Ordinaux, cardinaux et entiers
-
Le Barbuki 2

Florian Langlois

Mars 2024 – Mai 2024

Collection

Bienvenue dans ce livre ! C'est le deuxième d'une collection qui tente d'exposer et démontrer les mathématiques de niveau licence et master. Le nom BARBUKI est une référence au célèbre groupe BOURBAKI, dont la démarche de cette collection est inspirée.

1 – Théorie élémentaire des ensembles.

2 – Ordinaux, cardinaux et entiers.

Avant-propos

Cet ouvrage est là pour me permettre de coucher sur le papier les différentes mathématiques que j'ai apprises durant mes études supérieures : je le rédige principalement pour moi-même et il n'a pas pour but d'être pédagogique. Il va me permettre de conserver sur le long terme une trace de ces connaissances, mais aussi d'organiser celles-ci pour en avoir une vue d'ensemble.

Bien que ce livre reste assez personnel, il est possible qu'il vous soit utile. Afin de comprendre pleinement son contenu, il est nécessaire d'être au courant du contenu du premier ouvrage, c'est-à-dire des bases de la théorie des ensembles, notamment à travers les différents axiomes de ZFC.

Il vous faut aussi savoir mener un raisonnement, ou tout du moins en suivre un, puisque c'est l'un des objets principaux de ce livre. Il est à noter que la construction de cette collection se fait sous la manière d'un escalier à gravir : nous n'utiliserons pas des résultats postérieurs pour démontrer des résultats antérieurs, les seules exceptions étant les exemples donnés pour illustrer, puisque ceux-ci ne sont là que pour aider à la lecture, et non permettre une quelconque démonstration, mais aussi certaines digressions abordant d'autres démonstrations que celles proposées.

Remerciements

Merci à Lyra, GrothenDitQue, Chæris et Cassis pour leur pinaillage.

Table des matières

Chapitre 1

Ordinaux

Sommaire

1 Classes et assertions fonctionnelles

Dans le livre précédent, nous avons expliqué que les objets que nous manipulons sont tous considérés comme des ensembles, au point que la notion d'ensemble est en fait primitive. On ne donne pas de définition a priori de ce qu'est un ensemble, on impose juste des axiomes afin de mimer l'intuition d'ensemble.

Nous avons aussi indiqué que ce ne sont pas les seuls choses manipulables : il y a aussi les assertions, qui sont des affirmations pouvant être vraies ou fausses. Il s'agit au fond d'une façon de structurer le discours à propos des ensembles. L'auteur de ce livre considère que le lecteur est au clair sur ces choses-là. Cependant, il estime aussi devoir préciser un certain nombre de nuances concernant les assertions. Certaines de ces définitions sont déjà évoquées dans le livre précédent, mais un rappel ne fait jamais de mal.

Définition 1 (Assertion à paramètres)

Une **assertion à paramètres** est une assertion qui nécessite un ou plusieurs paramètres pour être énoncée, et donc la vérité peut varier en fonction de ces paramètres éventuels. Un paramètre est toujours un ensemble.

Exemple :

1. L'assertion $P(n)$ définie par « n *est un entier pair* » dépend de qui est n. C'est en cela que l'on précise entre parenthèses la dépendance de P par rapport à n, pour insister sur ce point.
2. En revanche, l'assertion $Q(x)$ définie par « $x = x$ » est toujours vraie, quand bien même elle nécessite le paramètre x pour être énoncée.

1.1 Classes

La notion d'ensemble est née de l'idée de vouloir réunir et regrouper plusieurs objets différents : typiquement $\mathbb{Z}$ est l'ensemble qui contient tous les entiers relatifs. C'est justement le but du premier livre d'expliciter les règles que nous avons choisies ici pour régir les ensembles. Cependant afin d'éviter certains paradoxes et contradictions, nous avons dû restreindre la portée des ensembles : il n'est par exemple pas possible de définir l'ensemble de tous les ensembles, et si on le permettait on aboutirait au paradoxe de Russel. Nous verrons aussi plus tard, après avoir défini la notion d'ordinaux, qu'il est impossible d'avoir un ensemble contenant tous les ordinaux.

Cependant, nous aimerions bien pouvoir simplifier nos discours concernant "*tous les ensembles*" ou "*tous les ordinaux*", c'est-à-dire réunir différents objets sans pour autant craindre de former un ensemble paradoxal, ou même sans être freiné par les axiomes ensemblistes. C'est là qu'interviennent les **classes**. Heureusement, cela ne va pas nécessiter d'introduire autre chose que les ensembles ou que les assertions. En effet, nous allons définir la notion de classe comme étant la même que celle d'assertion à paramètres, le nouveau nom étant simplement associé à un nouvel usage. Il s'agit d'une approche similaire à celle que nous avons faite dans le premier livre concernant les familles : il n'y a à strictement parler pas de différence entre les familles et les applications, simplement un usage différent et des notations différentes.

L'intérêt des classes est comme nous l'avons dit de pouvoir regrouper différents objets, et donc beaucoup des notions associées aux classes sont inspirées de celles associées aux ensembles, notamment l'appartenance. Il n'est donc pas étonnant qu'on retrouve par exemple le symbole $\in$.

Définition 2 (Classe)

Soit C une assertion à paramètres.
Si C nécessite un seul paramètre pour être énoncée, on dit parfois que C est une **classe**.

Pour un ensemble x donné, on dit que x **appartient** à C si et seulement si $C(x)$ est vraie, auquel cas on note alors $x \in C$. On dit aussi que x est un **élément** de C.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $C(x)$ est fausse, on dit que x n'appartient pas à C, ou que x n'est pas un élément de C, et on note $x \notin C$.

Remarque :
Ainsi, la notion de classe généralise celle d'ensemble. En effet, étant donné un ensemble E, on peut former une classe C_E en définissant pour tout ensemble x l'assertion $C_E(x)$ par « $x \in E$ ». En revanche, il n'est pas toujours possible de passer d'une classe à un ensemble, comme dit dans le paragraphe introductif. Cependant, si une classe est issue d'un ensemble, on commettra souvent l'abus de confondre l'ensemble et la classe associée.

Exemple :

1. La classe U de tous les ensembles. Comme tout paramètre x est nécessairement un ensemble, l'assertion $U(x)$ est toujours vraie. On peut par exemple définir $U(x)$ en posant simplement « $x = x$ ». Ainsi, pour tout ensemble x, on a $x \in U$.
2. La classe ON des ordinaux, que nous aurons l'occasion d'aborder plus tard.

Notation :
Soient C et D deux classes, E un ensemble et C_E la classe associée à E.

1. On note $C \subseteq D$ si et seulement si $\forall x, \Big(C(x) \implies D(x)\Big)$.
   En particulier on note $E \subseteq D$ si et seulement si $C_E \subseteq D$.
   Autrement dit, $E \subseteq D$ si et seulement si $\forall x, \Big(x \in E \implies D(x)\Big)$.

2. On note $C \cap D$ la classe définie pour tout ensemble x par

$$(C \cap D)(x) : \text{« } C(x) \textit{ et } D(x) \text{ »}$$

   En particulier on note $E \cap D$ la classe $C_E \cap D$.
   Autrement dit pour tout ensemble x on a $(E \cap D)(x)$ si seulement si $x \in E$ et $D(x)$.
   Il s'avère d'après l'axiome de compréhension que $E \cap D$ est une classe associée à un ensemble, et comme indiqué précédemment on confondra souvent les deux.

$$E \cap D = \{x \in E \mid D(x)\}$$

3. On note $C \cup D$ la classe définie pour tout ensemble x par

$$(C \cup D)(x) : \text{« } C(x) \textit{ ou } D(x) \text{ »}$$

En particulier on note $E \cup D$ la classe $C_E \cup D$.
Autrement dit pour tout ensemble x on a $(E \cup D)(x)$ si seulement si $x \in E$ ou $D(x)$.

1.2 Assertions fonctionnelles

Dans le livre précédent, nous nous sommes intéressés à des assertions à paramètres particulières : les assertions fonctionnelles. Comme le qualificatif *fonctionnelle* le laisse entendre, il s'agit d'une généralisation de la notion de fonction. Redonnons-en la définition.

Définition 3 (Assertion fonctionnelle)

Soit P une assertion à paramètres.
On dit que P est **fonctionnelle** si et seulement si elle nécessite deux paramètres pour être énoncée et pour tout ensembles x, y et y', on a l'implication

$$\Big(P(x,y) \text{ et } P(x,y')\Big) \implies y = y'$$

Ainsi pour un ensemble x donné, il y a au plus un ensemble y qui lui est associé par le biais de P. On dit alors que y est **l'image** de x par P et on note alors $P(x) := y$.

Exemple :

1. L'assertion P définie pour deux ensembles a et b par $P(a,b)$: « *a est un entier naturel et $b = 2a$* » est une assertion fonctionnelle.
2. Plus généralement, les exemples typiques d'assertions fonctionnelles sont celles issues de fonctions justement. Si f est une fonction, on peut former une assertion fonctionnelle F en la définissant pour tout ensembles x et y par
$F(x,y)$: « $x \in \mathrm{dom}(f)$ *et* $y = f(x)$ ».

Comme l'indiquent ces exemples, la notion d'assertion fonctionnelle et la notion de fonctions sont très liées, du fait pour un ensemble x de n'associer qu'au plus un autre ensemble. On retrouve donc naturellement la notion d'image, et les notations $P(x)$ et $f(x)$ qui s'y réfèrent sont identiques. Il est important au passage pour une assertion fonctionnelle de ne pas confondre la notation $P(x,y)$ qui se réfère à l'assertion en elle-même et qui est donc soit vraie soit fausse en fonction des paramètres x et y, et la notation $P(x)$ qui désigne l'unique paramètre y tel que $P(x,y)$ soit vraie, à condition bien sûr que celui-ci existe.

Dans le cas d'une fonction f, on peut parler de son domaine $\mathrm{dom}(f)$ comme d'un ensemble, c'est-à-dire l'ensemble de tout ensemble qui admet une image par f. Il n'est pas toujours possible de faire de même pour une assertion fonctionnelle : par exemple l'assertion fonctionnelle « $x = y$ » aurait pour domaine l'ensemble de tous les ensembles, que nous savons n'existe pas. C'est là qu'interviennent les classes que nous avons introduites plus tôt : la classe de tous les ensembles existe bel et bien !

Définition 4 (Domaine et image d'une assertion fonctionnelle)

Soit P une assertion fonctionnelle.

1. On appelle **domaine** de P la classe notée $\mathrm{dom}(P)$ définie pour tout ensemble x par
$$x \in \mathrm{dom}(P) \iff \exists y, P(x,y)$$
2. On appelle **image** de P la classe notée $\mathrm{im}(P)$ définie pour tout ensemble y par
$$y \in \mathrm{im}(P) \iff \exists x, P(x,y)$$

Remarque :

1. A la manière des images directes et réciproques d'un ensemble par une fonction, on peut se donner une classe C et considérer son **image directe** par P, à savoir la classe notée $P^{\rightarrow}(C)$ définie pour tout ensemble y par
$$y \in P^{\rightarrow}(C) \iff \exists x \in C, P(x,y)$$
Nous avons vu dans le livre 1 via l'axiome de remplacement que si E est un ensemble tel que $E \subseteq \mathrm{dom}(P)$ alors $P^{\rightarrow}(E)$ est un ensemble que l'on a noté $\left\{P(x) \;\middle|\; x \in E\right\}$. De même, on peut considère l'**image réciproque** de la classe C par P, à savoir la classe notée $P^{\leftarrow}(C)$ définie pour tout ensemble x par
$$x \in P^{\leftarrow}(C) \iff \exists y \in C, P(x,y)$$
2. Une façon intuitive de construire une assertion fonctionnelle est de se munir d'une **formule**. Autrement dit, étant donné un ensemble x, on construit $P(x)$ explicitement. Par exemple, on peut définir P en posant que pour tout ensembles x et y, on a
$$P(x,y) \iff y = \bigcup x$$
et dans ce cas-là on a naturellement $P(x) = \bigcup x$. C'est d'ailleurs par ce biais là des formules que l'on s'est déjà donné le moyen de construire des applications dans le précédent livre.

2 Bons ordres

Bien souvent en mathématique, nous aimerions étant donné un élément x pouvoir donner du sens à la question « *quel est l'élément qui vient juste après x ?* ». C'est là qu'intervient la notion de **bon ordre** : toute partie de l'ensemble va admettre un élément minimum. De fait, l'élément qui suit directement x sera simplement le minimum des majorants stricts de x.

Concentrons-nous quelques instants sur la notion d'élément minimal. Rappelons qu'un élément a de l'ensemble ordonné $(E, \leq)$ est minimal si et seulement si pour tout $x \in E$ on a

$$x \leq a \implies x = a$$

c'est-à-dire qu'aucun élément autre que a lui-même n'est plus petit que a.

Proposition 1 (Élément minimal et ordre strict)

Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné non vide, $<$ l'ordre strict associé à $\leq$ et $a \in E$.

Alors a est minimal pour $(E, \leq)$ si et seulement si $\forall x \in E, \mathrm{non}(x < a)$.

Démonstration

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que a est minimal pour $(E, \leq)$.

Soit $x \in E$.

Supposons par l'absurde que $x < a$.

On a donc $x \leq a$ et $x \neq a$.

Comme $x \leq a$ et a est minimal pour $(E, \leq)$, on a $x = a$.

Ainsi on a à la fois $x \neq a$ et $x = a$: c'est absurde.

Par l'absurde, on a donc montré que $\mathrm{non}(x < a)$.

Donc $\forall x \in E, \mathrm{non}(x < a)$.

Donc $\boxed{\text{si } a \text{ est minimal pour } (E, \leq) \text{ alors } \forall x \in E, \mathrm{non}(x < a)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall x \in E, \mathrm{non}(x < a)$.

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \leq a$.

On a donc $x < a$ ou $x = a$.

Or on a $\mathrm{non}(x < a)$ par hypothèse donc nécessairement $x = a$.

Donc si $x \leq a$ alors $x = a$.

Donc $\forall x \in E, \Big(x \leq a \implies x = a\Big)$.

Donc a est minimal pour $(E, \leq)$.

Donc si $\boxed{\forall x \in E, \text{non}(x < a) \text{ alors } a \text{ est minimal pour } (E, \leq)}$.
CQFD.

Nous l'avons dit dans l'introduction, nous allons dire qu'un ensemble est muni d'un bon ordre lorsque chacune de ses parties (non vides) admet un minimum. Une version plus faible de la notion de bon ordre est la notion d'ordre **bien fondé**, où l'on demande à chaque partie (non vide) d'admettre seulement un élément minimal, pas nécessairement minimum de la partie.

Définition 5 (Ordre bien fondé et bon ordre)

Soit E un ensemble ordonné.

1. On dit que E est **bien fondé** si et seulement si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal.
2. On dit que E est **bien ordonné** si et seulement si toute partie non vide de E admet un minimum. On dit aussi que l'ordre sur E est un **bon ordre**.

Remarque :
Étant donné une relation d'ordre $\leq$ et son ordre strict associé $<$, on dit que $<$ est bien fondé si et seulement si $\leq$ est bien fondé. De même, on dit que $<$ est un bon ordre strict si et seulement si $\leq$ est un bon ordre.

Plus généralement on étendra les définitions de tout l'ouvrage aux ordres stricts de cette manière via leurs ordres (larges) associés.

Au premier abord la notion d'élément minimal et la notion d'élément minimum semble être la même chose. Ce n'est pas vrai, puisqu'un ensemble peut avoir plusieurs éléments minimaux. Pensons par exemple à $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ muni de la relation de divisibilité : tous les nombres premiers sont des éléments minimaux sans qu'aucun ne soit un minimum. En réalité, pour qu'un élément minimal soit un minimum, il faut et il suffit qu'il soit comparable à tous les éléments de l'ensemble, ce qui explique pourquoi un bon ordre est nécessairement total.

Proposition 2 (Caractérisation des bons ordres)

Soit E un ensemble ordonné.
E est bien ordonné si et seulement si E est bien fondé et totalement ordonné.

Démonstration

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que E est bien ordonné.

Alors toute partie non vide de E admet un minimum.

Or un minimum est un élément minimal (c'est alors le seul).

Donc toute partie non vide de E admet un élément minimal.

Donc $\boxed{E \text{ est bien fondé}}$.

Soient x et y dans E.

Alors $\{x, y\}$ est une partie non vide de E.

Elle admet donc un minimum m.

Si $m = x$ alors on a $x = m \leq y$.

Si $m = y$ alors on a $y = m \leq x$.

Dans les deux cas on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Donc tous les éléments de E sont comparables : $\boxed{E \text{ est totalement ordonné}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que E est bien fondé et totalement ordonné.

Soit A une partie non vide de E.

Comme E est bien fondé, A admet au moins un élément minimal m.

Montrons que m est le minimum de A.

Supposons par l'absurde que m n'est pas le minimum de A.

Il existe donc $a \in A$ tel que l'on a pas $m \leq a$.

Or E est totalement ordonné par hypothèse donc on a $a \leq m$.

Comme m est un élément minimal de A on a $a = m$ et en particulier $m \leq a$, ce qui est absurde.

Donc m est le minimum de A.

Donc toute partie non vide de E admet un minimum.

Donc $\boxed{E \text{ est bien ordonné}}$.

CQFD.

Proposition 3 (Partie d'un ensemble bien ordonné)

Soient E un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.

1. Si E est bien fondé alors A est bien fondé.
2. Si E est bien ordonné alors A est bien ordonné.

Démonstration

1. Supposons que E est bien fondé.

Soit B une partie non vide de A.

Comme $A \subseteq E$, B est aussi une partie non vide de E.

Or E est bien fondé par hypothèse.

Donc B admet au moins un élément minimal.

Donc toute partie non vide de A admet au moins un élément minimal.

Donc $\boxed{A \text{ est bien fondé}}$.

Supposons que E est bien ordonné.

Soit B une partie non vide de A.

Comme $A \subseteq E$, B est aussi une partie non vide de E.

Or E est bien ordonné par hypothèse.

Donc B admet un minimum.

Donc toute partie non vide de A admet un minimum.

Donc $\boxed{A \text{ est bien ordonné}}$.

CQFD.

Rappelons qu'étant donnés deux ensembles ordonnés $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$, on peut munir $E \times F$ de l'ordre **lexicographique** associé, c'est-à-dire que pour x et y dans E et s et t dans F, on a

$$(x, s) \trianglelefteq (y, t) \iff \Big[x < y \text{ ou } (x = y \text{ et } s \preceq t)\Big]$$

Il tire son nom du fait que les dictionnaires fonctionnement sur ce principe (par rapport à l'ordre alphabétique).

Proposition 4 (Bons ordres et ordre lexicographique)

Soient $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$ deux ensembles ordonnés.
Soit $\trianglelefteq$ l'ordre lexicographique associé sur $E \times F$.
Si $\leq$ et $\preceq$ sont des bons ordres alors $\trianglelefteq$ est un bon ordre.

Démonstration

Supposons que $\leq$ et $\preceq$ sont des bons ordres.

Soit A une partie non vide de $E \times F$.

Considérons $B := \{x \in E \mid \exists y \in F, (x, y) \in A\}$.

Comme A est non vide, B est une partie non vide de E.

Or E est bien ordonné donc B admet un minimum b_0.

Considérons alors $C_{b_0} := \{y \in F \mid (b_0, y) \in A\}$.

Par définition on a $b_0 \in B$ donc il existe $y \in F$ tel que $(b_0, y) \in A$ et donc $y \in C_{b_0}$.

Donc C_{b_0} est une partie non vide de F.

Or F est bien ordonné donc C_{b_0} admet un minimum c_0.

Considérons alors $a_0 := (b_0, c_0)$ et montrons que a_0 est le minimum de A.

Soit $z = (x, y) \in A$.

Par définition de B on a $x \in B$.

Or b_0 est le minimum de B donc $b_0 \leq x$.

Si $b_0 < x$ alors par définition de $\trianglelefteq$ on a $(b_0, c_0) \trianglelefteq (x, y)$.

Supposons à présent que $b_0 = x$.

On a donc $(b_0, y) = (x, y) \in A$ donc par définition de C_{b_0} on a $y \in C_{b_0}$.

Or c_0 est le minimum de C_{b_0} donc $c_0 \preceq y$.

On a donc $b_0 = x$ et $c_0 \preceq y$ donc $(b_0, c_0) \trianglelefteq (x, y)$.

Dans les deux cas on a bien $a_0 \trianglelefteq z$.

Donc pour tout $z \in A$, on a $a_0 \trianglelefteq z$.

Donc a_0 est le minimum de A.

Donc toute partie non vide de $E \times F$ admet un minimum.

Donc $\boxed{E \times F \text{ est bien ordonné}}$.

CQFD.

Introduisons à présent la notion de **segment initial**. Une partie d'un ensemble ordonné est un segment initial si et seulement si pour chacun de ses éléments, elle contient aussi tous les éléments qui lui sont inférieurs.

Définition 6 (Segment initial)

Soient E un ensemble ordonné et A une partie de E.
On dit que A est un **segment initial** de E si et seulement si pour tout x et y dans E, on a

$$\big(x \in A \text{ et } y \leq x\big) \implies y \in A$$

Exemple :

1. Dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel, $]-\infty, 2[$ est un segment initial. En revanche $]1;3]$ n'en est pas un car $2 \in]1;3]$ et $0 \leq 2$ alors que $0 \notin]1;3]$.
2. Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité, $\{1, 2, 4, 8\}$ est un segment initial. En revanche $\{1, 2, 6\}$ n'en est pas un car $6 \in \{1, 2, 6\}$ et $3|6$ alors que $3 \notin \{1, 2, 6\}$.

Remarque :
Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $<$ l'ordre strict associé et $x \in E$.
On rappelle que l'on a introduit la notation $x{\downarrow} = \{y \in E \mid y < x\}$.

Dans le cas des ensembles bien ordonnés, on a une caractérisation simple des segments initiaux propres. On rappelle au passage qu'une partie A d'un ensemble E est dite propre si et seulement si $A \neq E$.

Proposition 5 (Segments initiaux d'un ensemble bien ordonné)

Soient E un ensemble **bien ordonné** et A une partie de E.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est un segment initial propre de E.
2. Il existe $x \in E$ tel que $A = x\downarrow$.

Démonstration

Soient $\leq$ la relation d'ordre sur E et $<$ l'ordre strict associé à $\leq$.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que A est un segment initial propre de E.

Comme A est une partie propre de E, on a $A \subsetneq E$ donc $E \backslash A \neq \varnothing$.

Or E est bien ordonné par définition donc $E \backslash A$ possède un minimum x.

Montrons que $A = x\downarrow$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $a \in A$.

Comme E est bien ordonné, E est totalement ordonné d'après la prop. 2 p. 7.

On a donc $x \leq a$ ou $a < x$.

Supposons par l'absurde que $x \leq a$.

On a $a \in A$ et A est un segment initial de E par hypothèse.

Donc $x \in A$, ce qui est absurde car $x \in E \backslash A$.

Donc par l'absurde on a $a < x$, c'est-à-dire $a \in x\downarrow$.

On a donc $A \subseteq x\downarrow$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $y \in x\downarrow$.

On a alors $y < x$.

Or par définition x est le minimum de $E \backslash A$.

On a donc $y \notin E \backslash A$ et donc $y \in A$.

Donc $A \supseteq x\downarrow$ et donc $\boxed{A = x\downarrow}$.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $A = x\downarrow$.

Soient y et z dans E.

Supposons que $y \in A$ et $z \leq y$.

Par hypothèse on a $A = x\downarrow$ donc $y \in x\downarrow$ et donc $y < x$.

Comme $z \leq y$ on a donc $z < x$ par transitivité et donc $z \in x\downarrow = A$.

Donc si $y \in A$ et $z \leq y$ alors $z \in A$.

Donc $\boxed{A \text{ est un segment initial de } E}$.

De plus, on n'a pas $x < x$ par antiréflexivité donc $x \notin x\!\downarrow = A$.

Ainsi $x \in E$ et $x \notin A$, donc $E \neq A$ et donc $\boxed{A \text{ est une partie propre de } E}$.

CQFD.

3 Ordinaux

Lors du précédent livre, nous avons vu la notion d'**isomorphisme** entre deux ensembles ordonnés. C'est une façon de dire que ces deux ensembles ordonnés "*se comportent de la même manière*", pour peu que l'on ne s'intèresse qu'à leur structure d'ensembles ordonnés. Nous pouvons donc d'une certaine manière "*identifier*" deux ensembles ordonnés dès lors qu'il existe un isomorphisme entre les deux, et donc dire en ce sens-là qu'ils sont équivalents. Qui dit équivalence dit classe d'équivalence, c'est-à-dire rassembler en un seul endroit tous ces ensembles ordonnés qui sont isomorphes entre eux. Notons au passage que la notion de classe d'équivalence ici n'a pas besoin d'être un ensemble : nous avons justement introduit plus tôt le concept de classe (tout court) pour palier ce problème.

Se pose alors la question suivante : pour chacune de ces classes d'équivalences, peut-on se donner un représentant canonique, c'est-à-dire un ensemble ordonné qui représenterait toute la classe d'équivalence ? Si nous n'allons pas donner de réponse à cette question en toute généralité, nous allons le faire dans le cas particulier où les ensembles sont munis d'un bon ordre : c'est l'objectif derrière la construction des **ordinaux**, car nous verrons après les avoir définis qu'il en existera systématiquement un et un seul dans chacune des classes d'équivalence des ensembles bien ordonnés.

Pour choisir l'ensemble ordonné en question, il faut choisir en particulier sa relation d'ordre. Tout choix de relation pourrait sembler arbitraire, mais il en existe deux qui sortent naturellement du lot : $\in$ et $\subseteq$, car ce sont les relations les plus fondamentales qui existent chez les ensembles. Nous n'allons d'ailleurs pas avoir besoin de choisir entre les deux : nous allons faire en sorte que $\subseteq$ soit l'ordre et $\in$ l'ordre strict associé.

Définition 7 (Ensemble transitif)

Soit E un ensemble.
On dit que E est **transitif** si et seulement si $\forall x \in E, x \subseteq E$.

Remarque :
Remarquons la chose suivante :

$$\begin{aligned}
E \text{ est transitif} &\iff \forall y \in E, y \subseteq E \\
&\iff \forall y, \Big(y \in E \implies y \subseteq E\Big) \\
&\iff \forall x, \forall y, \Big(x \in y \in E \implies x \in E\Big)
\end{aligned}$$

Ainsi, la transitivité de E signifie une certaine transitivité de $\in$.
Cette définition répond aussi au fait que nous allons faire de $\in$ un ordre strict sur E : en particulier $\in$ sera transitif, c'est-à-dire que pour x, y et z dans E, si $x \in y \in z$ alors $x \in z$.
Le fait pour E d'être transitif va donc étendre légèrement cette propriété en se permettant en plus de remplacer z par E lui-même : si $x \in y \in E$ alors $x \in E$.

Définition 8 (Ordinaux)

Soit E un ensemble.
On dit que E est un **ordinal** si et seulement si

1. E est transitif.
2. $\in$ est un bon ordre strict sur E.

Pour la petite histoire

John von Neumann (28 décembre 1903 – 8 février 1957) est un mathématicien et physicien américano-hongrois. Il a apporté d'importantes contributions en mécanique quantique, en analyse fonctionnelle, en logique mathématique, en informatique théorique, en sciences économiques et dans beaucoup d'autres domaines des mathématiques et de la physique. Il a de plus participé aux programmes militaires américains.

C'est à lui que l'on doit cette définition d'ordinaux.

Exemple :

1. $\varnothing$ est un ordinal. En effet, par vérité creuse, on a les quatre points suivants :
   (a) On a $\forall x \in \varnothing, x \notin x$ donc $\in$ est antiréflexive sur $\varnothing$.
   (b) On a $\forall x \in \varnothing, \forall y \in \varnothing, \forall z \in \varnothing, \Big(\big(x \in y \text{ et } y \in z\big) \implies x \in z\big)\Big)$.
   Ainsi $\in$ est transitive sur $\varnothing$.
   (c) Comme aucune partie de $\varnothing$ n'est non vide, on a bien que toutes les parties non vides de $\varnothing$ admettent un minimum pour $\in$.
   (d) On a $\forall x \in \varnothing, x \subseteq \varnothing$ donc $\varnothing$ est transitif.

   Les points a et b font de $\in$ un ordre strict sur $\varnothing$.
   Combinés au point c, on en conclut que $\in$ est un bon ordre strict sur $\varnothing$.
   Enfin, combiné au point d on en conclut que $\varnothing$ est un ordinal.
2. Nous verrons plus tard que $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels est un ordinal.

Remarque :
Il est d'usage de désigner un ordinal par une lettre grecque minuscule.
Par exemple $\mathbb{N}$ sera aussi désigné par la lettre ω, qui lui sera alors réservée.

Notation :
On notera ON la classe de tous les ordinaux, c'est-à-dire que pour un ensemble x, on a l'équivalence $x \in ON \iff x$ est un ordinal.

Tentons de justifier le choix de la notion d'ordinal pour représenter une classe d'équivalence des ensembles bien ordonnés. Nous avons déjà justifié l'usage de $\in$ comme relation de bon ordre strict pour son côté naturel. Il reste donc simplement à justifier la transitivité de l'ensemble lui-même, c'est-à-dire le point 1 de la définition d'ordinal.

Pour cela, intéressons-nous au cas simple d'ensembles à deux éléments, pour la relation d'ordre strict $\in$. Comme on veut que $\in$ soit un bon ordre strict, on veut en particulier que tous les éléments distincts soient comparables pour l'appartenance, et donc que sur les deux éléments l'un appartienne à l'autre, ce qui impose au représentant α d'être de la forme $\alpha = \{x, E\}$ avec $x \in E$. Pour rendre le choix de α le plus naturel possible, on aimerait épurer au maximum le choix de x et de E : en particulier il semble naturel de demander $x = \varnothing$ pour ne pas s'encombrer avec d'éventuels éléments de x qui seraient nécessairement arbitraires. Pour la même raison, on aimerait que E ne contienne rien d'autre que x, ce qui impose naturellement $E = \{x\}$ et donc $\alpha = \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$.

La transitivité va permettre de retirer les éventuels éléments encombrants : si x est un élément de l'ordinal α, alors par transitivité de α on a $x \subseteq \alpha$, c'est-à-dire que tous les éléments de x font aussi partis de α. Ainsi dans l'exemple $\alpha = \{x, E\}$, x ne peut rien contenir car tout élément éventuel de x se retrouverait en plus dans les éléments de α, et pour la même raison E ne peut rien contenir de plus que x.

Proposition 6 (Les éléments d'un ordinal sont des ordinaux)

Soient α un ordinal et x un ensemble.
Si $x \in \alpha$ alors x est un ordinal.

Démonstration

Supposons que $x \in \alpha$.

• Par définition α est un ordinal donc α est transitif et $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.
Comme $x \in \alpha$, on a donc $x \subseteq \alpha$ par définition de la transitivité.
Or $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné donc $\boxed{(x, \in) \text{ est strictement bien ordonné}}$ d'après la proposition 3 page 8.

• Il reste donc à montrer que x est transitif.
Soit $y \in x$.
On a vu que $x \subseteq \alpha$ donc $y \in \alpha$ par définition de l'inclusion.
On a donc $y \subseteq \alpha$ car α est transitif.
Montrons que $y \subseteq x$.
Soit $z \in y$.
Comme $y \subseteq \alpha$, on a en particulier $z \in \alpha$ par définition de l'inclusion.
On a donc $z \in y \in x$, et tous les trois sont des éléments de α.
Or $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné donc $\in$ est transitif sur α.

On a donc $z \in x$ par transitivité.

Donc $\forall z \in y, z \in x$ et donc $y \subseteq x$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall y \in x, y \subseteq x$.

Ainsi $\boxed{x \text{ est transitif}}$.

Finalement, $(x, \in)$ est strictement bien ordonné et x est transitif.

Donc $\boxed{x \text{ est un ordinal}}$.

CQFD.

Comme nous venons de le voir, les éléments d'un ordinal sont eux aussi des ordinaux. En particulier, nous allons pouvoir montrer des propriétés directement sur les ordinaux en toute généralité, et mécaniquement cela concernera donc en particulier les éléments des ordinaux eux-mêmes.

Proposition 7 (L'intersection de deux ordinaux est un ordinal)

Soient α et β deux ordinaux.
Alors $\alpha \cap \beta$ est un ordinal.

Démonstration

Comme α est un ordinal, $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.

Or $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ donc $\boxed{(\alpha \cap \beta, \in) \text{ est strictement bien ordonné}}$ d'après la prop. 3 p. 8.

Il reste à montrer que $\alpha \cap \beta$ est transitif.

Soit $x \in \alpha \cap \beta$.

On a donc $x \in \alpha$ et $x \in \beta$.

Or α et β sont des ordinaux donc sont transitifs donc $x \subseteq \alpha$ et $x \subseteq \beta$.

On a donc $x \subseteq \alpha \cap \beta$.

Donc $\forall x \in \alpha \cap \beta, x \subseteq \alpha \cap \beta$.

Donc $\boxed{\alpha \cap \beta \text{ est transitif}}$.

Finalement $(\alpha \cap \beta, \in)$ est strictement bien ordonné et $\alpha \cap \beta$ est transitif.

On a donc $\boxed{\alpha \cap \beta \text{ est un ordinal}}$.

CQFD.

Nous l'avons annoncé quand nous avons introduit la notion d'ordinal : étant donné un ordinal, nous voulons faire de $\subseteq$ l'ordre (large) et de $\in$ l'ordre strict. Par définition d'un ordinal, $\in$ est le bon ordre strict concerné. La proposition suivante va nous montrer que $\subseteq$ est quant à lui l'ordre (large) associé à $\in$.

Proposition 8 (Ordre large sur les ordinaux)

Soient α et β deux ordinaux.
On a l'équivalence
$$\alpha \subseteq \beta \iff (\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta)$$

Démonstration

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\alpha \subseteq \beta$ et $\alpha \neq \beta$.

Montrons que $\alpha \in \beta$.

Posons $X := \beta \backslash \alpha$: par hypothèse on a $X \neq \varnothing$.

Or β est un ordinal donc $(\beta, \in)$ est strictement bien ordonné.

Donc comme $X \subseteq \beta$ et $X \neq \varnothing$, on en déduit que X admet un minimum ξ pour $\in$.

Comme $\xi \in X$ et $X \subseteq \beta$, on a $\xi \in \beta$ par définition de l'inclusion.

On peut donc montrer $\xi = \alpha$ pour conclure.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $\mu \in \xi$.

Comme $\xi \in \beta$ et β est transitif (car ordinal), on a $\mu \in \beta$.

Comme $\mu \in \xi$ et que ξ est le minimum de $(X, \in)$, on a $\mu \notin X$.

On a donc $\mu \in \beta$ et $\mu \notin X$ donc $\mu \in \beta \backslash X = \alpha$.

Donc $\xi \subseteq \alpha$.

$\boxed{\supseteq}$

Supposons par l'absurde que $\xi \neq \alpha$, c'est-à-dire $\xi \subsetneq \alpha$ d'après ce qui précède.

On a donc $\alpha \backslash \xi \neq \varnothing$ donc il existe $\mu \in \alpha \backslash \xi$.

En particulier on a $\mu \in \alpha$.

Comme $\alpha \subseteq \beta$ par hypothèse, on a $\mu \in \beta$ par définition de l'inclusion.

Ainsi on a $\xi \in \beta$ et $\mu \in \beta$.

Or β est un ordinal donc $(\beta, \in)$ est strictement bien ordonné et donc $\in$ est un ordre strict total sur β. On a donc $\mu \in \xi$ ou $\xi \in \mu$ ou $\mu = \xi$.

- $\mu \in \xi$ est impossible.
  En effet par définition on a $\mu \in \alpha \backslash \xi$ donc $\mu \notin \xi$.
- $\xi \in \mu$ est impossible.
  En effet on aurait $\xi \in \mu \in \alpha$ donc $\xi \in \alpha$ car α est transitif car ordinal.
  Or on a $\xi \in X = \beta \backslash \alpha$ donc $\xi \notin \alpha$.
- $\mu = \xi$ est impossible.

En effet on a $\xi \in X = \beta \backslash \alpha$ donc $\xi \notin \alpha$ alors que $\mu \in \alpha \backslash \xi$ donc $\mu \in \alpha$.

On a donc $\xi \notin \alpha$ et $\mu \in \alpha$ donc on ne peut pas avoir $\mu = \xi$.

On aboutit donc à une contradiction.

Par l'absurde, on a prouvé que $\xi = \alpha$.

Comme $\xi \in \beta$, on a donc $\alpha \in \beta$.

Donc $\left(\alpha \subseteq \beta \text{ et } \alpha \neq \beta\right) \implies \alpha \in \beta$.

Donc $\boxed{\alpha \subseteq \beta \implies \left(\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta\right)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$.

Si $\alpha \in \beta$ alors $\alpha \subseteq \beta$ car β est transitif car ordinal.

Si $\alpha = \beta$ alors en particulier $\alpha \subseteq \beta$.

Dans tous les cas on a $\alpha \subseteq \beta$.

Donc si $\boxed{\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta \text{ alors } \alpha \subseteq \beta}$.

CQFD.

Remarque :
Désormais, on utilisera régulièrement le fait qu'étant donné un ordinal, il est naturellement muni de $\subseteq$ en tant que relation de bon ordre et que $\in$ est le bon ordre strict associé. En particulier pour deux ordinaux α et β, on a l'équivalence $\alpha \subsetneq \beta \iff \alpha \in \beta$.

Le fait d'avoir prouvé ces quelques propriétés générales sur les ordinaux nous permet d'entrevoir le magnifique théorème qui va suivre : celui-ci affirme qu'en fait c'est toute la classe ON qui se comporte comme un ordinal.

Théorème 1 (Bon ordre strict sur les ordinaux)

Soient α, β et γ trois ordinaux.

1. Si $\alpha \in \beta$ et $\beta \in \gamma$ alors $\alpha \in \gamma$.
   Ainsi $\in$ est **transitif** sur ON.
2. On a $\alpha \notin \alpha$.
   Ainsi $\in$ est **antiréflexive** sur ON.

Ainsi par 1 et 2, $\in$ peut être vu comme un **ordre strict** sur ON.

3. On a $\alpha \in \beta$ ou $\beta \in \alpha$ ou $\alpha = \beta$.
   Autrement dit $\in$ est un ordre strict **total** sur ON.
4. Soit E un ensemble non vide dont les éléments sont tous des ordinaux.
   Alors $(E, \in)$ possède un minimum.
   Ainsi $\in$ est un **bon** ordre strict sur ON.

Ainsi, $\in$ est un **bon ordre strict** sur ON.

Démonstration

1. Supposons que $\alpha \in \beta \in \gamma$.
On a alors $\boxed{\alpha \in \gamma}$ car γ est transitif car ordinal.

2.

Supposons par l'absurde que $\alpha \in \alpha$.
En prenant $x := \alpha$, on a l'existence d'un $x \in \alpha$ tel que $x \in x$.
Or α est un ordinal donc $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné donc $\in$ est antiréflexive sur α. En particulier $\forall x \in \alpha, x \notin x$, d'où l'absurdité.

Par l'absurde, on a donc $\boxed{\alpha \notin \alpha}$.

3. Considérons $\delta := \alpha \cap \beta$.
Alors δ est un ordinal d'après la proposition 7 page 16.
Or on a $\delta \subseteq \alpha$ donc ($\delta \in \alpha$ ou $\delta = \alpha$) d'après la proposition 8 page 17.
De même on a $\delta \subseteq \beta$ donc ($\delta \in \beta$ ou $\delta = \beta$) d'après la proposition 8 page 17.

- Si $\delta = \alpha$ alors comme on a ($\delta \in \beta$ ou $\delta = \beta$) on a $\boxed{\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta}$.
- Si $\delta = \beta$ alors comme on a ($\delta \in \alpha$ ou $\delta = \alpha$) on a $\boxed{\beta \in \alpha \text{ ou } \beta = \alpha}$.
- Sinon si $\delta \neq \alpha$ et $\delta \neq \beta$ alors d'après ce qui précède on a $\delta \in \alpha$ et $\delta \in \beta$.
  On a donc $\delta \in \alpha \cap \beta$ par définition de l'intersection.
  Mais on a aussi $\delta = \alpha \cap \beta$ par définition de δ, donc $\delta \in \delta$, ce qui contredit 1.

Finalement, on a bien $\boxed{\alpha \in \beta \text{ ou } \beta \in \alpha \text{ ou } \alpha = \beta}$.

4. Comme E est non vide, il existe $\varepsilon \in E$.
Si ε est le minimum de $(E, \in)$ c'est bon.

Supposons donc que ε n'est pas le minimum de $(E, \in)$.
Il existe donc $\mu \in E$ tel que l'on n'a ni $\varepsilon \in \mu$ ni $\varepsilon = \mu$.
Or tous les éléments de E sont des ordinaux donc $\mu \in \varepsilon$ d'après 3.
Ainsi $\mu \in E$ et $\mu \in \varepsilon$ donc $\mu \in \varepsilon \cap E$ et donc $\varepsilon \cap E \neq \varnothing$.
Donc $\varepsilon \cap E$ est une partie non vide de ε.
Or $(\varepsilon, \in)$ est strictement bien ordonné car ε est un ordinal.
Donc $\varepsilon \cap E$ possède un minimum ξ.

Montrons que ξ est le minimum de E.

Soit $\nu \in E$.
Comme tous les éléments de E sont des ordinaux, on a $\nu \in \varepsilon$ ou $\varepsilon \in \nu$ ou $\nu = \varepsilon$

d'après 3.

- Si $\nu \in \varepsilon$ alors $\nu \in \varepsilon \cap E$ donc $\xi \in \nu$ car ξ est le minimum de $\varepsilon \cap E$.
- Si $\varepsilon \in \nu$, comme $\xi \in \varepsilon \cap E$ on a $\xi \in \varepsilon$ donc $\xi \in \varepsilon \in \nu$ et donc $\xi \in \nu$ d'après 1.
- Si $\nu = \varepsilon$, comme $\xi \in \varepsilon \cap E$ on a $\xi \in \varepsilon$ donc $\xi \in \nu$.

Dans tous les cas on a $\xi \in \nu$.

Donc ξ est le minimum de E.

Dans tous les cas, $\boxed{E \text{ admet un minimum}}$.

CQFD.

Remarque :
Ainsi on dira simplement que $(ON, \in)$ est une classe strictement bien ordonnée, et grâce à la proposition 8 page 17, nous savons que l'ordre associé est $\subseteq$, donc nous dirons aussi que $(ON, \subseteq)$ est une classe bien ordonné. Ces affirmations doivent être comprises comme étant un résumé du théorème qui précède.

Nous avons expliqué avant le théorème que la classe des ordinaux ON se comporte elle-même comme un ordinal, mais nous n'avons pas montré de propriété qui s'apparente à la transitivité d'un ordinal. En réalité si, c'est l'objet de la proposition 6 page 15 qui affirme que tout élément d'un ordinal est aussi un ordinal. Autrement dit, pour tout $\alpha \in ON$, tous les éléments de α sont des ordinaux et donc $\alpha \subseteq ON$.

Nous avons affirmé pour justifier de l'intérêt des classes qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ordinaux, si bien que ON est une classe qui n'est pas associée à un ensemble. Montrons-le enfin : c'est le fameux **paradoxe de Burali-Forti**.

Théorème 2 (Paradoxe de Burali-Forti)

Il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ordinaux.

Démonstration

Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble E tel que tout ordinal en est un élément.

Considérons alors $X := \left\{ x \in E \;\middle|\; x \text{ est un ordinal} \right\}$.

• Montrons X est transitif.

Soit $\alpha \in X$.

Par définition α est un ordinal.

Soit $\beta \in \alpha$.

Alors β est un ordinal d'après la proposition 6 page 15.

On a donc $\beta \in E$ par définition de E et donc $\beta \in X$ par définition de X.

Donc $\forall \beta \in \alpha, \beta \in X$ donc $\alpha \subseteq X$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall \alpha \in X, \alpha \subseteq X$ donc $\boxed{X \text{ est transitif}}$.

• D'après le théorème 1 page 18 $\boxed{(X, \in) \text{ est strictement bien ordonné}}$ car tous ses éléments sont des ordinaux.

Ainsi X est transitif et $(X, \in)$ est strictement bien ordonné.
Donc X est un ordinal donc $X \in E$ par définition de E donc $X \in X$ par définition de X.
C'est en contradiction avec l'antiréflexivité de $\in$ chez les ordinaux.
CQFD.

Pour la petite histoire

Cesare Burali-Forti (13 août 1861 – 21 janvier 1931) est un mathématicien italien.

Cesare Burali-Forti est assistant de Giuseppe Peano à Turin de 1894 à 1896. Bertrand Russell a nommé paradoxe de Burali-Forti, le paradoxe du plus grand ordinal en théorie des ensembles, en référence à un article de 1897 où le mathématicien italien, croyant démontrer que deux ordinaux ne sont pas toujours comparables, fait le raisonnement qui conduit au paradoxe décrit par Russell.

Nous avons vu lors de la proposition 7 page 16 que l'intersection de deux ordinaux est aussi un ordinal. Il en va en fait de même pour l'union de deux ordinaux, et plus généralement pour l'intersection et la réunion d'ensembles d'ordinaux. Cela nous fournit au passage une expression explicite de la borne supérieure et du minimum d'un ensemble d'ordinaux.

Proposition 9 (Union et intersection d'ordinaux)

Soient α et β deux ordinaux.

1. $\alpha \cup \beta$ est un ordinal et $\alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)$.
2. $\alpha \cap \beta$ est un ordinal et $\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)$.

Soit X un ensemble dont tous les éléments sont des ordinaux.

3. $\bigcup X$ est un ordinal et $\bigcup X = \sup(X)$.
   La notion de borne supérieure est à comprendre ici "*parmi les ordinaux*".
4. Si $X \neq \varnothing$ alors $\bigcap X$ est un ordinal et $\bigcap X = \min(X)$.

Démonstration

Comme α et β sont deux ordinaux, on a $\alpha \in ON$ et $\beta \in ON$.

Or $(ON, \in)$ est strictement bien ordonné donc en particulier $\in$ est total sur ON.

On a donc $\alpha \in \beta$ ou $\beta \in \alpha$ ou $\alpha = \beta$.

1.

- Si $\alpha \in \beta$ alors $\beta = \max(\alpha, \beta)$ par définition du maximum.
  Or β est un ordinal donc est transitif donc $\alpha \subseteq \beta$ et donc $\alpha \cup \beta = \beta$.
  En particulier $\alpha \cup \beta$ est un ordinal, et on a donc $\alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)$.
- Si $\beta \in \alpha$ alors on raisonne de la même manière pour montrer $\alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)$.
- Si $\alpha = \beta$ alors $\alpha \cup \beta = \alpha$ qui est bien un ordinal.
  On a donc $\alpha \cup \beta = \alpha = \max(\alpha, \alpha) = \max(\alpha, \beta)$.

Dans tous les cas $\boxed{\alpha \cup \beta \text{ est un ordinal et } \alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)}$.

2. On a déjà vu lors de la proposition 7 page 16 que $\boxed{\alpha \cap \beta \text{ est un ordinal}}$.

- Si $\alpha \in \beta$ alors $\alpha = \min(\alpha, \beta)$ par définition du minimum.
  Or β est un ordinal donc est transitif donc $\alpha \subseteq \beta$ donc $\alpha \cap \beta = \alpha$.
  On a donc $\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)$.
- Si $\beta \in \alpha$ alors on raisonne de la même manière pour montrer $\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)$.
- Si $\alpha = \beta$ alors $\alpha \cap \beta = \alpha$ qui est bien un ordinal.
  On a donc $\alpha \cap \beta = \alpha = \min(\alpha, \alpha) = \min(\alpha, \beta)$.

Dans tous les cas on a $\boxed{\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)}$.

3. Commençons par montrer que $\bigcup X$ est un ordinal.

• Montrons que $\bigcup X$ est transitif.

Soit $x \in \bigcup X$.
Par définition de la réunion, il existe $\alpha \in X$ tel que $x \in \alpha$.
Comme X est un ensemble d'ordinaux, α est un ordinal.
Donc α est transitif et donc $x \subseteq \alpha$.
Comme $\alpha \in X$, on a $\alpha \subseteq \bigcup X$ donc $x \subseteq \bigcup X$ par transitivité de l'inclusion.

Donc $\forall x \in \bigcup X, x \subseteq \bigcup X$ donc $\boxed{\bigcup X \text{ est transitif}}$.

• Montrons que $\in$ est un bon ordre strict sur $\bigcup X$.

- $\in$ est antiréflexive sur $\bigcup X$.

Soit $x \in \bigcup X$.

Par définition de la réunion, il existe $\alpha \in X$ tel que $x \in \alpha$.

Comme X est un ensemble d'ordinaux, α est un ordinal.

Donc x est un ordinal d'après la proposition 6 page 15.

En particulier $x \notin x$ par antiréflexivité de $\in$ sur ON.

Donc $\forall x \in \bigcup X, x \notin x$ donc $\in$ est antiréflexive sur $\bigcup X$.

▶ $\in$ est transitive sur $\bigcup X$.

Soient x, y et z dans $\bigcup X$.

Il existe α, β et γ dans X tels que $x \in \alpha$, $y \in \beta$ et $z \in \gamma$.

Or tous les éléments de X sont des ordinaux donc α, β et γ sont des ordinaux.

En particulier d'après 1 $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ est un ordinal, dont x, y et z sont des éléments.

Supposons que $x \in y \in z$.

Comme $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ est un ordinal, $(\alpha \cup \beta \cup \gamma, \in)$ est strictement bien ordonné. Donc $\in$ est transitive sur $\alpha \cup \beta \cup \gamma$.

On a donc $x \in z$ par transitivité.

Donc si $x \in y \in z$ alors $x \in z$.

Donc $\in$ est transitive sur $\bigcup X$.

Ainsi $\in$ est un ordre strict sur $\bigcup X$.

▶ $\in$ est un bon ordre strict sur $\bigcup X$.

Soit A une partie non vide de $\bigcup X$.

Soit $a \in A$.

Comme $A \subseteq \bigcup X$ on a $a \in \bigcup X$ par définition de l'inclusion.

Par définition de la réunion, il existe $\alpha \in X$ tel que $a \in \alpha$.

Or tous les éléments X sont des ordinaux donc α est un ordinal.

Donc a est un ordinal d'après la proposition 6 page 15.

Donc tous les éléments de A sont des ordinaux.

Comme A est non vide, il possède un minimum d'après le théorème 1 page 18.

Donc toutes les parties non vides de $\bigcup X$ possèdent un minimum.

Donc $\in$ est un bon ordre strict sur $\bigcup X$.

Donc $\boxed{\bigcup X \text{ est un ordinal}}$.

• Montrons que $\bigcup X = \sup(X)$.

Pour tout $\alpha \in X$, on a $\alpha \subseteq \bigcup X$ par définition de la réunion.

En particulier $\bigcup X$ est un majorant de X dans $(ON, \subseteq)$.

Soit β un majorant de X dans $(ON, \subseteq)$.

On a donc pour tout $\alpha \in X$, on a $\alpha \subseteq \beta$.

On a donc $\bigcup X \subseteq \beta$ par minimalité de la réunion pour l'inclusion.

Donc tout ordinal majorant de X dans $(ON, \subseteq)$ est plus grand que ou égal à $\bigcup X$.

Ainsi, $\bigcup X$ est le plus petit ordinal majorant de X dans $(ON, \subseteq)$.

Donc $\boxed{\sup(X) = \bigcup X}$.

4. Supposons que X est non vide.

Commençons par montrer que $\bigcap X$ est un ordinal.

• $\bigcap X$ est transitif.

En effet, soit $x \in \bigcap X$.

Pour tout $\alpha \in X$, on a $x \in \alpha$.

Or tous les éléments de X sont des ordinaux donc sont transitifs..

Donc pour tout $\alpha \in X$, on a $x \subseteq \alpha$.

Donc $x \subseteq \bigcap X$ par minimalité de l'intersection pour l'inclusion.

Donc $\forall x \in \bigcap X, x \subseteq \bigcap X$.

Donc $\bigcap X$ est transitif.

• Comme X est non vide, il existe $\alpha \in X$.

On a alors $\bigcap X \subseteq \alpha$.

Or tous les éléments de X sont des ordinaux donc α est un ordinal.

Donc $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.

Donc $\left(\bigcap X, \in\right)$ est strictement bien ordonné d'après la proposition 3 page 8.

On en conclut que $\boxed{\bigcap X \text{ est un ordinal}}$.

• Montrons que $\bigcap X = \min(X)$.

Par définition X est un ensemble non vide d'ordinaux.

Donc $(X, \in)$ admet un minimum ξ d'après le théorème 1 page 18.

Or $\subseteq$ est l'ordre large associé à $\in$ sur ON d'après la proposition 8 page 17.

Donc $\forall \alpha \in X, \xi \subseteq \alpha$ par définition du minimum.

Donc $\xi \subseteq \bigcap X$ par maximalité de l'intersection pour l'inclusion.

Or on a $\xi \in X$ par définition du minimum, donc $\bigcap X \subseteq \xi$ et donc $\bigcap X = \xi$.

Or par définition $\xi = \min(X)$ donc $\boxed{\bigcap X = \min(X)}$.

CQFD.

4 Ordinaux successeurs, limites et entiers naturels

Ce qui nous a motivé à introduire la notion de bon ordre est le fait qu'étant donné un élément x, il est possible de répondre à la question « *quel élément suit directement x ?* ». En effet, nous avons dit que dans ce cas-là, il suffit de prendre l'ensemble des éléments strictement plus grands que x, et de considérer alors son minimum. On parle alors du **successeur** de x. Dans le cas particulier des ordinaux, ce successeur a une expression simple (que l'on peut quand-même définir en toute généralité).

Définition 9 (Successeur d'un ensemble)

Soit x un ensemble.
On appelle **successeur** de x l'ensemble $S(x) := x \cup \{x\}$.

Exemple :
Il est temps de définir nos premiers entiers naturels.
On pose $0 := \varnothing$ et $1 := S(0)$.
Plus précisément, on a $1 = S(0) = S(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\}$.
Nous verrons un peu plus tard comment définir tous les autres entiers naturels.
Quand nous aurons défini les entiers naturels, nous verrons que $n+1$ sera défini comme étant $S(n)$, ce qui correspond bien à l'intuition de l'entier naturel qui suit directement n.

Nous avons défini la notion de successeur d'un ensemble en toute généralité, mais cette notion devient intéressante dans le cas des ordinaux puisqu'elle répond bien à la question de l'ordinal qui suit directement. En effet, on retrouve par exemple le fait que pour n et m deux entiers naturels, on a l'équivalence $m < n+1 \iff m \leq n$.

Proposition 10 (Successeur d'un ordinal)

Soient α et β deux ordinaux.

1. On a l'équivalence $\beta \in S(\alpha) \iff \beta \subseteq \alpha$.
2. $S(\alpha)$ est un ordinal tel que $\alpha \in S(\alpha)$.

Démonstration

1. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \beta \in S(\alpha) &\iff \beta \in \alpha \cup \{\alpha\} \\ &\iff \beta \in \alpha \text{ ou } \beta \in \{\alpha\} \\ &\iff \beta \in \alpha \text{ ou } \beta = \alpha \\ &\iff \beta \subseteq \alpha \text{ d'après la prop. 8 p. 17} \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence $\boxed{\beta \in S(\alpha) \iff \beta \subseteq \alpha}$.

2. Comme $\alpha \subseteq \alpha$, on obtient $\boxed{\alpha \in S(\alpha)}$ d'après 1.

• Montrons que $S(\alpha)$ est transitif.

Soit $x \in S(\alpha)$.

On a alors $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ par définition donc $x \in \alpha$ ou $x \in \{\alpha\}$.

- Si $x \in \alpha$ alors $x \subseteq \alpha$ car α est transitif car ordinal.
- Si $x \in \{\alpha\}$ alors $x = \alpha$ et donc $x \subseteq \alpha$ en particulier.

Dans les deux cas on a $x \subseteq \alpha$.

Comme $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ on a $\alpha \subseteq S(\alpha)$ et donc $x \subseteq S(\alpha)$.

Donc $\forall x \in S(\alpha), x \subseteq S(\alpha)$.

Donc $S(\alpha)$ est transitif.

• Montrons que $\in$ est un bon ordre strict sur $S(\alpha)$.

Comme $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, chaque élément de $S(\alpha)$ est soit un élément de α, soit α lui-même.

Or α est un ordinal donc tous les éléments de α sont des ordinaux d'après la proposition 6 page 15. Donc tous les éléments de $S(\alpha)$ sont des ordinaux.

En particulier $\in$ est transitive et antiréflexive sur $S(\alpha)$ d'après le théorème 1 page 18.

De même, toute partie non vide de $S(\alpha)$ est alors un ensemble non vide d'ordinaux.

Donc toute partie non vide de $S(\alpha)$ admet un minimum d'après ce même théorème.

On en conclut que $\in$ est un bon ordre strict sur $S(\alpha)$.

Ainsi, $S(\alpha)$ est transitif et $\in$ est un bon ordre strict sur $S(\alpha)$.

Donc $\boxed{S(\alpha) \text{ est un ordinal}}$.

CQFD.

Nous allons enfin définir la notion d'**entiers naturels** : il s'agit des premiers ordinaux. En effet 0 est le plus petit des ordinaux, 1 est son successeur, 2 est le successeur de 1 et ainsi de suite. On pourrait penser qu'en partant de 0 et en enchaînant l'opération de successeur suffisamment de fois, on finirait par avoir parcouru tous les ordinaux. Il n'en est rien : il existe des ordinaux qui ne seront jamais atteints de cette manière. Le plus petit de ces ordinaux est noté ω : oui, il s'agit tout simplement de l'ensemble des entiers naturels, aussi noté $\mathbb{N}$. Tout ordinal plus petit que lui va donc lui appartenir, et donc être un entier naturel. Il n'a donc pas de prédécesseur direct : en effet si $\alpha \in \omega$ alors α est un entier naturel par définition donc $S(\alpha) = \alpha + 1$ est aussi un entier naturel donc n'est pas ω (puisque sinon $\omega \in \omega$, ce qui est impossible chez les ordinaux).

Ainsi il existe des ordinaux qui ne sont successeurs d'aucun ordinal : il y a 0 bien sûr, mais aussi ω comme nous venons de le voir. Nous allons les appeler ordinaux **limites**, car il y a en quelque sorte une limite à franchir pour les atteindre, on ne peut pas simplement partir d'un ordinal et enchaîner des opérations de successeurs. Pour des raisons de simplifications de certains résultats, nous n'allons pas considérer 0 comme un ordinal limite, mais cela peut se comprendre par le fait que dans le cas précis de 0, il est le tout premier ordinal donc il n'y a pas eu de limite à franchir.

Définition 10 (Ordinaux successeurs, limites et entiers naturels)

Soit β un ordinal.

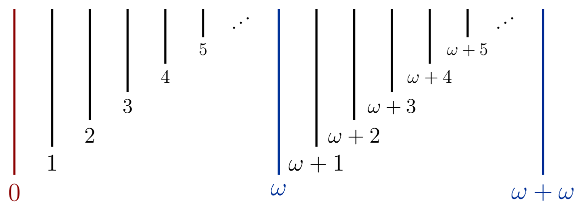
1. On dit que β est **successeur** si et seulement s'il existe un ordinal α tel que $\beta = S(\alpha)$.
2. Supposons que $\beta \neq 0$.
   On dit que β est **limite** si et seulement si β n'est pas successeur.
3. On dit que β est un **entier naturel** si et seulement si pour tout ordinal $\alpha \subseteq \beta$,
   - ou bien $\alpha = 0$
   - ou bien α est un ordinal successeur.

   On dit aussi que β est **fini**.

Exemple :

1. Comme $0 = \varnothing$, on a déjà vu que 0 est un ordinal.
   1 en tant que successeur de 0 est aussi un ordinal.
   0 et 1 sont tous les deux des entiers naturels.
   1 est un successeur (de 0 donc) mais 0 n'est ni successeur ni limite.
2. Quand nous l'aurons défini, nous verrons que ω l'ensemble des entiers naturel est un ordinal limite.
3. De même, nous définirons plus tard l'ordinal $\omega+1 = S(\omega)$, qui est lui bien successeur de ω donc n'est pas limite, mais n'est pas entier naturel non plus puisque $\omega \subseteq \omega + 1$ alors que ω n'est ni 0 ni successeur.

Pour aider à visualiser tout cela, on peut proposer l'illustration suivante :



Une représentation visuelle des ordinaux.

Il faut ici voir la disposition des bâtons comme s'étendant à l'infini à l'horizon, l'ordre des bâtons étant rangés de la gauche vers la droite : au début on a un bâton pour chaque entier naturel, puis après tous les entiers naturels vient le bâton associé à ω. Ensuite vient le bâton associé à $\omega + 1$, puis $\omega + 2$ et ainsi de suite pour tous les ordinaux de la forme $\omega + n$ où n est un entier naturel, donc une infinité de bâtons sont disposés après celui de ω. Mais après tous ceux-là se trouve un bâton associé à l'ordinal $\omega + \omega$, et ainsi de suite. Nous aurons bien entendu tout le temps de définir proprement chacun de ces ordinaux, l'idée est ici simplement de comprendre intuitivement ce que nous sommes en train de construire.

On peut voir sur l'illustration que les ordinaux limites sont les grands bâtons, qui se retrouvent à droite de toute une infinité de bâton sans n'avoir de prédécesseur direct : nous les avons représentés en bleu. En noir sont représentés les ordinaux successeurs, et le seul ordinal qui n'est ni limite ni successeur, à savoir 0, a été représenté en rouge.

Proposition 11 (Successeur d'un entier naturel)

Soit n un entier naturel.

1. $S(n)$ est un entier naturel.
2. Tous les éléments de n sont aussi des entiers naturels.

Démonstration

1.

Soit un ordinal $\alpha \subseteq S(n)$.

Par définition n est un entier naturel donc est un ordinal.

Donc $S(n)$ est un ordinal d'après la proposition 10 page 25.

Ainsi on a $\alpha \subseteq S(n)$ avec α et $S(n)$ deux ordinaux.

On a donc ou bien $\alpha \in S(n)$ ou bien $\alpha = S(n)$ d'après la proposition 8 page 17.

- Supposons que $\alpha \in S(n)$.
  On a alors $\alpha \subseteq n$ d'après la proposition 10 page 25.
  Ainsi α est un ordinal qui est une partie de l'entier naturel n.
  On a donc par définition ou bien $\alpha = \varnothing$ ou bien α est un successeur.
- Supposons que $\alpha = S(n)$.
  Comme n est un entier naturel, n est un ordinal.
  Donc $\alpha = S(n)$ est un successeur.

Dans les deux cas, ou bien $\alpha = 0$ ou bien α est un successeur.

Donc tous les ordinaux inclus dans $S(n)$ sont ou 0 ou bien un successeur.

Comme $S(n)$ est un ordinal, c'est donc par définition $\boxed{\text{un entier naturel}}$.

2. Soit $\alpha \in n$.

Par définition n est un entier naturel donc est un ordinal.

Donc α est un ordinal d'après la proposition 6 page 15.

Comme $\alpha \in n$, on a donc $\alpha \subseteq n$ car n est transitif car ordinal.

Soit un ordinal $\beta \subseteq \alpha$.

On a donc $\beta \subseteq n$ par transitivité de l'inclusion.

Or n est un entier naturel et β un ordinal.

Donc on a ou bien $\beta = 0$ ou bien β est un successeur.

Donc tous les ordinaux inclus dans α sont ou 0 ou bien un successeur.

Comme α est un ordinal, par définition $\boxed{\alpha \text{ est un entier naturel}}$.

. **CQFD**.

Bien souvent en mathématiques nous sommes amenés à mener un **raisonnement par récurrence** afin de prouver qu'une assertion P à paramètres est vraie pour tout entier naturel n. Pour cela on raisonne en deux étapes :

1. On prouve que $P(0)$ est vraie : c'est l'étape d'**initialisation**.
2. On prouve que pour un entier naturel n quelconque, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est aussi vraie. C'est l'étape d'**hérédité**.

Grâce à ces deux étapes, on en conclut que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Qu'est-ce qui justifie la validité de ce raisonnement ? La réponse se cache dans le théorème suivant.

Théorème 3 (Principe d'induction chez les entiers naturels)

Soit X un ensemble tel que :

1. $0 \in X$
2. Pour tout $x \in X$ on a $S(x) \in X$.

Alors X contient tous les entiers naturels.

Démonstration

Soit n un entier naturel.

Supposons par l'absurde que $n \notin X$.

Considérons $Y := S(n) \backslash X$.

Comme n est un entier naturel, $S(n)$ est un entier naturel d'après la prop. 11 p. 28.

Donc tous les éléments de $S(n)$ sont des entiers naturels d'après la prop. 11 p. 28.

Donc comme $Y \subseteq S(n)$, tous les éléments de Y sont des entiers naturels.

On a $n \in S(n)$ d'après la proposition 10 page 25 et $n \notin X$ par hypothèse.

On a donc $n \in Y$ donc Y est un ensemble non vide d'entiers naturels.

Il possède donc un entier naturel minimum k d'après le théorème 1 page 18.

On a $k \subseteq k$ donc k est un ordinal inclus dans un entier naturel.

Donc k est ou bien 0 ou bien un successeur par définition.

Or $k \in Y = S(n) \backslash X$ donc $k \notin X$. Comme $0 \in X$ par hypothèse, on a donc $k \neq 0$.

Donc k est un successeur : il existe un ordinal i tel que $k = S(i)$.

Or on a $i \in S(i) = k$ d'après la proposition 10 page 25.

Donc $i \notin Y$ car k est le minimum de Y.

Mais $i \in k \subseteq n \in S(n)$ et tous sont des ordinaux.

On a donc $i \in S(n)$ par transitivité de $\in$ sur ON.

Ainsi $i \notin Y$ et $i \in S(n)$ donc $i \in S(n) \backslash Y = X$.

Or par hypothèse X est stable par successeur donc $k = S(i) \in X$.

C'est absurde puisque $k \in Y$ par définition et $Y = S(n) \backslash X$.

Donc par l'absurde on vient donc de montrer $\boxed{n \in X}$.

CQFD.

Nous pouvons donc justifier la validité du raisonnement par récurrence : imaginons avoir démontré l'étape d'initialisation et l'étape d'hérédité. On peut alors considérer l'ensemble $X := \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, P(n)\right\}$ qui répond alors aux hypothèses du théorème ci-dessus : il contient tous les entiers naturels, ce qui prouve donc bien que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel.

En vérité, il manque quelque chose pour valider ce que nous venons d'affirmer : l'existence de $\mathbb{N}$ lui-même. En effet on affirme depuis le début que $\mathbb{N}$, l'ensemble de tous les entiers naturels existe, et on l'a même aussi noté ω en affirmant qu'il s'agit d'un ordinal. Malheureusement, on ne peut le faire sans un axiome, que l'on va donc rajouter aux différents axiomes de ZFC du précédent livre : l'**axiome de l'infini**.

Axiome 1 (de l'infini)

Il existe au moins un ensemble X tel que

1. $0 \in X$
2. Pour tout $x \in X$ on a $S(x) \in X$.

Voilà, nous sommes à présents armés pour définir proprement $\mathbb{N}$.

Proposition 12 (Ensemble des entiers naturels)

Il existe un unique ensemble $\mathbb{N}$ tel que pour tout ensemble n, on a l'équivalence

$$n \in \mathbb{N} \iff n \text{ est un entier naturel}$$

On dit donc que $\mathbb{N}$ est l'**ensemble des entiers naturels**, et on le note aussi parfois ω.

Démonstration

Existence :

D'après l'**axiome de l'infini**, il existe un ensemble X tel que

1. $0 \in X$
2. Pour tout $x \in X$ on a $S(x) \in X$.

Posons alors $\mathbb{N} := \{x \in X \mid x \text{ est un entier naturel}\}$.

Soit n un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $n \in \mathbb{N}$ alors par définition n est un entier naturel.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que n est un entier naturel.

Alors $n \in X$ d'après le principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc $n \in X$ et n est un entier naturel.

Donc $n \in \mathbb{N}$ par définition.

Donc si n est un entier naturel alors $\mathbb{N}$.

Ainsi pour tout ensemble n, on a bien l'équivalence $\boxed{n \in \mathbb{N} \iff n \text{ est un entier naturel}}$.

Unicité :

L'unicité est garantie par le fait que cette équivalence caractérise l'appartenance à $\mathbb{N}$.

CQFD.

Avant de prouver que $\mathbb{N}$ est un ordinal, intéressons-nous aux segments initiaux de ON.

Proposition 13 (Segment initiaux des ordinaux)

Soit X un ensemble.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est un ordinal.
2. Tous les éléments de X sont des ordinaux et X est transitif.
3. X est un segment initial de ON.

Démonstration

Nous allons montrer 1⇔2 et 2⇔3.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que X est un ordinal.

En particulier X est transitif par définition.

De plus tous les éléments de X sont des ordinaux d'après la proposition 6 page 15.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

Supposons que tous les éléments de X sont des ordinaux et X est transitif.

Alors $(X, \in)$ est strictement bien ordonné d'après le théorème 1 page 18.

Comme X est transitif, on en conclut que $\boxed{X \text{ est un ordinal}}$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$

Supposons que tous les éléments de X sont des ordinaux et X est transitif.

En particulier on sait déjà que $X \subseteq ON$ par définition.

Soient α et β deux ordinaux.

Supposons que $\alpha \in \beta \in X$.

Comme X est transitif et $\beta \in X$, on a $\beta \subseteq X$.

Comme $\alpha \in \beta$ on a donc $\alpha \in X$ par définition de l'inclusion.

Donc si $\alpha \in \beta \in X$ alors $\alpha \in X$.

Donc $\boxed{X \text{ est un segment initial de } ON}$.

$\boxed{2 \Leftarrow 3}$

Supposons que X est un segment initial de ON.

Par définition on a $X \subseteq ON$.

Autrement dit, tous les éléments de X sont des ordinaux.

Soit $\beta \in X$.

Comme on vient de le dire, tous les éléments de X sont des ordinaux.

Donc β est un ordinal.

Soit $\alpha \in \beta$.

Alors α est un ordinal en tant qu'élément d'un ordinal.

Ainsi α et β sont des ordinaux tels que $\alpha \in \beta \in X$.

Donc $\alpha \in X$ car X est un segment initial de ON.

Donc $\forall \alpha \in \beta, \alpha \in X$ et donc $\beta \subseteq X$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall \beta \in X, \beta \subseteq X$ et donc $\boxed{X \text{ est transitif}}$.

CQFD.

Remarque :
On a vu grâce au théorème 1 page 18 que les ordinaux sont munis d'un bon ordre.
X est un segment initial des ordinaux est donc équivalent à l'existence d'un ordinal ξ tel que $X = \xi\downarrow$ d'après la proposition 5 page 11. Ici ξ est tout trouvé : c'est X lui-même d'après cette proposition. C'est d'ailleurs assez logique puisque la relation d'ordre strict sur les ordinaux est l'appartenance et donc $X = \{\alpha \mid \alpha \in X\} = X\downarrow$.

Nous pouvons désormais prouver que ω, autre nom donné à $\mathbb{N}$, est un ordinal. Comme nous l'avons dit plus tôt, c'est même un ordinal limite, c'est-à-dire qu'il n'est ni 0 ni le successeur d'un ordinal. Mieux, c'est même le plus petit des ordinaux limites, c'est-à-dire le tout premier !

Proposition 14 (omega est le plus petit ordinal limite)

ω est le plus petit ordinal limite, c'est-à-dire que pour tout ordinal limite α on a $\omega \subseteq \alpha$.

Démonstration

• Montrons que ω est un ordinal.

ω ne contient que des entiers naturels (et les contient tous) par définition.

En particulier ω est un ensemble d'ordinaux.

Il nous suffit de montrer que ω est transitif.

Soit $n \in \omega$.

Alors n est un entier naturel par définition de ω.

Soit $m \in n$.

Alors m est un entier naturel d'après la proposition 11 page 28.

Donc $m \in \omega$ par définition de ω.

Donc $\forall m \in n, m \in \omega$ donc $n \subseteq \omega$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall n \in \omega, n \subseteq \omega$ donc ω est transitif.

Ainsi ω est un ensemble d'ordinaux qui est transitif.

Donc $\boxed{\omega \text{ est un ordinal}}$ d'après la proposition 13 page 31.

• Montrons que ω est un ordinal limite.

Supposons par l'absurde que ω est successeur.

Il existe donc un ordinal α tel que $\omega = S(\alpha)$.

On a alors $\alpha \in \omega$ d'après la proposition 10 page 25.

Donc α est un entier naturel par définition de ω.

Donc $S(\alpha)$ est un entier naturel d'après la proposition 11 page 28.

Donc $S(\alpha) \in \omega$ par définition de ω, c'est-à-dire $\omega \in \omega$.

C'est absurde par antiréflexivité de $\in$ chez les ordinaux.

Donc ω n'est pas un successeur.

N'étant pas vide, $\omega \neq 0$ et donc $\boxed{\omega \text{ est donc limite}}$.

• Montrons que ω est plus petit que tout ordinal limite.

Soit α un ordinal limite.

Soit $n \in \omega$.

Par définition de ω, n est un entier naturel, en particulier est un ordinal.

On a $n \subseteq n$ donc n est un ordinal inclus dans un entier naturel.

Donc $n = 0$ ou n est un successeur.

Donc n n'est pas un ordinal limite.

Donc les éléments de ω ne sont pas des ordinaux limites et donc $\alpha \notin \omega$.

Or α et ω sont des ordinaux donc on a $\omega = \alpha$ ou $\omega \in \alpha$ d'après le théorème 1 page 18.

On a donc $\boxed{\omega \subseteq \alpha}$ d'après la proposition 8 page 17.

CQFD.

Nous l'avons dit quand nous avons évoqué le paradoxe de Burali-Forti : il n'est pas possible d'encapsuler tous les ordinaux dans un seul ensemble. En fait le résultat est même plus fort : tout ensemble d'ordinaux est majoré par d'autres ordinaux qui ne sont pas dans l'ensemble. En particulier parmi tous ces majorants stricts se cache un plus petit majorant strict.

Proposition 15 (Plus petit majorant strict d'ordinaux)

Soit X un ensemble d'ordinaux.
Alors il existe un unique ordinal α tel que

1. $\forall \xi \in X, \xi \in \alpha$.
   Ainsi α est un majorant strict de X.
2. Pour tout ordinal β, si $\forall \xi \in X, \xi \in \beta$ alors $\alpha \subseteq \beta$.
   Ainsi α est plus petit que tout majorant strict de X.

Autrement dit α est le plus petit de tous les majorants stricts de X.

Démonstration

D'après la proposition 9 page 21, $\bigcup X$ est un ordinal.

Le plus petit des majorants stricts de X va dépendre de si $\bigcup X$ appartient à X ou non.

Posons alors $\alpha := \begin{cases} \bigcup X & \text{si } \bigcup X \notin X \\ S(\bigcup X) & \text{si } \bigcup X \in X \end{cases}$.

1.

On a vu lors de la proposition 9 page 21 que $\bigcup X = \sup(X)$.

En particulier $\bigcup X$ est un majorant de X.

- Si $\bigcup X \notin X$ alors $\bigcup X$ est un majorant strict de X.
  Or dans ce cas-là $\alpha = \bigcup X$ donc α est un majorant strict de X.
- Supposons à présent que $\bigcup X \in X$.
  On a donc $\alpha = S(\bigcup X)$ et en particulier $\bigcup X \in \alpha$.
  Or on sait que $\forall \xi \in X, \xi \subseteq \bigcup X$ par définition de la réunion.
  Donc $\forall \xi \in X, \xi \in \alpha$ d'après la proposition 10 page 25.
  Ainsi α est un majorant strict de X puisque $\in$ est l'ordre strict sur X.

Dans les deux cas, $\boxed{\alpha \text{ est un majorant strict de } X}$.

2. Soit β un ordinal majorant strict de X.

Comme α et β sont deux ordinaux, on a $\beta \in \alpha$ ou $\alpha \subseteq \beta$ d'après le théorème 1 page 18.

Supposons par l'absurde que $\beta \in \alpha$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\bigcup X \notin X$.
  Par définition de α on a alors $\alpha = \bigcup X$ donc $\beta \in \bigcup X$.
  Par définition de la réunion, il existe donc $\xi \in X$ tel que $\beta \in \xi$.
  Donc β n'est pas un majorant de X, ce qui est absurde.

- Plaçons-nous dans le cas où $\bigcup X \in X$.

Par définition de α on a alors $\alpha = S(\bigcup X)$ donc $\beta \in S(\bigcup X)$.

On a donc $\beta \subseteq \bigcup X$ d'après la proposition 10 page 25.

Or $\bigcup X \in X$ par hypothèse donc β n'est pas un majorant strict de X.

C'est absurde.

Dans les deux cas on aboutit à une absurdité.

Donc par l'absurde on a montré que $\beta \notin \alpha$ et donc $\boxed{\alpha \subseteq \beta}$.

CQFD.

5 Isomorphisme avec les ordinaux

Jusqu'à présent, nous avons définis, construits et étudiés les ordinaux pour eux-mêmes. Or nous les avons introduits à la base dans l'optique d'en faire des représentants de classes d'isomorphie. Il est donc temps d'étudier d'un peu plus près les isomorphismes.

Dans un premier temps, constatons qu'un ensemble bien ordonné est toujours isomorphe à l'ensemble de ses segments initiaux propres. Ce n'est pas étonnant dans la mesure où l'on a dit que tout segment propre d'un ensemble bien ordonné est de la forme $x\!\downarrow$ lors de la proposition 5 page 11.

Proposition 16 (Ensemble des segments initiaux)

Soit E un ensemble bien ordonné.
Soit $X := \left\{A \subseteq E \;\middle|\; A \text{ est un segment initial propre de } E\right\}$.
On munit X de la relation d'ordre $\subseteq$.
Soit $f := \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & x\!\downarrow \end{pmatrix}$.

On a alors :

1. f est un isomorphisme d'ordre de E vers X.
2. Si de plus E est un ordinal alors $f = \mathrm{id}_E$ et en particulier $E = X$.

Démonstration

Soient $\leq$ la relation d'ordre sur E et $<$ l'ordre strict associé à $\leq$.

1.

• Montrons que f est strictement croissante.

Soient x et y dans E.

Supposons que $x < y$.

On a alors $x \in y\!\downarrow$ par définition.

Or on n'a pas $x < x$ par antiréflexivité de $<$ donc $x \notin x\!\downarrow$.

Comme $x \in y\!\downarrow$ et $x \notin x\!\downarrow$ on a $x\!\downarrow \neq y\!\downarrow$.

Soit $z \in x\!\downarrow$.

On a alors $z < x$ par définition.

Donc $z < y$ par transitivité de $<$.

Donc $z \in y\!\downarrow$ par définition.

Donc $x\!\downarrow \subseteq y\!\downarrow$ par définition de l'inclusion et donc $x\!\downarrow \subsetneq y\!\downarrow$

Ainsi on a $f(x) \subsetneq f(y)$ par définition de f.

Donc si $x < y$ alors $f(x) \subsetneq f(y)$.

Donc f est strictement croissante.

En particulier $\boxed{f \text{ est croissante et injective}}$.

• Montrons que f est surjective dans X.

Par définition de f on sait déjà que $\mathrm{im}(f) \subseteq X$.

Soit $A \in X$.

Alors A est un segment initial propre de E par définition de X.

Or E est bien ordonné donc il existe $x \in E$ tel que $A = x{\downarrow}$ d'après la prop. 5 p. 11.

On a donc $A = f(x)$ et donc $A \in \mathrm{im}(f)$.

Donc $\mathrm{im}(f) \supseteq X$ et donc $\mathrm{im}(f) = X$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est surjective dans } X}$.

• Ainsi f est croissante, injective et surjective dans X.

Or E est bien ordonné donc est totalement ordonné d'après la proposition 2 page 7.

Donc $\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } E \text{ vers } X}$.

2. Supposons que E est un ordinal.

Dans ce cas particulier, l'ordre strict $<$ est l'appartenance $\in$.

Ainsi pour tout $\alpha \in E$ on a $\alpha{\downarrow} = \{\beta \in E \mid \beta < \alpha\} = \{\beta \in E \mid \beta \in \alpha\} = E \cap \alpha$.

Remarquons pour commencer que f et id_E ont le même domaine E.

Soit $\alpha \in E$.

Comme E est ordinal, E est transitif donc $\alpha \subseteq E$ et donc $E \cap \alpha = \alpha$.

Or on a vu que $\alpha{\downarrow} = E \cap \alpha$ donc $\alpha{\downarrow} = \alpha$.

En particulier $f(\alpha) = \alpha{\downarrow} = \alpha = \mathrm{id}_E(\alpha)$.

Donc $\forall \alpha \in E, f(\alpha) = \mathrm{id}_E(\alpha)$.

Donc $\boxed{f = \mathrm{id}_E}$.

En particulier $\boxed{E = \mathrm{im}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{im}(f) = X}$.

CQFD.

Remarque :

1. On peut remarquer que $g := \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & \min(E \backslash A) \end{pmatrix}$ est la réciproque de f.
2. Le cas où E est un ordinal n'est pas non plus étonnant : on a déjà vu lors de la proposition 13 page 31 que les ordinaux sont eux-mêmes les segments initiaux de ON.

Quand nous avons dit que les ordinaux fournissaient un représentant de chaque classe d'isomorphie pour les bons ordres, nous avons aussi affirmé qu'il n'y en avait qu'un seul par classe. Autrement dit, si deux ordinaux sont isomorphes, alors nécessairement il s'agit d'un même ordinal.

Proposition 17 (Isomorphisme entre ordinaux)

Soient α et β deux ordinaux et $f : \alpha \longrightarrow \beta$.
Si f est un isomorphisme de α vers β alors $f = \mathrm{id}_\alpha$ et donc $\alpha = \beta$.

Démonstration

Supposons que f est un isomorphisme de α vers β.

En particulier f est injective, surjective sur β et croissante.

Étant injective et croissante, f est strictement croissante.

- Montrons que pour tout $\xi \in \alpha$, on a $f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)$.

  Soit $\xi \in \alpha$.

  Montrons que $f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)$.

  $\boxed{\subseteq}$

  Soit $\gamma \in f(\xi)$.

  Comme f est surjective sur β on a $\mathrm{im}(f) = \beta$ donc $f(\xi) \in \beta$.

  Comme β est un ordinal, β est transitif donc $f(\xi) \subseteq \beta$.

  On a donc $\gamma \in \beta$ par définition de l'inclusion.

  Comme $\mathrm{im}(f) = \beta$ on a $\gamma \in \mathrm{im}(f)$ donc il existe $\mu \in \alpha$ tel que $\gamma = f(\mu)$.

  Comme α est un ordinal, μ et ξ sont des ordinaux d'après la prop. 6 p. 15.

  On a alors $\mu \in \xi$ ou $\mu = \xi$ ou $\xi \in \mu$ d'après le théorème 1 page 18.

  ▶ Si $\mu = \xi$ alors $\gamma = f(\mu) = f(\xi)$.
  Or par définition on a $\gamma \in f(\xi)$, donc $\gamma \in \gamma$.

  ▶ Si $\xi \in \mu$ alors $f(\xi) \in f(\mu) = \gamma$ par stricte croissance de f.
  Or par définition on a $\gamma \in f(\xi)$.
  On a donc $\gamma \in \gamma$ par transitivité de $\in$ chez les ordinaux.

  Dans ces deux cas-là on a donc nécessairement $\gamma \in \gamma$.

  C'est absurde par antiréflexivité de $\in$ chez les ordinaux.

  On a donc nécessairement $\mu \in \xi$.

  Comme $\gamma = f(\mu)$, on a donc $\gamma \in f^{\rightarrow}(\xi)$ par définition de l'image directe.

  Donc $f(\xi) \subseteq f^{\rightarrow}(\xi)$.

  $\boxed{\supseteq}$

  Soit $\gamma \in f^{\rightarrow}(\xi)$.

  Il existe donc $\mu \in \xi$ tel que $\gamma = f(\mu)$.

  Par croissante de f on a alors $\gamma = f(\mu) \subseteq f(\xi)$.

  On a donc $\gamma \in f(\xi)$ ou $\gamma = f(\xi)$ d'après la proposition 8 page 17.

  Supposons par l'absurde que $\gamma = f(\xi)$.

Comme $\gamma = f(\mu)$, on a alors $\mu = \xi$ par injectivité de f.

Or on a $\mu \in \xi$ donc $\xi \in \xi$.

C'est absurde par antiréflexivité de $\in$ chez les ordinaux.

Donc $\gamma \in f(\xi)$.

Donc $f(\xi) \supseteq f^{\rightarrow}(\xi)$.

Finalement on a bien $f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } \xi \in \alpha, \text{ on a } f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)}$ $(\star)$.

• On veut montrer que $f = \mathrm{id}_\alpha$.

Comme elles ont le même domaine, cela revient à montrer que $\forall \xi \in \alpha, f(\xi) = \xi$.

Pour cela, considérons $X := \{\xi \in \alpha \mid f(\xi) \neq \xi\}$.

Supposons par l'absurde que X est non vide.

Par définition X est donc une partie non vide de l'ordinal α.

Or tous les éléments de α sont des ordinaux d'après la proposition 6 page 15.

Donc X est un ensemble non vide dont les éléments sont tous des ordinaux.

Il possède donc un ordinal minimum ξ d'après le théorème 1 page 18.

Soit $\mu \in \xi$.

Comme ξ est minimum de X, on a $\mu \notin X$.

On a donc $f(\mu) = \mu$ par définition de X.

Donc $\forall \mu \in \xi, f(\mu) = \mu$.

Donc $f(\xi) \underset{(\star)}{=} f^{\rightarrow}(\xi) = \{f(\mu) \mid \mu \in \xi\} = \{\mu \mid \mu \in \xi\} = \xi$.

Donc $f(\xi) = \xi$ donc $\xi \notin X$ par définition de X : c'est absurde.

Par l'absurde, on vient de montrer que X est vide.

Donc $\forall \xi \in \alpha, f(\xi) = \xi$ par définition de X.

Finalement, on a donc $\boxed{f = \mathrm{id}_\alpha}$.

On a en particulier $\alpha = \mathrm{im}(\mathrm{id}_\alpha) = \mathrm{im}(f) = \beta$ par surjectivité de f sur β.

CQFD.

Ainsi, on vient de montrer qu'au sein d'une classe d'isomorphie, il ne peut y avoir au maximum qu'un seul ordinal. Précisions ce que l'on entend par là.

Proposition 18 (Au plus un ordinal associé à un bon ordre)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
Supposons qu'il existe au moins un ordinal α tel que $(E, \leq)$ et $(\alpha, \subseteq)$ sont isomorphes.
Alors un tel α est unique, et l'isomorphisme de $(E, \leq)$ vers $(\alpha, \subseteq)$ est unique.

Démonstration

• **Unicité de l'ordinal**

Soit $f : E \longrightarrow \alpha$ un isomorphisme.

Soit β un ordinal tel que $(E, \leq)$ et $(\beta, \subseteq)$ sont isomorphes.

Il existe donc un isomorphisme $g : E \longrightarrow \beta$.

Comme $f : E \longrightarrow \alpha$ un isomorphisme, $f^{-1} : \alpha \longrightarrow E$ est un isomorphisme.

Donc $g \circ f^{-1} : \alpha \longrightarrow \beta$ est un isomorphisme.

Donc $\alpha = \beta$ d'après la proposition 17 page 38.

On a donc $\boxed{\text{unicité de l'ordinal } \alpha \text{ isomorphe à } E}$.

• **Unicité de l'isomorphisme**.

Soit $g : E \longrightarrow \alpha$ un isomorphisme.

Alors $g^{-1} : \alpha \longrightarrow E$ est un isomorphisme.

Donc $f \circ g^{-1} : \alpha \longrightarrow \alpha$ est un isomorphisme.

Donc $f \circ g^{-1} = \mathrm{id}_\alpha$ d'après la proposition 17 page 38.

Donc $f = f \circ \mathrm{id}_E = f \circ g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_\alpha \circ g = g$.

On a donc $\boxed{\text{unicité de l'isomorphisme de } E \text{ vers } \alpha}$.

CQFD.

Venons-en finalement à ce qui nous intéressait depuis le début : utiliser les ordinaux pour représenter n'importe quel bon ordre, à isomorphisme près. On vient déjà de voir l'unicité, mais formulons quand-même complètement un théorème digne de ce nom !

Pour le démontrer, nous allons utiliser l'idée proposée par la proposition 16 page 36, qui affirme qu'à isomorphisme près, un ensemble bien ordonné se comporte comme l'ensemble de ses segments initiaux propres. Autrement dit, on peut tout à fait raisonner sur les segments initiaux propres plutôt que sur l'ensemble directement.

Théorème 4 (Unique ordinal associé à un bon ordre)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble bien ordonné.
Alors il existe un unique ordinal α tel que $(E, \leq)$ et $(\alpha, \subseteq)$ sont isomorphes.
On note alors $\mathrm{type}(E, \leq) := \alpha$.

Démonstration

• Soit $<$ l'ordre strict associé à $\leq$.

Soit $x \in E$.

Rappelons-nous que $x{\downarrow} = \{y \in E \mid y < x\}$.

Comme $x{\downarrow}$ est une partie de E, $x{\downarrow}$ est aussi bien ordonné d'après la prop. 3 p. 8.

Pour la suite de cette démonstration, on dira que x est **bon** si et seulement s'il existe au moins un ordinal ξ tel que $(x\downarrow, \leq)$ est isomorphe à $(\xi, \subseteq)$.

Dans ce cas-là, un tel ordinal ξ est unique d'après la proposition 17 page 38.

Soit $G := \{x \in E \mid x \text{ est bon }\}$.

Considérons alors $f : G \longrightarrow ?$ l'application qui à $x \in G$ associe l'unique ordinal ξ tel que $(x\downarrow, \leq)$ est isomorphe à $(\xi, \subseteq)$. Cette fonction existe grâce à l'axiome de remplacement.

Pour tout $x \in G$, l'isomorphisme de $(x\downarrow, \leq)$ vers $\big(f(x), \subseteq\big)$ est unique d'après la proposition 18 page 39 : on le notera h_x.

Voici à présent les différentes étapes de la preuve :

1. On prouve que G est un segment initial de E.
2. On montre que f est un isomorphisme.
3. On montre que $\mathrm{im}(f)$ est un ordinal : G est donc lui-même isomorphe à un ordinal.
4. On montre qu'en fait $G = E$, ce qui permet de conclure.

1. Montrons que G est un segment initial de E.

Autrement dit, montrons que pour tout $x \in G$ et pour tout $y \in x\downarrow$ on a $y \in G$.

Soient $x \in G$ et $y \in x\downarrow$.

On a donc $y < x$.

Alors pour tout $z \in y\downarrow$, on a $z < y$ donc $z < x$ par transitivité de $<$ et donc $z \in x\downarrow$.

Ainsi $y\downarrow \subseteq x\downarrow$ donc on peut considérer la restriction de h_x à $y\downarrow$.

Nous allons montrer que $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est un isomorphisme de $y\downarrow$ vers $h_x(y)$.

Par définition on sait déjà que $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ a pour domaine $y\downarrow$.

Par définition h_x est injectif donc $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est injectif.

Par définition h_x est croissant donc $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est croissante.

Remarquons que h_x étant injectif et croissant, h_x est strictement croissant.

Montrons que $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est surjectif sur $h_x(y)$, c'est-à-dire $\mathrm{im}\big((h_x)_{|(y\downarrow)}\big) = h_x(y)$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $z \in y\downarrow$.

On a alors $z < y$ donc $h_x(z) \in h_x(y)$ par stricte croissance de h_x.

Ainsi $\forall z \in y\downarrow, h_x(z) \in h_x(y)$ donc $\forall u \in h_x{}^{\rightarrow}\big(y\downarrow\big), u \in h_x(y)$.

Donc $h_x{}^{\rightarrow}\big(y\downarrow\big) \subseteq h_x(y)$ et donc $\mathrm{im}\big((h_x)_{|(y\downarrow)}\big) \subseteq h_x(y)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $\beta \in h_x(y)$.

Comme $h_x : x\downarrow \longrightarrow f(x)$ on a $h_x(y) \in f(x)$.

Ainsi on a $\beta \in h_x(y) \in f(x)$.

Or $f(x)$ est un ordinal par définition de f donc $f(x)$ est transitif.

On en déduit donc que $\beta \in f(x)$.

Or par définition h_x est surjectif dans $f(x)$.

Il existe donc $b \in x\!\downarrow$ tel que $h_x(b) = \beta$.

Or $(E, \leq)$ est bien ordonné donc $\leq$ est total d'après la proposition 2 page 7.

On a donc $b < y$ ou $y \leq b$.

Supposons par l'absurde que $y \leq b$.

On a alors $h_x(y) \subseteq h_x(b)$ par croissance de h_x.

Comme $h_x(b) = \beta$ par définition de b, on a $h_x(y) \subseteq \beta$.

Or on a $\beta \in h_x(y)$ par définition de β.

On vient donc de montrer $\beta \in h_x(y) \subseteq \beta$, ce qui est absurde.

On a donc $b < y$ c'est-à-dire $b \in y\!\downarrow$.

Comme $\beta = h_x(b)$, on a donc $\beta \in {h_x}^{\rightarrow}\big(y\!\downarrow\big)$.

Autrement dit, on a $\beta \in \operatorname{im}\big((h_x)_{|(y\downarrow)}\big)$.

On a donc $\operatorname{im}\big((h_x)_{|(y\downarrow)}\big) \supseteq h_x(y)$ et donc $\operatorname{im}\big((h_x)_{|(y\downarrow)}\big) = h_x(y)$.

Ainsi $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est surjective sur $h_x(y)$.

On a donc $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est croissante, injective et surjective sur $h_x(y)$.

Or on a dit que $\leq$ est total sur E.

Donc $(h_x)_{|(y\downarrow)}$ est un isomorphisme de $y\!\downarrow$ vers $h_x(y)$.

Ainsi $y\!\downarrow$ et $h_x(y)$ sont isomorphes.

Or on a dit que $h_x(y)$ est un ordinal puisqu'élément de $f(x)$.

Donc $y\!\downarrow$ est isomorphe à un ordinal, et donc $y \in G$.

On note au passage que par unicité de l'ordinal on a $f(y) = h_x(y)$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in G \text{ et tout } y \in x\!\downarrow\text{, on a } y \in G \text{ avec } f(y) = h_x(y)}$ $(\star)$.

2. On rappelle qu'ici $\operatorname{im}(f)$ est muni de $\in$ comme relation d'ordre strict.

En effet $\operatorname{im}(f)$ est par définition un ensemble d'ordinaux.

Montrons que f est un isomorphisme de G dans $\operatorname{im}(f)$.

Pour cela, montrons que f est strictement croissante.

Soient x et y dans G.

Supposons que $y < x$.

On a donc $y \in x\!\downarrow$.

D'après $(\star)$ on a alors $f(y) = h_x(y)$.

Or par définition h_x est à valeurs dans $f(x)$.

On a donc $h_x(y) \in f(x)$ et donc $f(y) \in f(x)$.

Donc si $y < x$ alors $f(y) \in f(x)$.

Donc f est strictement croissante.

En particulier f est croissante et injective, donc f est croissante et bijective sur $\mathrm{im}(f)$.

Or on a dit que $\leq$ est total sur E donc $\leq$ est total sur G puisque $G \subseteq E$.

Donc $\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } G \text{ dans } \mathrm{im}(f)}$.

3. Montrons que $\mathrm{im}(f)$ est un ordinal.

▶ Montrons que $\mathrm{im}(f)$ est transitif.

Soit $a \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc $x \in G$ tel que $a = f(x)$.

Soit $b \in a$.

Par définition h_x est bijectif sur $f(x)$ donc surjectif sur $f(x)$.

Donc comme $a = f(x)$, on en déduit que h_x est surjectif sur a.

On a donc $\mathrm{im}(h_x) = a$ et donc $b \in \mathrm{im}(h_x)$.

Il existe donc $y \in x\!\downarrow$ tel que $b = h_x(y)$.

Or on a $h_x(y) = f(y)$ d'après $(\star)$.

Donc $b = f(y)$ et donc $b \in \mathrm{im}(f)$.

Donc $a \subseteq \mathrm{im}(f)$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall a \in \mathrm{im}(f), a \subseteq \mathrm{im}(f)$.

Donc $\mathrm{im}(f)$ est transitif.

▶ Par définition de f, tous les éléments de $\mathrm{im}(f)$ sont des ordinaux.

Donc $\in$ est un bon ordre strict sur $\mathrm{im}(f)$ d'après le théorème 1 page 18.

Ainsi, $\mathrm{im}(f)$ est transitif et $\in$ est un bon ordre strict sur $\mathrm{im}(f)$.

Donc $\boxed{\mathrm{im}(f) \text{ est un ordinal}}$.

4. Ainsi f est un isomorphisme de G vers l'ordinal $\mathrm{im}(f)$.

Il ne reste plus qu'à prouver que $G = E$ pour conclure.

Supposons par l'absurde que $G \subsetneq E$.

Alors $E \backslash G$ est une partie non vide de l'ensemble bien ordonné E.

Elle admet donc un minimum e.

Montrons que $e\!\downarrow = G$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x \in e\!\downarrow$.

Par définition on a $x < e$ donc $x \notin E \backslash G$ car e en est minimum.

On a donc $x \in G$.

Donc $e\!\downarrow\subseteq G$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $x \in G$.

On a dit que $\leq$ est total sur E donc $x < e$ ou $x = e$ ou $e < x$.

- Si $x = e$ alors $e \in G$.
- Si $e < x$ alors $e \in x\!\downarrow$ et donc $e \in G$ d'après $(\star)$.

Dans ces deux cas-là on a donc $e \in G$ ce qui est absurde puisque $e \in E \backslash G$.

On a donc nécessairement $x < e$ et donc $x \in e\!\downarrow$.

Donc $e\!\downarrow\supseteq G$ et donc $e\!\downarrow= G$.

Or G est isomorphe à l'ordinal $\mathrm{im}(f)$ d'après ce qui précède.

Donc $e\!\downarrow$ est isomorphe à l'ordinal $\mathrm{im}(f)$.

Donc $e \in G$ par définition de G, ce qui est absurde puisque $e \in E \backslash G$.

On a donc $E = G$.

Or G est isomorphe à l'ordinal $\mathrm{im}(f)$ d'après ce qui précède.

Donc $\boxed{E \text{ est isomorphe à l'ordinal } \mathrm{im}(f)}$.

L'unicité est garantie par la proposition 18 page 39.

CQFD.

Remarque :

1. Ainsi on note $\mathrm{type}(E, \leq)$ l'unique ordinal isomorphe à l'ensemble bien ordonné $(E, \leq)$. Comme nous avons déjà eu l'occasion de le faire, on omet parfois d'écrire $\leq$ car l'ordre est sous-entendu, afin de simplifier et fluidifier le discours. On notera très donc très souvent $\mathrm{type}(E)$.
2. Soit α un ordinal : comme α est nécessairement isomorphe à lui-même, on a donc $\mathrm{type}(\alpha) = \alpha$.

Proposition 19 (Ordinal associé et inclusion)

Soient $(A, \leq)$ un ensemble bien ordonné et X une partie de A.
On a $\mathrm{type}\big(X, \leq\big) \subseteq \mathrm{type}\big(A, \leq\big)$.

Démonstration

• Commençons par supposer que A est un ordinal : la relation $\leq$ est donc $\subseteq$.

Comme X est une partie de A, on a donc X est un ensemble d'ordinaux.

Posons alors $\delta := \mathrm{type}(X, \subseteq)$ et $f : (X, \subseteq) \longrightarrow (\delta, \subseteq)$ l'isomorphisme associé.

Remarquons ici que comme δ est un ordinal, δ est aussi un ensemble d'ordinaux.

Donc les éléments de X et les éléments de δ sont comparables pour $\subseteq$.

En particulier pour tout $\xi \in X$, $f(\xi)$ et ξ sont comparables pour $\subseteq$.

Montrons que $\forall \xi \in X, f(\xi) \subseteq \xi$.
Pour cela posons $E := \big\{\xi \in X \bigm| f(\xi) \subseteq \xi\big\}$.

Supposons par l'absurde que $E \subsetneq X$.
Alors $X \backslash E$ est un ensemble non vide d'ordinaux.
Il admet donc un minimum ξ d'après le théorème 1 page 18.
Comme $\xi \in X \backslash E$, on a $\xi \notin E$ donc $\mathrm{non}\big(f(\xi) \subseteq \xi\big)$ par définition de E.
Or ξ est un ordinal car élément de X et $f(\xi)$ est un ordinal par définition de f.
Donc comme $\in$ est total chez les ordinaux, on a $\xi \in f(\xi)$.
Or $\mathrm{im}(f) = \delta$ par définition de f donc $f(\xi) \in \delta$.
Ainsi $\xi \in f(\xi) \in \delta$ donc $\xi \in \delta$ par transitivité de $\in$ chez les ordinaux.
Comme $\mathrm{im}(f) = \delta$ on a donc $\xi \in \mathrm{im}(f)$ donc il existe $\gamma \in E$ tel que $\xi = f(\gamma)$.
Comme $\xi \in f(\xi)$ on a donc $f(\gamma) \in f(\xi)$.
Comme f est un isomorphisme, f^{-1} est croissante donc $\gamma \in \xi$.
Comme ξ est le minimum de $X \backslash E$, on a donc $\gamma \notin X \backslash E$ donc $\gamma \in E$.
On a donc $f(\gamma) \subseteq \gamma$ par définition de E, c'est-à-dire $\xi \subseteq \gamma$ par définition de γ.
C'est absurde puisque l'on a dit que $\gamma \in \xi$.

Par l'absurde, on a donc montré que $E = X$.
Ainsi, $\boxed{\forall \xi \in X, f(\xi) \subseteq \xi}$ $\quad (\star_1)$.

Montrons que $\delta \subseteq A$.

Soit $\varepsilon \in \delta$.
Par définition de f on a $\mathrm{im}(f) = \delta$ donc $\varepsilon \in \mathrm{im}(f)$.
Il existe donc $\xi \in X$ tel que $\varepsilon = f(\xi)$.
D'après $(\star_1)$ on a $f(\xi) \subseteq \xi$ donc $\varepsilon \subseteq \xi$.
Or on a $\xi \in X \subseteq A$ donc $\xi \in A$ par définition de l'inclusion.
Ainsi on a $\varepsilon \subseteq \xi \in A$ et tous sont des ordinaux donc $\varepsilon \in A$ par transitivité.

Donc $\delta \subseteq A$ par définition de l'inclusion.
Or par définition $\delta = \mathrm{type}\big(X, \subseteq\big)$ donc $\mathrm{type}\big(X, \subseteq\big) \subseteq A$.
Or A est un ordinal donc en particulier est l'unique ordinal isomorphe à lui-même.
Autrement dit on a $A = \mathrm{type}\big(A, \subseteq\big)$.
On a donc bien $\boxed{\mathrm{type}\big(X, \subseteq\big) \subseteq \mathrm{type}\big(A, \subseteq\big)}$ $\ (\star_2)$.

• Plus généralement on ne suppose plus spécialement que A est un ordinal.
Soient alors $\alpha := \mathrm{type}(A, \leq)$ et $g : A \longrightarrow \alpha$ l'isomorphisme associé.
Considérons $Y := g^{\rightarrow}(X)$, de telle que sorte que Y est une partie de α.
On se retrouve dans la situation précédente : d'après $(\star_2)$ on a $\mathrm{type}\big(Y, \subseteq\big) \subseteq \mathrm{type}\big(\alpha, \subseteq\big)$.

Or g est un isomorphisme donc est croissant, injectif et de réciproque croissante.
Donc $g_{|X} : X \longrightarrow Y$ est croissant, injectif et de réciproque croissante.
Donc $g_{|X}$ est un isomorphisme de X vers Y donc X et Y sont isomorphes.
Donc X et $\mathrm{type}(Y, \subseteq)$ sont isomorphes par transitivité de l'isomorphie.
Donc $\mathrm{type}(X, \leq) = \mathrm{type}(Y, \subseteq)$ par unicité de l'ordinal associé.
On a donc $\boxed{\mathrm{type}(X, \leq) \subseteq \mathrm{type}(A, \leq)}$.
CQFD.

Bibliographie

- Wikipédia
- Kenneth Kunen, *The Foundations of Mathematics*, 29 octobre 2007.
- Jean-Louis Krivine, *Théorie des ensembles*, 1998, éditions Cassini.

Mathématiciens

- (1861 – 1931) Cesare Burali-Forti page 21.
- (1903 – 1957) John von Neumann page 14.