Théorie élémentaire des ensembles
-
Le Barbuki 1

Livre complet

Florian Langlois

Février 2024

Collection

Bienvenue dans ce livre ! C'est le premier d'une collection qui tente de d'exposer et démontrer les mathématiques de niveau licence et master. Le nom BARBUKI est une référence au célèbre groupe BOURBAKI, dont la démarche de cette collection est inspirée.

1 – Théorie élémentaire des ensembles

Avant-propos

Cet ouvrage est là pour me permettre de coucher sur le papier les différentes mathématiques que j'ai apprises durant mes études supérieures : je le rédige principalement pour moi-même et il n'a pas pour but d'être pédagogique. Il va me permettre de conserver sur le long terme une trace de ces connaissances, mais aussi d'organiser celles-ci pour en avoir une vue d'ensemble.

Bien que ce livre reste assez personnel, il est possible qu'il vous soit utile. Afin de comprendre pleinement son contenu, il est nécessaire de connaître la logique élémentaire. En particulier, il vous faut connaître :

— la notion d'assertion

— la notion de négation d'une assertion

— la notion de conjonction et la notion de disjonction

— la notion d'implication, ainsi que la notion de contraposée et de réciproque

— la notion d'équivalence

— les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$

Il vous faut aussi savoir mener un raisonnement, ou tout du moins en suivre un, puisque c'est l'un des objets principaux de ce livre. Il est à noter que la construction de cette collection se fait sous la manière d'un escalier à gravir : nous n'utiliserons pas des résultats postérieurs pour démontrer des résultats antérieurs, les seules exceptions étant les exemples donnés pour illustrer, puisque ceux-ci ne sont là que pour aider à la lecture, et non permettre une quelconque démonstration, mais aussi certaines digressions abordant d'autres démonstrations que celles proposées.

Remerciements

Merci à Lyra, GrothenDitQue et Chæris pour leur pinaillage, à Tom pour le LaTeX, et à Maxtimax pour m'avoir fortement débloqué !

Table des matières

Chapitre 1

Théorie élémentaire des ensembles

Note de l'auteur

Dans ce chapitre, nous allons définir et développer la notion d'ensemble en mathématique. Ce chapitre est fondamental pour deux raisons :

— premièrement, à beaucoup d'endroits en mathématiques, les ensembles interviennent (ensembles de solutions, une droite peut être vue comme un ensemble de points, les structures algébriques reposent sur la notion d'ensembles, etc.).

— deuxièmement, cette collection de livres a pour parti pris de construire tous les objets mathématiques à partir de cette simple notion d'ensembles, pour ne considérer fondamentalement qu'un seul type d'objet. Pas de panique cependant puisqu'il s'agit d'une façon de faire très fréquente dans la plupart des ouvrages de mathématiques. De plus, comme il est question de fondements des mathématiques, le reste ne sera pas affecté par ce parti pris.

Sommaire

1 Généralités sur les ensembles

1.1 Appartenance et égalité

Comme nous l'avons dit, l'objet au cœur de notre discours est celui d'**ensemble**. Un ensemble est intuitivement un sac dans lequel on peut placer un ou plusieurs objets mathématiques, mais que l'on peut aussi laisser vide. Un objet ne peut cependant pas être présent en plusieurs exemplaires : il est dans l'ensemble (auquel cas on dira qu'il **appartient** à cet ensemble), ou il n'est pas dans l'ensemble. Cette particularité de ne pas compter le nombre d'occurrences d'un objet dans un ensemble est aussi accompagnée du fait qu'un ensemble est entièrement caractérisé par son contenu : deux ensembles ayant les mêmes **éléments** seront égaux, ce qui tranche avec l'intuition du sac puisqu'à titre d'exemple dans la vie courante, mettre ses affaires scolaires dans un sac de course ne fait pas de celui-ci un cartable, alors que c'est le cas avec les ensembles mathématiques. De même, on ne peut conserver un ensemble mathématique si l'on change son contenu, alors que rajouter un cahier dans un cartable de la vie quotidienne ne va changer le fait que c'est le même cartable.

Cependant, il s'agit d'un objet *primitif*, c'est-à-dire que nous n'allons pas lui donner de définition à proprement parler. Au lieu de cela, nous allons dire que tous les objets que nous allons manipuler (en dehors des assertions, propositions, théorèmes, etc.) seront des ensembles. Nous pouvons alors nous demander en quoi il est légitime de les appeler *ensembles*, et en quoi ils correspondent à cette notion intuitive de sacs. En fait, c'est par le biais d'axiomes que nous allons imposer certaines propriétés à nos objets, de sortent qu'ils *miment* l'idée intuitive que nous avons décrite.

Définition 1 (Ensembles et appartenance)

En dehors des assertions, tous les objets que nous allons manipuler seront appelés **ensembles**.

Pour deux ensembles x et E, il est possible de former une assertion notée $x \in E$ dont la démontrabilité se déduira des axiomes et des définitions. On dit alors x **appartient** à E, ou encore que x est un **élément** de E.

Sa négation sera quant-à-elle notée $x \notin E$.

Axiome 1 (Axiome de l'existence)

Il existe au moins un ensemble.

Notation

Pour E un ensemble et P une proposition pouvant dépendre de paramètres, on notera parfois :

- $\forall x \in E, P(x)$ à la place de $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow P(x)\big)$
- $\exists x \in E, P(x)$ à la place de $\exists x, \big(x \in E \text{ et } P(x)\big)$

Comme nous l'avons dit plus tôt, un ensemble est caractérisé par son contenu : deux ensembles sont alors **égaux** si et seulement si ils sont les mêmes éléments.

Axiome 2 (de l'extensionnalité)

Soient E et F deux ensembles.

$$E = F \iff \forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big)$$

De cet axiome, nous pouvons démontrer trois propriétés essentielles de l'égalité.

Proposition 1 (Propriétés de l'égalité)

Soient E, F et G trois ensembles.

1. $E = E$: on dit que l'égalité est **réflexive**.
2. Si $E = F$, alors $F = E$: on dit que l'égalité est **symétrique**.
3. Si $E = F$ et $F = G$, alors $E = G$: on dit que l'égalité est **transitive**.

Démonstration

1. Par réflexivité de l'équivalence, on a $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in E\big)$.
Donc $\boxed{E = E}$ par extensionnalité.

2. Supposons que $E = F$.
Par extensionnalité, on a $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big)$.
Donc par symétrie de l'équivalence, on a $\forall x, \big(x \in F \Leftrightarrow x \in E\big)$.
Donc $\boxed{F = E}$ par extensionnalité.

3. Supposons que $E = F$ et $F = G$.
Par extensionnalité, on a $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big)$ et $\forall x, \big(x \in F \Leftrightarrow x \in G\big)$.
On a donc $\forall x, \Big[\big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big) \text{ et } \big(x \in F \Leftrightarrow x \in G\big)\Big]$.
Donc $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in G\big)$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\boxed{E = G}$ par extensionnalité.
CQFD.

Remarque :
Nous verrons lors du chapitre **??** que cela fait de l'égalité une **relation d'équivalence**.

L'axiome d'extensionnalité, s'il nous donne une caractérisation de l'égalité, en fait de même pour l'inégalité puisqu'il suffit alors de prendre la négation de cette caractérisation : deux ensembles sont inégaux si et seulement s'il existe au moins un élément dans un des deux ensembles qui n'est pas présent dans l'autre.

Proposition 2 (Caractérisation de l'inégalité)

Soient E et F deux ensembles.

$$E \neq F \iff \Big[\big(\exists x \in E, x \notin F\big) \text{ ou } \big(\exists x \in F, x \notin F\big)\Big]$$

Démonstration

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
E \neq F &\iff \neg(E = F)\\
&\iff \neg\Big[\forall x, \big(x \in E \iff x \in F\big)\Big]\\
&\iff \exists x, \neg\big(x \in E \iff x \in F\big)\\
&\iff \exists x, \neg\Big[\big(x \in E \implies x \in F\big) \text{ et } \big(x \in F \implies x \in E\big)\Big]\\
&\iff \exists x, \Big[\neg\big(x \in E \implies x \in F\big) \text{ ou } \neg\big(x \in F \implies x \in E\big)\Big]\\
&\qquad \text{d'après les Lois de De Morgan}\\
&\iff \exists x, \Big[\neg\big(x \notin E \text{ ou } x \in F\big) \text{ ou } \neg\big(x \notin F \text{ ou } x \in E\big)\Big]\\
&\iff \exists x, \Big[\big(x \in E \text{ et } x \notin F\big) \text{ ou } \big(x \in F \text{ et } x \notin E\big)\Big]\\
&\qquad \text{d'après les Lois de De Morgan}\\
&\iff \Big[\exists x, \big(x \in E \text{ et } x \notin F\big)\Big] \text{ ou } \Big[\exists x, \big(x \in F \text{ et } x \notin E\big)\Big]\\
&\iff \big(\exists x \in E, x \notin F\big) \text{ ou } \big(\exists x \in F, x \notin E\big)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E \neq F \iff \Big[\big(\exists x \in E, x \notin F\big) \text{ ou } \big(\exists x \in F, x \notin F\big)\Big]}$ par transitivité de l'équivalence.

CQFD.

1.2 Inclusion

Nous venons de voir ce que cela veut dire pour un objet mathématique d'appartenir à un ensemble, et ce que ça veut dire que deux ensembles sont égaux.

Voyons à présent une façon de *comparer* deux ensembles : nous dirons qu'un premier ensemble est **inclus** dans un second ensemble si tous les éléments du premier sont aussi des éléments du second. Cette comparaison intervient fréquemment en mathématique : par exemple tous les nombres entiers sont aussi des nombres rationnels, et c'est en cela que nous disons que $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$. C'est au fond quelque chose que l'on voit aussi dans la vie courante, puisque par exemple toutes les pommes sont des fruits.

Définition 2 (Inclusion et sous-ensemble)

Soient E et F deux ensembles.

On dit que E est **inclus** dans F si et seulement si $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in F\big)$.
On note alors $E \subseteq F$, ou encore $F \supseteq E$.

On dit aussi que

- E est un **sous-ensemble** de F.
- E est une **partie** de F.
- E est **contenu** dans F.
- F est un **sur-ensemble** de E.
- F **contient** E.

Dans le cas contraire, on notera $E \nsubseteq F$.

Note de l'auteur

> Certains auteurs, notamment francophones, notent cela $E \subset F$. Cela ne sera pas le cas dans cet ouvrage, car il pourrait y avoir une confusion avec la stricte inclusion.

L'axiome d'extensionnalité fait le lien entre l'égalité et l'équivalence : nous avons pu d'ailleurs en déduire trois propriétés de l'égalité, qui découlaient toutes de celles de l'équivalence. La définition de l'inclusion fait de même pour lier l'inclusion et l'implication. Ainsi, la décomposition de l'équivalence en deux implications va se traduire par une décomposition de l'égalité en deux inclusions.

Proposition 3 (Décomposition de l'égalité en inclusions)

Soient E et F deux ensembles.

Si $E = F$, alors $E \subseteq F$ et $E \supseteq F$.

Démonstration

Supposons que $E = F$.
On a donc $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big)$ par extensionnalité.
Donc $\forall x, \Big[\big(x \in E \Rightarrow x \in F\big) \text{ et } \big(x \in E \Leftarrow x \in F\big)\Big]$.
Donc $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in F\big)$ et $\forall x, \big(x \in E \Leftarrow x \in F\big)$.
Donc $\boxed{E \subseteq F \text{ et } F \supseteq E}$ par définition de l'inclusion.
CQFD.

Observons à présent les trois propriétés de l'inclusion, qui découlent de celles de l'implication.

Proposition 4 (Propriétés de l'inclusion)

Soient E, F et G trois ensembles.

1. $E \subseteq E$: on dit que l'inclusion est **réflexive**.
2. si $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$, alors $E = F$: on dit que l'inclusion est **antisymétrique**.
3. si $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$, alors $E \subseteq G$: on dit que l'inclusion est **transitive**.

Démonstration

1. On a $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in E\big)$ par réflexivité de l'implication.
Donc $\boxed{E \subseteq E}$ par définition.

2. Supposons que l'on a $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.
On a donc $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in F\big)$ et $\forall x, \big(x \in F \Rightarrow x \in E\big)$ par définition.
Donc $\forall x, \Big[\big(x \in E \Rightarrow x \in F\big) \text{ et } \big(x \in F \Rightarrow x \in E\big)\Big]$.
Donc $\forall x, \big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\big)$.
Donc $\boxed{E = F}$ par extensionnalité.

3. Supposons que l'on a $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$.
On a donc $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in F\big)$ et $\forall x, \big(x \in F \Rightarrow x \in G\big)$ par définition.
Donc $\forall x, \Big[\big(x \in E \Rightarrow x \in F\big) \text{ et } \big(x \in F \Rightarrow x \in G\big)\Big]$.
Donc $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow x \in G\big)$ par transitivité de l'implication.
Donc $\boxed{E \subseteq G}$ par définition.
CQFD.

Remarque :
Nous verrons au chapitre **??** que cela fait de l'inclusion une **relation d'ordre**.

De la même manière que l'on est amené à distinguer « *a est inférieur ou égal à b* » de « *a est strictement inférieur à b* », nous allons être amenés à distinguer l'inclusion de l'inclusion stricte.

Définition 3 (Inclusion stricte)

Soient E et F deux ensembles.

On dit que E est **inclus strictement** dans F si et seulement si $E \subseteq F$ et $E \neq F$.
On note alors $E \subsetneq F$.

On dit aussi que :

- E est un **sous-ensemble propre** de F.
- E est une **partie propre** de F.
- F est un **sur-ensemble propre** de E.
- F **contient strictement** E.

Attention !

Il ne faut pas confondre l'assertion « *E est inclus strictement dans F* », qui se note $E \subsetneq F$, avec l'assertion « *E n'est pas inclus dans F* », qui se note $E \not\subseteq F$.

1.3 Compréhension

Très souvent en mathématiques, nous sommes amenés à rassembler en un ensemble des objets qui partagent une propriété commune (par exemple rassembler ensembles les entiers pairs, qui partagent la propriété d'être divisibles par 2). Le célèbre paradoxe de Russell a montré que l'on ne pouvait pas faire cela n'importe comment : les objets que nous allons rassembler devront préalablement appartenir à un autre ensemble donné.

Nous pouvons formuler ainsi l'axiome suivant, qui va nous permettre de rassembler les éléments d'un même ensemble partageant une même propriété.

Axiome 3 (de compréhension)

Soient E un ensemble et P une proposition pouvant dépendre de paramètres.

Alors il existe une partie de E dont les éléments sont exactement ceux de E qui vérifient P. On le note $\{x \in E \mid P(x)\}$.

Autrement dit, $\forall y, \Big(y \in \{x \in E \mid P(x)\} \iff [y \in E \text{ et } P(y)]\Big)$.

Exemple :
L'ensemble des entiers pairs peut s'écrire $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$.

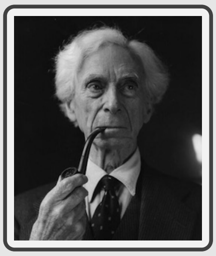
Notation

Dans la notation $\{x \in E \mid P(x)\}$, la variable x est dite **muette**.
Cela veut dire que l'on peut la remplacer par n'importe quel caractère autre que x, sans que cela ne change quoi que ce soit. Il faut bien entendu prendre garde à ne pas utiliser un caractère déjà utilisé, au risque de produire des contre-sens.
Ainsi, $\{x \in E \mid P(x)\} = \{y \in E \mid P(y)\} = \{z \in E \mid P(z)\}$.

Note de l'auteur

Le lecteur avisé pourrait avoir remarqué qu'en réalité, cela nous fournit autant d'axiomes différents que l'on peut fournir de propositions à paramètres. C'est pour cette raison que cela est communément appelé un **schéma d'axiomes** plutôt qu'un simple axiome. Celui-ci porte tout naturellement le nom de **schéma d'axiomes de compréhension**. L'auteur de ce livre a préféré ne pas s'appesantir sur cette distinction, mais c'est comme cela que vous pourrez le trouver si vous faites des recherches annexes.

Pour la petite histoire



Bertrand Arthur William Russell (18 mai 1872 – 2 février 1970), est un mathématicien, logicien, philosophe, épistémologue, homme politique et moraliste britannique.

Russell est, avec FREGE, l'un des fondateurs de la logique contemporaine qui fait de cette dernière le fondement des mathématiques. Son ouvrage majeur, écrit avec Whitehead, a pour titre *Principia Mathematica*. À la suite des travaux d'axiomatisation de l'arithmétique de Peano, Russell a tenté d'appliquer ses propres travaux de logique à la question du fondement des mathématiques (cf. logicisme). Son œuvre littéraire est aussi couronnée par le prix Nobel de littérature en 1950, « *en reconnaissance des divers écrits, toujours de premier plan, qui le posent en champion des idéaux humanistes et de la liberté de pensée* ».

Dans une lettre envoyée en 1902 à Frege, Russell explicite le paradoxe qui porte aujourd'hui son nom : ne pas restreindre le schéma d'axiomes de compréhension aux éléments d'un ensemble permet alors de construire l'ensemble $A := \{x \mid x \notin x\}$, et vient alors la possibilité de se demander si $A \in A$, ou si $A \notin A$, ce qui dans les deux cas apporte une contradiction. C'est pour cette raison que le schéma d'axiome de compréhension sous sa forme actuelle est souvent dénommé « *schéma d'axiomes de compréhension restreint* ».

Nous pourrions à partir de là nous demander ce qu'il se passe si nous remplaçons une proposition P par une autre proposition Q qui lui est équivalente, ou même qui lui est nécessaire. La proposition suivante répond à la question.

Proposition 5 (Compréhension, implications et équivalences)

Soient E un ensemble, et P et Q deux propositions pouvant dépendre de paramètres.

1. $\forall x \in E, \big[P(x) \Rightarrow Q(x)\big]$ si et seulement si $\big\{x \in E \bigm| P(x)\big\} \subseteq \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\}$.
2. $\forall x \in E, \big[P(x) \Leftrightarrow Q(x)\big]$ si et seulement si $\big\{x \in E \bigm| P(x)\big\} = \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\}$.

Démonstration

1. $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall x \in E, \big[P(x) \Rightarrow Q(x)\big]$.

Soit $y \in \big\{x \in E \bigm| P(x)\big\}$.

On a donc $y \in E$ et $P(y)$ par définition.

Donc $y \in E$ et $Q(y)$ par hypothèse.

Donc $y \in \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\}$ par définition.

Donc $\forall y \in \big\{x \in E \bigm| P(x)\big\}, y \in \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\}$.

Donc $\boxed{\big\{x \in E \bigm| P(x)\big\} \subseteq \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\big\{x \in E \bigm| P(x)\big\} \subseteq \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\}$.

Soit $y \in E$.

Supposons que $P(y)$.

Alors $y \in E$ et $P(y)$ donc $y \in \big\{x \in E \bigm| P(x)\big\}$ par définition.

Donc $y \in \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\}$ par hypothèse.

Donc $y \in E$ et $Q(y)$ par définition.

Donc $P(y) \Rightarrow Q(y)$.

Donc $\boxed{\forall y \in E, \big[P(x) \Rightarrow Q(x)\big]}$.

2. On a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& \forall x \in E, \big[P(x) \Leftrightarrow Q(x)\big] \\
\Longleftrightarrow\ & \forall x \in E, \Big(\big[P(x) \Rightarrow Q(x)\big] \text{ et } \big[P(x) \Leftarrow Q(x)\big]\Big) \\
\Longleftrightarrow\ & \Big(\forall x \in E, \big[P(x) \Rightarrow Q(x)\big]\Big) \text{ et } \Big(\forall x \in E, \big[P(x) \Leftarrow Q(x)\big]\Big) \\
\underset{1.}{\Longleftrightarrow}\ & \big\{x \in E \bigm| P(x)\big\} \subseteq \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\} \text{ et } \big\{x \in E \bigm| P(x)\big\} \supseteq \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\} \\
\Longleftrightarrow\ & \big\{x \in E \bigm| P(x)\big\} = \big\{x \in E \bigm| Q(x)\big\}
\end{aligned}
$$

Ce qui prouve l'équivalence recherchée.

CQFD

Nous venons de voir comment se comporte l'axiome de compréhension quand on modifie les propositions. Voyons à présent le comportement vis à vis du changement du sur-ensemble choisi.

Proposition 6 (Compréhension et sous-ensemble)

Soient E et F deux ensembles, et P une proposition pouvant dépendre de paramètres. Si $E \subseteq F$, alors $\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in F \mid P(x)\}$.

Démonstration

Supposons que $E \subseteq F$.

Soit $y \in \{x \in E \mid P(x)\}$.

Par définition, on a $y \in E$ et $P(y)$.

Or $E \subseteq F$ par hypothèse, donc $y \in F$.

Ainsi, on a $y \in F$ et $P(y)$.

Donc $y \in \{x \in F \mid P(x)\}$ par définition.

Donc $\forall y \in \{x \in E \mid P(x)\}, y \in \{x \in F \mid P(x)\}$.

Donc $\boxed{\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in F \mid P(x)\}}$ par définition de l'inclusion.

CQFD

1.4 Ensemble vide

Nous l'avons dit lors de l'introduction, un ensemble peut être vide, c'est-à-dire n'avoir aucun élément.

Définition 4 (Ensemble vide)

Soit E un ensemble.
On dit que E est **vide** si et seulement si $\forall x, x \notin E$.

La proposition qui suit nous assure de l'existence d'au moins un ensemble vide.

Proposition 7 (Existence d'un ensemble vide)

Il existe au moins un ensemble vide.

Démonstration

Il existe au moins un ensemble E d'après l'axiome d'existence.

On peut donc définir $F := \{x \in E \mid x \neq x\}$ d'après l'axiome de compréhension.

Soit x un ensemble.

Par réflexivité de l'égalité, on a $x = x$ donc $x \notin F$.

Ainsi, $\forall x, x \notin F$, si bien que $\boxed{F \text{ est vide}}$.
CQFD.

Si nous venons de prouver l'existence d'au moins un ensemble vide, nous allons maintenant prouver qu'il n'y en a en fait qu'un seul.

Proposition 8 (Unicité de l'ensemble vide)

Soient E et E' deux ensembles **vides**.
On a $E = E'$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Comme E et E' sont vides, on a $x \notin E$ et $x \notin E'$, et donc $x \in E \iff x \in E'$.
Ainsi, $\forall x, \left(x \in E \iff x \in E'\right)$, donc par extensionnalité on a $\boxed{E = E'}$.
CQFD.

Cela nous permet d'affirmer la chose suivante : il existe un unique ensemble vide, et donc nous pouvons désormais poser la définition suivante.

Définition 5 (L'ensemble vide)

On appelle **ensemble vide** l'unique ensemble vide.
On le note $\varnothing$.

Note de l'auteur

Certains auteurs le notent aussi $\emptyset$.

Dans bien des cas, l'ensemble vide pourra se présenter comme un exemple ou un contre-exemple de certains résultats. Cela reposera en grande partie sur les assertions suivantes, qui peuvent perturber à première vue.

Proposition 9 (Vide et quantificateurs)

Soit P une proposition pouvant dépendre de paramètres.

1. L'assertion $\forall x \in \varnothing, P(x)$ est vraie.
2. L'assertion $\exists x \in \varnothing, P(x)$ est fausse.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

Par définition du vide, on a $x \notin \varnothing$ donc l'implication $x \in \varnothing \implies P(x)$.

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in \varnothing \implies P(x)\Big)$, c'est-à-dire $\boxed{\forall x \in \varnothing, P(x)}$.

2. D'après 1, on a $\forall x \in \varnothing, \neg P(x)$, donc $\neg\Big(\exists x \in \varnothing, \neg\neg P(x)\Big)$,
c'est-à-dire $\neg\Big(\exists x \in \varnothing, P(x)\Big)$. Autrement dit, $\boxed{\text{l'assertion } \exists x \in \varnothing, P(x) \text{ est fausse}}$.
CQFD.

L'ensemble vide a la particularité d'être une partie de n'importe quel ensemble, dont lui-même. Il est d'ailleurs sa seule partie.

Proposition 10 (Ensemble vide et inclusion)

Soit E un ensemble.

1. $\varnothing \subseteq E$.
2. $E \subseteq \varnothing \iff E = \varnothing$

Démonstration

1. On a $\forall x \in \varnothing, x \in E$ d'après la proposition 9 page 11, et donc $\boxed{\varnothing \subseteq E}$.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $E \subseteq \varnothing$, on a aussi $\varnothing \subseteq E$ d'après 1, si bien que $E = \varnothing$ par antisymétrie de l'inclusion.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $E = \varnothing$, alors $E \subseteq \varnothing$ par réflexivité de l'inclusion.
CQFD.

1.5 Paires et singletons

À de nombreuses occasions, nous voulons pouvoir écrire explicitement les éléments qui composent un ensemble, c'est-à-dire en dresser la liste. Par exemple, nous aimerons pouvoir définir l'ensemble $\{A, 1, \clubsuit\}$, qui a pour éléments A,1 et $\clubsuit$, et seulement ceux-là. Pour l'heure, l'axiome qui suit va nous permettre de le faire dans le cas où nous n'aurions que deux éléments à mettre, et nous verrons plus tard comment faire dans le cas général.

Axiome 4 (de la paire)

Soient x et y deux ensembles.
Il existe un ensemble dont les éléments sont exactement x et y.
On le note $\{x, y\}$.

Ainsi, $\forall z, \Big(z \in \{x, y\} \iff [z = x \text{ ou } z = y]\Big)$.

Définition 6 (Paires et singletons)

Soit E un ensemble.

1. On dit que E est une **paire** si et seulement s'il existe x et y tels que $E = \{x, y\}$ et $x \neq y$.
2. On dit que E est un **singleton** si et seulement s'il existe x tel que $E = \{x, x\}$, auquel cas on note plutôt $E = \{x\}$.

Proposition 11 (L'ordre n'importe pas dans une paire)

Soient x et y deux ensembles.
On a $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Démonstration

Soit z un ensemble.

On a alors

$$z \in \{x, y\} \iff z = x \text{ ou } z = y \iff z = y \text{ ou } z = x \iff z \in \{y, x\}$$

Donc $\forall z, \Big(z \in \{x, y\} \iff z \in \{y, x\}\Big)$.
Donc $\boxed{\{x, y\} = \{y, x\}}$.
CQFD.

1.6 Ensemble des parties

Il est souvent très utile en mathématiques de réunir dans un même ensemble toutes les parties d'un ensemble. C'est l'axiome suivant qui va nous permettre de le faire.

Axiome 5 (des parties)

Soit E un ensemble.
Il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les parties de E. On le note $\mathscr{P}(E)$.

Ainsi on a $\forall F, \Big(F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subseteq E\Big)$.

Comme un ensemble est toujours inclus dans lui-même, et comme le vide est une partie de tout ensemble, on retrouve naturellement la proposition suivante.

Proposition 12 (Parties triviales d'un ensemble)

Soit E un ensemble.
On a alors $E \in \mathscr{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

On dit que ce sont les parties **triviales** de E.

Démonstration

La réflexivité de l'inclusion nous dit que $E \subseteq E$, et donc $E \in \mathscr{P}(E)$ par définition de $\mathscr{P}(E)$. De même, on a vu à la proposition 10 page 12 que $\varnothing \subseteq E$, si bien que $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.
CQFD.

La transitivité de l'inclusion nous assure que si un ensemble est inclus dans un autre, alors il en est de même pour leurs ensembles de parties respectifs, ce qui n'est pas sans rappeler la notion plus générale de croissance d'une application.

Proposition 13 (Croissance de l'ensemble des parties)

Soient E et F deux ensembles.

1. On a l'équivalence $E \subseteq F \iff \mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.
   L'implication directe $\Rightarrow$ s'appelle la **croissance** du passage à l'ensemble des parties.
2. On a l'équivalence $E = F \iff \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$.
   L'implication réciproque $\Leftarrow$ s'appelle l'**injectivité** du passage à l'ensemble des parties.

Démonstration

1. Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $E \subseteq F$.

Soit $G \in \mathscr{P}(E)$. On a donc $G \subseteq E$ par définition.

Donc $G \subseteq F$ par transitivité de l'inclusion. Donc $G \in \mathscr{P}(F)$ par définition.

Donc $\forall G \in \mathscr{P}(E), G \in \mathscr{P}(F)$ et donc $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.

On a vu $E \in \mathscr{P}(E)$ lors de la proposition 12 page 13, donc $E \in \mathscr{P}(F)$ et donc $E \subseteq F$ par définition.

Finalement, on a bien l'équivalence $\boxed{E \subseteq F \iff \mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)}$.

2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} E = F &\iff E \subseteq F \text{ et } E \supseteq F \text{ par antisymétrie de l'inclusion} \\ &\underset{1.}{\iff} \mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F) \text{ et } \mathscr{P}(E) \supseteq \mathscr{P}(F) \\ &\iff \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F) \text{ par antisymétrie de l'inclusion} \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence $\boxed{E = F \iff \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)}$.
CQFD.

2 Opérations sur les ensembles

Intéressons-nous à présent à différentes opérations que l'on est souvent amené à effectuer sur les ensembles : réunir dans un même ensemble le contenu de plusieurs autres ensembles, ou ne considérer que ce qu'ils ont en commun par exemple. Commençons par la réunion.

2.1 Réunion

Quand on dispose de deux ensembles, il est souvent utile de pouvoir réunir leurs éléments dans un même ensemble, afin de pouvoir tous les manipuler. Par exemple, si on a $E = \{1, a\}$ et $F = \{\bullet, \clubsuit\}$, on aimerait pouvoir disposer de l'ensemble $\{1, a, \bullet, \clubsuit\}$. Comme nous allons apporter un nouvel axiome pour réaliser cet objectif, nous pourrions simplement nous contenter de demander à cet axiome de permettre la réunion de deux ensembles, mais cela limiterait grandement les possibilités : comment ferions-nous pour réunir 100 ou 1 000 voire une infinité d'ensembles à partir de là ? C'est pourquoi l'axiome qui va suivre est un peu plus élaboré : il va nous permettre d'accéder aux éléments des éléments d'un ensemble !

Axiome 6 (de la réunion)

Soit E un ensemble.

Il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de E. On le note $\bigcup E$ et on dit que c'est la **réunion** de E.

Ainsi, on a $\forall x, \Big(x \in \bigcup E \iff \exists A \in E, x \in A\Big)$.

Exemple :
Pour $E = \big\{\{1\}, \{2\}\big\}$, on a $\bigcup E = \{1, 2\}$.

L'exemple ci-dessus laisse entrevoir comment définir la réunion de deux ensembles, mais pour l'heure observons quelques propriétés de la réunion.

Proposition 14 (Réunion du vide)

On a $\bigcup \varnothing = \varnothing$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

L'assertion $\exists A \in \varnothing, x \in A$ est fausse d'après la proposition 9 page 11.

Donc par définition, l'assertion $x \in \bigcup \varnothing$ est fausse.

Ainsi, $\forall x, x \notin \bigcup \varnothing$.

On a donc $\boxed{\bigcup \varnothing = \varnothing}$ par définition de l'ensemble vide.

CQFD.

Proposition 15 (Minimalité de l'union)

Soit E un ensemble.
Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $\forall A \in E, A \subseteq F$
2. Pour tout ensemble X, si $\forall A \in E, A \subseteq X$ alors $F \subseteq X$.

Alors $\bigcup E$ est l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.
Ainsi $\bigcup E$ est **le plus petit** (*au sens de l'inclusion*) ensemble qui contient tous les éléments de E.

Démonstration

• Commençons par montrer que $\bigcup E$ vérifie 1 et 2.

1.

Soit $A \in E$.

Soit $x \in A$.

Comme $A \in E$, il existe $B \in E$ tel que $x \in B$ en prenant $B := A$.

Donc $x \in \bigcup E$ par définition de la réunion.

Donc $A \subseteq \bigcup E$.

Donc $\boxed{\forall A \in E, A \subseteq \bigcup E}$.

2. Soit X un ensemble tel que $\forall A \in E, A \subseteq X$.

Soit $x \in \bigcup E$.

Par définition de la réunion, il existe $A \in E$ tel que $x \in A$.

Or on a $A \subseteq X$ par hypothèse.

Donc $x \in X$.

On a donc $\boxed{\bigcup E \subseteq X}$.

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{\bigcup E \text{ vérifie les points 1 et 2}}$.

• Montrons que $\bigcup E$ est le seul à vérifier les points 1 et 2.

Soit G un ensemble vérifiant les points 1 et 2.

Comme $\bigcup E$ vérifie 1 et G vérifie 2, en prenant $X := \bigcup E$ dans 2 on obtient $G \subseteq \bigcup E$.

Comme G vérifie 1 et $\bigcup E$ vérifie 2, en prenant $X := G$ dans 2 on obtient $G \supseteq \bigcup E$.

Finalement, on a $\boxed{G = \bigcup E}$ d'où l'unicité.

CQFD.

Remarque :
On peut résumer cette proposition en énonçant que pour tout ensemble F, on a l'équivalence suivante :

$$F = \bigcup E \iff \Big[\forall X, \big(\forall A \in E, A \subseteq X\big) \Leftrightarrow F \subseteq X\Big]$$

Le passage à l'ensemble des parties et la réunion agissent d'une certaine façon en sens contraire, un peu à la manière d'une application et sa réciproque. Ce n'est pas tout à fait exact, mais on a tout de même la proposition suivante.

Proposition 16 (Réunion et ensemble des parties)

Soit E un ensemble.

1. $E = \bigcup \mathscr{P}(E)$
2. $E \subseteq \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)$

Démonstration

1. Raisonnons par double inclusion.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x \in E$.

On a vu que $E \in \mathscr{P}(E)$ lors de la proposition 12 page 13.

Il existe donc bien $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $x \in A$, en prenant $A := E$.

Donc $x \in \bigcup \mathscr{P}(E)$ par définition de la réunion.

On a donc $E \subseteq \bigcup \mathscr{P}(E)$.

$\boxed{\supseteq}$ Par définition, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, on a $A \subseteq E$.

On a donc $\bigcup \mathscr{P}(E) \subseteq E$ d'après la proposition 15 page 17.

Finalement, on a bien $\boxed{E = \bigcup \mathscr{P}(E)}$.

2.

Soit $A \in E$.

Soit $x \in A$.

Il existe donc $B \in E$ tel que $x \in B$ en prenant $B := A$.

Donc $x \in \bigcup E$ par définition de la réunion.

Donc $A \subseteq \bigcup E$ et donc $A \in \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)$.

Ainsi, on a bien $\boxed{E \subseteq \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)}$.

CQFD.

Remarque :

- L'inclusion réciproque $E \supseteq \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)$ n'est généralement pas vraie.
  Par exemple pour $E = \{\{1\}\}$, on a $\bigcup E = \{1\}$ donc $\mathscr{P}\left(\bigcup E\right) = \{\varnothing, \{1\}\}$.
- On peut retrouver le fait que le passage à l'ensemble des parties est injectif.
  En effet si l'on a $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$, alors $\bigcup \mathscr{P}(E) = \bigcup \mathscr{P}(F)$ donc d'après ce que l'on vient de voir, on a $E = F$.

On retrouve aussi pour la réunion une propriété de croissance : si un ensemble est inclus dans un autre, alors il en va de même pour leurs réunions respectives.

Proposition 17 (Croissance de la réunion)

Soient E et F deux ensembles.
Si $E \subseteq F$, alors $\bigcup E \subseteq \bigcup F$.
On dit que la réunion est **croissante** (*pour l'inclusion*).

Démonstration

Supposons que $E \subseteq F$.

Soit $x \in \bigcup E$.

Il existe donc $A \in E$ tel que $x \in A$.

Comme $E \subseteq F$, on a $A \in F$.

Comme $x \in A$, on a donc $x \in \bigcup F$.

On a donc bien $\boxed{\bigcup E \subseteq \bigcup F}$.

CQFD.

Remarque :
L'implication réciproque n'est pas nécessairement vraie.
Par exemple si $E = \big\{\{1\}, \{2\}\big\}$ et $F = \big\{\{1, 2\}\big\}$ alors $\bigcup E = \{1, 2\} = \bigcup F$.

On peut à présenter définir la réunion de deux ensembles donnés, comme suggéré par l'exemple vu plus tôt.

Définition 7 (Union de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles.
On appelle **union** de A et de B l'ensemble $\bigcup\{A, B\}$, que l'on note $A \cup B$.

Nous avons vu plus tôt que l'égalité entre ensembles est liée à l'équivalence entre assertions, et qu'il en est de même pour l'inclusion et l'implication. Continuons dans cette lancée avec l'union et la disjonction.

Proposition 18 (Union et disjonction)

Soient A et B deux ensembles.
Pour tout ensemble x, on a l'équivalence

$$x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Démonstration

Soit x un ensemble.

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in A \cup B$.

Par définition, on a donc $x \in \bigcup\{A, B\}$.

Par définition, il existe donc $C \in \{A, B\}$ tel que $x \in C$.

Comme $C \in \{A, B\}$, on a $C = A$ ou $C = B$.

Comme $x \in C$, on a donc $x \in A$ ou $x \in B$.

Donc si $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in A$ ou $x \in B$.

Plaçons-nous dans le cas où $x \in A$.

Comme $A \in \{A, B\}$, il existe donc $C \in \{A, B\}$ tel que $x \in C$.

Donc $x \in \bigcup\{A, B\}$ par définition.

On montre de même que $x \in \bigcup\{A, B\}$ dans le cas où $x \in B$.

Donc dans les deux cas, on a $x \in \bigcup\{A, B\}$.

Donc $x \in A \cup B$ par définition.

Donc si $x \in A$ ou $x \in B$, alors $x \in A \cup B$.

Finalement, on a bien l'équivalence $\boxed{x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)}$.

CQFD.

On retrouve alors différentes propriétés issues de ce lien avec la disjonction.

Proposition 19

Soient A, B et C trois ensembles.

1. On a $A \cup A = A$: on dit que l'union est **idempotente**.
2. On a $A \cup B = B \cup A$: on dit que l'union est **commutative**.
3. On a $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$: on dit que l'union est **associative**.

Démonstration

1. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$x \in A \cup A \underset{18 \text{ p. } 19}{\iff} (x \in A \text{ ou } x \in A) \iff x \in A$$

On a donc bien $\boxed{A \cup A = A}$.

2. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$x \in A \cup B \underset{18 \text{ p. } 19}{\iff} (x \in A \text{ ou } x \in B) \iff (x \in B \text{ ou } x \in A) \underset{18 \text{ p. } 19}{\iff} x \in B \cup A$$

On a donc bien $\boxed{A \cup B = B \cup A}$.

3. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cup C &\underset{18 \text{ p. } 19}{\iff} (x \in A \cup B \text{ ou } x \in C) \\
&\underset{18 \text{ p. } 19}{\iff} \Big((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C\Big) \\
&\iff \Big(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C)\Big) \\
&\underset{18 \text{ p. } 19}{\iff} (x \in A \text{ ou } x \in B \cup C) \\
&\underset{18 \text{ p. } 19}{\iff} x \in A \cup (B \cup C)
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$.
CQFD.

Remarque :

1. Du fait de l'associativité de l'union, on notera $A \cup B \cup C$ pour désigner indifféremment $(A \cup B) \cup C$ et $A \cup (B \cup C)$ puisqu'il n'y a plus d'ambiguïté.
2. On obtient au passage le fait que pour tout ensemble A, on a $\bigcup\{A\} = A$, puisque $\bigcup\{A\} = \bigcup\{A, A\} = A \cup A = A$.

La proposition 15 page 17 concernant la minimalité de l'union s'applique dans le cas particulier de l'union de deux ensembles.

Proposition 20 (Minimalité de l'union de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles.
Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $A \subseteq F$ et $B \subseteq F$.
2. Pour tout ensemble X, si $A \subseteq X$ et $B \subseteq X$ alors $F \subseteq X$.

Alors $A \cup B$ est l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.
Ainsi $A \cup B$ est **le plus petit** (*au sens de l'inclusion*) ensemble qui contient A et B.

Démonstration

C'est simplement une application directe de la proposition 15 page 17.
En effet, on a $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$ donc d'après cette proposition, $A \cup B$ est l'unique ensemble à vérifier à la fois :

— le fait de contenir tous les éléments de $\{A, B\}$, c'est-à-dire A et B.

— être inclus dans tout ensemble qui contient tous les éléments de $\{A, B\}$, c'est-à-dire A et B.

Donc $A \cup B$ est bien l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.

CQFD.

Proposition 21 (Compatibilité de l'union avec l'inclusion)

Soient A_1, B_1, A_2 et B_2 quatre ensembles.
Si $A_1 \subseteq A_2$ et $B_1 \subseteq B_2$, alors $A_1 \cup B_1 \subseteq A_2 \cup B_2$.
On dit que l'union est **compatible** avec l'inclusion.

Démonstration

Supposons que $A_1 \subseteq A_2$ et $B_1 \subseteq B_2$.

Soit $x \in A_1 \cup B_1$.

On a donc $x \in A_1$ ou $x \in B_1$ d'après la proposition 18 page 19.

Si $x \in A_1$, alors comme $A_1 \subseteq A_2$, on a $x \in A_2$.

Si $x \in B_1$, alors comme $B_1 \subseteq B_2$, on a $x \in B_2$.

On a donc $x \in A_2$ ou $x \in B_2$.

Donc $x \in A_2 \cup B_2$ d'après la proposition 18 page 19.

D'où l'inclusion $\boxed{A_1 \cup B_1 \subseteq A_2 \cup B_2}$.

CQFD.

Proposition 22 (Union, absorbant et neutre)

Soit E un ensemble.

1. Pour tout ensemble F, on a l'équivalence $F \subseteq E \iff E \cup F = E$.
   Du fait de l'implication directe $\Rightarrow$, on dit que E est **absorbant** pour l'union parmi ses parties.
2. On a $E \cup \varnothing = E$.
   On dit que $\varnothing$ est **neutre** pour l'union.

Démonstration

1. Soit F un ensemble.

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $F \subseteq E$.

Par réflexivité de l'inclusion, on a aussi $E \subseteq E$.

Donc $E \cup F \subseteq E \cup E$ par compatibilité de l'union avec l'inclusion.

Or on a $E \cup E = E$ par idempotence de l'union.

On a donc $E \cup F \subseteq E$.

De plus, on a vu que $E \subseteq E \cup F$ lors de la proposition 20 page 21.

On en conclut donc que $E \cup F = E$.

Donc si $F \subseteq E$ alors $E \cup F = E$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $E \cup F = E$.

On a vu que $F \subseteq E \cup F$ lors de la proposition 20 page 21.

Donc $F \subseteq E$ par hypothèse.

Donc si $E \cup F = E$ alors $F \subseteq E$.

Finalement, on a bien l'équivalence $\boxed{F \subseteq E \iff E \cup F = E}$.

2. On a vu que $\varnothing \subseteq E$ lors de la proposition 10 page 12.

On peut alors appliquer 1 à $F := \varnothing$ pour conclure que $\boxed{E \cup \varnothing = E}$.

CQFD.

Remarque :
On a désormais ce qu'il faut pour décrire des ensembles explicitement ayant autant d'éléments que l'on souhaite : par exemple pour définir $\{a, b, c\}$, on pose simplement $\{a, b, c\} := \{a, b\} \cup \{c\}$, et de même on pose $\{a, b, c, d\} := \{a, b, c\} \cup \{d\}$. On peut alors répéter le procédé aussi longtemps que désiré.

Nous aurons l'occasion de revenir sur la réunion d'ensembles :

— quand nous aborderons la notion de **familles** lors du chapitre **??**, il sera possible d'expliciter plus facilement des réunions d'une multitude d'ensembles, potentiellement une infinité.

— dans le prochain livre, que nous nous serons dotés de la notion d'entiers naturels, nous pourrons en particulier réunir un nombre précis d'ensemble, aussi grand soit-il.

2.2 Intersection

De même que nous avons voulu pouvoir réunir dans un même ensemble le contenu de plusieurs ensembles, nous aimerions pouvoir considérer ce qu'il y a de commun à plusieurs ensembles. Par exemple si $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{b, c, d, e\}$, nous aimerions pouvoir obtenir $\{b, c\}$. Évidemment dans ce cas-là, nous pouvons le faire explicitement sans passer par une opération supplémentaire, mais nous serons confrontés à des cas où il ne sera pas toujours possible de le faire explicitement.

C'est pourquoi à la manière de la réunion, nous allons commencer par nous doter d'une opération pour regarder les éléments communs à tous les éléments d'un ensemble. Si pour la réunion nous avons eu besoin de passer par un nouvel axiome, ici cela ne sera pas nécessaire : l'axiome de compréhension va ici suffire.

Proposition 23 (Intersection d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**.
Il existe un unique ensemble F tel que

$$\forall x, (x \in F \iff \forall A \in E, x \in A)$$

On appelle cet ensemble **intersection** de E, et on le note $\bigcap E$.

Démonstration

Comme E est non vide, il existe au moins un $A_0 \in E$.
Posons $F := \{x \in A_0 \mid \forall A \in E, x \in A\}$.

• Montrons que F vérifie l'assertion de l'énoncé.

Soit x un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $x \in F$.
Alors par définition on a $\forall A \in E, x \in A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall A \in E, x \in A$.
En particulier comme $A_0 \in E$, on a $x \in A_0$.
On a donc $x \in A_0$ et $\forall A \in E, x \in A$.
Donc $x \in \{x \in A_0 \mid \forall A \in E, x \in A\}$.
Donc $x \in F$.

On a donc l'équivalence $x \in F \iff \forall A \in E, x \in A$.

Ainsi, on a bien $\boxed{\forall x, (x \in F \iff \forall A \in E, x \in A)}$.

• Montrons l'unicité de F.
Cela provient simplement de l'axiome d'extensionnalité.
En effet, soit G un ensemble tel que $\forall x, (x \in G \iff \forall A \in E, x \in A)$.
On a alors $\forall x, (x \in G \iff \forall A \in E, x \in A \iff x \in F)$ par ce que l'on vient de prouver. Et donc $\boxed{G = F}$ d'où l'unicité.
CQFD.

Exemple :
Si $E = \big\{\{1,2\},\{2,3\}\big\}$ alors $\bigcap E = \{2\}$.

Si l'on avait une propriété de minimalité en ce qui concerne l'union via la proposition 15 page 17, on a ici de manière duale une propriété de maximalité en ce qui concerne l'intersection.

Proposition 24 (Maximalité de l'intersection d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**.
Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $\forall A \in E, F \subseteq A$
2. Pour tout ensemble X, si $\forall A \in E, X \subseteq A$ alors $X \subseteq F$.

Alors $\bigcap E$ est l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.
Ainsi $\bigcap E$ est **le plus grand** (*au sens de l'inclusion*) ensemble qui est contenu dans tous

les éléments de E.

Démonstration

• Commençons par montrer que $\bigcap E$ vérifie 1 et 2.

1.

Soit $A \in E$.

Soit $x \in \bigcap E$.

On a alors $\forall B \in E, x \in B$ d'après la proposition 23 page 23.

En particulier comme $A \in E$, on a $x \in A$.

Donc $\bigcap E \subseteq A$.

Donc $\boxed{\forall A \in E, \bigcap E \subseteq A}$.

2. Soit X un ensemble tel que $\forall A \in E, X \subseteq A$.

Soit $x \in X$.

Soit $A \in E$.

Par hypothèse, on a $X \subseteq A$ donc $x \in A$.

Donc $\forall A \in E, x \in A$ donc $x \in \bigcap E$ d'après la proposition 23 page 23.

Donc $\boxed{X \subseteq \bigcap E}$.

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{\bigcap E \text{ vérifie les points 1 et 2}}$.

• Montrons que $\bigcap E$ est le seul ensemble à vérifier 1 et 2.

Soit G un ensemble vérifiant 1 et 2.

Comme $\bigcap E$ vérifie 1 et G vérifie 2, en prenant $X := \bigcap E$ dans 2 on obtient $G \supseteq \bigcap E$.

Comme G vérifie 1 et $\bigcap E$ vérifie 2, en prenant $X := G$ dans 2 on obtient $G \subseteq \bigcap E$.

Finalement, on a $\boxed{G = \bigcap E}$ d'où l'unicité.

CQFD.

Remarque :

On peut résumer cette proposition en énonçant que pour tout ensemble F, on a l'équivalence suivante :

$$F = \bigcap E \iff \Big[\forall X, \big(\forall A \in E, X \subseteq A\big) \Leftrightarrow X \subseteq F\Big]$$

Si la proposition 17 page 19 nous donne la croissance (*pour l'inclusion*) de la réunion, nous allons voir que l'intersection est quant à elle décroissante.

Proposition 25 (Décroissance de l'intersection d'un ensemble)

Soient E et F deux ensembles **non vides**.
Si $E \subseteq F$ alors $\bigcap E \supseteq \bigcap F$.
On dit que l'intersection est **décroissante** (*pour l'inclusion*).

Démonstration

Supposons que $E \subseteq F$.

Soit $x \in \bigcap F$.

Soit $A \in E$.

Par hypothèse on a $E \subseteq F$ donc $A \in F$.

Or on a $x \in \bigcap F$ donc $\forall B \in F, x \in B$ d'après la proposition 23 page 23.

En particulier comme $A \in F$, on a $x \in A$.

Donc $\forall A \in E, x \in A$.

Donc $x \in \bigcap E$ d'après la proposition 23 page 23.

Donc $\boxed{\bigcap F \subseteq \bigcap E}$.

CQFD.

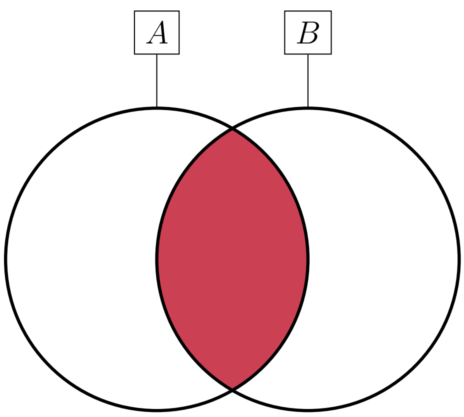
Nous pouvons à présent définir l'intersection de deux ensembles : le principe est le même que pour la réunion de deux ensembles.

Définition 8 (Intersection de deux ensembles)

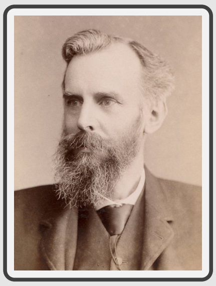
Soient A et B deux ensembles.
On appelle **intersection** de A et de B l'ensemble $\bigcap\{A, B\}$, que l'on note $A \cap B$.

Remarque :

1. L'intersection $A \cap B$ est bien définie car $\{A, B\}$ est évidemment non vide.
2. Il est courant de représenter l'intersection de deux ensembles. à l'aise d'un **diagramme de Venn**. Ici, on a colorié en **rouge** l'ensemble $A \cap B$.



Pour la petite histoire



John Venn (4 août 1834 – 4 avril 1923) est un mathématicien et logicien britannique.
Il est renommé pour avoir conçu les diagrammes de Venn, qu'il a présenté en 1881.
En 1883, il est élu membre de la Royal Society.

De la même manière que l'union de deux ensembles est liée à la disjonction d'assertions, l'intersection est liée à la conjonction.

Proposition 26 (Intersection de deux ensembles et conjonction)

Soient A et B deux ensembles.
Pour tout ensemble x, on a l'équivalence :

$$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$$

En particulier, on a $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in A \cap B$.

Par définition, on a donc $x \in \bigcap\{A, B\}$.

Par définition, on a donc $\forall C \in \{A, B\}, x \in C$.

Or $A \in \{A, B\}$ et $B \in \{A, B\}$ donc $x \in A$ et $x \in B$.

Donc si $x \in A \cap B$ alors $x \in A$ et $x \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in A$ et $x \in B$.

Alors pour tout $C \in \{A, B\}$, on a $C = A$ ou $C = B$ donc $x \in C$.

Donc $x \in \bigcap\{A, B\}$ par définition.

Donc $x \in A \cap B$ par définition.

Donc si $x \in A$ et $x \in B$ alors $x \in A \cap B$.

Finalement, on a bien $\boxed{x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)}$.
CQFD.

On retrouve alors les propriétés suivantes, issues de celles de la conjonction.

Proposition 27

Soient A, B et C trois ensembles.

1. On a $A \cap A = A$: on dit que l'intersection est **idempotente**.
2. On a $A \cap B = B \cap A$: on dit que l'intersection est **commutative**.
3. On a $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$: on dit que l'intersection est **associative**.

Démonstration

1. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$x \in A \cap A \underset{\text{26 p. 27}}{\iff} (x \in A \text{ et } x \in A) \iff x \in A$$

On a donc bien $\boxed{A \cap A = A}$.

2. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$x \in A \cap B \underset{\text{26 p. 27}}{\iff} (x \in A \text{ et } x \in B) \iff (x \in B \text{ et } x \in A) \underset{\text{26 p. 27}}{\iff} x \in B \cap A$$

On a donc bien $\boxed{A \cap B = B \cap A}$.

3. Pour tout ensemble x, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\underset{\text{26 p. 27}}{\iff} (x \in A \cap B \text{ et } x \in C) \\ &\underset{\text{26 p. 27}}{\iff} \Big((x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C\Big) \\ &\iff \Big(x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C)\Big) \\ &\underset{\text{26 p. 27}}{\iff} (x \in A \text{ et } x \in B \cap C) \\ &\underset{\text{26 p. 27}}{\iff} x \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$.
CQFD.

Remarque :

1. Du fait de l'associativité de l'intersection, on notera $A \cap B \cap C$ pour désigner indifféremment $(A \cap B) \cap C$ et $A \cap (B \cap C)$ puisqu'il n'y a plus d'ambiguïté.

2. On obtient au passage le fait que pour tout ensemble A on a $\bigcap\{A\} = A$, puisque $\bigcap\{A\} = \bigcap\{A, A\} = A \cap A = A$.

La proposition 24 page 24 concernant la maximalité de l'intersection s'applique dans le cas particulier de l'intersection de deux ensembles.

Proposition 28 (Maximalité de l'intersection de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles.
Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $F \subseteq A$ et $F \subseteq B$.
2. Pour tout ensemble X, si $X \subseteq A$ et $X \subseteq B$ alors $X \subseteq F$.

Alors $A \cap B$ est l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.
Ainsi $A \cap B$ est **le plus grand** (*au sens de l'inclusion*) ensemble contenu dans A et B.

Démonstration

C'est simplement une application directement de la proposition 24 page 24.

En effet $A \cap B = \bigcap\{A, B\}$ donc d'après cette proposition $A \cap B$ est l'unique ensemble à vérifier à la fois :

— le fait d'être contenu dans tous les éléments de $\{A, B\}$, c'est-à-dire A et B.

— le fait de contenir tout ensemble contenu dans tous les éléments de $\{A, B\}$, c'est-à-dire A et B.

Donc $A \cap B$ est bien l'unique ensemble à vérifier simultanément 1 et 2.

CQFD.

Proposition 29 (Compatibilité de l'intersection avec l'inclusion)

Soient A_1, A_2, B_1 et B_2 quatre ensembles.
Si $A_1 \subseteq A_2$ et $B_1 \subseteq B_2$, alors $A_1 \cap A_1 \subseteq B_1 \cap B_2$.
On dit que l'intersection est **compatible** avec l'inclusion.

Démonstration

Supposons que $A_1 \subseteq A_2$ et $B_1 \subseteq B_2$.

Soit $x \in A_1 \cap B_1$.

On a donc $x \in A_1$ et $x \in B_1$ d'après la proposition 26 page 27.

Comme $x \in A_1$ et $A_1 \subseteq A_2$, on a $x \in A_2$.

Comme $x \in B_1$ et $B_1 \subseteq B_2$, on a $x \in B_2$.

Donc comme $x \in A_2$ et $x \in B_2$, on a $x \in A_2 \cap B_2$ d'après la proposition 26 page 27.

D'où l'inclusion $\boxed{A_1 \cap A_1 \subseteq B_1 \cap B_2}$.

. **CQFD**.

Proposition 30 (Intersection, absorbant et neutre)

Soit E un ensemble.

1. Pour tout ensemble F, on a l'équivalence

$$F \subseteq E \iff E \cap F = F$$

   Du fait de l'implication directe $\Rightarrow$, on dit que E est **neutre** pour l'intersection avec ses parties

2. On a $E \cap \varnothing = \varnothing$.
   On dit que $\varnothing$ est **absorbant** pour l'intersection.

Démonstration

1. Soit F un ensemble.

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $F \subseteq E$.

Par réflexivité de l'inclusion, on a aussi $F \subseteq F$.

Donc par compatibilité de l'intersection avec l'inclusion, on a $F \cap F \subseteq E \cap F$.

Or on a $F \cap F = F$ par idempotence de l'intersection.

On a donc $F \subseteq E \cap F$.

De plus, on a vu que $E \cap F \subseteq F$ lors de la proposition 28 page 29.

On en conclut donc que $E \cap F = F$.

Donc si $F \subseteq E$ alors $E \cap F = F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $E \cap F = F$

On a vu que $E \cap F \subseteq E$ lors de la proposition 28 page 29.

On a donc $F \subseteq E$ par hypothèse.

Donc si $E \cap F = F$ alors $F \subseteq E$.

Finalement, on a bien l'équivalence $\boxed{F \subseteq E \iff E \cap F = F}$.

2. On a vu que $\varnothing \subseteq E$ lors de la proposition 10 page 12.

On peut appliquer 1 à $F := \varnothing$ pour obtenir $\boxed{E \cap \varnothing = \varnothing}$.

CQFD.

Proposition 31 (Intersection et ensemble des parties)

Soient A et B deux ensembles.
On a $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

Démonstration

Il s'agit simplement d'une reformulation de la proposition 28 page 29.

En effet, pour tout ensemble X, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} F \in \mathscr{P}(A \cap B) &\iff F \subseteq A \cap B \\ &\underset{28 \text{ p. } 29}{\iff} F \subseteq A \text{ et } F \subseteq B \\ &\iff F \in \mathscr{P}(A) \text{ et } F \in \mathscr{P}(B) \\ &\underset{26 \text{ p. } 27}{\iff} F \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \end{aligned}$$

D'où l'égalité $\boxed{\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)}$.

CQFD.

Définition 9 (Ensembles disjoints)

Soient A et B deux ensembles.
On dit que A et B sont **disjoints** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Proposition 32 (Ensembles disjoints et parties)

Soient A et B deux ensembles.
Soient A' une partie de A et B' une partie de B.

Si A et B sont disjoints, alors A' et B' sont disjoints.

Démonstration

Supposons que A et B sont disjoints.

On a donc $A \cap B = \varnothing$ par définition.

Or on a $A' \subseteq A$ et $B' \subseteq B$ par définition.

Donc $A' \cap B' \subseteq A \cap B$ par compatibilité de l'intersection avec l'inclusion.

Donc $A' \cap B' \subseteq \varnothing$.

Donc $A' \cap B' = \varnothing$ d'après la proposition 10 page 12.

Donc $\boxed{A' \text{ et } B' \text{ sont disjoints}}$.

CQFD.

Proposition 33 (Lois de De Morgan)

Soient A, B et C trois ensembles.

1. On a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   On dit que l'union est **distributive** sur l'intersection.
2. On a $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   On dit que l'intersection est **distributive** sur l'union.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\underset{18 \text{ p. } 19}{\Longleftrightarrow} x \in A \text{ ou } x \in B \cap C \\ &\underset{26 \text{ p. } 27}{\Longleftrightarrow} x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C) \\ &\qquad \text{d'après les lois de De Morgan} \\ &\underset{18 \text{ p. } 19}{\Longleftrightarrow} x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C \\ &\underset{26 \text{ p. } 27}{\Longleftrightarrow} x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

D'où l'égalité $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$.

2.

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\underset{26 \text{ p. } 27}{\Longleftrightarrow} x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\ &\underset{18 \text{ p. } 19}{\Longleftrightarrow} x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\ &\qquad \text{d'après les lois de De Morgan} \\ &\underset{26 \text{ p. } 27}{\Longleftrightarrow} x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C \end{aligned}$$

$$\underset{18 \text{ p. } 19}{\Longleftrightarrow} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

D'où l'égalité $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$.
CQFD.

Pour la petite histoire

Auguste De Morgan (27 juin 1806 – 18 mars 1871) est un mathématicien et logicien britannique. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne ; il a notamment formulé les lois de De Morgan.

2.3 Différence et complémentaire

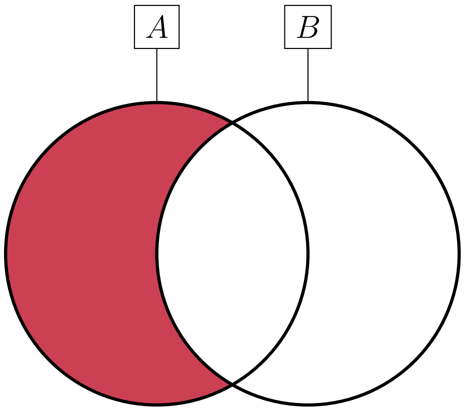
Définition 10 (Différence et complémentaire)

Soient A et B deux ensembles.

1. On appelle **différence** de A par B l'ensemble $\{x \in A \mid x \notin B\}$. On le note $A \backslash B$.
2. Si $B \subseteq A$, alors $A \backslash B$ est aussi appelé **complémentaire** de B dans A, et est alors souvent noté $\complement_A B$.

Remarque :

1. $A \backslash B$ est aussi souvent noté $A - B$.
2. Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le sur-ensemble considéré, on note souvent B^c pour parler du complémentaire de B dans ce sur-ensemble.
3. On peut représenter la différence ensembliste par un diagramme de Venn.
   Ici, on a colorié en rouge l'ensemble $A \backslash B$.



2.4 Ensemble engendré par un autre

Il est fréquent qu'en mathématiques on s'intéresse à un type d'ensemble particulier obéissant à certaines règles : les groupes, les espaces vectoriels, les tribus, etc. En se donnant alors un ensemble quelconque A ne présentant pas particulièrement ce genre de structure, on souhaite cependant souvent obtenir le plus petit ensemble (*au sens de l'inclusion*) qui est bien une structure recherchée et qui contient A.

La partie qui suit a pour objet de donner un cadre général à cela : on parlera de **l'engendré** par A vérifiant les règles demandées.

Définition 11 (Propriétés stable par intersection)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.
On dit que P est **stable par intersection** si et seulement si pour tout ensemble $\mathcal{E}$ **non vide**

$$\Big(\forall A \in \mathcal{E}, P(A)\Big) \implies P\Big(\bigcap \mathcal{E}\Big)$$

Ce sont justement les propriétés stables par intersection qui vous nous permettre de définir la notion d'engendré par une partie. Nous pouvons en voir un premier exemple, qui nous resservira à un autre endroit.

Proposition 34 (Stabilité par intersection d'être un sur-ensemble)

Soit A un ensemble.
Pour tout ensemble B, posons $P(B)$ l'assertion $A \subseteq B$.
Alors P est stable par intersection.

Démonstration

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.

Supposons que $\forall B \in \mathcal{E}, P(B)$.

Ainsi, $\forall B \in \mathcal{E}, A \subseteq B$.

Alors $A \subseteq \bigcap \mathcal{E}$ d'après la proposition 24 page 24.

Autrement dit, on a $P(\bigcap \mathcal{E})$.

Donc si $\forall B \in \mathcal{E}, P(B)$ alors $P(\bigcap \mathcal{E})$.

Ceci étant vrai pour tout ensemble $\mathcal{E}$ non vide, on en conclut que $\boxed{P \text{ est stable par intersection}}$.

CQFD.

Proposition 35 (Stabilité par intersection et conjonction)

Soient P et Q deux assertions pouvant dépendre de paramètres.
Soient A et B deux ensembles.

1. Supposons que P est stable par intersection.
   Si $P(A)$ et $P(B)$ alors $P(A \cap B)$.
2. Soit R la conjonction de P et Q.
   Si P et Q sont stables par intersection, alors R est stable par intersection.

Démonstration

1. Supposons que $P(A)$ et $P(B)$.

Alors pour tout $C \in \{A, B\}$, on a $C = A$ ou $C = B$ donc $P(C)$.

Or par hypothèse P est stable par intersection.

On a donc $P(\bigcap\{A, B\})$, c'est-à-dire $P(A \cap B)$ par définition.

2. Supposons que P et Q sont stables par intersection.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.

Supposons que $\forall C \in \mathcal{E}, R(C)$.

On a donc $\forall C \in \mathcal{E}, \Big(P(C) \text{ et } Q(C)\Big)$.

On a donc $\Big(\forall C \in \mathcal{E}, P(C)\Big)$ et $\Big(\forall C \in \mathcal{E}, Q(C)\Big)$.

Or par hypothèse P et Q sont stables par intersection.

On a donc $P(\bigcap \mathcal{E})$ et $Q(\bigcap \mathcal{E})$, c'est-à-dire $R(\bigcap \mathcal{E})$.

Donc si $\forall C \in \mathcal{E}, R(C)$ alors $R(\bigcap \mathcal{E})$.

Ceci étant vrai pour tout ensemble $\mathcal{E}$ non vide, on en conclut que $\boxed{R \text{ est stable par intersection}}$.

CQFD.

Nous avons désormais toutes les clés en mains pour définir la notion d'ensemble engendré.

Proposition 36 (Ensemble engendré)

Soient P une assertion pouvant dépendre de paramètres qui est **stable par intersection**.
Soit A un ensemble admettant au moins un sur-ensemble E tel que $P(E)$.

Pour tout ensemble F, considérons les deux assertions suivantes :

1. $A \subseteq F$ et $P(F)$.
2. Pour tout ensemble X, si $A \subseteq X$ et $P(X)$ alors $F \subseteq X$.

Alors il existe un unique ensemble qui vérifie simultanément 1 et 2.
On le note $\langle A \rangle_P$ et on dit que c'est le ***P*-engendré** par A.

Démonstration

• **Existence**

Par définition de A, il existe au moins un ensemble E vérifiant 1.

Posons $\mathcal{E}_E := \left\{ B \subseteq E \,\middle|\, A \subseteq B \text{ et } P(B) \right\}$ l'ensemble des parties de E qui vérifient 1.

Par définition de E, on a donc $E \in \mathcal{E}_E$ donc $\mathcal{E}_E$ est non vide.

On peut donc définir $\mathcal{V}_E := \bigcap \mathcal{E}_E$.

Montrons que $\mathcal{V}_E$ vérifie 1.

En effet, l'assertion 1 est la conjonction du fait d'être un sur-ensemble de A et de P.

Or le fait d'être un sur-ensemble de A est stable par intersection d'après la prop. 34 p. 34.

De même, par définition P est stable par intersection.

Donc l'assertion 1 est stable par intersection d'après la proposition 35 page 35.

Or par définition, tous les éléments de $\mathcal{E}_E$ vérifient 1.

Donc $\boxed{\mathcal{V}_E = \bigcap \mathcal{E}_E \text{ vérifie aussi } 1}$.

Montrons que $\mathcal{V}_E$ vérifie 2.

> Soit X un ensemble vérifiant 1.
>
> Nous allons montrer que $\mathcal{V}_E \subseteq X$.
>
> Pour cela posons $\mathcal{V}_X := \mathcal{V}_E \cap X$ et montrons que $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_E$.
>
> Pour cela, montrons que $\mathcal{V}_X \in \mathcal{E}_E$.
>
> En effet on a $E \in \mathcal{E}_E$ et $\mathcal{V}_E = \bigcap \mathcal{E}_E$ donc $\mathcal{V}_E \subseteq E$ d'après la prop. 24 p. 24.
>
> Or on a $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_E \cap X$ donc $\mathcal{V}_X \subseteq \mathcal{V}_E$ d'après la prop. 28 p. 29 donc $\mathcal{V}_X \subseteq E$.
>
> On a vu précédemment que $\mathcal{V}_E$ vérifie 1, et X vérifie 1 par définition.
>
> Or on a vu que 1 est stable par intersection.
>
> Donc $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_E \cap X$ vérifie 1 d'après la proposition 35 page 35.
>
> Ainsi, $\mathcal{V}_X \subseteq E$ et vérifie 1.
>
> Donc $\mathcal{V}_X \in \mathcal{E}_E$ par définition de $\mathcal{E}_E$.
>
> Or on a $\mathcal{V}_E = \bigcap \mathcal{E}_E$ donc $\mathcal{V}_E \subseteq \mathcal{V}_X$.
>
> Mais on a dit que $\mathcal{V}_X \subseteq \mathcal{V}_E$ si bien que $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_E$.
>
> Or on a $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_E \cap X$ donc $\mathcal{V}_X \subseteq X$ et donc $\mathcal{V}_E \subseteq X$.

Donc si X est un ensemble vérifiant 1, alors $\mathcal{V}_E \subseteq X$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{V}_E \text{ vérifie } 2}$.

• **Unicité**

Soit G un ensemble vérifiant simultanément 1 et 2.

Comme G vérifie 1 et $\mathcal{V}_E$ vérifie 2, en prenant $X := G$ dans 2 on obtient $\mathcal{V}_E \subseteq G$.

Comme $\mathcal{V}_E$ vérifie 1 et G vérifie 2, en prenant $X := \mathcal{V}_E$ dans 2 on obtient $G \subseteq \mathcal{V}_E$.

Finalement on a $\mathcal{V}_E = G$, $\boxed{\text{d'où l'unicité}}$.

CQFD.

Exemple :
On peut citer par exemple la notion de sous-groupe engendré, la notion de sous-espace vectoriel engendré, ou encore la notion de tribu engendrée.

Remarque :
Si A vérifie déjà l'assertion P, alors on a naturellement $\langle A \rangle_P = A$.
En effet, on a $A \subseteq A$ et $P(A)$ donc $\langle A \rangle_P \subseteq A$.
Mais on a aussi toujours $A \subseteq \langle A \rangle_P$ d'où l'égalité.

Bibliographie

- Wikipédia
- Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématiques - Théorie des ensembles*, 1970
- Laurent Schwartz, *Analyse I : Théorie des ensembles et topologie*, 1991

Mathématiciens