ensembles.

Proposition 20 (Minimalité de l'union de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles.
Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $A \subseteq F$ et $B \subseteq F$.
2. Pour tout ensemble X, si $A \subseteq X$ et $B \subseteq X$ alors $F \subseteq X$.

Alors $A \cup B$ est l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.
Ainsi $A \cup B$ est **le plus petit** (*au sens de l'inclusion*) ensemble qui contient A et B.

Démonstration

C'est simplement une application directe de la proposition 15 page 16.
En effet, on a $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$ donc d'après cette proposition, $A \cup B$ est l'unique ensemble à vérifier à la fois :

— le fait de contenir tous les éléments de $\{A, B\}$, c'est-à-dire A et B.

— être inclus dans tout ensemble qui contient tous les éléments de $\{A, B\}$, c'est-à-dire A et B.

Donc $A \cup B$ est bien l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.

CQFD.

Proposition 21 (Compatibilité de l'union avec l'inclusion)

Soient A_1, B_1, A_2 et B_2 quatre ensembles.
Si $A_1 \subseteq A_2$ et $B_1 \subseteq B_2$, alors $A_1 \cup B_1 \subseteq A_2 \cup B_2$.
On dit que l'union est **compatible** avec l'inclusion.

Démonstration

Supposons que $A_1 \subseteq A_2$ et $B_1 \subseteq B_2$.

Soit $x \in A_1 \cup B_1$.

On a donc $x \in A_1$ ou $x \in B_1$ d'après la proposition 18 page 18.

Si $x \in A_1$, alors comme $A_1 \subseteq A_2$, on a $x \in A_2$.

Si $x \in B_1$, alors comme $B_1 \subseteq B_2$, on a $x \in B_2$.

On a donc $x \in A_2$ ou $x \in B_2$.

Donc $x \in A_2 \cup B_2$ d'après la proposition 18 page 18.

D'où l'inclusion $\boxed{A_1 \cup B_1 \subseteq A_2 \cup B_2}$.

CQFD.

Proposition 22 (Union, absorbant et neutre)

Soit E un ensemble.

1. Pour tout ensemble F, on a l'équivalence $F \subseteq E \iff E \cup F = E$.
   Du fait de l'implication directe $\Rightarrow$, on dit que E est **absorbant** pour l'union parmi ses parties.
2. On a $E \cup \varnothing = E$.
   On dit que $\varnothing$ est **neutre** pour l'union.

Démonstration

1. Soit F un ensemble.

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $F \subseteq E$.

Par réflexivité de l'inclusion, on a aussi $E \subseteq E$.

Donc $E \cup F \subseteq E \cup E$ par compatibilité de l'union avec l'inclusion.

Or on a $E \cup E = E$ par idempotence de l'union.

On a donc $E \cup F \subseteq E$.

De plus, on a vu que $E \subseteq E \cup F$ lors de la proposition 20 page 20.

On en conclut donc que $E \cup F = E$.

Donc si $F \subseteq E$ alors $E \cup F = E$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $E \cup F = E$.

On a vu que $F \subseteq E \cup F$ lors de la proposition 20 page 20.

Donc $F \subseteq E$ par hypothèse.

Donc si $E \cup F = E$ alors $F \subseteq E$.

Finalement, on a bien l'équivalence $\boxed{F \subseteq E \iff E \cup F = E}$.

2. On a vu que $\varnothing \subseteq E$ lors de la proposition 10 page 11.

On peut alors appliquer 1 à $F := \varnothing$ pour conclure que $\boxed{E \cup \varnothing = E}$.

CQFD.

Remarque :

On a désormais ce qu'il faut pour décrire des ensembles explicitement ayant autant d'éléments que l'on souhaite : par exemple pour définir $\{a, b, c\}$, on pose simplement $\{a, b, c\} := \{a, b\} \cup \{c\}$, et de même on pose $\{a, b, c, d\} := \{a, b, c\} \cup \{d\}$. On peut alors répéter le procédé aussi longtemps que désiré.

Nous aurons l'occasion de revenir sur la réunion d'ensembles :

— quand nous aborderons la notion de **familles** lors du chapitre 2, il sera possible d'expliciter plus facilement des réunions d'une multitude d'ensembles, potentiellement une infinité.

— dans le prochain livre, que nous nous serons dotés de la notion d'entiers naturels, nous pourrons en particulier réunir un nombre précis d'ensemble, aussi grand soit-il.

2.2 Intersection

De même que nous avons voulu pouvoir réunir dans un même ensemble le contenu de plusieurs ensembles, nous aimerions pouvoir considérer ce qu'il y a de commun à plusieurs ensembles. Par exemple si $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{b, c, d, e\}$, nous aimerions pouvoir obtenir $\{b, c\}$. Évidemment dans ce cas-là, nous pouvons le faire explicitement sans passer par une opération supplémentaire, mais nous serons confrontés à des cas où il ne sera pas toujours possible de le faire explicitement.

C'est pourquoi à la manière de la réunion, nous allons commencer par nous doter d'une opération pour regarder les éléments communs à tous les éléments d'un ensemble. Si pour la réunion nous avons eu besoin de passer par un nouvel axiome, ici cela ne sera pas nécessaire : l'axiome de compréhension va suffire.

Proposition 23 (Intersection d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**.

Il existe un unique ensemble F tel que

$$\forall x, (x \in F \iff \forall A \in E, x \in A)$$

On appelle cet ensemble **intersection** de E, et on le note $\bigcap E$.

Démonstration

Comme E est non vide, il existe au moins un $A_0 \in E$.
Posons $F := \{x \in A_0 \mid \forall A \in E, x \in A\}$.

• Montrons que F vérifie l'assertion de l'énoncé.

Soit x un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $x \in F$.
Alors par définition on a $\forall A \in E, x \in A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall A \in E, x \in A$.
En particulier comme $A_0 \in E$, on a $x \in A_0$.
On a donc $x \in A_0$ et $\forall A \in E, x \in A$.
Donc $x \in \{x \in A_0 \mid \forall A \in E, x \in A\}$.
Donc $x \in F$.

On a donc l'équivalence $x \in F \iff \forall A \in E, x \in A$.

Ainsi, on a bien $\boxed{\forall x, (x \in F \iff \forall A \in E, x \in A)}$.

• Montrons l'unicité de F.
Cela provient simplement de l'axiome d'extensionnalité.
En effet, soit G un ensemble tel que $\forall x, (x \in G \iff \forall A \in E, x \in A)$.
On a alors $\forall x, (x \in G \iff \forall A \in E, x \in A \iff x \in F)$ par ce que l'on vient de prouver. Et donc $\boxed{G = F}$ d'où l'unicité.
CQFD.

Exemple :
Si $E = \big\{\{1,2\},\{2,3\}\big\}$ alors $\bigcap E = \{2\}$.

Si l'on avait une propriété de minimalité en ce qui concerne l'union via la proposition 15 page 16, on a ici de manière duale une propriété de maximalité en ce qui concerne l'intersection.

Proposition 24 (Maximalité de l'intersection d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**.
Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $\forall A \in E, F \subseteq A$

2. Pour tout ensemble X, si $\forall A \in E, X \subseteq A$ alors $X \subseteq F$.

Alors $\bigcap E$ est l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.
Ainsi $\bigcap E$ est **le plus grand** (*au sens de l'inclusion*) ensemble qui est contenu dans tous les éléments de E.

Démonstration

• Commençons par montrer que $\bigcap E$ vérifie 1 et 2.

1.

Soit $A \in E$.

Soit $x \in \bigcap E$.

On a alors $\forall B \in E, x \in B$ d'après la proposition 23 page 22.

En particulier comme $A \in E$, on a $x \in A$.

Donc $\bigcap E \subseteq A$.

Donc $\boxed{\forall A \in E, \bigcap E \subseteq A}$.

2. Soit X un ensemble tel que $\forall A \in E, X \subseteq A$.

Soit $x \in X$.

Soit $A \in E$.

Par hypothèse, on a $X \subseteq A$ donc $x \in A$.

Donc $\forall A \in E, x \in A$ donc $x \in \bigcap E$ d'après la proposition 23 page 22.

Donc $\boxed{X \subseteq \bigcap E}$.

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{\bigcap E \text{ vérifie les points 1 et 2}}$.

• Montrons que $\bigcap E$ est le seul ensemble à vérifier 1 et 2.

Soit G un ensemble vérifiant 1 et 2.

Comme $\bigcap E$ vérifie 1 et G vérifie 2, en prenant $X := \bigcap E$ dans 2 on obtient $G \supseteq \bigcap E$.

Comme G vérifie 1 et $\bigcap E$ vérifie 2, en prenant $X := G$ dans 2 on obtient $G \subseteq \bigcap E$.

Finalement, on a $\boxed{G = \bigcap E}$ d'où l'unicité.

CQFD.

Remarque :
On peut résumer cette proposition en énonçant que pour tout ensemble F, on a l'équivalence suivante :

$$F = \bigcap E \iff \Big[\forall X, \big(\forall A \in E, X \subseteq A\big) \Leftrightarrow X \subseteq F\Big]$$

Si la proposition 17 page 18 nous donne la croissance (*pour l'inclusion*) de la réunion, nous allons voir que l'intersection est quant à elle décroissante.

Proposition 25 (Décroissance de l'intersection d'un ensemble)

Soient E et F deux ensembles **non vides**.
Si $E \subseteq F$ alors $\bigcap E \supseteq \bigcap F$.
On dit que l'intersection est **décroissante** (*pour l'inclusion*).

Démonstration

Supposons que $E \subseteq F$.

Soit $x \in \bigcap F$.

Soit $A \in E$.

Par hypothèse on a $E \subseteq F$ donc $A \in F$.

Or on a $x \in \bigcap F$ donc $\forall B \in F, x \in B$ d'après la proposition 23 page 22.

En particulier comme $A \in F$, on a $x \in A$.

Donc $\forall A \in E, x \in A$.

Donc $x \in \bigcap E$ d'après la proposition 23 page 22.

Donc $\boxed{\bigcap F \subseteq \bigcap E}$.

CQFD.

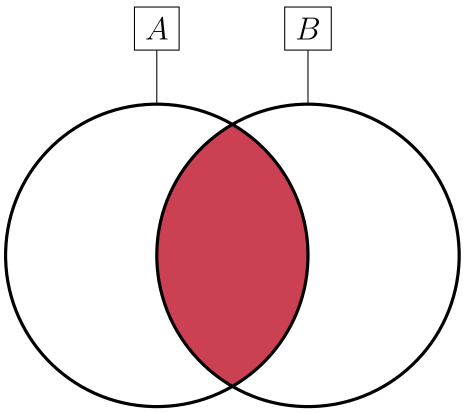
Nous pouvons à présent définir l'intersection de deux ensembles : le principe est le même que pour la réunion de deux ensembles.

Définition 8 (Intersection de deux ensembles)

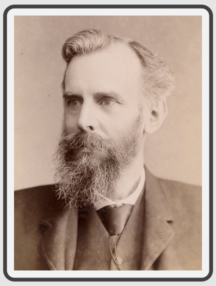
Soient A et B deux ensembles.
On appelle **intersection** de A et de B l'ensemble $\bigcap\{A, B\}$, que l'on note $A \cap B$.

Remarque :

1. L'intersection $A \cap B$ est bien définie car $\{A, B\}$ est évidemment non vide.
2. Il est courant de représenter l'intersection de deux ensembles. à l'aise d'un **diagramme de Venn**. Ici, on a colorié en **rouge** l'ensemble $A \cap B$.



Pour la petite histoire



John Venn (4 août 1834 – 4 avril 1923) est un mathématicien et logicien britannique. Il est renommé pour avoir conçu les diagrammes de Venn, qu'il a présenté en 1881. En 1883, il est élu membre de la Royal Society.

De la même manière que l'union de deux ensembles est liée à la disjonction d'assertions, l'intersection est liée à la conjonction.

Proposition 26 (Intersection de deux ensembles et conjonction)

Soient A et B deux ensembles.
Pour tout ensemble x, on a l'équivalence :

$$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$$

En particulier, on a $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in A \cap B$.

Par définition, on a donc $x \in \bigcap\{A, B\}$.

Par définition, on a donc $\forall C \in \{A, B\}, x \in C$.

Or $A \in \{A, B\}$ et $B \in \{A, B\}$ donc $x \in A$ et $x \in B$.

Donc si $x \in A \cap B$ alors $x \in A$ et $x \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in A$ et $x \in B$.

Alors pour tout $C \in \{A, B\}$, on a $C = A$ ou $C = B$ donc $x \in C$.

Donc $x \in \bigcap\{A, B\}$ par définition.

Donc $x \in A \cap B$ par définition.

Donc si $x \in A$ et $x \in B$ alors $x \in A \cap B$.

Finalement, on a bien $\boxed{x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)}$.
CQFD.

On retrouve alors les propriétés suivantes, issues de celles de la conjonction.

Proposition 27

Soient A, B et C trois ensembles.

1. On a $A \cap A = A$: on dit que l'intersection est **idempotente**.
2. On a $A \cap B = B \cap A$: on dit que l'intersection est **commutative**.
3. On a $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$: on dit que l'intersection est **associative**.

Démonstration

1. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$x \in A \cap A \underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} (x \in A \text{ et } x \in A) \iff x \in A$$

On a donc bien $\boxed{A \cap A = A}$.

2. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$x \in A \cap B \underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} (x \in A \text{ et } x \in B) \iff (x \in B \text{ et } x \in A) \underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} x \in B \cap A$$

On a donc bien $\boxed{A \cap B = B \cap A}$.

3. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} (x \in A \cap B \text{ et } x \in C) \\ &\underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} \Big((x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C\Big) \\ &\iff \Big(x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C)\Big) \\ &\underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} (x \in A \text{ et } x \in B \cap C) \\ &\underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} x \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$.
CQFD.

Remarque :

1. Du fait de l'associativité de l'intersection, on notera $A \cap B \cap C$ pour désigner indifféremment $(A \cap B) \cap C$ et $A \cap (B \cap C)$ puisqu'il n'y a plus d'ambiguïté.

2. On obtient au passage le fait que pour tout ensemble A on a $\bigcap\{A\} = A$, puisque $\bigcap\{A\} = \bigcap\{A, A\} = A \cap A = A$.

La proposition 24 page 23 concernant la maximalité de l'intersection s'applique dans le cas particulier de l'intersection de deux ensembles.

Proposition 28 (Maximalité de l'intersection de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles.
Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $F \subseteq A$ et $F \subseteq B$.
2. Pour tout ensemble X, si $X \subseteq A$ et $X \subseteq B$ alors $X \subseteq F$.

Alors $A \cap B$ est l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.
Ainsi $A \cap B$ est **le plus grand** (*au sens de l'inclusion*) ensemble contenu dans A et B.

Démonstration

C'est simplement une application directement de la proposition 24 page 23.

En effet $A \cap B = \bigcap\{A, B\}$ donc d'après cette proposition $A \cap B$ est l'unique ensemble à vérifier à la fois :

— le fait d'être contenu dans tous les éléments de $\{A, B\}$, c'est-à-dire A et B.

— le fait de contenir tout ensemble contenu dans tous les éléments de $\{A, B\}$, c'est-à-dire A et B.

Donc $A \cap B$ est bien l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.

CQFD.

Proposition 29 (Compatibilité de l'intersection avec l'inclusion)

Soient A_1, A_2, B_1 et B_2 quatre ensembles.
Si $A_1 \subseteq A_2$ et $B_1 \subseteq B_2$, alors $A_1 \cap A_1 \subseteq B_1 \cap B_2$.
On dit que l'intersection est **compatible** avec l'inclusion.

Démonstration

Supposons que $A_1 \subseteq A_2$ et $B_1 \subseteq B_2$.

Soit $x \in A_1 \cap B_1$.

On a donc $x \in A_1$ et $x \in B_1$ d'après la proposition 26 page 26.

Comme $x \in A_1$ et $A_1 \subseteq A_2$, on a $x \in A_2$.

Comme $x \in B_1$ et $B_1 \subseteq B_2$, on a $x \in B_2$.

Donc comme $x \in A_2$ et $x \in B_2$, on a $x \in A_2 \cap B_2$ d'après la proposition 26 page 26.

D'où l'inclusion $\boxed{A_1 \cap A_1 \subseteq B_1 \cap B_2}$.

. **CQFD**.

Proposition 30 (Intersection, absorbant et neutre)

Soit E un ensemble.

1. Pour tout ensemble F, on a l'équivalence

$$F \subseteq E \iff E \cap F = F$$

   Du fait de l'implication directe $\Rightarrow$, on dit que E est **neutre** pour l'intersection avec ses parties

2. On a $E \cap \varnothing = \varnothing$.
   On dit que $\varnothing$ est **absorbant** pour l'intersection.

Démonstration

1. Soit F un ensemble.

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $F \subseteq E$.

Par réflexivité de l'inclusion, on a aussi $F \subseteq F$.

Donc par compatibilité de l'intersection avec l'inclusion, on a $F \cap F \subseteq E \cap F$.

Or on a $F \cap F = F$ par idempotence de l'intersection.

On a donc $F \subseteq E \cap F$.

De plus, on a vu que $E \cap F \subseteq F$ lors de la proposition 28 page 28.

On en conclut donc que $E \cap F = F$.

Donc si $F \subseteq E$ alors $E \cap F = F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $E \cap F = F$

On a vu que $E \cap F \subseteq E$ lors de la proposition 28 page 28.

On a donc $F \subseteq E$ par hypothèse.

Donc si $E \cap F = F$ alors $F \subseteq E$.

Finalement, on a bien l'équivalence $\boxed{F \subseteq E \iff E \cap F = F}$.

2. On a vu que $\varnothing \subseteq E$ lors de la proposition 10 page 11.

On peut appliquer 1 à $F := \varnothing$ pour obtenir $\boxed{E \cap \varnothing = \varnothing}$.

CQFD.

Proposition 31 (Intersection et ensemble des parties)

Soient A et B deux ensembles.
On a $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

Démonstration

Il s'agit simplement d'une reformulation de la proposition 28 page 28.

En effet, pour tout ensemble X, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} F \in \mathscr{P}(A \cap B) &\iff F \subseteq A \cap B \\ &\underset{28 \text{ p. } 28}{\iff} F \subseteq A \text{ et } F \subseteq B \\ &\iff F \in \mathscr{P}(A) \text{ et } F \in \mathscr{P}(B) \\ &\underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} F \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \end{aligned}$$

D'où l'égalité $\boxed{\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)}$.

CQFD.

Définition 9 (Ensembles disjoints)

Soient A et B deux ensembles.
On dit que A et B sont **disjoints** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Remarque :
On dit que les éléments d'un ensemble E sont **disjoints deux à deux** si et seulement si pour tout A et tout B dans E, si $A \neq B$ alors A et B sont disjoints.

Proposition 32 (Ensembles disjoints et parties)

Soient A et B deux ensembles.
Soient A' une partie de A et B' une partie de B.

Si A et B sont disjoints, alors A' et B' sont disjoints.

Démonstration

Supposons que A et B sont disjoints.

On a donc $A \cap B = \varnothing$ par définition.

Or on a $A' \subseteq A$ et $B' \subseteq B$ par définition.

Donc $A' \cap B' \subseteq A \cap B$ par compatibilité de l'intersection avec l'inclusion.

Donc $A' \cap B' \subseteq \varnothing$.

Donc $A' \cap B' = \varnothing$ d'après la proposition 10 page 11.

Donc $\boxed{A' \text{ et } B' \text{ sont disjoints}}$.

CQFD.

Proposition 33 (Distributivité, union et intersection)

Soient A, B et C trois ensembles.

1. On a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   On dit que l'union est **distributive** sur l'intersection.
2. On a $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   On dit que l'intersection est **distributive** sur l'union.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\underset{18 \text{ p. } 18}{\iff} x \in A \text{ ou } x \in B \cap C \\
&\underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \\
&\iff (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C) \\
&\quad \text{d'après les lois de De Morgan} \\
&\underset{18 \text{ p. } 18}{\iff} x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C \\
&\underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

D'où l'égalité $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$.

2.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\
&\underset{18 \text{ p. } 18}{\iff} x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\
&\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\
&\quad \text{d'après les lois de De Morgan} \\
&\underset{26 \text{ p. } 26}{\iff} x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C
\end{aligned}$$

$$\underset{18 \text{ p. } 18}{\iff} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

D'où l'égalité $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$.
CQFD.

2.3 Différence et complémentaire

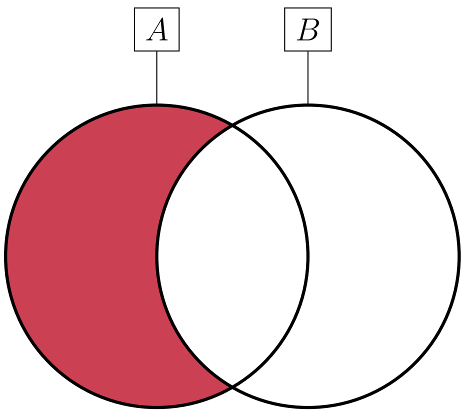
Définition 10 (Différence et complémentaire)

Soient A et B deux ensembles.

1. On appelle **différence** de A par B l'ensemble $\{x \in A \mid x \notin B\}$. On le note $A \backslash B$.
2. Si $B \subseteq A$, alors $A \backslash B$ est aussi appelé **complémentaire** de B dans A, et est alors souvent noté $\complement_A B$.

Remarque :

1. $A \backslash B$ est aussi souvent noté $A - B$.
2. Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le sur-ensemble considéré, on note souvent B^c pour parler du complémentaire de B dans ce sur-ensemble.
3. On peut représenter la différence ensembliste par un diagramme de Venn.
   Ici, on a colorié en rouge l'ensemble $A \backslash B$.



Proposition 34 (Lois de De Morgan)

Soient E, A et B trois ensembles.

1. On a $E \backslash (A \cup B) = (E \backslash A) \cap (E \backslash B)$.
2. On a $E \backslash (A \cap B) = (E \backslash A) \cup (E \backslash B)$.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in E\backslash(A \cup B) &\iff x \in E \text{ et } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in E \text{ et } \neg(x \in A \text{ ou } x \in B) \\ &\iff x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \\ &\iff (x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin B) \\ &\iff x \in E\backslash A \text{ et } x \in E\backslash B \\ &\iff x \in (E\backslash A) \cap (E\backslash B) \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{E\backslash(A \cup B) = (E\backslash A) \cap (E\backslash B)}$.

2.

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in E\backslash(A \cap B) &\iff x \in E \text{ et } x \notin A \cap B \\ &\iff x \in E \text{ et } \neg(x \in A \text{ et } x \in B) \\ &\iff x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \\ &\iff (x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin B) \\ &\iff x \in E\backslash A \text{ ou } x \in E\backslash B \\ &\iff x \in (E\backslash A) \cup (E\backslash B) \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{E\backslash(A \cap B) = (E\backslash A) \cup (E\backslash B)}$.

CQFD.

Remarque :

En particulier si A et B sont des parties de E, on en déduit que

1. $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.
2. $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.

Pour la petite histoire

Auguste De Morgan (27 juin 1806 – 18 mars 1871) est un mathématicien et logicien britannique. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne ; il a notamment formulé les lois de De Morgan.

2.4 Ensemble engendré par un autre

Il est fréquent qu'en mathématiques on s'intéresse à un type d'ensemble particulier obéissant à certaines règles : les groupes, les espaces vectoriels, les tribus, etc. En se donnant alors un ensemble quelconque A ne présentant pas particulièrement ce genre de structure, on souhaite cependant souvent obtenir le plus petit ensemble (*au sens de l'inclusion*) qui est bien une structure recherchée et qui contient A.

La partie qui suit a pour objet de donner un cadre général à cela : on parlera de **l'engendré** par A vérifiant les règles demandées.

Définition 11 (Propriétés stable par intersection)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.
On dit que P est **stable par intersection** si et seulement si pour tout ensemble $\mathcal{E}$ **non vide**

$$\Big(\forall A \in \mathcal{E}, P(A)\Big) \implies P\Big(\bigcap \mathcal{E}\Big)$$

Ce sont justement les propriétés stables par intersection qui vous nous permettre de définir la notion d'engendré par une partie. Nous pouvons en voir un premier exemple, qui nous resservira à un autre endroit.

Proposition 35 (Stabilité par intersection d'être un sur-ensemble)

Soit A un ensemble.
Pour tout ensemble B, posons $P(B)$ l'assertion $A \subseteq B$.
Alors P est stable par intersection.

Démonstration

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.

Supposons que $\forall B \in \mathcal{E}, P(B)$.

Ainsi, $\forall B \in \mathcal{E}, A \subseteq B$.

Alors $A \subseteq \bigcap \mathcal{E}$ d'après la proposition 24 page 23.

Autrement dit, on a $P(\bigcap \mathcal{E})$.

Donc si $\forall B \in \mathcal{E}, P(B)$ alors $P(\bigcap \mathcal{E})$.

Ceci étant vrai pour tout ensemble $\mathcal{E}$ non vide, on en conclut que $\boxed{P \text{ est stable par intersection}}$.

CQFD.

Proposition 36 (Stabilité par intersection et conjonction)

Soient P et Q deux assertions pouvant dépendre de paramètres.
Soient A et B deux ensembles.

1. Supposons que P est stable par intersection.
   Si $P(A)$ et $P(B)$ alors $P(A \cap B)$.
2. Soit R la conjonction de P et Q.
   Si P et Q sont stables par intersection, alors R est stable par intersection.

Démonstration

1. Supposons que $P(A)$ et $P(B)$.

Alors pour tout $C \in \{A, B\}$, on a $C = A$ ou $C = B$ donc $P(C)$.

Or par hypothèse P est stable par intersection.

On a donc $P(\bigcap\{A, B\})$, c'est-à-dire $P(A \cap B)$ par définition.

2. Supposons que P et Q sont stables par intersection.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.

Supposons que $\forall C \in \mathcal{E}, R(C)$.

On a donc $\forall C \in \mathcal{E}, \Big(P(C) \text{ et } Q(C)\Big)$.

On a donc $\Big(\forall C \in \mathcal{E}, P(C)\Big)$ et $\Big(\forall C \in \mathcal{E}, Q(C)\Big)$.

Or par hypothèse P et Q sont stables par intersection.

On a donc $P(\bigcap \mathcal{E})$ et $Q(\bigcap \mathcal{E})$, c'est-à-dire $R(\bigcap \mathcal{E})$.

Donc si $\forall C \in \mathcal{E}, R(C)$ alors $R(\bigcap \mathcal{E})$.

Ceci étant vrai pour tout ensemble $\mathcal{E}$ non vide, on en conclut que $\boxed{R \text{ est stable par intersection}}$.

CQFD.

Nous avons désormais toutes les clés en mains pour définir la notion d'ensemble engendré.

Proposition 37 (Ensemble engendré)

Soient P une assertion pouvant dépendre de paramètres qui est **stable par intersection**.
Soit A un ensemble admettant au moins un sur-ensemble E tel que $P(E)$.

Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $A \subseteq F$ et $P(F)$.
2. Pour tout ensemble X, si $A \subseteq X$ et $P(X)$ alors $F \subseteq X$.

Alors il existe un unique ensemble qui vérifie simultanément 1 et 2.
On le note $\langle A \rangle_P$ et on dit que c'est le **P-engendré** par A.

Démonstration

● **Existence**

Par définition de A, il existe au moins un ensemble E vérifiant 1.

Posons $\mathcal{E}_E := \{B \subseteq E \mid A \subseteq B \text{ et } P(B)\}$ l'ensemble des parties de E qui vérifient 1.

Par définition de E, on a donc $E \in \mathcal{E}_E$ donc $\mathcal{E}_E$ est non vide.

On peut donc définir $\mathcal{V}_E := \bigcap \mathcal{E}_E$.

Montrons que $\mathcal{V}_E$ vérifie 1.

En effet, l'assertion 1 est la conjonction du fait d'être un sur-ensemble de A et de P.

Or le fait d'être un sur-ensemble de A est stable par intersection d'après la prop. 35 p. 34.

De même, par définition P est stable par intersection.

Donc l'assertion 1 est stable par intersection d'après la proposition 36 page 35.

Or par définition, tous les éléments de $\mathcal{E}_E$ vérifient 1.

Donc $\boxed{\mathcal{V}_E = \bigcap \mathcal{E}_E \text{ vérifie aussi } 1}$.

Montrons que $\mathcal{V}_E$ vérifie 2.

Soit X un ensemble vérifiant 1.

Nous allons montrer que $\mathcal{V}_E \subseteq X$.

Pour cela posons $\mathcal{V}_X := \mathcal{V}_E \cap X$ et montrons que $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_E$.

Pour cela, montrons que $\mathcal{V}_X \in \mathcal{E}_E$.

En effet on a $E \in \mathcal{E}_E$ et $\mathcal{V}_E = \bigcap \mathcal{E}_E$ donc $\mathcal{V}_E \subseteq E$ d'après la prop. 24 p. 23.

Or on a $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_E \cap X$ donc $\mathcal{V}_X \subseteq \mathcal{V}_E$ d'après la prop. 28 p. 28 donc $\mathcal{V}_X \subseteq E$.

On a vu précédemment que $\mathcal{V}_E$ vérifie 1, et X vérifie 1 par définition.

Or on a vu que 1 est stable par intersection.

Donc $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_E \cap X$ vérifie 1 d'après la proposition 36 page 35.

Ainsi, $\mathcal{V}_X \subseteq E$ et vérifie 1.

Donc $\mathcal{V}_X \in \mathcal{E}_E$ par définition de $\mathcal{E}_E$.

Or on a $\mathcal{V}_E = \bigcap \mathcal{E}_E$ donc $\mathcal{V}_E \subseteq \mathcal{V}_X$.

Mais on a dit que $\mathcal{V}_X \subseteq \mathcal{V}_E$ si bien que $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_E$.

Or on a $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_E \cap X$ donc $\mathcal{V}_X \subseteq X$ et donc $\mathcal{V}_E \subseteq X$.

Donc si X est un ensemble vérifiant 1, alors $\mathcal{V}_E \subseteq X$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{V}_E \text{ vérifie } 2}$.

• **Unicité**

Soit G un ensemble vérifiant simultanément 1 et 2.

Comme G vérifie 1 et $\mathcal{V}_E$ vérifie 2, en prenant $X := G$ dans 2 on obtient $\mathcal{V}_E \subseteq G$.

Comme $\mathcal{V}_E$ vérifie 1 et G vérifie 2, en prenant $X := \mathcal{V}_E$ dans 2 on obtient $G \subseteq \mathcal{V}_E$.

Finalement on a $\mathcal{V}_E = G$, $\boxed{\text{d'où l'unicité}}$.

CQFD.

Exemple :
On peut citer par exemple la notion de sous-groupe engendré, la notion de sous-espace vectoriel engendré, ou encore la notion de tribu engendrée.

Remarque :
Si A vérifie déjà l'assertion P, alors on a naturellement $\langle A \rangle_P = A$.
En effet, on a $A \subseteq A$ et $P(A)$ donc $\langle A \rangle_P \subseteq A$.
Mais on a aussi toujours $A \subseteq \langle A \rangle_P$ d'où l'égalité.

Chapitre 2

Applications

Note de l'auteur

Ce deuxième chapitre a pour sujet la notion d'**applications**. Si nous avons pu voir quels seraient les objets dans notre histoire, à savoir les ensembles, il est temps de voir comment créer du lien entre eux à travers les applications. Celles-ci sont omniprésentes en mathématiques et plus généralement en sciences : elles traduisent l'idée intuitive de transformation d'un objet en un autre, d'associations entre deux objets, etc.

Ce chapitre va procéder ainsi :

— nous commencerons par donner du sens à la notion de **couple**, puis à celle de **produit cartésien**.

— lors du cœur du chapitre, nous pourrons aborder les applications.

— enfin, nous conclurons par une autre approche de la notion d'applications : les **familles**. Il s'agit simplement d'un changement de notations associé à d'autres usages (par exemple la notion de suites).

Sommaire

1 Couples et produits cartésiens

1.1 Couples

Nous l'avons dit lors du chapitre précédent : l'ordre d'écriture des éléments dans un ensemble n'a pas d'importance. Ainsi, les ensembles $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont les mêmes. Cependant, il est parfois utile de pouvoir considérer deux objets mais dans un ordre précis. C'est tout l'intérêt de la notion de **couple** : la notation (a, b) va se référer à autre chose que la notation (b, a).

Définition 12 (Couples)

1. Soient a et b deux ensembles.
   On note (a, b) l'ensemble $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$.
2. Soit c un ensemble.
   On dit que c est un **couple** si et seulement s'il existe deux ensembles x et y tels que $c = (x, y)$.

Pour la petite histoire

Kazimierz Kuratowski (2 février 1896 – 18 juin 1980) est un mathématicien polonais.

Les recherches de Kuratowski portent principalement sur la topologie abstraite et les structures d'espace métrique. Avec Alfred Tarski et Wacław Sierpiński, il développe la théorie des espaces polonais (nommés ainsi en hommage au groupe de mathématiciens polonais à l'origine de cette théorie).

C'est à la lui que l'on doit la définition précédente de couple.

Montrons à présent en quoi cette définition répond bien à ce que l'on attend d'elle.

Proposition 38 (Couples et égalité)

Soient a, b, x et y quatre ensembles.
On a l'équivalence suivante :

$$(a, b) = (x, y) \iff [a = x \text{ et } b = y]$$

Démonstration

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $(a, b) = (x, y)$.

En particulier on a

$$\begin{aligned}\{a, b\} = \{a\} \cup \{a, b\} = \bigcup \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \bigcup (a, b) = \bigcup (x, y) \\ = \bigcup \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} = \{x\} \cup \{x, y\} = \{x, y\}\end{aligned}$$

donc $\{a, b\} = \{x, y\}$.

Deux cas se présentent alors à nous : ou bien $a = b$, ou bien $a \neq b$.

• Plaçons-nous dans un premier temps dans le cas où $a = b$.

Dans ce cas, on a $\{a, b\} = \{a\}$ donc $\{x, y\} = \{a\}$.

Par définition, on a donc $x = a$ et $y = a$, si bien que $x = a$ et $y = b$ par transitivité.

• Plaçons-nous à présent dans le cas où $a \neq b$.

Supposons par l'absurde que $x = y$.

Alors par un raisonnement identique au précédent, on en conclut $a = x$ et $b = x$ donc $a = b$.

Donc par l'absurde, on en déduit que $x \neq y$.

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\big\{\{a\}\big\} &= \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} \backslash \big\{\{a, b\}\big\} \text{ car } a \neq b \\ &= (a, b) \backslash \big\{\{a, b\}\big\} \\ &= (x, y) \backslash \big\{\{x, y\}\big\} \text{ par hypothèse et par ce qui précède} \\ &= \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} \backslash \big\{\{x, y\}\big\} \\ &= \big\{\{x\}\big\} \text{ car } x \neq y\end{aligned}$$

On a donc $\big\{\{a\}\big\} = \big\{\{x\}\big\}$ donc $\{a\} = \{x\}$ et donc $a = x$.

Or on a dit que $\{a, b\} = \{x, y\}$ donc $b \in \{x, y\}$ donc $b = x$ ou $b = y$.

Mais $b = x$ implique $a = b$ par transitivité, ce qui est contraire à l'hypothèse $a \neq b$.

On a donc $b \neq x$ et donc $b = y$.

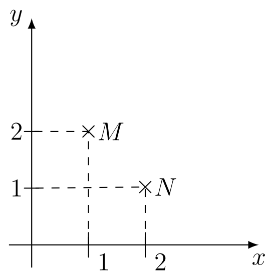
On a donc bien $a = x$ et $b = y$.

Dans les deux cas, on a bien $a = x$ et $b = y$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } (a, b) = (x, y) \text{ alors } a = x \text{ et } b = y}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $a = x$ et $b = y$.
On a alors $\{a\} = \{x\}$ et $\{a,b\} = \{x,y\}$.
On a donc $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\}$, c'est-à-dire $\boxed{(a,b) = (x,y)}$.
CQFD.

Exemple :
Les couples, s'ils vont nous servir pour construire la notion d'applications, servent énormément pour la notion de repérage de points. Par exemple si l'on se place dans le plan euclidien, alors on peut repérer un point par son abscisse et son ordonnée.



Le point M ci-dessus est alors repéré par les coordonnées $(1,2)$.
L'ordre a bien son importance puisqu'il ne s'agit pas du point N qui lui est représenté par les coordonnées $(2,1)$.

1.2 Produits cartésiens

Proposition 39 (Produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles.
Il existe un unique ensemble G tel que pour tout ensemble c

$$c \in G \iff \exists x \in E, \exists y \in F, c = (x,y)$$

On l'appelle **produit cartésien** de E par F et on le note $E \times F$.

Démonstration

• **Existence**
Posons $G := \left\{c \in \mathscr{P}\big(\mathscr{P}(E \cup F)\big) \;\middle|\; \exists x \in E, \exists y \in F, c = (x,y)\right\}$.
Montrons que G respecte l'équivalence de l'énoncé par double implications.

Soit c un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $c \in G$, alors par définition de G on a $\exists x \in E, \exists y \in F, c = (x,y)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe $x \in E$ et $y \in F$ tels que $c = (x,y)$.
Comme $x \in E$ et $y \in F$, on a $\{x,y\} \subseteq E \cup F$ et $\{x\} \subseteq E$ donc $\{x\} \subseteq E \cup F$.
On a donc $\{x\} \in \mathscr{P}(E \cup F)$ et $\{x,y\} \in \mathscr{P}(E \cup F)$.
On a donc $\{\{x\},\{x,y\}\} \subseteq \mathscr{P}(E \cup F)$.

Donc $\big\{\{x\},\{x,y\}\big\} \in \mathscr{P}\big(\mathscr{P}(E \cup F)\big)$.
Donc $(x,y) \in \mathscr{P}\big(\mathscr{P}(E \cup F)\big)$, c'est-à-dire $c \in \mathscr{P}\big(\mathscr{P}(E \cup F)\big)$.
Donc c répond à la définition de G par compréhension : on a $c \in G$.
Donc si $\exists x \in E, \exists y \in F, c = (x,y)$ alors $c \in G$.
Finalement, on a bien pour tout ensemble c, $\boxed{c \in G \iff \exists x \in E, \exists y \in F, c = (x,y)}$.

• **Unicité**
Soit G' un ensemble tel que $\forall c, \Big(c \in G' \iff \exists x \in E, \exists y \in F, c = (x,y)\Big)$.
D'après ce que l'on vient de montrer, on a alors l'équivalence $\forall C, (c \in G \iff c \in G')$, c'est-à-dire $G = G'$, $\boxed{\text{d'où l'unicité}}$.
CQFD.

Remarque :
Pour un ensemble E, le produit cartésien $E \times E$ est souvent noté E^2.

Exemple :
Si $E = \{a,b,c\}$ et $F = \{1,2\}$ alors $E \times F = \big\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\big\}$.

Pour la petite histoire

René Descartes (31 mars 1596 – 11 février 1650) est un mathématicien, physicien et philosophe français.

Il est considéré comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne : il reste célèbre pour avoir exprimé dans son *Discours de la méthode* le fameux « *Je pense, donc je suis* », fondant ainsi le système des sciences sur le sujet connaissant face au monde qu'il se représente. En physique, il a largement contribué à l'optique. Il est le premier à avoir proposé l'usage de coordonnées en géométrie, d'où les multiples adjectifs mathématiques dérivés de son nom.

Bien souvent en mathématiques, nous sommes amenés à mettre en lien deux objets : nous avons par exemple vu l'égalité ou encore l'inclusion entre ensembles. Nous pouvons aussi citer la comparaison entre les nombres : nous aurons plus tard besoin de donner du sens à l'assertion $2 \leq 3$ au sein de la théorie des ensembles. Une façon de le faire consiste à définir $\leq$ comme un ensemble vérifiant $(2,3) \in \leq$.

Les relations binaires forment le cadre général pour donner du sens à tout cela. Nous verrons comme annoncé précédemment que ce cadre est d'ailleurs suffisamment général pour traiter aussi de la notion d'application.

Définition 13 (Relations binaires)

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble.

On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation binaire** si et seulement si tous les éléments de $\mathcal{R}$ sont des couples.

Dans ce cas-là, pour a et b des ensembles, on notera $a\mathcal{R}b$ pour signifier $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Remarque :
Si E est un ensemble tel que $\mathcal{R} \subseteq E^2$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E.

Nous reviendrons plus en détails sur les relations binaires quand nous aborderons la notion de relations d'équivalences et de relations d'ordres.

2 Applications

Nous l'avons dit en introduction, une application est un moyen de transformer un objet en un autre. Par exemple, nous pouvons être amenés à considérer l'application qui transforme un entier en son double, ou bien l'application qui fait tourner un triangle dans le sens horaire de $90°$.

2.1 Généralités

Définition 14 (Applications)

Soit f une relation binaire.
On dit que f est une **application** si et seulement si

$$\forall x, \forall y, \forall y', \Big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y' \Big)$$

Autrement dit, pour tout ensemble x, il existe au plus un ensemble y tel que xfy.
Dans ce cas, on dit alors que y est **l'image** de x par f, et on note $y = f(x)$.
On dit aussi alors que x est un **antécédent** de y par f.

En se donnant une application, nous allons définir deux ensembles : son domaine, qui est l'ensemble des éléments admettant une image par f, et son image, qui est l'ensemble des éléments admettant au moins une image par f.

Définition 15 (Domaine et image d'une application)

Soit f une application.

1. Il existe un unique ensemble E tel que pour tout ensemble x,
$$x \in E \iff \exists y, y = f(x)$$
On l'appelle **domaine** de f et on le note $\mathrm{dom}(f)$.
2. Il existe un unique ensemble F tel que pour tout ensemble y,
$$y \in F \iff \exists x, y = f(x)$$
On l'appelle **image** de f et on le note $\mathrm{im}(f)$.

Démonstration

1.

• **Existence**
Posons $E := \left\{ x \in \bigcup\bigcup f \;\middle|\; \exists y, y = f(x) \right\}$.
Montrons que E vérifie l'équivalence de l'énoncé par double implications.

Soit x un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $x \in E$ alors par définition de E on a $\exists y, y = f(x)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe un ensemble y tel que $y = f(x)$.

On a donc xfy, c'est-à-dire $(x, y) \in f$.

Donc $\big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} \in f$.

En particulier il existe $A \in f$ tel que $\{x\} \in A$.

Donc $\{x\} \in \bigcup f$ par définition de la réunion.

Il existe donc $B \in \bigcup f$ tel que $x \in B$.

Donc $x \in \bigcup\bigcup f$ par définition de la réunion.

Ainsi on a $x \in \bigcup\bigcup f$ et $\exists y, y = f(x)$.

Donc $x \in E$ par définition de E.

Donc si $\exists y, y = f(x)$ alors $x \in E$.

Finalement, on a bien l'équivalence $\boxed{\forall x, \Big(x \in E \iff \exists y, y = f(x)\Big)}$.

• **Unicité**

Soit E' un ensemble tel que $\forall x, \Big(x \in E' \iff \exists y, y = f(x)\Big)$.

Alors d'après ce que l'on a montré, on a $\forall x, (x \in E \iff x \in E')$, c'est-à-dire $E = E'$ $\boxed{\text{d'où l'unicité}}$.

2.

• **Existence**

Posons $F := \Big\{y \in \bigcup\bigcup f \;\Big|\; \exists x, y = f(x)\Big\}$.

Montrons que F vérifie l'équivalence de l'énoncé par double implications.

Soit y un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $y \in F$ alors par définition de F on a $\exists x, y = f(x)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe un ensemble x tel que $y = f(x)$.

On a donc xfy, c'est-à-dire $(x, y) \in f$.

Donc $\big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} \in f$.

En particulier il existe $A \in f$ tel que $\{x, y\} \in A$.

Donc $\{x, y\} \in \bigcup f$ par définition de la réunion.

Il existe donc $B \in \bigcup f$ tel que $y \in B$.

Donc $y \in \bigcup\bigcup f$ par définition de la réunion.

Ainsi on a $y \in \bigcup\bigcup f$ et $\exists x, y = f(x)$.

Donc $y \in F$ par définition de F.

Donc si $\exists x, y = f(x)$ alors $y \in F$.

Finalement, on a bien l'équivalence $\boxed{\forall y, \Big(y \in F \iff \exists x, y = f(x)\Big)}$.

• **Unicité**
Soit F' un ensemble tel que $\forall y, \Big(y \in F' \iff \exists x, y = f(x)\Big)$.
Alors d'après ce que l'on a montré, on a $\forall y, (y \in F \iff y \in F')$, c'est-à-dire $F = F'$ $\boxed{\text{d'où l'unicité}}$.
CQFD.

Proposition 40 (Égalité entre deux applications)

Soient f et g deux applications.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f = g$
2. $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ et $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = g(x)$.

Démonstration

Raisonnons par double implications.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $f = g$ alors automatiquement $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ et $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = g(x)$.
$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ et $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = g(x)$.

Soit $c \in f$.

Comme f est une application, en particulier f est une relation binaire.

Donc c est un couple : il existe x et y deux ensembles tels que $c = (x, y)$.

On a donc $(x, y) \in f$ donc xfy donc $y = f(x)$.

Comme xfy on a $x \in \mathrm{dom}(f)$ par définition du domaine.

Donc par hypothèse on a $x \in \mathrm{dom}(g)$ et $y = f(x) = g(x)$.

Ainsi on a xgy donc $(x, y) \in g$ donc $c \in g$.

Donc pour tout $c \in f$, on a $c \in g$, c'est-à-dire $f \subseteq g$.

Par le même raisonnement, on obtient que $g \subseteq f$ et donc $f = g$.

Donc si $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ et $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = g(x)$ alors $f = g$.

Finalement, on a bien $f = g$ si et seulement si $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$
et $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = g(x)$.
CQFD.

Définition 16 (Application constante)

Soit f une application.
On dit que f est **constante** si et seulement si $\mathrm{im}(f)$ est un singleton.
Autrement dit, il existe un ensemble c tel que $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c$.

Définition 17 (Points fixes d'une application)

Soit f une application.
On appelle **point fixe** de f tout $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $f(x) = x$.

Définition 18 (Application d'un ensemble vers un autre)

Soient f une application et E et F deux ensembles.
On dit que f est une application de E vers F si et seulement si $\mathrm{dom}(f) = E$ et $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.
On note alors $f : E \longrightarrow F$.
L'ensemble des applications de E vers F est noté $\mathcal{F}(E \to F)$ ou encore F^E.

Remarque :

1. On utilisera indifféremment ici le mot **fonction** pour désigner une application. Certaines personnes font la distinction en expliquant qu'une fonction de E dans F est une application dont le domaine est inclus dans E mais pas nécessairement égal.
2. Il est à noter qu'avec notre formalisme, si $f : E \longrightarrow F$ et si $F \subseteq G$, alors on a aussi $f : E \longrightarrow G$. Certaines personnes optent pour un formalisme plus rigide qui ne permet pas d'affirmer cela.
3. L'ensemble des applications de E dans F est bien défini : en effet toute application $f : E \longrightarrow F$ est une partie de $E \times F$, et donc on peut appliquer l'axiome de compréhension.
4. La notation F^E se justifiera dans un prochain livre qui abordera la notion de cardinal : on verra que si E a pour cardinal n et F a pour cardinal m, alors $\mathcal{F}(E \to F)$ a pour cardinal m^n.

Proposition 41 (Applications du vide ou dans le vide)

Soit f une application.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f = \varnothing$
2. $\mathrm{dom}(f) = \varnothing$
3. $\mathrm{im}(f) = \varnothing$

Démonstration

Montrons la proposition en montrant que 1 $\iff$ 2 et 1 $\iff$ 3.

$\boxed{1 \implies 2}$ Raisonnons par contraposition.

Supposons que $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$.

Il existe donc $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Il existe donc un ensemble y tel que $y = f(x)$ par définition du domaine.

Par définition, on a donc xfy c'est-à-dire $(x, y) \in f$.

Donc $f \neq \varnothing$.

Donc si $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$ alors $f \neq \varnothing$.

Donc par contraposition, si $f = \varnothing$ alors $\mathrm{dom}(f) = \varnothing$.

$\boxed{1 \implies 3}$ On le montre par le même raisonnement.

$\boxed{2 \implies 1}$ Raisonnons par contraposition.

Supposons que $f \neq \varnothing$.

Il existe donc $c \in f$.

Comme f est une application, f est en particulier une relation binaire.

Donc c est un couple : il existe deux ensembles x et y tels que $c = (x, y)$.

Comme $c \in f$, on a $(x, y) \in f$ donc xfy et donc $y = f(x)$.

En particulier $x \in \mathrm{dom}(f)$ par définition du domaine.

Donc $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$.

Donc si $f \neq \varnothing$ alors $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$.

Donc par contraposition, si $\mathrm{dom}(f) = \varnothing$ alors $f = \varnothing$.

$\boxed{3 \implies 1}$ On le montre par le même raisonnement.

Finalement, on trouve bien les équivalences voulues.

CQFD.

Remarque :
On remarquera au passage que l'ensemble vide est bien une application.
En effet, comme $\varnothing$ ne contient aucun élément, tous ses éléments sont des couples donc $\varnothing$ est bien une relation binaire.
De plus, pour tout ensembles x, y et y', comme les assertions $(x, y) \in \varnothing$ et $(x, y') \in \varnothing$ sont fausses, l'implication

$$\Big((x, y) \in \varnothing \text{ et } (x, y') \in \varnothing\Big) \implies y = y'$$

est nécessairement vraie, si bien que $\varnothing$ est bien une application.

2.2 Axiome de remplacement

Intuitivement et historiquement, la notion d'application a été introduite avec l'idée que l'image d'un nombre x par une fonction devait être définie à l'aide d'une formule. Par exemple $f(x) = 2x$ est une formule qui permet de définir explicitement f par un calcul. Avec le temps, la notion d'application a été généralisée, au point qu'il n'est pas toujours possible d'utiliser une formule pour définir une application (nous verrons notamment un exemple de cela avec **l'axiome du choix**).

Nous allons ici nous donner la possibilité de reproduire cette idée grâce à l'axiome qui va suivre. De même que nous n'avons pas défini dans cet ouvrage la notion d'assertion, nous ne définirons pas la notion de formule, celle-ci relevant plutôt du domaine de la logique. Il faut comprendre cela au sens intuitif que nous avons décrit ci-dessus.

L'axiome qui va suivre décrit l'idée que si l'on dispose d'une formule qui a du sens pour tout élément d'un ensemble, alors on peut englober tous les résultats possibles dans un ensemble.

Quand nous avons défini la notion d'application, nous avons dit que cela voulait dire que si x est en relation avec y, alors y est unique (ce qui fait qu'alors y est l'image de x par l'application en question). Nous avons explicité cela en écrivant qu'une relation f est une application si et seulement si pour tout ensemble x, y et y' on a

$$(xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'$$

Généralisons cette idée avec la notion d'**assertion fonctionnelle**.

Définition 19 (Assertion fonctionnelle)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.

1. On dit que P est **fonctionnelle** si et seulement si pour tout ensemble x, y et y', on a

$$\Big(P(x,y) \text{ et } P(x,y')\Big) \implies y = y'$$

   Ainsi pour tout ensemble x, s'il existe un ensemble y tel que $P(x,y)$ alors y est unique. On note alors $P(x) := y$.
2. Soit E un ensemble.
   On dit que P est **totale** sur E si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe au moins un y tel que $P(x,y)$.

On peut désormais formuler l'axiome dont il était question dans l'introduction.

Axiome 7 (de remplacement)

Soient E un ensemble et P une assertion fonctionnelle totale sur E.
Il existe un ensemble F tel que

$$\forall y, \Big(y \in F \iff \exists x \in E, y = P(x)\Big)$$

Remarque :

1. Il est immédiat qu'un tel ensemble F est unique (puisque l'équivalence caractérise le fait de lui appartenir, donc l'ensemble en lui-même).
   On dit que F est **l'image** de E par P, et on le note $\{P(x) \mid x \in E\}$.
   Ici encore, le x de cette notation est muet : on peut le remplacer par n'importe quel symbole qui n'est pas déjà utilisé. Ainsi, on a les égalités
   $$\{P(x) \mid x \in E\} = \{P(y) \mid y \in E\} = \{P(z) \mid z \in E\}$$
2. À la manière de l'axiome de compréhension on a, à strictement parler, un axiome différent dès que l'on se donne une assertion P vérifiant les conditions demandées. De fait, on parle plutôt du **schéma d'axiomes de remplacement**. Comme précédemment, l'auteur n'a pas souhaité s'appesantir sur la question, mais c'est sous ce nom que vous pourrez le retrouver si vous faites des recherches.

On peut désormais définir les applications explicitement à l'aide d'une formule comme nous l'avons indiqué précédemment. Comme expliqué précédemment, on entend ici le mot "formule" au sens intuitif : on se donne un objet en entrée et on lui associe un unique objet.

Proposition 42 (Définition explicite d'une application)

Soient E un ensemble et A une formule définie pour tout $x \in E$.
Alors il existe une unique application f de domaine E telle que

$$\forall x \in E, f(x) = A(x)$$

On note alors

$$f = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & ? \\ x & \longmapsto & A(x) \end{pmatrix}$$

et pour tout ensemble F tel que $\mathrm{im}(f) \subseteq F$, on note aussi

$$f = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & A(x) \end{pmatrix}$$

Démonstration

• Commençons par former un ensemble image pour la future application.

Pour tout $x \in E$ et tout ensemble y, posons $P(x, y)$ l'assertion $y = A(x)$.

Comme A est définie pour tout $x \in E$, en prenant $y := A(x)$ on a nécessairement l'existence d'un y tel que $P(x, y)$ donc P est totale sur E.

Soient $x \in E$, y et y' trois ensembles tels que $P(x, y)$ et $P(x, y')$.

On a donc $y = A(x)$ et $y' = A(x)$ et donc $y = y'$.

Donc pour tout ensemble $x \in E$, y et y', si $P(x, y)$ et $P(x, y')$ alors $y = y'$.

Donc P est fonctionnelle.

D'après l'axiome de remplacement, on peut donc considérer $G := \{P(x) \mid x \in E\}$.

• Posons alors $f := \{(x, y) \in E \times G \mid y = A(x)\}$.
Montrons que f vérifie les conditions de l'énoncé.

► f est une application.
En effet, par définition tous les éléments de f sont des couples donc f est une relation binaire.

Soient x, y et y' trois ensembles tels que xfy et xfy'.
On a donc $(x, y) \in f$ et $(x, y') \in f$.
En particulier $(x, y) \in E \times G$ donc $x \in E$, et de plus $y = A(x)$ et $y' = A(x)$ et donc $y = y'$.

Donc pour tout ensemble x, y et y' si xfy et xfy' alors $y = y'$.
Donc $\boxed{f \text{ est bien une application}}$.

► f est de domaine E.

Soit $x \in \mathrm{dom}(f)$.
Il existe donc un ensemble y tel que $y = f(x)$.
On a donc $(x, y) \in f$ donc $(x, y) \in E \times G$ et donc $x \in E$.

On a donc $\mathrm{dom}(f) \subseteq E$.

Soit $x \in E$.
Par définition, A est définie en x.
Posons $y := A(x)$.
Par définition, on a donc $y \in G$ et donc $(x, y) \in E \times G$.
Finalement, par définition de f on a bien $(x, y) \in f$.
On a donc xfy et donc $x \in \mathrm{dom}(f)$ par définition du domaine.

Donc $\mathrm{dom}(f) \supseteq E$.
Finalement $\boxed{\mathrm{dom}(f) = E}$.

► Montrons la dernière condition sur f.

Soit $x \in E$.
Posons $y := f(x)$.
On a donc xfy donc $(x, y) \in f$.
Donc $y = A(x)$ par définition de f et donc $f(x) = A(x)$.

Donc $\boxed{\forall x \in E, f(x) = A(x)}$.

Donc f est une application de domaine E telle que $\forall x \in E, f(x) = A(x)$.

• Montrons l'unicité.
Soit g une application de domaine E telle que $\forall x \in E, g(x) = A(x)$.

Par définition de g et d'après ce qui précède, on a donc $\operatorname{dom}(f) = E = \operatorname{dom}(g)$.
De même, pour tout $x \in E$ on a bien $f(x) = A(x) = g(x)$.
Donc $f = g$ d'après la proposition 40 page 47, $\boxed{\text{d'où l'unicité}}$.
CQFD.

Remarque :
À la manière de la définition d'un ensemble par compréhension ou par remplacement, le x dans la notation ci-dessus est muet : on peut le remplacer par n'importe quel symbole tant que celui-ci n'est pas déjà utilisé. Ainsi on a par exemple

$$\begin{pmatrix} E & \longrightarrow & ? \\ x & \longmapsto & A(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & ? \\ y & \longmapsto & A(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & ? \\ z & \longmapsto & A(z) \end{pmatrix}$$

Exemple :
Comme indiqué dans l'introduction, on peut par exemple définir l'application qui prend un nombre entier et renvoie son double :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & ? \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

Voici enfin deux ensembles d'applications très fréquemment utilisées, que l'on désormais définir explicitement.

Définition 20 (Application identité)

Soit E un ensemble.

On appelle **identité** de E l'application $\mathrm{id}_E := \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{pmatrix}$.

Remarque :
Au vu de la proposition 41 page 48, comme $\mathrm{id}_\varnothing : \varnothing \longrightarrow \varnothing$, on a $\mathrm{id}_\varnothing = \varnothing$.

Définition 21 (Projections cartésiennes)

Soient E et F.
On appelle **projections** de $E \times F$ sur E et F les deux applications

$$\begin{pmatrix} E \times F & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} E \times F & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{pmatrix}$$

2.3 Image directe et image réciproque

Proposition 43 (Image directe et image réciproque)

Soit f une application.

1. Soit A un ensemble.
Il existe un unique ensemble F tel que pour tout ensemble y, on a
$$y \in F \iff \exists a \in A \cap \mathrm{dom}(f), y = f(a)$$
On l'appelle **image directe** de A par f et on le note $f^{\rightarrow}(A)$.
2. Soit B un ensemble.
Il existe un unique ensemble E tel que pour tout ensemble x, on a
$$x \in E \iff \Big(x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in B\Big)$$
On l'appelle **image réciproque** de B par f et on le note $f^{\leftarrow}(B)$.

Démonstration

1.

• Existence

Posons $F := \big\{y \in \mathrm{im}(f) \bigm| \exists a \in A \cap \mathrm{dom}(f), y = f(a)\big\}$.

Montrons que F vérifie l'équivalence de l'énoncé par double implications.

Soit y un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $y \in F$ alors par définition de F on a $\exists a \in A \cap \mathrm{dom}(f), y = f(a)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe $a \in A \cap \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(a)$.

En particulier $y \in \mathrm{im}(f)$ par définition de l'image d'une application.

On a donc $y \in \mathrm{im}(f)$ et $\exists a \in A \cap \mathrm{dom}(f), y = f(a)$.

Donc $y \in F$ par définition de F.

Donc si $\exists a \in A \cap \mathrm{dom}(f), y = f(a)$ alors $y \in F$.

Finalement, pour tout ensemble y on a bien $\boxed{y \in F \iff \exists a \in A \cap \mathrm{dom}(f), y = f(a)}$.

• Unicité

Soit F' un ensemble tel que $\forall y, \Big(y \in F' \iff \exists a \in A \cap \mathrm{dom}(f), y = f(a)\Big)$.

Alors d'après ce que l'on a montré, $\forall y, (y \in F \iff y \in F')$, c'est-à-dire $F = F'$ $\boxed{\text{d'où l'unicité}}$.

2. Par définition $\big\{x \in \mathrm{dom}(f) \bigm| f(x) \in B\big\}$ est l'unique ensemble tel que pour tout ensemble x, x appartient à cet ensemble si et seulement si $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $f(x) \in B$.

CQFD.

Exemple :

1. On a $f^{\rightarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big) = \mathrm{im}(f)$ et $f^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big) = \mathrm{dom}(f)$.
2. On a $f^{\rightarrow}(\varnothing) = \varnothing = f^{\leftarrow}(\varnothing)$.
3. Pour tout ensembles A et B on a $\mathrm{id}_A{}^{\rightarrow}(B) = A \cap B = \mathrm{id}_A{}^{\leftarrow}(B)$.

Proposition 44 (Croissance des images directe et réciproque)

Soit f une application.

1. Soient A et B deux ensembles.
   On a alors
   $$A \subseteq B \implies f^{\rightarrow}(A) \subseteq f^{\rightarrow}(B)$$
   On dit que l'image directe est **croissante** (*pour l'inclusion*).
2. Soient C et D deux ensembles.
   On a alors
   $$C \subseteq D \implies f^{\leftarrow}(C) \subseteq f^{\leftarrow}(D)$$
   On dit que l'image réciproque est **croissante** (*pour l'inclusion*).

Démonstration

1. Supposons que $A \subseteq B$.

   Soit $y \in f^{\rightarrow}(A)$.

   Par définition, il existe $a \in A \cap \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(a)$.

   On a donc $a \in A$ et $a \in \mathrm{dom}(f)$.

   Or par hypothèse on a $A \subseteq B$ donc $a \in B$ et $a \in \mathrm{dom}(f)$, et donc $a \in B \cap \mathrm{dom}(f)$.

   Comme $y = f(a)$ on a donc $y \in f^{\rightarrow}(B)$ par définition.

Donc $\boxed{f^{\rightarrow}(A) \subseteq f^{\rightarrow}(B)}$.

2. Supposons que $C \subseteq D$.

   Soit $x \in f^{\leftarrow}(C)$.

   Par définition on a $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $f(x) \in C$.

   Or par hypothèse on a $C \subseteq D$ donc $f(x) \in D$.

   Ainsi $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $f(x) \in D$ donc $x \in f^{\leftarrow}(D)$ par définition.

Donc $\boxed{f^{\leftarrow}(C) \subseteq f^{\leftarrow}(D)}$.

CQFD.

Proposition 45 (Images, réunion et intersection)

Soit f une application.
Soient A et B deux ensembles.

1. On a $f^{\rightarrow}(A \cup B) = f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$.

2. On a $f^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

Soient C et D deux ensembles.

3. On a $f^{\leftarrow}(C \cup D) = f^{\leftarrow}(C) \cup f^{\leftarrow}(D)$.
4. On a $f^{\leftarrow}(C \cap D) = f^{\leftarrow}(C) \cap f^{\leftarrow}(D)$.

Démonstration

1. Raisonnons pour double inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $y \in f^{\rightarrow}(A \cup B)$.
Par définition il existe $x \in A \cup B$ tel que $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $y = f(x)$.
On a alors $x \in A$ ou $x \in B$ d'après la proposition 18 page 18.
Si $x \in A$ alors comme $y = f(x)$ on a $y \in f^{\rightarrow}(A)$ par définition.
Si $x \in B$ alors comme $y = f(x)$ on a $y \in f^{\rightarrow}(B)$ par définition.
On a donc $y \in f^{\rightarrow}(A)$ ou $y \in f^{\rightarrow}(B)$.
Et donc $y \in f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$ d'après la proposition 18 page 18.

Donc $f^{\rightarrow}(A \cup B) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $y \in f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$.
On a donc $y \in f^{\rightarrow}(A)$ ou $y \in f^{\rightarrow}(B)$ d'après la proposition 18 page 18.
Si $y \in f^{\rightarrow}(A)$ alors il existe $x \in A \cap \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$ par définition, et comme $A \subseteq A \cup B$ on a $x \in A \cup B$.
Si $y \in f^{\rightarrow}(B)$ alors il existe $x \in B \cap \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$ par définition, et comme $B \subseteq A \cup B$ on a $x \in A \cup B$.
Dans tous les cas, il existe $x \in (A \cup B) \cap \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$.
On a donc $y \in f^{\rightarrow}(A \cup B)$ par définition.

Donc $f^{\rightarrow}(A \cup B) \supseteq f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$.

Finalement on a bien $\boxed{f^{\rightarrow}(A \cup B) = f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)}$.

2.

Soit $y \in f^{\rightarrow}(A \cap B)$.
Par définition, il existe $x \in A \cap B \cap \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$.
On a alors $x \in A$ et $x \in B$ d'après la proposition 26 page 26.
Comme $x \in A$ et $y = f(x)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(A)$ par définition.
Comme $x \in B$ et $y = f(x)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(B)$ par définition.
Ainsi $y \in f^{\rightarrow}(A)$ et $y \in f^{\rightarrow}(B)$.
On a donc $y \in f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$ d'après la proposition 26 page 26.

On a donc $\boxed{f^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)}$.

3.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in f^{\leftarrow}(C \cup D) &\iff x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in C \cup D \text{ par définition} \\
&\iff x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } \Big(f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D\Big) \\
&\qquad \text{d'après la prop. 18 p. 18} \\
&\iff \Big(x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in C\Big) \text{ ou } \Big(x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in D\Big) \\
&\iff x \in f^{\leftarrow}(C) \text{ ou } x \in f^{\leftarrow}(D) \text{ par définition} \\
&\iff x \in f^{\leftarrow}(C) \cup f^{\leftarrow}(D) \text{ d'après la prop. 18 p. 18}
\end{aligned}$$

Ainsi on a l'équivalence $x \in f^{\leftarrow}(C \cup D) \iff x \in f^{\leftarrow}(C) \cup f^{\leftarrow}(D)$.
D'où l'égalité $\boxed{f^{\leftarrow}(C \cup D) = f^{\leftarrow}(C) \cup f^{\leftarrow}(D)}$.

4.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in f^{\leftarrow}(C \cap D) &\iff x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in C \cap D \text{ par définition} \\
&\iff x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } \Big(f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D\Big) \\
&\qquad \text{d'après la prop. 26 p. 26} \\
&\iff \Big(x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in C\Big) \text{ et } \Big(x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in D\Big) \\
&\iff x \in f^{\leftarrow}(C) \text{ et } x \in f^{\leftarrow}(D) \text{ par définition} \\
&\iff x \in f^{\leftarrow}(C) \cap f^{\leftarrow}(D) \text{ d'après la prop. 26 p. 26}
\end{aligned}$$

Ainsi on a l'équivalence $x \in f^{\leftarrow}(C \cap D) \iff x \in f^{\leftarrow}(C) \cap f^{\leftarrow}(D)$.
D'où l'égalité $\boxed{f^{\leftarrow}(C \cap D) = f^{\leftarrow}(C) \cap f^{\leftarrow}(D)}$.
CQFD.

Remarque :
L'inclusion réciproque de 2 n'est pas toujours vraie.
Par exemple si $f : \{a, b\} \longrightarrow ?$ est constante égale à 1 avec $a \neq b$, si $A := \{a\}$ et $B := \{b\}$, alors $A \cap B = \varnothing$ donc $f^{\rightarrow}(A \cap B) = \varnothing$ mais $1 \in f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$ donc $f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B) \neq \varnothing$. Nous verrons plus tard qu'en fait l'inclusion réciproque est vraie pour toutes parties de $\mathrm{dom}(f)$ si et seulement si f est injective (notion que l'on explicitera à ce moment-là).

Proposition 46 (Image réciproque et différence)

Soient f une application et C et D deux ensembles.
On a $f^{\leftarrow}(C \backslash D) = f^{\leftarrow}(C) \backslash f^{\leftarrow}(D)$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in f^{\leftarrow}(C \backslash D) &\iff x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in C \backslash D \\ &\iff x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in C \text{ et } f(x) \notin D \\ &\iff x \in f^{\leftarrow}(C) \text{ et } x \notin f^{\leftarrow}(D) \\ &\iff x \in f^{\leftarrow}(C) \backslash f^{\leftarrow}(D) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f^{\leftarrow}(C \backslash D) = f^{\leftarrow}(C) \backslash f^{\leftarrow}(D)}$.

CQFD.

Remarque :
En particulier si D est une partie de $\mathrm{im}(f)$, on a $f^{\leftarrow}\big(\complement_{\mathrm{im}(f)} D\big) = \complement_{\mathrm{dom}(f)} f^{\leftarrow}(D)$.
Il suffit pour cela de prendre $C := \mathrm{im}(f)$ et de se souvenir que $f^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big) = \mathrm{dom}(f)$.

Proposition 47 (Image directe de l'image réciproque)

Soit f une application.

1. Pour tout $B \subseteq \mathrm{im}(f)$, on a $f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = B$.
2. Pour tout $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$, on a $f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big) \supseteq A$.

Démonstration

1. Soit $B \subseteq \mathrm{im}(f)$.

Raisonnons par double inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $y \in f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$.

Par définition, il existe donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$ tel que $y = f(x)$.

Par définition, on a donc $f(x) \in B$ et donc comme $y = f(x)$ on a $y \in B$.

Donc $f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) \subseteq B$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $y \in B$.

Par définition on a $B \subseteq \mathrm{im}(f)$ donc $y \in \mathrm{im}(f)$.

Par définition, il existe un ensemble $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$.
Comme $y \in B$, on a $f(x) \in B$ donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$ par définition.
Comme $y = f(x)$, on a donc $y \in f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$ par définition.
Donc $f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) \supseteq B$.
Finalement, on a bien $\boxed{f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = B}$.

2. Soit $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$.
Soit $x \in A$.
Par définition on a $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$ donc on peut considérer $y := f(x)$.
Comme $x \in A$, on a donc $y \in f^{\rightarrow}(A)$ par définition.
Comme $y = f(x)$, on a donc $x \in f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$ par définition.
Donc $\boxed{A \subseteq f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)}$.
CQFD.

2.4 Axiome du choix

Intéressons-nous à présent à l'axiome le plus controversé des mathématiques modernes : **l'axiome du choix**. Celui-ci affirme qu'étant donnés autant d'ensembles non vides que l'on souhaite, on peut obtenir une application qui associe à chacun de ses ensembles un de leurs éléments.

Cet axiome est controversé car il conduit à de nombreux paradoxes et est profondément non constructif : il fournit une application sans nous indiquer comment celle-ci est construite, donnant de fait naissance à des objets dont on ne peut rien dire. Il est cependant très utile dans de nombreux cas : il permet par exemple d'affirmer que tout espace vectoriel admet une base. Le choix qui est fait dans le cadre des Barbuki est d'utiliser l'axiome du choix.

Axiome 8 (du choix)

Soit X un ensemble tel que $\varnothing \notin X$.
Il existe une fonction f de domaine X telle que $\forall A \in X, f(A) \in A$.
On dit alors que f est une **fonction de choix** de X.

Remarque :
Pur tout $A \in X$, on a $f(A) \in A$ et $A \subseteq \bigcup X$ donc $f(A) \in \bigcup X$.
Ainsi on a $\mathrm{im}(f) \subseteq \bigcup X$ et donc $f : X \longrightarrow \bigcup X$.

Pour la petite histoire

Ernst Zermelo (27 juillet 1871 – 21 mai 1953) est un mathématicien allemand. Il s'est principalement intéressé aux fondations des mathématiques et à la philosophie. Il a donné des développements importants à la théorie des ensembles et est un des précurseurs de la théorie des jeux.

C'est lui qui le premier a formulé l'axiome du choix en 1904. Il s'en est servi pour démontrer le théorème de Zermelo que l'on abordera dans le chapitre **??**.
Zermelo a formulé en 1908 la plupart des axiomes utilisés aujourd'hui en théorie des ensembles, notamment ceux utilisés dans ce livre. Plus tard, Fraenkel et Skolem compléterons ses travaux pour donner naissance à l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel, abrégée ZF. En ajoutant à celle-ci l'axiome du choix, on obtient l'axiomatique de ZFC.

Il existe de nombreuses façons de formuler l'axiome du choix, toute équivalentes à celle que nous venons de donner. En voici un premier exemple, très proche de notre formulation.

Proposition 48 (Axiome du choix - Version ensemble des parties)

Soit E un ensemble.
Il existe une application f de domaine $\mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\}$ telle que

$$\forall A \in \mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\}, f(A) \in A$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer l'axiome du choix à l'ensemble $\mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\}$.

Puisque $\varnothing \notin \mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\}$, il existe donc une fonction f de domaine $\mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\}$ tel que $\boxed{\forall A \in \mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\}, f(A) \in A}$.

CQFD.

Comme indiqué, il s'agit d'une autre formulation de l'axiome du choix, c'est-à-dire qu'elle est équivalente à celle que nous avons formulée en premier lieu : nous aurions pu choisir celle-ci comme axiome et démontrer la précédente.

Idée de preuve

Supposons l'axiome du choix – version ensemble des parties.

Soit X un ensemble tel que $\varnothing \notin X$.

Posons $E := \bigcup X$.

Par hypothèse, il existe une application g de domaine $\mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\}$ telle que $\forall A \in \mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\}, g(A) \in A$.

Remarquons que pour tout $A \in X$, on a $A \subseteq \bigcup X = E$ d'après la proposition 15 page 16 donc comme $\varnothing \notin X$, on a $A \neq \varnothing$ et donc $A \in \mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\} = \mathrm{dom}(g)$.

Ainsi $X \subseteq \mathrm{dom}(g)$ donc on peut considérer l'application $f := \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & ? \\ A & \longmapsto & g(A) \end{pmatrix}$.

Par définition, f est bien une application de domaine X.

De plus, pour tout $A \in X$, on a $f(A) = g(A) \in A$.

CQFD.

Voici ensuite une autre formulation l'axiome du choix : elle présente l'avantage de ne pas nécessiter la notion d'application pour être formulée.

Proposition 49 (Axiome du choix - Version intersection)

Soit X un ensemble dont les éléments sont disjoints deux à deux et tel que $\varnothing \notin X$.
Il existe un ensemble C tel que pour tout $A \in X$, $C \cap A$ est un singleton.

Démonstration

Comme $\varnothing \notin X$, il existe d'après l'axiome du choix une application f de domaine X telle que $\forall A \in X, f(A) \in A$. Posons alors $C := \mathrm{im}(f)$.

> Soit $A \in X$.
>
> Par définition de l'image, on a $f(A) \in C$ et par définition de f, on a $f(A) \in A$.
>
> On a donc $f(A) \in C \cap A$ et donc $\{f(A)\} \subseteq C \cap A$.
>
> Montrons l'inclusion réciproque.
>
> > Soit $a \in C \cap A$.
> >
> > On a donc $a \in C$ et $a \in A$.
> >
> > Comme $a \in C$, il existe $B \in X$ tel que $a = f(B)$ par définition de l'image.
> >
> > Donc comme $f(B) \in B$ par définition de f, on a $a \in B$.
> >
> > Or les éléments de X sont deux à deux disjoints.
> >
> > Donc $A \neq B \implies A \cap B = \varnothing$ donc $A \cap B \neq \varnothing \implies A = B$.
> >
> > Or on a $a \in A$ et $a \in B$ donc $a \in A \cap B$ donc $A \cap B \neq \varnothing$ et donc $A = B$.
> >
> > Or on a dit que $a = f(B)$ donc $a = f(A)$.
>
> Donc $\forall a \in C \cap A, a = f(A)$ donc $C \cap A \subseteq \{f(A)\}$ et donc $C \cap A = \{f(A)\}$.

Ainsi, $C \cap A$ est un singleton.

Donc $\boxed{\text{pour tout } A \in X,\ C \cap A \text{ est un singleton}}$.

CQFD.

Ici encore, il s'agit d'une autre version de l'axiome du choix : on aurait pu l'utiliser comme axiome et démontrer la première formulation.

Idée de preuve

Supposons l'axiome du choix – version intersection.

Soit X un ensemble tel que $\varnothing \notin X$.

Considérons l'ensemble $E := \Big\{\big\{(A, x) \mid x \in A\big\} \;\Big|\; A \in X\Big\}$.

• Montrons que les éléments de E sont disjoints deux à deux.

Soient F et G deux éléments de E tels que $F \neq G$.

Par définition, il existe $A \in X$ et $B \in X$ tels que $F = \big\{(A, x) \mid x \in A\big\}$ et $G = \big\{(B, y) \mid y \in B\big\}$.

Supposons par l'absurde que $F \cap G \neq \varnothing$.

Il existe donc $u \in F \cap G$, donc $u \in F$ et $u \in G$.

Comme $u \in F$, il existe $x \in A$ tel que $u = (A, x)$.

Comme $u \in G$, il existe $y \in B$ tel que $u = (B, y)$.

On a donc $(A, x) = (B, y)$ donc en particulier $A = B$.

On obtient alors $F = \big\{(A, x) \mid x \in A\big\} = \big\{(B, x) \mid x \in B\big\} = G$, ce qui est absurde puisque $F \neq G$ par définition.

Donc $F \cap G = \varnothing$.

Donc tous les éléments de E sont disjoints deux à deux.

• Comme $\varnothing \notin X$, pour tout $A \in X$ il existe au moins un $a \in A$ donc $(A, a) \in \big\{(A, x) \mid x \in A\big\}$ donc $\big\{(A, x) \mid x \in A\big\} \neq \varnothing$ et donc $\varnothing \notin E$.

• On peut donc appliquer l'axiome du choix – version intersection.

Il existe un ensemble C tel que pour tout $F \in E$ l'intersection $C \cap F$ est un singleton.

On peut donc définir la fonction de choix qui nous intéresse pour conclure.

Soit $A \in X$.

Considérons $F_A := \big\{(A, x) \mid x \in A\big\}$, de sorte que $F_A \in E$ par définition de E.

Donc par définition de C, l'ensemble $C \cap F_A$ est un singleton.

Il existe donc un unique ensemble u_A tel que $C \cap F_A = \{u_A\}$.

En particulier $u_A \in F_A$ donc il existe un unique $x_A \in A$ tel que $u_A = (A, x_A)$.

Posons alors $f := \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & ? \\ A & \longmapsto & x_A \end{pmatrix}$.

Pour tout $A \in X$, on a alors $x_A \in A$ donc $f(A) \in A$.

CQFD.

2.5 Composition d'applications

En mathématiques, il est tout à fait possible de vouloir enchaîner à la suite plusieurs applications, c'est-à-dire prendre un objet, le faire passer par une première application puis transmettre le résultat à une deuxième application. Ainsi, si l'on se donne f et g deux applications et que l'on prend x dans $f^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(g)\big)$ alors $f(x) \in \mathrm{dom}(g)$ et donc on peut considérer $g\big(f(x)\big)$.

Définition 22 (Composition d'applications)

Soient f et g deux applications.
On appelle **composition** de g par f l'application

$$g \circ f := \begin{pmatrix} f^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(g)\big) & \longrightarrow & ? \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{pmatrix}$$

Remarque :
Par définition, on a $\mathrm{dom}(g \circ f) = f^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(g)\big)$.
On en déduit en particulier que :

1. on a $\mathrm{dom}(g \circ f) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ par définition de l'image réciproque.
2. si $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ alors $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$.

Ainsi le domaine de la composition de deux applications a été un choix, bien qu'il s'agit comme nous l'avons vu en introduction du choix le plus grand possible. En revanche l'image de la composition nous vient alors naturellement : il s'agit de l'image directe par g de l'image de f.

Proposition 50 (Image d'une composition d'application)

Soient f et g deux applications.
On a alors $\mathrm{im}(g \circ f) = g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)$.

Démonstration

Raisonnons par double inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $y \in \mathrm{im}(g \circ f)$.

Il existe donc $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$ tel que $y = (g \circ f)(x)$.

En posant $z := f(x)$, on a alors $z \in \mathrm{im}(f)$ et $y = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(z)$.

Donc $y \in g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)$.

On a donc $\mathrm{im}(g \circ f) \subseteq g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $y \in g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)$.

Il existe donc $z \in \mathrm{im}(f)$ tel que $y = g(z)$.

Il existe donc $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $z = f(x)$.

On a donc $y = g(z) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$.

Donc $y \in \mathrm{im}(g \circ f)$.

Donc $\mathrm{im}(g \circ f) \supseteq g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)$.

Finalement, on a bien $\boxed{\mathrm{im}(g \circ f) = g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)}$.

CQFD.

Plus généralement, on peut s'intéresser aux images directe et réciproque d'un ensemble par une composition d'applications.

Proposition 51 (Images par une composition)

Soient f et g deux applications et A un ensemble.

1. On a $(g \circ f)^{\rightarrow}(A) = g^{\rightarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$.
2. On a $(g \circ f)^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}\big(g^{\leftarrow}(A)\big)$.

Démonstration

1. Raisonnons par double inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $y \in (g \circ f)^{\rightarrow}(A)$.

Il existe donc $x \in A$ tel que $y = (g \circ f)(x)$.

Comme $x \in A$ on a $f(x) \in f^{\rightarrow}(A)$ donc $y = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \in g^{\rightarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$.

Donc $(g \circ f)^{\rightarrow}(A) \subseteq g^{\rightarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $y \in g^{\rightarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$.

Par définition, il existe $z \in f^{\rightarrow}(A)$ tel que $y = g(z)$.

Par définition, il existe $x \in A$ tel que $z = f(x)$.

Comme $x \in A$, on a $y = g(z) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) \in (g \circ f)^{\rightarrow}(A)$.

Donc $(g \circ f)^{\rightarrow}(A) \supseteq g^{\rightarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$.

Finalement $\boxed{(g \circ f)^{\rightarrow}(A) = g^{\rightarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)}$.

2.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)^{\leftarrow}(A) &\iff (g \circ f)(x) \in A \iff g\big(f(x)\big) \in A \\ &\iff f(x) \in g^{\leftarrow}(A) \iff x \in f^{\leftarrow}\big(g^{\leftarrow}(A)\big) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(g \circ f)^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}\big(g^{\leftarrow}(A)\big)}$.

CQFD.

Quand nous avons abordé l'union et l'intersection de deux ensembles, nous avons pu voir qu'il s'agissait d'opérations idempotentes, commutatives et associatives. En ce qui concerne la composition d'applications, l'idempotence et la commutativité ne sont pas garanties.

Définition 23 (Idempotence et applications qui commutent)

Soient f et g deux applications.

1. On dit que f est **idempotente** si et seulement si $f \circ f = f$.
2. On dit que f et g **commutent** si et seulement si $g \circ f = f \circ g$.

Exemple :

1. Prenons l'application $f(x) = 2x$. On a alors $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = 2(2x) = 4x$, qui n'est pas toujours égal à $f(x) = 2x$ donc $f \circ f \neq f$ et donc f n'est pas idempotente.
2. Prenons en plus l'application $g(x) = x^2$. On a $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = (2x)^2 = 4x^2$ qui n'est pas toujours égal à $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2x^2$ donc $g \circ f \neq f \circ g$ et donc f et g ne commutent pas.
3. En revanche pour un ensemble E donné on a $\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$ donc l'identité d'un ensemble est idempotente.

Si l'idempotence et la commutativité de la composition ne sont pas pas garanties, nous avons heureusement bien l'associativité.

Proposition 52 (Associativité de la composition)

Soient f, g et h trois applications.
On a alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

On dit que la composition est **associative**.

Démonstration

• Les applications $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ ont le même domaine.

En effet, par définition on a $\mathrm{dom}\big((h \circ g) \circ f\big) = f^{\leftarrow}(\mathrm{dom}(h \circ g)) = f^{\leftarrow}\Big(g^{\leftarrow}(\mathrm{dom}(h))\Big)$.

De même, on a $\mathrm{dom}\big(h \circ (g \circ f)\big) = (g \circ f)^{\leftarrow}(\mathrm{dom}(h)) \underset{51 \text{ p. } 64}{=} f^{\leftarrow}\Big(g^{\leftarrow}(\mathrm{dom}(h))\Big)$.

• Montrons que les deux applications coïncident sur ce domaine commun.

Soit $x \in f^{\leftarrow}\Big(g^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(h)\big)\Big)$.

On a alors

$$\begin{aligned}\big((h \circ g) \circ f\big)(x) &= (h \circ g)\big(f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h\big((g \circ f)(x)\big) \\ &= \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)\end{aligned}$$

et donc $\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$.

Donc $\forall x \in f^{\leftarrow}\Big(g^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(h)\big)\Big), \big((h \circ g) \circ f\big)(x) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$.

On a donc $\boxed{(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$ d'après la proposition 40 page 47.

CQFD.

Remarque :
Comme il y a égalité entre les applications $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$, on écrira parfois $h \circ g \circ f$ pour désigner l'une ou l'autre puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

2.6 Applications inversibles

À la manière du 0 pour l'addition des nombres et du 1 pour la multiplication des nombres, l'application identité (pour un ensemble bien choisi) joue un rôle neutre pour la composition des applications. Bien évidemment, l'ensemble en question dépend de l'application.

Proposition 53 (L'identité est neutre pour la composition)

Soit f une application.

1. On a $f \circ \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)} = f$.
2. Soit F un ensemble tel que $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.
   On a $\mathrm{id}_F \circ f = f$.

On dit que l'identité est **neutre** pour la composition.

Démonstration

1. Les deux applications ont le même domaine.

En effet, par définition on a $\mathrm{dom}(f \circ \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}{}^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big) = \mathrm{dom}(f)$.

Sur ce domaine, les deux applications coïncident :

Soit $x \in \mathrm{dom}(f)$.

On a alors $(f \circ \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)})(x) = f\big(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x)\big) = f(x)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), (f \circ \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)})(x) = f(x)$.

Donc $\boxed{f \circ \mathrm{id}_{\mathrm{dom}}(f) = f}$ d'après la proposition 40 page 47.

2. Les deux applications ont le même domaine.

En effet, par définition on a $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_F \circ f) = f^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(\mathrm{id}_F)\big) = f^{\leftarrow}(F) = \mathrm{dom}(f)$.

Sur ce domaine, les deux applications coïncident :

Soit $x \in \mathrm{dom}(f)$.

On a alors $(\mathrm{id}_F \circ f)(x) = \mathrm{id}_F\big(f(x)\big) = f(x)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), (\mathrm{id}_F \circ f)(x) = f(x)$.

Donc $\boxed{\mathrm{id}_F \circ f = f}$ d'après la proposition 40 page 47.

CQFD.

De même que chaque nombre dispose d'un opposé pour l'addition, et que chaque nombre non nul possède un inverse pour la multiplication, certaines applications (malheureusement pas toutes) possède un inverse pour la composition. Comme la composition n'est pas commutative, il faut donc préciser si l'on parle d'un inverse à gauche ou d'un inverse à droite.

Définition 24 (Application inversible)

Soit f une application.

1. On dit que f est **inversible à gauche** si et seulement s'il existe une application g de domaine $\mathrm{im}(f)$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.
   On dit alors qu'une telle g est un **inverse à gauche** de f.

2. On dit que f est **inversible à droite** si et seulement s'il existe une application h de domaine $\mathrm{im}(f)$ telle que $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.
   On dit alors qu'une telle h est un **inverse à droite** de f.

3. On dit que f est **inversible** si et seulement si f est inversible à gauche et à droite.

Tout comme pour la composition où nous avons dû préciser son domaine, nous avons imposé un domaine aux potentiels inverses d'une application. En revanche, toujours à la manière de la composition, nous avons certaines informations concernant l'image de potentiels inverses d'une application.

Proposition 54 (Image des inverses d'une application)

Soient f et g deux applications.

1. Si g est un inverse à gauche de f, alors $\mathrm{im}(g) = \mathrm{dom}(f)$.
2. Si g est un inverse à droite de f, alors $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

Ainsi, si g est un inverse à gauche ou un inverse à droite de f, alors $g : \mathrm{im}(f) \longrightarrow \mathrm{dom}(f)$.

Démonstration

1. Supposons que g est un inverse à gauche de f.

Raisonnons par double inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x \in \mathrm{im}(g)$.

Il existe donc $y \in \mathrm{dom}(g)$ tel que $x = g(y)$.

Comme g est un inverse à gauche de f, on a $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{im}(f)$.

On a donc $y \in \mathrm{im}(f)$ donc il existe $z \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(z)$.

Comme g est un inverse à gauche de f, on a $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

On a alors $x = g(y) = g\big(f(z)\big) = (g \circ f)(z) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(z) = z$.

Ainsi $x = z$ et comme $z \in \mathrm{dom}(f)$, on a donc $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Donc $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Posons $y := f(x)$: on a alors $y \in \mathrm{im}(f)$.

Comme g est un inverse à gauche de f, on a $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{im}(f)$.

On a donc $y \in \mathrm{dom}(g)$.

Considérons $z := g(y)$: on a alors $z \in \mathrm{im}(g)$.

Comme g est un inverse à gauche de f, on a $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

On a alors $x = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z$.

Ainsi $x = z$ et comme $z \in \mathrm{im}(g)$, on a donc $x \in \mathrm{im}(g)$.

Donc $\mathrm{im}(g) \supseteq \mathrm{dom}(f)$.

Finalement $\boxed{\mathrm{im}(g) = \mathrm{dom}(f)}$.

2. Supposons que g est un inverse à droite de f.

Soit $x \in \mathrm{im}(g)$.

Il existe alors $y \in \mathrm{dom}(g)$ tel que $x = g(y)$.

Comme g est un inverse à droite de f, on a $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{im}(f)$ et donc $y \in \mathrm{im}(f)$.

Comme g est un inverse à droite de f, on a $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.

On a donc $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(f \circ g) = g^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big)$.

Donc $y \in g^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big)$, donc $g(y) \in \mathrm{dom}(f)$ et comme $x = g(y)$, on a $x \in \mathrm{dom}(f)$.

On a donc $\boxed{\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)}$.

CQFD.

Nous parlons depuis tout à l'heure d'inverse sans même être sûr que cela puisse exister. Pour les inverses à droite, c'est toujours le cas grâce à l'axiome du choix, mais sans garantie d'unicité. Pour les inverses à gauche, il y a unicité mais sans garantie d'existence.
C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 55 (Existence et unicité des inverses)

Soit f une application.

1. f admet au plus un inverse à gauche.
2. f admet au moins un inverse à droite.
3. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f est inversible à gauche.
(b) f admet un unique inverse à droite.
(c) f est inversible.

Dans ce cas-là, l'unique inverse à gauche de f est aussi l'unique inverse à droite de f, que l'on appelle simplement **inverse** de f et que l'on note f^{-1}.
On dit aussi que f^{-1} est la **réciproque** de f.

Démonstration

1. Supposons que f est inversible à gauche.

Soient g et h deux inverses à gauche de f.

Par définition g et h ont le même domaine, à savoir $\mathrm{im}(f)$.

Soit $y \in \mathrm{im}(f)$.

Par définition, il existe $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$.

On a alors $g(y) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x) = (h \circ f)(x)$
$= h\big(f(x)\big) = h(y)$.

Donc pour tout $y \in \mathrm{im}(f)$, on a $g(y) = h(y)$.

On a donc $g = h$ d'après la proposition 40 page 47.

Donc $\boxed{\text{si } f \text{ est inversible à gauche, alors } f \text{ admet un unique inverse à gauche}}$.

2. Deux cas se présentent à nous : ou bien $\mathrm{im}(f) = \varnothing$, ou bien $\mathrm{im}(f) \neq \varnothing$.

• Supposons que $\mathrm{im}(f) = \varnothing$.

On a alors $f = \varnothing$ d'après la proposition 41 page 48.

Donc $f \circ \varnothing = \varnothing \circ \varnothing = \varnothing = \mathrm{id}_\varnothing = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$ donc $\boxed{f \text{ est inversible à droite}}$.

• Supposons désormais que $\mathrm{im}(f) \neq \varnothing$.

Construisons une application de domaine $\mathrm{im}(f)$ qui est inverse à droite de f.

Soit $y \in \mathrm{im}(f)$.

Posons $A_y := f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big) = \big\{x \in \mathrm{dom}(f) \bigm| y = f(x)\big\}$.

Comme $y \in \mathrm{im}(f)$, il existe $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$ donc $x \in A_y$.

Ainsi $A_y \neq \varnothing$ et comme $A_y \subseteq \mathrm{dom}(f)$, on a $A_y \in \mathscr{P}\big(\mathrm{dom}(f)\big)\backslash\{\varnothing\}$.

D'après **l'axiome du choix** – version ensemble des parties, il existe une application φ de domaine $\mathscr{P}\big(\mathrm{dom}(f)\big)\backslash\{\varnothing\}$ telle que $\forall A \in \mathscr{P}\big(\mathrm{dom}(f)\big)\backslash\{\varnothing\}, \varphi(A) \in A$.

En particulier, pour tout $y \in \mathrm{im}(f)$, on a $\varphi(A_y) \in A_y$, c'est-à-dire $f\big(\varphi(A_y)\big) = y$.

Posons alors $h := \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{im}(f) & \longrightarrow & ? \\ y & \longmapsto & \varphi(A_y) \end{array}\right)$.

Montrons que h est un inverse à droite de f, c'est-à-dire $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.

► Par définition, pour tout $y \in \mathrm{im}(f)$, on a $h(y) = \varphi(A_y) \in A_y \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

Donc $\mathrm{im}(h) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ et donc $\mathrm{dom}(f \circ h) = h^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big) = \mathrm{dom}(h) = \mathrm{im}(f)$.

Ainsi, on a bien l'égalité des domaines de $f \circ h$ et de $\mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.

► On a égalité des deux applications sur ce domaine $\mathrm{im}(f)$.

En effet, pour tout $y \in \mathrm{im}(f)$, on a

$$(f \circ h)(y) = f\big(h(y)\big) = f\big(\varphi(A_y)\big) = y = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)$$

Donc $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$ d'après la proposition 40 page 47.

Donc h est un inverse à droite de f, et donc $\boxed{f \text{ est inversible à droite}}$.

3. Montrons que (a)⇔(b) et que (a)⇔(c).

$\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$

Supposons que f est inversible à gauche.

Soit g un inverse à gauche de f.

D'après 2, f admet au moins un inverse à droite.

Soit h et h' deux inverses à droite de f.

On a alors $\mathrm{im}(h) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ et $\mathrm{im}(h') \subseteq \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 54 p. 67.

On a donc $h = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)} \circ h$ et $h' = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)} \circ h'$ d'après la prop. 53 p. 66.

On a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
h &= \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)} \circ h \\
&= (g \circ f) \circ h \text{ car } g \text{ est un inverse à gauche de } f \\
&= g \circ (f \circ h) \text{ par associativité de la composition} \\
&= g \circ \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)} \text{ car } h \text{ est un inverse à droite de } f \\
&= g \circ (f \circ h') \text{ car } h' \text{ est un inverse à droite de } f \\
&= (g \circ f) \circ h' \text{ par associativité de la composition} \\
&= \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)} \circ h' \text{ car } g \text{ est un inverse à gauche de } f \\
&= h'
\end{aligned}$$

Donc $h = h'$.

Donc f admet un unique inverse à droite.

Ainsi si f est inversible à gauche, alors f admet un unique inverse à droite.

$\boxed{\text{(a)} \Leftarrow \text{(b)}}$

Supposons que f admet un unique inverse à droite h.

Montrons que h est alors un inverse à gauche de f, ce qui permettra au passage de démontrer que l'unique inverse à gauche est égal à l'unique inverse à droite dans le cas où (a), (b) ou (c) est vraie.

Supposons par l'absurde que $h \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Comme h est un inverse à droite de f, on a $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{im}(f)$.

On a donc $\mathrm{dom}(h \circ f) = f^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(h)\big) = f^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big) = \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)})$.

Ainsi $h \circ f$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$ ont le même domaine sans être égale.

Il existe donc $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $(h \circ f)(x_0) \neq \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x_0) = x_0$.

Considérons alors $g := \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{im}(f) & \longrightarrow & \mathrm{dom}(f) \\ y & \longmapsto & \begin{cases} h(y) & \text{si } y \neq f(x_0) \\ x_0 & \text{si } y = f(x_0) \end{cases} \end{array} \right)$.

Montrons que $h \neq g$ et que g est pourtant un inverse à droite de f, ce qui contredira alors l'unicité supposée.

► En effet $h\big(f(x_0)\big) = (h \circ f)(x_0) \neq x_0$ alors que $g\big(f(x_0)\big) = x_0$ par définition de g, ce qui montre que $h \neq g$.

► Par définition de g, on a $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{im}(f)$, et pour tout $y \in \mathrm{im}(f)$ tel que $y \neq f(x_0)$ on a $g(y) = h(y)$ donc

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f\big(g(y)\big) = f\big(h(y)\big) = (f \circ h)(y) \\ &= \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y) \text{ car } h \text{ est un inverse à droite de } f\end{aligned}$$

et pour $y = f(x_0)$ on a $g(y) = x_0$ donc

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f\big(g(y)\big) = f(x_0) \\ &= y \text{ par définition de } y \\ &= \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)\end{aligned}$$

donc dans tous les cas $(f \circ g)(y) = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)$ et donc $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.

Ainsi g est un inverse à droite de f, ce qui est absurde.

Par l'absurde, on en conclut que $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Ainsi $\boxed{h \text{ est aussi l'unique inverse à gauche de } f}$.

En particulier $\boxed{f \text{ est inversible à gauche}}$.

Donc si f admet un unique inverse à droite, alors f est inversible à gauche.

Dans ce cas-là, l'unique inverse à droite de f est aussi l'unique inverse à gauche de f.

$\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(c)}}$ Supposons que f est inversible à gauche.

D'après 2, f est toujours inversible à droite.

Étant inversible des deux côtés, $\boxed{f \text{ est inversible}}$ par définition.

$\boxed{\text{(a)}\Leftarrow\text{(c)}}$ Supposons que f est inversible.

En particulier par définition, $\boxed{f \text{ est inversible à gauche}}$.

CQFD.

Remarque :

1. Soit f une application inversible. Comme $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$, pour tout $x \in \mathrm{dom}(f)$ et tout $y \in \mathrm{im}(f)$, on a $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ et $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$.
2. Soit f une application inversible, $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $y \in \mathrm{im}(f)$.
On a l'équivalence $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$.
En effet, il suffit dans un sens d'appliquer f^{-1} de chaque côté, et dans l'autre sens d'appliquer f de chaque côté.
3. Pour tout ensemble E, on a $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) = E = \mathrm{im}(\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$ donc id_E est inversible avec $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$.

Proposition 56 (Involution du passage à l'inverse)

Soit f une application inversible.
Alors f^{-1} est aussi inversible et on a $(f^{-1})^{-1} = f$.
On dit que le passage à l'inverse est **involutif**.

Démonstration

Comme f est inversible, on a $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$ par définition de f^{-1}.

Or par définition de f^{-1}, on a $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$.

On a aussi $\mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 54 p. 67.

On a donc $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f^{-1})}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f^{-1})}$.

Donc $\boxed{f^{-1} \text{ est inversible et } f \text{ est l'inverse de } f^{-1}}$.

CQFD.

Proposition 57 (Images directe et réciproque par l'inverse)

Soient f une application inversible et A un ensemble.

1. On a $(f^{-1})^{\rightarrow}(A) = f^{\leftarrow}(A)$.
2. On a $(f^{-1})^{\leftarrow}(A) = f^{\rightarrow}(A)$.

Démonstration

1. Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in (f^{-1})^{\rightarrow}(A) &\iff \exists y \in A, x = f^{-1}(y) \\ &\iff \exists y \in A, f(x) = y \\ &\iff f(x) \in A \\ &\iff x \in f^{\leftarrow}(A) \end{aligned}$$

D'où l'égalité $\boxed{(f^{-1})^{\rightarrow}(A) = f^{\leftarrow}(A)}$.

2. La propriété 1 est vraie pour toute application inversible f.

Elle est en particulier vraie pour f^{-1} puisque celle-ci est elle-même inversible d'après la proposition 56 page 72, avec f pour inverse.

On en conclut $\boxed{f^{\rightarrow}(A) = (f^{-1})^{\leftarrow}(A)}$.

CQFD.

La composition se comporte relativement bien avec la notion d'inversibilité, comme le montre la proposition suivante. Sa démonstration est un peu lourde, aussi le lecteur pourra en retrouver une plus simple avec la notion d'injectivité, via la proposition 60 page 78.

Proposition 58 (Inverse de la composition)

Soient f et g deux applications.

1. Si f et g sont inversibles alors $g \circ f$ est inversible.
   Dans ce cas-là, on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
   On dit que le passage à l'inverse est **contravariant** par rapport à la composition.
2. Réciproquement, supposons que $g \circ f$ est inversible.
   (a) Si $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ alors f est inversible.
   (b) Si $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$ alors g est inversible.

Démonstration

1. Supposons que f et g sont inversibles.

Montrons que $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g \circ f)}$.

• On a bien égalité des domaines.

En effet,

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}(f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f) \\ &= \mathrm{dom}(f^{-1} \circ \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g)} \circ f) \text{ par définition de } g^{-1} \\ &= f^{\leftarrow}\Big(\mathrm{dom}\big(f^{-1} \circ \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g)}\big)\Big) \text{ par définition de la composition} \end{aligned}$$

$$= f^{\leftarrow}\Big(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g)}{}^{\leftarrow}\Big[\mathrm{dom}\left(f^{-1}\right)\Big]\Big) \text{ par définition de la composition}$$
$$= f^{\leftarrow}\Big(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g)}{}^{\leftarrow}\Big[\mathrm{im}(f)\Big]\Big) \text{ par définition de } f^{-1}$$
$$= f^{\leftarrow}\Big(\mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{im}(f)\Big]\Big) = f^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(g)\big)$$
$$= \mathrm{dom}(g \circ f) \text{ par définition de la composition}$$
$$= \mathrm{dom}(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g\circ f)})$$

• Pour tout $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$, on a alors

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f)(x) &= f^{-1}\Big(g^{-1}\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\Big)\\ &= f^{-1}\Big(f(x)\Big) = x\\ &= \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g\circ f)}(x)\end{aligned}$$

Donc $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g\circ f)}$ d'après la proposition 40 page 47.

• Ce que l'on vient de montrer est vrai pour toutes applications f et g inversibles.
C'est en particulier vrai f^{-1} et g^{-1} puisqu'elles sont elles aussi inversibles d'après la proposition 56 page 72, avec $(f^{-1})^{-1} = f$ et $(g^{-1})^{-1} = g$.
On en conclut donc par le même raisonnement que $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f^{-1}\circ g^{-1})}$.
Or on a

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(f^{-1} \circ g^{-1}) &= (g^{-1})^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(f^{-1})\big) \text{ par définition de la composition}\\ &= (g^{-1})^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big) \text{ par définition de } f^{-1}\\ &= g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big) \text{ d'après la prop. 57 p. 72}\\ &= \mathrm{im}(g \circ f) \text{ d'après la prop. 50 p. 63}\end{aligned}$$

Ainsi, on a donc que $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(g\circ f)}$.
Comme on a aussi $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g\circ f)}$, on en conclut que $g \circ f$ est inversible d'inverse $f^{-1} \circ g^{-1}$.

2. Supposons que $g \circ f$ est inversible.
(a) Supposons que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$.
On a donc $\mathrm{dom}(g \circ f) = f^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(g)\big) = \mathrm{dom}(f)$.
Or $g \circ f$ est inversible donc $(g \circ f)^{-1} \circ g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g\circ f)} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.
Ainsi en posant $h := (g \circ f)^{-1} \circ g$ on a $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.
Ainsi h est potentiellement inverse à gauche de f et il reste à montrer que $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{im}(f)$.

Or on a

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(h) &= \mathrm{dom}\big((g\circ f)^{-1}\circ g\big) \text{ par définition de } h\\ &= g^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(g\circ f)^{-1}\big) \text{ par définition de la composition}\\ &= g^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(g\circ f)\big) \text{ par définition de l'inverse}\\ &= g^{\leftarrow}\Big(g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)\Big) \text{ d'après la prop. 50 p. 63}\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{im}(f)\subseteq\mathrm{dom}(g)$, on peut dire que $\mathrm{im}(f)\subseteq g^{\leftarrow}\Big(g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)\Big)$ d'après la proposition 47 page 58 et donc $\mathrm{im}(f)\subseteq\mathrm{dom}(h)$, mais malheureusement l'inclusion réciproque n'est pas garantie. Cela nous incite cependant à poser $h' := h\circ\mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.
En effet, on a $\mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}\circ f = f$ par neutralité de l'identité.
On a donc $h'\circ f = h\circ\mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}\circ f = h\circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$ d'après ce qui précède.
Ainsi h' est un candidat pour être inverse à gauche de f, et il a le bon domaine puisque

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(h') &= \mathrm{dom}(h\circ\mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}) \text{ par définition de } h'\\ &\mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}{}^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(h)\big) \text{ par définition de la composition}\\ &= \mathrm{im}(f)\cap\mathrm{dom}(h) \text{ par définition de l'identité}\\ &= \mathrm{im}(f) \text{ car on a montré que } \mathrm{im}(f)\subseteq\mathrm{dom}(h)\end{aligned}$$

et donc h' est un inverse à gauche de f.
Et donc $\boxed{f \text{ est inversible à gauche}}$.

(b) Supposons que $\mathrm{im}(f)=\mathrm{dom}(g)$.
En particulier $\mathrm{im}(f)\subseteq\mathrm{dom}(g)$ donc f est inversible d'après (a).
Comme f est inversible, f^{-1} l'est aussi d'après la proposition 56 page 72.
Comme $g\circ f$ et f^{-1} sont inversibles, $g\circ f\circ f^{-1}$ est inversible d'après 1.
Or on a $g\circ f\circ f^{-1} = g\circ\mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)} = g\circ\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g)} = g$ par définition de f^{-1}, par l'hypothèse $\mathrm{im}(f)=\mathrm{dom}(g)$ et par neutralité de l'identité.
Donc $\boxed{g \text{ est inversible}}$.
CQFD.

2.7 Injection, surjection et bijection

Intéressons-nous à une notion centrale en mathématiques : celle d'injectivité. Une application est injective lorsqu'elle n'associe pas la même image à deux antécédents différents : toute image a son unique antécédent.

Définition 25 (Injection)

Soit f une application.
On dit que f est **injective** si et seulement si pour tout x et x' dans $\mathrm{dom}(f)$ on a

$$f(x) = f(x') \implies x = x'$$

On note alors $f : \mathrm{dom}(f) \hookrightarrow ?$.
Si F est un ensemble tel que $\mathrm{im}(f) \subseteq F$, on note aussi $f : \mathrm{dom}(f) \hookrightarrow F$.
On dit alors que f est une **injection** de $\mathrm{dom}(f)$ dans F.

Exemple :
Pour tout ensemble E, l'identité id_E est injective par définition.

On peut se rendre compte via la proposition suivante que l'injectivité est la même chose que l'inversibilité à gauche.

Proposition 59 (Injectivité et inversibilité à gauche)

Soit f une application.
Alors f est injective si et seulement si f est inversible à gauche.

Démonstration

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que f est injective.

Supposons que $f = \varnothing$.

Alors $\varnothing \circ f = \varnothing \circ \varnothing = \varnothing = \mathrm{id}_\varnothing = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(\varnothing)} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Donc f est inversible à gauche.

Supposons à présent que $f \neq \varnothing$.

On a donc $\mathrm{im}(f) \neq \varnothing$ d'après la proposition 41 page 48.

• Construisons un inverse à gauche de f.

Soit $y \in \mathrm{im}(f)$.

Considérons $A_y := \left\{x \in \mathrm{dom}(f) \;\middle|\; y = f(x)\right\}$.

Alors A_y est un singleton.

En effet, comme $y \in \mathrm{im}(f)$, on a $A_y \neq \varnothing$.

Soit alors $x_y \in A_y$: on a donc $\{x_y\} \subseteq A_y$.

Soit $x \in A_y$.

Par définition, on a $f(x) = y = f(x_y)$.

Or f est injective par hypothèse.

On a donc $x = x_y$ et donc $x \in \{x_y\}$.

On a donc $\{x_y\} \supseteq A_y$ et donc $\{x_y\} = A_y$.

Ainsi, x_y est l'unique élément de A_y.

Posons alors $g := \begin{pmatrix} \mathrm{im}(f) & \longrightarrow & ? \\ y & \longmapsto & x_y \end{pmatrix}$.

• Montrons que g est un inverse à gauche de f.

On a $\mathrm{dom}(g \circ f) = f^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(g)\big) = f^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big) = \mathrm{dom}(f)$.

Ainsi $g \circ f$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$ ont le même domaine.

Soit $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Par définition, $x \in A_{f(x)}$ et c'en est le seul élément par ce qui précède.

Donc par définition de g, on a $g\big(f(x)\big) = x$.

Ainsi $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = x = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$ d'après la proposition 40 page 47.

Donc f est inversible à gauche.

Donc $\boxed{\text{si } f \text{ est injective alors } f \text{ est inversible à gauche}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que f est inversible à gauche.

En particulier f est inversible d'après la proposition 55 page 68.

Soient x et x' dans $\mathrm{dom}(f)$.

Supposons que $f(x) = f(x')$.

On a donc $f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}\big(f(x')\big)$.

Donc $x = x'$.

Donc $f(x) = f(x') \implies x = x'$.

Donc f est injective.

Donc $\boxed{\text{si } f \text{ est inversible à gauche alors } f \text{ est injective}}$.

CQFD.

Remarque :
D'après la proposition 55 page 68, il y a équivalence entre l'inversibilité à gauche et l'inversibilité tout court. On en déduit donc que l'injectivité est équivalente à l'inversibilité tout court.

Comme nous l'avons vu, injectivité et inversibilité sont synonymes. Nous pouvons énoncer la version "injectivité" de la proposition 58 page 73, c'est-à-dire que la composition se comporte assez bien vis à vis de l'injectivité. À ce titre, la preuve de cette proposition est plus simple que son équivalente version "inversibilité".

Proposition 60 (Injectivité et composition)

Soient f et g deux applications.

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Réciproquement, supposons que $g \circ f$ est injective.
   (a) Si $\operatorname{im}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$ alors f est injective.
   (b) Si $\operatorname{im}(f) = \operatorname{dom}(g)$ alors g est injective.

Démonstration

En exploitant l'équivalence entre injectivité et l'inversibilité, et en utilisant la proposition 58 page 73, on a immédiatement le résultat souhaité. On se propose ici de le démontrer directement.

1. Supposons que f et g sont injectives.

Soient x et x' dans $\operatorname{dom}(g \circ f)$.

Supposons que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

On a donc $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$.

Or g est injective par hypothèse donc $f(x) = f(x')$.

Or f est injective par hypothèse donc $x = x'$.

Donc si $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ alors $x = x'$.

Donc $\boxed{g \circ f \text{ est injective}}$.

2. Supposons que $g \circ f$ est injective.

(a) Supposons que $\operatorname{im}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$.

Soient x et x' dans $\operatorname{dom}(f)$.

Supposons que $f(x) = f(x')$.

Comme $f(x) \in \operatorname{im}(f)$ et $\operatorname{im}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$, on a $f(x) \in \operatorname{dom}(g)$.

On a donc $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$.

Autrement dit, on a $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

Or $g \circ f$ est injective par hypothèse.

Donc $x = x'$.

Donc si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$.

Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.

(b) Supposons que $\operatorname{im}(f) = \operatorname{dom}(g)$.

Soient y et y' dans $\operatorname{dom}(g)$.

Supposons que $g(y) = g(y')$.

Par hypothèse on a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$.

Donc comme y et y' sont dans $\mathrm{dom}(g)$, y et y' sont dans $\mathrm{im}(f)$.

Il existe donc x et x' dans $\mathrm{dom}(f)$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

Or par hypothèse on a $g(y) = g(y')$ donc $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$.

Autrement dit on a $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

Or $g \circ f$ est injective par hypothèse.

Donc $x = x'$ et donc $y = f(x) = f(x') = y'$.

Donc si $g(y) = g(y')$ alors $y = y'$.

Donc $\boxed{g \text{ est injective}}$.

CQFD.

Nous avons vu lors de la proposition 45 page 55 qu'étant donnés une application f et deux ensembles A et B, on avait toujours $f^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$ mais que l'inclusion réciproque n'était pas nécessairement vraie. En fait, c'est l'injectivité qui caractérise l'inclusion réciproque.

Proposition 61 (Injection, image directe, intersection)

Soit f une application.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. Pour tout ensembles A et B, on a $f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

Démonstration

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que f est injective.

Soient A et B deux ensembles.

Soit $y \in f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

On a donc $y \in f^{\rightarrow}(A)$ et $y \in f^{\rightarrow}(B)$.

Il existe donc $a \in A$ et $b \in B$ tels que $f(a) = y = f(b)$.

Or f est injective par hypothèse donc $a = b$.

On a donc $a \in B$ et comme $a \in A$ on a $a \in A \cap B$.

Et donc comme $y = f(a)$ on a $y \in f^{\rightarrow}(A \cap B)$.

Donc $f^{\rightarrow}(A \cap B) \supseteq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

On a donc $f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$ d'après la proposition 45 page 55.

Donc $\boxed{\text{pour tout ensembles } A \text{ et } B \text{ on a } f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)}$.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

Supposons que pour tout ensembles A et B on a $f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

Soient x et x' dans $\mathrm{dom}(f)$.

Supposons que $f(x) = f(x')$.

On a alors

$$\begin{aligned} f^{\rightarrow}\big(\{x\} \cap \{x'\}\big) &= f^{\rightarrow}\big(\{x\}\big) \cap f^{\rightarrow}\big(\{x'\}\big) \text{ par hypothèse} \\ &= \big\{f(x)\big\} \cap \big\{f(x')\big\} \text{ par définition de l'image directe} \\ &= \big\{f(x)\big\} \cap \big\{f(x)\big\} \text{ puisque } f(x) = f(x') \\ &= \big\{f(x)\big\} \end{aligned}$$

En particulier $f(x) \in f^{\rightarrow}\big(\{x\} \cap \{x'\}\big)$ donc $f^{\rightarrow}\big(\{x\} \cap \{x'\}\big) \neq \varnothing$.

Donc $\{x\} \cap \{x'\} \neq \varnothing$ et donc $x = x'$.

Donc si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$.

Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.

CQFD.

La notion qui suit est celle de surjectivité. Généralement la notion de surjectivité se place dans le formalisme où les applications nécessitent un ensemble d'arrivée donné pour être définies. On dit alors qu'une application est surjective si et seulement si tout élément de son ensemble d'arrivée est atteint par au moins un antécédent par l'application.

Dans notre cas, comme nous l'avons dit nous n'avons pas adopté de formalisme nécessitant d'ensemble d'arrivée pour définir les applications. Ainsi ici la notion de surjectivité sera toujours relative à un ensemble donné.

Définition 26 (Surjection)

Soient f une application et F un ensemble.
On dit que f est **surjective dans** F si et seulement si $\mathrm{im}(f) = F$.
On note alors $f : \mathrm{dom}(f) \twoheadrightarrow F$.
On dit aussi que f est une **surjection** de $\mathrm{dom}(f)$ dans F.

Proposition 62 (Surjection et composition)

Soient f et g deux applications.
Si f est surjective dans $\mathrm{dom}(g)$ alors $g \circ f$ est surjective dans $\mathrm{im}(g)$.

Démonstration

Supposons que f est surjective dans $\mathrm{dom}(g)$.

On sait déjà que $\mathrm{im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{im}(g)$ grâce à la proposition 50 page 63.

Soit $z \in \mathrm{im}(g)$.

Par définition il existe $y \in \mathrm{dom}(g)$ tel que $z = g(y)$.

Or f est surjective dans $\mathrm{dom}(g)$ par hypothèse.

On a donc $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$ et donc $y \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$.

On a alors $z = g(y) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$.

Donc $z \in \mathrm{im}(g \circ f)$.

On a donc $\mathrm{im}(g \circ f) \supseteq \mathrm{im}(g)$ et donc $\mathrm{im}(g \circ f) = \mathrm{im}(g)$.

Ainsi $\boxed{g \circ f \text{ est surjective dans } \mathrm{im}(g)}$.

CQFD.

Enfin, la dernière de ces trois notions fondamentales est celle-ci de bijectivitié. Il s'agit simplement de la conjonction de l'injectivité et de la surjectivité. Ainsi, comme dans notre formalisme la notion de surjectivité est relative à un ensemble donné, il en va de même pour la notion de bijectivité.

Définition 27 (Bijection)

Soient f une application et F un ensemble.

1. On dit que f est **bijective dans** F si et seulement si
   (a) f est injective
   (b) et f est surjective dans F.

   On note alors $f : \mathrm{dom}(f) \xrightarrow{\sim} F$.
   On dit aussi que f est une **bijection** de $\mathrm{dom}(f)$ dans F.
2. On appelle **permutation** de F toute bijection de F dans F.

Remarque :

1. Étant donnés deux ensembles E et F, on notera parfois $\mathrm{Bij}(E \to F)$ l'ensemble des bijections de E dans F, et $\mathrm{Bij}(E)$ l'ensemble des permutations de E.
2. On a vu précédemment que l'injectivité passait à la composition (proposition 60 page 78), et qu'il en était de même pour la surjectivité (proposition 62 page 80), si bien qu'il en est de même pour la bijection. Plus précisément si E, F et G sont trois ensembles, que l'on a $f : E \xrightarrow{\sim} F$ et $g : F \xrightarrow{\sim} G$ alors $g \circ f : E \xrightarrow{\sim} G$.
   En particulier si $f \in \mathrm{Bij}(E)$ et $g \in \mathrm{Bij}(E)$ alors $g \circ f \in \mathrm{Bij}(E)$.

2.8 Restrictions et prolongements

Parfois quand on dispose d'une application, on peut vouloir s'intéresser à celle-ci uniquement au départ d'un ensemble plus petit que son domaine. On parle alors de restreindre le domaine de l'application, de façon à former une autre application.

Définition 28 (Restriction)

Soient f une application et $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$.
On appelle **restriction** de f à A l'application

$$f_{|A} := \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & ? \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$$

Remarque :

1. On a évidemment $f_{|\mathrm{dom}(f)} = f$.
2. Pour f et g deux applications, on dit que f est une **restriction** de g si et seulement si $g_{|\mathrm{dom}(f)} = f$. On dit aussi que g est un **prolongement** de f.
   C'est tout simplement équivalent à $f \subseteq g$.

Le fait de restreindre une application correspond simplement au fait de la composer par l'identité de l'ensemble sur lequel on veut la restreindre.

Proposition 63 (Restriction et composition avec l'identité)

Soient f une application et $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$.
On a $f_{|A} = f \circ \mathrm{id}_A$.

Démonstration

Les deux applications ont bien le même domaine.

En effet par définition on a $\mathrm{dom}(f_{|A}) = A$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(f \circ \mathrm{id}_A) &= \mathrm{id}_A{}^{\leftarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big) \text{ par définition de la composition}\\ &= A \cap \mathrm{dom}(f) \text{ par définition de l'identité}\\ &= A \text{ car } A \subseteq \mathrm{dom}(f)\end{aligned}$$

De plus, pour tout $a \in A$ on a $f_{|A}(a) = f(a) = f\big(\mathrm{id}_A(a)\big) = (f \circ \mathrm{id}_A)(a)$.

Donc $\boxed{f_{|A} = f \circ \mathrm{id}_A}$ d'après la proposition 40 page 47.

CQFD.

Remarque :
On en conclut que si f est une application et A et B deux ensembles tels que $B \subseteq A \subseteq \mathrm{dom}(f)$, alors $(f_{|A})_{|B} = f_{|B}$.
En effet, on a $(f_{|A})_{|B} = f \circ \mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_B = f \circ \mathrm{id}_B = f_{|B}$.

Proposition 64 (Restriction et injectivité)

Soient f une application et $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$.
Si f est injective alors $f_{|A}$ est injective.

Démonstration

Supposons que f est injective.

Soient a et a' dans A.

Supposons que $f_{|A}(a) = f_{|A}(a')$.

Par définition de $f_{|A}$ on a donc $f(a) = f(a')$.

Or f est injective par hypothèse.

Donc $a = a'$.

Donc si $f_{|A}(a) = f_{|A}(a')$ alors $a = a'$.

Donc $\boxed{f_{|A} \text{ est injective}}$.

CQFD.

Étant données deux applications f et g, on peut se demander s'il existe une application qui soit une restriction à la fois de f et de g. La réponse est toujours oui : il s'agit de leur intersection, quitte à ce que celle-ci soit vide. C'est en fait la plus grande de telles applications.

Proposition 65 (Intersection de deux applications)

Soient f et g deux applications.
Alors $f \cap g$ est une application.

Démonstration

Comme f et g sont des applications, ce sont en particulier des ensembles de couples.

Donc $f \cap g$ est un ensemble de couples.

Soient x, y et y' des ensembles.

Supposons que $x(f \cap g)y$ et $x(f \cap g)y'$.

On a donc $(x, y) \in (f \cap g)$ et $(x, y') \in f \cap g$.

En particulier on a $(x, y) \in f$ et $(x, y') \in f$.

Donc xfy et xfy' et donc $y = y'$ car f est une application.

Donc si $x(f \cap g)y$ et $x(f \cap g)y'$ alors $y = y'$.

Donc $\boxed{f \cap g \text{ est une application}}$.

CQFD.

Remarque :
En ayant en tête que pour deux applications h et k, h est une restriction de k si et seulement si $h \subseteq k$, on en conclut que $f \cap g$ est la plus grande application qui est une restriction commune de f et de g.

À l'inverse, on peut se demander si étant données deux applications f et g, il est possible de les prolonger toutes les deux par une même application. Il semble évident que ce n'est pas toujours le cas, puisqu'après tout si leur domaine s'intersectent, il n'y a pas de raison qu'elles associent la même image pour chaque élément en commun. La définition qui suit permet donc de s'intéresser aux applications qui elles peuvent être simultanément prolongées.

Définition 29 (Applications qui se recollent)

Soient f et g deux applications.
On dit que f et g se recollent si et seulement si

$$\forall x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g), f(x) = g(x)$$

Proposition 66 (Applications qui se recollent - Caractérisation)

Soient f et g deux applications.
Les assertions suivante sont équivalentes :

1. f et g se recollent.
2. $f \cup g$ est une application.
3. Il existe un prolongement commun à f et à g.

Démonstration

On va montrer les implications 1⇒2⇒3⇒1.

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ Supposons que f et g se recollent.

Comme f et g sont des applications, f et g ne contiennent que des couples donc $f \cup g$ ne contient que des couples.

Soient x, y et y' trois ensembles.

Supposons que $x(f \cup g)y$ et $x(f \cup g)y'$.

On a donc $\Big[xfy \text{ ou } xgy\Big]$ et $\Big[xfy' \text{ ou } xgy'\Big]$.

Donc $\Big[xfy \text{ et } xfy'\Big]$ ou $\Big[xfy \text{ et } xgy'\Big]$ ou $\Big[xgy \text{ et } xfy'\Big]$ ou $\Big[xgy \text{ et } xgy'\Big]$.

- Si xfy et xfy' alors comme f est une application on a $y = y'$.
- Si xgy et xgy' alors comme g est une application on a $y = y'$.
- Si xfy et xgy' ou si xgy et xfy' alors $x \in \text{dom}(f)$ et $x \in \text{dom}(g)$.
  On a donc $x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$.
  Or f et g se recollent par hypothèse, donc $f(x) = g(x)$.
  Comme xfy et xgy' ou xgy et xfy' on a donc $y = f(x) = g(x) = y'$ ou $y' = f(x) = g(x) = y$ et donc $y = y'$.

Donc dans tous les cas, on a $y = y'$.

Donc si $x(f \cup g)y$ et $x(f \cup g)y'$ alors $y = y'$.

Donc $\boxed{f \cup g \text{ est une application}}$.

$\boxed{2\Rightarrow 3}$ Supposons que $f \cup g$ est une application.

On a $f \subseteq f \cup g$ et $g \subseteq f \cup g$.

Donc $f \cup g$ prolonge à la fois f et g.

En particulier $\boxed{\text{il existe une application prolongeant à la fois } f \text{ et } g}$.

$\boxed{3\Rightarrow 1}$ Supposons qu'il existe une application h prolongeant à la fois f et g.

Soit $x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$.

On a donc $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $x \in \mathrm{dom}(g)$.

Comme h prolonge f et g, on a $f(x) = h(x) = g(x)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g), f(x) = g(x)$.

Donc $\boxed{f \text{ et } g \text{ se recollent}}$.

CQFD.

3 Familles

Concluons ce chapitre en abordant une autre façon d'envisager les applications : c'est le point de vue des **familles**. Fondamentalement la seule chose qui diffère le point de vue que nous avons adopté jusque là de celui de familles provient de la notation employée, qui est associée à des usages différents, par exemple celle de suites.

3.1 Généralités sur les familles

Définition 30 (Famille, terme et indice)

Soient E un ensemble non vide et I un ensemble.

- Une application $x : I \longrightarrow E$ est parfois aussi appelée **famille** d'éléments de E indexée par I.
- Dans ce cas-là, pour tout $i \in I$ on note x_i plutôt que $x(i)$, on dit que x_i est le $i^{\text{ème}}$ **terme** de x et que i est son **indice**.
- Dans ce cas-là, on note parfois $(x_i)_{i \in I}$ à la place de simplement x.

Remarque :
Dans la notation $(x_i)_{i \in I}$, l'indice i est muet : on peut le remplacer par n'importe quel autre caractère qui n'est pas déjà utilisé. Ainsi, on a $(x_i)_{i \in I} = (x_j)_{j \in I} = (x_k)_{k \in I}$.

Définition 31 (Sous-famille)

Soient I un ensemble et $(x_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.
Toute restriction de $(x_i)_{i \in I}$ est appelée **sous-famille** de $(x_i)_{i \in I}$.

Définition 32 (Deux à deux disjoints et distincts)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

1. On dit que les termes de $(A_i)_{i \in I}$ sont **deux à deux distincts** si et seulement si $(A_i)_{i \in I}$ est injective.
2. On dit que les termes de $(A_i)_{i \in I}$ sont **deux à deux disjoints** si et seulement si pour tout i et j dans I on a
$$i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$$

Remarque :
Soient I et J deux ensembles. Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I et $f : J \longrightarrow I$.
L'application $x \circ f$ est parfois notée $(x_{f(j)})_{j \in J}$.
On dit alors que l'on a effectué un **changement de variable**, dans le sens où l'indiçage n'a plus lieu dans I mais dans J.

Proposition 67 (Changement de variable dans une famille)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
Soient J un ensemble et $f : J \longrightarrow I$.

1. On a toujours $\left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$.
2. Si f est surjective dans I alors $\left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} = \{A_i \mid i \in I\}$.

Démonstration

1.

Soit $x \in \left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\}$.

Il existe donc $j_0 \in J$ tel que $x \in A_{f(j_0)}$.

Posons alors $i_0 := f(j_0)$, de sorte que $x \in A_{i_0}$.

On donc $x \in \{A_i \mid i \in I\}$.

Ainsi on a $\boxed{\left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}}$.

2. Supposons que f est surjective dans I.

Soit $x \in \{A_i \mid i \in I\}$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$.

Or f est surjective dans I donc il existe $j_0 \in I$ tel que $i_0 = f(j_0)$.

Ainsi $x \in A_{f(j_0)}$ et donc $x \in \left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\}$.

On a donc $\left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} \supseteq \{A_i \mid i \in I\}$.

D'après 1, on en déduit que $\boxed{\left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} = \{A_i \mid i \in I\}}$.

CQFD.

3.2 Réunion de familles

Dans la pratique, l'union d'ensembles se fait de deux façons : ou bien par la réunion binaire de deux ensembles (c'est-à-dire celle que nous avons abordée au chapitre 1), ou bien par la réunion des termes d'une famille, ce que nous allons à présent définir.

Définition 33 (Réunion de famille)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
On appelle **réunion** de $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \bigcup \{A_i \mid i \in I\}$$

Remarque :
Dans la notation $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, le i est muet, c'est-à-dire que l'on peut le remplacer par n'importe

quel caractère qui n'est pas déjà utilisé à ce moment-là. Ainsi, on a les égalités suivantes :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in I} A_j = \bigcup_{k\in I} A_k$$

Exemple :

1. On a $\bigcup\limits_{i\in\varnothing} A_i = \varnothing$, $\bigcup\limits_{i\in\{i_0\}} A_i = A_{i_0}$ et $\bigcup\limits_{i\in\{i_1,i_2\}} A_i = A_{i_1} \cup A_{i_2}$.
2. Pour tout ensemble E, on a $\bigcup E = \bigcup\limits_{A\in E} A$ et $E = \bigcup\limits_{x\in E} \{x\}$.

Proposition 68 (Caractérisation de la réunion d'une famille)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
Pour tout ensemble x on a l'équivalence suivante :

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in i, x \in A_i$$

Démonstration

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i\in I} A_i &\iff x \in \bigcup \{A_i \mid i \in I\} \\ &\iff \exists A \in \{A_i \mid i \in I\}, x \in A \\ &\iff \exists i \in I, x \in A_i \end{aligned}$$

D'où l'équivalence en question.

CQFD.

Proposition 69 (Minimalité de la réunion d'une famille)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $\forall i \in I, A_i \subseteq F$.
2. Pour tout ensemble X, si $\forall i \in I, A_i \subseteq X$ alors $F \subseteq X$.

Alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est le seul ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.
On dit que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est **le plus petit** ensemble à contenir tous les termes de $(A_i)_{i\in I}$.

Démonstration

C'est simplement une application directe de la minimalité de la réunion de l'ensemble $\{A_i \mid i \in I\}$. **CQFD**.

Remarque :
On en déduit les choses suivantes :

1. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I, A_i \subseteq A_{i_0}$ alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A_{i_0}$.
2. En particulier on en déduit l'**idempotence** de la réunion : s'il existe un ensemble E tel que $\forall i \in I, A_i = E$ alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = E$.

Proposition 70 (Croissance de la réunion de famille)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

1. Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.
   Si $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$ alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} B_i$.
2. Pour tout $J \subseteq I$ on a $\bigcup\limits_{i \in J} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Démonstration

1. Supposons que $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$.

Soit $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$.

Or par hypothèse on a $A_{i_0} \subseteq B_{i_0}$.

On a donc $x \in B_{i_0}$ et donc $x \in \bigcup\limits_{i \in I} B_i$.

Donc $\boxed{\bigcup\limits_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} B_i}$.

2. Soit $J \subseteq I$.

Par définition on a $\{A_i \mid i \in J\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$.

Donc $\bigcup \{A_i \mid i \in J\} \subseteq \bigcup \{A_i \mid i \in I\}$ par croissance de la réunion.

Et donc $\boxed{\bigcup\limits_{i \in J} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i}$.

CQFD.

Proposition 71 (Réunion de famille et changement de variable)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.
Soient J un ensemble et $f : J \longrightarrow I$.

1. On a toujours $\bigcup\limits_{j \in J} A_{f(j)} \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

2. Si f est surjective dans I alors $\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Démonstration

1. On a $\{A_{f(j)} \mid j \in J\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la proposition 67 page 87.
On a donc $\bigcup \{A_{f(j)} \mid j \in J\} \subseteq \bigcup \{A_i \mid i \in I\}$ par croissance de l'union.
Donc $\boxed{\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i}$.

2. Supposons que f est surjective dans I.
On a alors $\{A_{f(j)} \mid j \in J\} = \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la proposition 67 page 87.
Donc $\bigcup \{A_{f(j)} \mid j \in J\} = \bigcup \{A_i \mid i \in I\}$.
Donc $\boxed{\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i}$.
CQFD.

Proposition 72 (Associativité de la réunion de famille)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
Soient M un ensemble et $(J_m)_{m\in M}$ une famille de partie de I indexée par M.

Si $\bigcup\limits_{m\in M} J_m = I$ alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{m\in M} \bigcup\limits_{i\in J_m} A_i$.

Démonstration

Supposons que $\bigcup\limits_{m\in M} J_m = I$.
Raisonnons par double inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.
Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$.
Or $\bigcup\limits_{m\in M} J_m = I$ par hypothèse donc $i_0 \in \bigcup\limits_{m\in M} J_m$.
Il existe donc $m_0 \in M$ tel que $i_0 \in J_{m_0}$.
Ainsi on a $x \in A_{i_0}$ et $i_0 \in J_{m_0}$.
Donc $x \in \bigcup\limits_{i\in J_{m_0}} A_i$ et donc $x \in \bigcup\limits_{m\in M} \bigcup\limits_{i\in J_m} A_i$.

Donc $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{m\in M} \bigcup\limits_{i\in J_m} A_i$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $x \in \bigcup\limits_{m\in M} \bigcup\limits_{i\in J_m} A_i$.
Il existe donc $m_0 \in M$ tel que $x \in \bigcup\limits_{i\in J_{m_0}} A_i$.

Il existe donc $i_0 \in J_{m_0}$ tel que $x \in A_{i_0}$.

Or $J_{m_0} \subseteq I$ par définition, donc $i_0 \in I$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Donc $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{m \in M} \bigcup_{i \in J_m} A_i$.

Finalement on a bien $\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{m \in M} \bigcup_{i \in J_m} A_i}$.

CQFD.

Proposition 73 (Réunion de famille et images)

Soient I un ensemble, $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I et f une application.

1. On a $f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.
2. On a $f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{\leftarrow}(A_i)$.

Démonstration

1. Raisonnons par double inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Il existe donc $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ tel que $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $y = f(x)$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(A_{i_0})$ et donc $y \in \bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

Donc $f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $y \in \bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $y \in f^{\rightarrow}(A_{i_0})$.

Il existe donc $x \in A_{i_0}$ tel que $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $y = f(x)$.

Or $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ donc $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et donc $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Donc $f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \supseteq \bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

Finalement on a bien $\boxed{f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)}$.

2.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &\iff x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in \bigcup_{i\in I} A_i \\ &\iff x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } \exists i \in I, f(x) \in A_i \\ &\iff \exists i \in I, x \in f^{\leftarrow}(A_i) \\ &\iff x \in \bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(A_i) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(A_i)}$.

CQFD.

Remarque :
Soient I et J deux ensembles et $\left(A_{(i,j)}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille indexée par $I \times J$.
On note parfois $\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i,j)}$ à la place de $\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_{(i,j)}$.
On remarque par définition dans chaque cas qu'alors

$$\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{(i,j)} = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i,j)} = \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{(i,j)}$$

Proposition 74 (Réunion de familles et opérations)

Soient I, J et F trois ensembles.
Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I et $(B_j)_{j\in J}$ une famille indexée par J.

Intersection

1. **Simple distributivité**

   On a $F \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (F \cap A_i)$.

2. **Double distributivité**

   On a $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j)$.

Produit cartésien

3. **Distributivité à gauche et à droite**

   On a $F \times \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (F \times A_i)$ et $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F = \bigcup_{i\in I} (A_i \times F)$.

4. **Double distributivité**

   On a $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \times B_j)$.

Union

5. **Simple distributivité**
   On a $F \cup \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i \in I} (F \cup A_i)$.
6. **Double distributivité**
   Si I et J sont non vide alors $\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right) = \bigcup\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)$.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in F \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &\iff x \in F \text{ et } x \in \bigcup_{i \in I} A_i \\ &\iff x \in F \text{ et } \exists i \in I, x \in A_i \\ &\iff \exists i \in I, (x \in F \text{ et } x \in A_i) \\ &\iff \exists i \in I, x \in F \cap A_i \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} (F \cap A_i) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{F \cap \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i \in I} (F \cap A_i)}$.

2.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) &\iff x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ et } x \in \bigcup_{j \in J} B_j \\ &\iff \exists i \in I, \exists j \in J, x \in A_i \text{ et } x \in B_j \\ &\iff \exists i \in I, \exists j \in J, x \in A_i \cap B_j \\ &\iff x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right) = \bigcup\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j)}$.

3.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in F \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &\iff \exists y \in F, \exists a \in \bigcup_{i \in I} A_i, x = (y, a) \\ &\iff \exists y \in F, \exists i \in I, \exists a \in A_i, x = (y, a) \\ &\iff \exists i \in I, x \in F \times A_i \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} (F \times A_i) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{F \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (F \times A_i)}$.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times F &\iff \exists a \in \bigcup_{i \in I} A_i, \exists y \in F, x = (a, y) \\ &\iff \exists i \in I, \exists a \in A_i, \exists y \in F, x = (a, y) \\ &\iff \exists i \in I, x \in A_i \times F \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \times F) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times F = \bigcup_{i \in I} (A_i \times F)}$.

5.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) &\iff \exists a \in \bigcup_{i \in I} A_i, \exists b \in \bigcup_{j \in J} B_j, x = (a, b) \\ &\iff \exists i \in I, \exists j \in J, \exists a \in A_i, \exists b \in B_j, x = (a, b) \\ &\iff \exists i \in I, \exists j \in J, x \in A_i \times B_j \\ &\iff x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \times B_j) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \times B_j)}$.

6. Supposons que I et J sont non vides.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \\
&\qquad\iff x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ ou } x \in \bigcup_{j\in J} B_j \\
&\qquad\iff \exists i \in I, x \in A_i \text{ ou } \exists j \in J, x \in B_j \\
&\qquad\iff \exists i \in I, \exists j \in J, x \in A_i \text{ ou } x \in B_j \\
&\qquad\iff \exists i \in I, \exists j \in J, x \in A_i \cup B_j \\
&\qquad\iff x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cup B_j)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cup B_j)}$.

CQFD.

Définition 34 (Applications qui se recollent deux à deux)

Soient I un ensemble et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications.
On dit que les termes de $(f_i)_{i\in I}$ **se recollent deux à deux** si et seulement si pour tout i et j dans I, f_i et f_j se recollent.

Proposition 75 (Caractérisation du recollement deux à deux)

Soient I un ensemble et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les termes de $(f_i)_{i\in I}$ se recollent deux à deux.
2. $\bigcup_{i\in I} f_i$ est une application.
3. Il existe au moins une application qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

Démonstration

On va montrer les implications 1⇒2⇒3.

$\boxed{1\Rightarrow 2}$

Supposons que les termes de $(f_i)_{i\in I}$ se recollent deux à deux.

Soit $c \in \bigcup_{i\in I} f_i$.

Il existe donc $i \in I$ tel que $c \in f_i$.

Par définition f_i est une application donc tous ses éléments sont des couples.

Donc c est un couple.

Donc tous les éléments de $\bigcup_{i\in I} f_i$ sont des couples.

Soient x, y et y' trois ensembles.

Supposons que $x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y$ et $x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y'$.

On a donc $(x, y) \in \bigcup_{i\in I} f_i$ et $(x, y') \in \bigcup_{i\in I} f_i$.

Il existe donc i_1 et i_2 dans I tels que $(x, y) \in f_{i_1}$ et $(x, y') \in f_{i_2}$.

On a donc $x f_{i_1} y$ et $x f_{i_2} y'$ donc $y = f_{i_1}(x)$ et $y' = f_{i_2}(x)$.

En particulier $x \in \operatorname{dom}(f_{i_1})$ et $x \in \operatorname{dom}(f_{i_2})$ donc $x \in \operatorname{dom}(f_{i_1}) \cap \operatorname{dom}(f_{i_2})$.

Or par hypothèses les termes de $(f_i)_{i\in I}$ se recollent deux à deux.

En particulier f_{i_1} et f_{i_2} se recollent.

Comme $x \in \operatorname{dom}(f_{i_1}) \cap \operatorname{dom}(f_{i_2})$, on a donc $y = f_{i_1}(x) = f_{i_2}(x) = y'$.

Donc si $x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y$ et $x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y'$ alors $y = y'$.

Donc $\boxed{\bigcup_{i\in I} f_i \text{ est une application}}$.

$\boxed{2\Rightarrow 3}$

Supposons que $\bigcup_{i\in I} f_i$ est une application.

On a vu que $\bigcup_{i\in I} f_i$ est un ensemble qui contient tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$ lors de la proposition 69 page 88.

Or pour les applications, "*être un prolongement de*" est la même chose que "*contenir*".

Donc $\bigcup_{i\in I} f_i$ est une application qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

En particulier $\boxed{\text{il existe une application qui prolonge tous les termes de } (f_i)_{i\in I}}$.

$\boxed{3\Rightarrow 1}$

Supposons qu'il existe une application g qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

Soient i et j dans I.

Soit $x \in \operatorname{dom}(f_i) \cap \operatorname{dom}(f_j)$.

Comme g prolonge f_i et f_j, on a $f_i(x) = g(x) = f_j(x)$.

Donc $\forall x \in \operatorname{dom}(f_i) \cap \operatorname{dom}(f_j), f_i(x) = f_j(x)$.

Donc f_i et f_j se recollent.

Donc $\boxed{\text{les termes de } (f_i)_{i\in I} \text{ se recollent deux à deux}}$.

CQFD.

Remarque :
Au vu de la proposition 69 page 88, $\bigcup\limits_{i\in I} f_i$ est dans ce cas-là la plus petite application (*au sens des restrictions*) qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

3.3 Intersection de familles

De même que nous avons défini la notion de réunion de familles, nous allons faire de même pour la notion d'intersection de familles. Quand on prend l'intersection d'un ensemble, il nous faut toujours au préalable nous assurer que celui-ci est non vide.

Dans notre cas, si l'on se donne I un ensemble **non vide** et $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I, alors par définition l'ensemble $\{A_i \mid i \in I\}$ est non vide et donc on peut bel et bien considérer son intersection.

Définition 35 (Intersection de familles)

Soient I un ensemble **non vide** et $(A_i)_{i\in I}$ une famille.
On appelle **intersection** de $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$$

Remarque :
Dans la notation $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$, le i est muet, c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre caractère qui n'est pas déjà utilisé à ce moment-là. Ainsi, on a les égalités

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{j\in I} A_j = \bigcap_{k\in I} A_k$$

Exemple :

1. On a $\bigcap\limits_{i\in\{i_0\}} A_i = A_{i_0}$ et $\bigcap\limits_{i\in\{i_1,i_2\}} A_i = A_{i_1} \cap A_{i_2}$.
2. Pour tout ensemble E non vide, on a $\bigcap E = \bigcap\limits_{A\in E} A$.

Proposition 76 (Caractérisation de l'intersection de famille)

Soit I un ensemble **non vide** et $(A_i)_{i\in I}$ une famille.
Pour tout ensemble x, on a l'équivalence suivante :

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$$

Démonstration

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i\in I} A_i &\iff x \in \bigcap \{A_i \mid i \in I\} \\ &\iff \forall A \in \bigcap \{A_i \mid i \in I\}, x \in A \\ &\iff \forall i \in I, x \in A_i \end{aligned}$$

D'où l'équivalence.

CQFD.

Proposition 77 (Maximalité de l'intersection d'une famille)

Soit I un ensemble **non vide** et $(A_i)_{i\in I}$ une famille.
Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $\forall i \in I, F \subseteq A_i$.
2. Pour tout ensemble X, si $\forall i \in I, X \subseteq A_i$ alors $X \subseteq F$.

Alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ est l'unique ensemble qui vérifie simultanément 1 et 2.

On dit que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ est **le plus grand** ensemble contenu dans tous les termes de $(A_i)_{i\in I}$.

Démonstration

C'est simplement une application directe de la maximalité de l'intersection de l'ensemble $\{A_i \mid i \in I\}$. **CQFD**.

Remarque :
On en déduit les choses suivantes :

1. S'il existe $j \in I$ tel que $\forall i \in I, A_j \subseteq A_i$ alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = A_j$.
2. En particulier on en déduit l'**idempotence** de l'intersection : s'il existe un ensemble E tel que $\forall i \in I, A_i = E$ alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = E$.

Proposition 78 (Intersection de familles et inclusion)

Soit I un ensemble **non vide** et $(A_i)_{i\in I}$ une famille.

1. Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille.
   Si $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$ alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} B_i$.
2. Pour tout $J \subseteq I$ non vide, on a $\bigcap\limits_{i\in J} A_i \supseteq \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Démonstration

1. Supposons que $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$.

Soit $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

On a donc $\forall i \in I, x \in A_i$ d'après la proposition 76 page 97.

Soit $i \in I$.

On a donc $x \in A_i$ d'après ce qui précède.

Or $A_i \subseteq B_i$ par hypothèse.

Donc $x \in B_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in B_i$.

Donc $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$ d'après la proposition 76 page 97.

Donc $\boxed{\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i}$.

2. Soit J une partie de I qui est non vide.

Par définition on a $\{A_i \mid i \in J\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$.

Donc $\bigcap \{A_i \mid i \in J\} \supseteq \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$ par décroissance de l'intersection.

Donc $\boxed{\bigcap_{i \in J} A_i \supseteq \bigcap_{i \in I} A_i}$.

CQFD.

Proposition 79 (Intersection de fami. et changement de variable)

Soit I un ensemble **non vide** et $(A_i)_{i \in I}$ une famille.
Soit J un ensemble **non vide** et $f : J \longrightarrow I$.

1. On a toujours $\bigcap_{j \in J} A_{f(j)} \supseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.
2. Si f est surjective dans I alors $\bigcap_{j \in J} A_{f(j)} = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Démonstration

1. On a $\left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la proposition 67 page 87.

On a donc $\bigcap \left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\} \supseteq \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$ par décroissance de l'intersection.

Donc $\boxed{\bigcap_{j \in J} A_{f(j)} \supseteq \bigcap_{i \in I} A_i}$.

2. Supposons que f est surjective dans I.

On a alors $\left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\} = \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la proposition 67 page 87.

On a donc $\bigcap \left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\} = \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$.

Donc $\boxed{\bigcap_{j \in J} A_{f(j)} = \bigcap_{i \in I} A_i}$.

CQFD.

Proposition 80 (Associativité de l'intersection de famille)

Soient I un ensemble **non vide** et $(A_i)_{i\in I}$ une famille.
Soient M un ensemble **non vide** et $(J_m)_{m\in M}$ une famille de parties **non vides** de I.

Si $I = \bigcup\limits_{m\in M} J_m$ alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{m\in M} \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i$.

Démonstration

Supposons que $I = \bigcup\limits_{m\in M} J_m$.
Raisonnons par double inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Soit $m \in M$.

Par définition on a $J_m \subseteq I$.

On a donc $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i$ d'après la proposition 78 page 98.

Donc $x \in \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i$.

Donc $\forall m \in M, x \in \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i$.

Donc $x \in \bigcap\limits_{m\in M} \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i$ d'après la proposition 76 page 97.

Donc $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap\limits_{m\in M} \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $x \in \bigcap\limits_{m\in M} \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i$.

On a alors $\forall m \in M, x \in \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i$ d'après la proposition 76 page 97.

On a donc $\forall m \in M, \forall i \in J_m, x \in A_i$ d'après la même proposition.

Soit $i \in I$.

Par hypothèse on a $I = \bigcup\limits_{m\in M} J_m$.

Il existe donc $m \in M$ tel que $i \in J_m$ d'après la proposition 68 page 88.

D'après ce qui précède, on a donc $x \in A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ d'après la proposition 76 page 97.

Donc $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \supseteq \bigcap\limits_{m\in M} \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i$.

Finalement on a bien $\boxed{\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{m\in M} \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i}$.

CQFD.

Proposition 81 (Intersection de familles et images)

Soient I un ensemble **non vide**, $(A_i)_{i\in I}$ une famille et f une application.

1. On a $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.
2. On a $f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{\leftarrow}(A_i)$.

Démonstration

1.

Soit $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.
Il existe alors $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$.
On a alors $\forall i \in I, x \in A_i$ donc $\forall i \in I, y \in f^{\rightarrow}(A_i)$.
Ainsi on a $y \in \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

Donc $\boxed{f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)}$.

2.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) &\iff x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in \bigcap_{i\in I} A_i \\
&\iff x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } \forall i \in I, f(x) \in A_i \\
&\iff \forall i \in I, x \in f^{\leftarrow}(A_i) \\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I} f^{\leftarrow}(A_i)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{\leftarrow}(A_i)}$.

CQFD.

Remarque :

(a) L'inclusion réciproque de 1 est fausse en toute généralité, pour la même raison évoquée pour l'image directe d'une intersection. En revanche, f est injective si et seulement si l'inclusion réciproque est vraie pour toute famille.

(b) Soient I et J deux ensembles et $\left(A_{(i,j)}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille indexée par $I \times J$.
On note parfois $\bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i,j)}$ à la place de $\bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_{(i,j)}$.

On remarque que par définition on a alors

$$\bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{(i,j)} = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i,j)} = \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I} A_{(i,j)}$$

Proposition 82 (Intersection de familles et opérations)

Soient I et J deux ensembles **non vides**, et F un ensemble.
Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I et $(B_j)_{j\in J}$ une famille indexée par J.

Réunion

1. **Simple distributivité**
   On a $F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (F \cup A_i)$.
2. **Double distributivité**
   On a $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j)$.

Produit cartésien

3. **Distributivité à gauche et à droite**
   On a $F \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (F \times A_i)$ et $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times F = \bigcap_{i\in I} (A_i \times F)$.
4. **Double distributivité**
   On a $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \times B_j)$.

Intersection

5. **Simple distributivité**
   On a $F \cap \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (F \cap A_i)$.
6. **Double distributivité**
   On a $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in j} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j)$.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes

$$x \in F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \iff x \in F \text{ ou } x \in \bigcap_{i\in I} A_i$$

$$\begin{aligned}
&\iff x \in F \text{ ou } \big(\forall i \in I, x \in A_i\big)\\
&\iff \forall i \in I, \big(x \in F \text{ ou } x \in A_i\big)\\
&\iff \forall i \in I, x \in F \cup A_i\\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I} \big(F \cup A_i\big)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \big(F \cup A_i\big)}$.

2. On utilise deux fois de suite la simple distributivité démontrée en 1.

On a

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\left(A_i \cup \left[\bigcap_{j\in J} B_j\right]\right) = \bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}\big(A_i \cup B_j\big) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\big(A_i \cap B_j\big)$$

3. Raisonnons par double inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x \in F \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

Il existe donc $y \in F$ et $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tels que $x = (y, a)$.

On a alors $\forall i \in I, a \in A_i$ donc $\forall i \in I, x \in F \times A_i$.

On en déduit que $x \in \bigcap_{i\in I} \big(F \times A_i\big)$.

Donc $F \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \big(F \times A_i\big)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $x \in \bigcap_{i\in I} \big(F \times A_i\big)$.

Donc pour tout $i \in I$, on a $x \in F \times A_i$.

Donc pour tout $i \in I$, il existe $y_i \in F$ et $a_i \in A_i$ tels que $x = (y_i, a_i)$.

Comme I n'est pas vide, il existe $i_0 \in I$.

Posons alors $y := y_{i_0}$ et $a := a_{i_0}$, de sorte que $x = (y, a)$.

Soit $i \in I$.

On a alors $(y, a) = x = (y_i, a_i)$.

Par unicité des composantes d'un couples, on $y = y_i$ et $a = a_i$.

En particulier $a = a_i \in A_i$.

Donc $\forall i \in I, a \in A_i$ et donc $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

Ainsi on a $x = (y, a)$ avec $y \in F$ et $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$ donc $x \in F \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

Donc $F \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \supseteq \bigcap_{i\in I} \big(F \times A_i\big)$.

Finalement on a $\boxed{F \times \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (F \times A_i)}$.

La distributivité à droite se montre de la même manière.

4. On applique la distributivité à droite puis à gauche que l'on vient de montrer en 3.
On a

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{i \in I} \left(A_i \times \left[\bigcap_{j \in J} B_j\right]\right) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (A_i \times B_j) = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \times B_j)$$

5.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in F \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) & \Longleftrightarrow x \in F \text{ et } x \in \bigcap_{i \in I} A_i \\ & \Longleftrightarrow x \in F \text{ et } \big(\forall i \in I, x \in A_i\big) \\ & \Longleftrightarrow \forall i \in I, \big(x \in F \text{ et } x \in A_i\big) \\ & \Longleftrightarrow \forall i \in I, x \in F \cap A_i \\ & \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (F \cap A_i) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{F \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (F \cap A_i)}$.

6. On a applique deux fois de suite la simple distributivité que l'on vient de montrer en 5.
On a

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{i \in I} \left(A_i \cap \left[\bigcap_{j \in j} B_j\right]\right)) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (A_i \cap B_j) = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j)$$

CQFD.

Proposition 83 (Familles et lois de De Morgan)

Soient I un ensemble **non vide**, $(A_i)_{i \in I}$ une famille et E un ensemble.

1. On a $E \backslash \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (E \backslash A_i)$.
2. On a $E \backslash \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (E \backslash A_i)$.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in E \backslash \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) &\iff x \in E \text{ et } x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \\
&\iff x \in E \text{ et } \neg\big(\exists i \in I, x \in A_i\big) \\
&\iff x \in E \text{ et } \big(\forall i \in I, x \notin A_i\big) \\
&\iff \forall i \in I, \big(x \in E \text{ et } x \notin A_i\big) \\
&\iff \forall i \in I, x \in E \backslash A_i \\
&\iff x \in \bigcap_{i \in E} \big(E \backslash A_i\big)
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{E \backslash \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i \right) = \bigcap\limits_{i \in I} \big(E \backslash A_i\big)}$.

2.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in E \backslash \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) &\iff x \in E \text{ et } x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \\
&\iff x \in E \text{ et } \neg\big(\forall i \in I, x \in A_i\big) \\
&\iff x \in E \text{ et } \big(\exists i \in I, x \notin A_i\big) \\
&\iff \exists i \in I, \big(x \in E \text{ et } x \notin A_i\big) \\
&\iff \exists i \in I, x \in E \backslash A_i \\
&\iff x \in \bigcup_{i \in I} \big(E \backslash A_i\big)
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{E \backslash \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i \right) = \bigcup\limits_{i \in I} \big(E \backslash A_i\big)}$.

CQFD.

3.4 Produit cartésien de familles

Proposition 84 (Produit cartésien de familles)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille.
Il existe un unique ensemble F tel que pour tout ensemble f on a

$$f \in F \iff \Big(f : I \longrightarrow ? \text{ et } \forall i \in I, f(i) \in A_i\Big)$$

On l'appelle **produit cartésien** de $(A_i)_{i\in I}$ et on le note $\prod\limits_{i\in I} A_i$.

Démonstration

• **Existence**

Posons $F := \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i \;\middle|\; \forall i \in I, f(i) \in A_i \right\}$.
Montrons que F répond à l'équivalence de l'énoncé.

$\boxed{\Rightarrow}$

Soit $f \in F$.

Par définition de F on a alors $f : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ donc en particulier $f : I \longrightarrow ?$.

De plus $\forall i \in I, f(i) \in A_i$.

Donc si $f \in F$ alors $f : I \longrightarrow ?$ et $\forall i \in I, f(i) \in A_i$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Soit $f : I \longrightarrow ?$ telle que $\forall i \in I, f(i) \in A_i$.

Soit $y \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe alors $j \in I$ tel que $y = f(j)$.

Or par définition de f on a $f(j) \in A_j$ donc $y \in A_j$.

Comme $A_j \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ on a $y \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

On a donc $\mathrm{im}(f) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ et donc $f : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Ainsi $f \in F$ par définition de F.

Donc si $f : I \longrightarrow ?$ et $\forall i \in I, f(i) \in A_i$ alors $f \in F$.

Finalement pour tout ensemble f, on a bien l'équivalence

$$\boxed{f \in F \iff \Big(f : I \longrightarrow ? \text{ et } \forall i \in I, f(i) \in A_i\Big)}.$$

• **Unicité**

Cela provient simplement de l'axiome d'extensionnalité puisque l'équivalence est ici caractéristique de l'appartenance à F.

CQFD.

Remarque :
Dans la notation $\prod\limits_{i\in I} A_i$, le i est muet, c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe

quel autre caractère qui n'est pas déjà utilisé. Ainsi on a par exemple les égalités suivantes :

$$\prod_{i\in I} A_i = \prod_{j\in I} A_j = \prod_{k\in I} A_k$$

Exemple :

1. Pour I et E deux ensembles, on a $\prod\limits_{i\in I} E = E^I = \mathcal{A}(I \to E)$.
2. On a $\prod\limits_{i\in\varnothing} A_i = \{\varnothing\}$.
3. Pour A et B deux ensembles, si l'on pose $A_1 := A$ et $A_2 := B$ alors on a $\prod\limits_{i\in\{1,2\}} A_i$ et $A \times B$ sont en bijection puisque tout couple $(a,b) \in A \times B$ peut être associé à l'application qui envoie 1 sur a et 2 sur b. En cela le produit cartésien de familles généralise la notion de produit cartésien de deux ensembles.

Proposition 85 (Axiome du choix - Version produit cartésien)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille.
Si $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$ alors $\prod\limits_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

Démonstration

Supposons que $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$.

Considérons $E := \{A_i \mid i \in I\}$.

Par hypothèse le vide n'est pas un élément de E.

D'après l'axiome du choix il existe donc une application $f : E \longrightarrow ?$

telle que $\forall A \in E, f(A) \in E$.

Considérons alors $g := \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & A_i \end{pmatrix}$.

Par définition on a $f \circ g : I \longrightarrow ?$ et pour tout $i \in I$ on a $(f \circ g)(i) = f\big(g(i)\big) = f(A_i) \in A_i$.

Donc $f \circ g \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ par définition du produit cartésien.

En particulier on a $\boxed{\prod\limits_{i\in I} A_i \neq \varnothing}$.

CQFD.

Comme indiqué dans le titre de la proposition, c'est une autre version possible de l'axiome du choix : on aurait pu le choisir comme axiome et démontrer la première version.

Idée de preuve

Supposons que pour tout ensemble I et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ telle que $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$, on a $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

Soit E un ensemble tel que $\varnothing \notin E$.

Considérons la famille $(A)_{A\in E}$.

Par définition de E on a $\varnothing \notin E$ donc $\forall A \in E, A \neq \varnothing$.

Par hypothèse on a donc $\prod_{A\in E} A \neq \varnothing$.

Soit alors $f \in \prod_{A\in E} A$.

Par définition du produit cartésien, $\boxed{\text{on a } f : E \longrightarrow ? \text{ et } \forall A \in E, f(A) \in A}$.

CQFD.

Proposition 86 (Croissance du produit cartésien de familles)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles.

1. Si $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$ alors $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i$.
2. Réciproquement supposons que $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$.
   Si $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i$ alors $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$.

Démonstration

1. Supposons que $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$.

Soit $f \in \prod_{i\in I} A_i$.

Par définition du produit cartésien on a $f : I \longrightarrow ?$ et $\forall i \in I, f(i) \in A_i$.

Par hypothèse on a donc $\forall i \in I, f(i) \in B_i$.

Donc $f \in \prod_{i\in I} B_i$ par définition du produit cartésien.

On a donc bien $\boxed{\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i}$.

2. Supposons que $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$ et que $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i$.

Soit $i \in I$.

Soit $a \in A_i$.

Par hypothèse on a $\forall j \in I, A_j \neq \varnothing$.

D'après l'axiome du choix – version produit cartésien, on a $\prod_{j\in I} A_j \neq \varnothing$.

Soit alors $f \in \prod_{j \in I} A_j$.

Considérons alors $g := \left(\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & ? \\ j & \longmapsto & \begin{cases} a & \text{si } j = i \\ f(j) & \text{si } j \neq i \end{cases} \end{array} \right)$.

On a alors $g(i) = a \in A_i$ et pour tout $j \in I$, si $j \neq i$ alors $g(j) = f(j) \in A_j$.

On a donc $g \in \prod_{j \in J} A_j$ par définition du produit cartésien.

Or on a $\prod_{j \in I} A_j \subseteq \prod_{j \in I} B_j$ par hypothèse donc $g \in \prod_{j \in I} B_j$.

On a donc $\forall j \in I, g(j) \in B_j$ et donc $a = g(i) \in B_i$.

On a donc $A_i \subseteq B_i$.

On a donc bien $\boxed{\forall i \in I, A_i \subseteq B_i}$.

CQFD.

Définition 36 (Projections depuis un produit cartésien)

Soient I un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille.
Pour tout $j \in I$, on appelle $j^{\text{ème}}$ **projection** depuis $\prod_{i \in I} A_i$ l'application

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} A_i & \longrightarrow & A_j \\ (a_i)_{i \in I} & \longmapsto & a_j \end{array}$$

Bibliographie

- Wikipédia
- Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématiques - Théorie des ensembles*, 1970
- Laurent Schwartz, *Analyse I : Théorie des ensembles et topologie*, 1991

Mathématiciens