# Mémo sans démo - Révisions de topologie 1

Daniel B. Williams

Octobre 2021 $\longrightarrow$ Mars 2022

# Table des matières

Chapitre 1

# Espaces topologiques

## 1 Espaces topologiques

### 1.1 Ouverts et fermés

**Définition 1 (Espace topologique)**

Une topologie sur un espace $X$ est la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de $X$ telles que les conditions suivantes sont vérifiées :

**(O1)** $\varnothing \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$

**(O2)** $\forall U, V \in \mathcal{T}, U \cap V \in \mathcal{T}$

**(O3)** Pour toute famille quelconque $(U_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

On dira que les éléments de $\mathcal{T}$ sont les **ouverts** de $(X; \mathcal{T})$.

**Exemple** :

- Pour tout ensemble $X$, $\mathscr{P}(X)$ est une topologie appelée **topologie discrète**. Un ensemble munit de cette topologie est appelé **espace discret**.
- $\{\varnothing; X\}$ est aussi une topologie sur $X$, appelée **topologie grossière**, ou **triviale**.
- $\mathcal{T}_{\text{cf}} := \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid X \backslash A \text{ est fini}\}$ est une topologie sur $X$ appelée **topologie cofinie**.
  Si $X$ est infini, alors deux ouverts quelconques dans $(X; \mathcal{T}_{\text{cf}})$ ont toujours une intersection non vide.

**Définition 2 (Fermés)**

Soient $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$.
On dit que $A$ est un **fermé** de $(X; \mathcal{T})$ si et seulement si $X \backslash A$ est un ouvert de $(X; \mathcal{T})$.

**Proposition 1 (Unique topologie associée aux fermés)**

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de $(X;\mathcal{T})$. Alors $\mathcal{F}$ vérifie les trois conditions suivantes :

**(F1)** $\varnothing \in \mathcal{F}$ et $X \in \mathcal{F}$

**(F2)** Pour tout $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, on a $A \cup B \in \mathcal{F}$.

**(F3)** Pour toute famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, $I \neq \varnothing$, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$.

Réciproquement, étant donné un ensemble $X$ quelconque, si un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de $X$ vérifie **(F1)**, **(F2)** et **(F3)**, alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur $X$ dont $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés. Ils s'agit tout simplement de $\mathcal{T} := \{U \subseteq X \mid X\backslash U \in \mathcal{F}\}$.

## 1.2 Bases d'ouverts

**Définition 3 (Base d'ouverts)**

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{T}$.
On dit que $\mathcal{B}$ est une **base d'ouverts** de $(X;\mathcal{T})$ si et seulement si tout ouvert de $(X;\mathcal{T})$ est une réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{B}$.

**Exemple** :
Si $X$ est un espace discret, alors $\mathcal{B} := \{\{x\} \mid x \in X\}$ est une base d'ouverts de $X$.

**Proposition 2 (Caractérisation d'une base d'ouverts)**

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, et $\mathcal{B} \subseteq T$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{B}$ est une base topologique de $(X;\mathcal{T})$.
2. $\forall U \in \mathcal{T}, \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq U$.

**Remarque** :
En faisant le même raisonnement, on peut montrer que pour $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de $X$, et $U$ une partie de $X$, alors $A$ est un ouvert de $X$ si et seulement si pour tout $x \in A$, il existe un $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq A$.

**Proposition 3 (Unique topologie issue d'une base d'ouverts)**

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de $X$.
Alors $\mathcal{B}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

**(B1)** Pour tout $x \in X$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U$.

**(B2)** Pour tous $U_1$ et $U_2$ dans $\mathcal{B}$, et tout $x \in U_1 \cap U_2$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Réciproquement, si $X$ est un ensemble, et si $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ vérifie (B1) et (B2), alors il existe une unique topologique $\mathcal{T}$ sur $X$ pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts.
Il s'agit de $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X \mid U \text{ est une réunion d'éléments de } \mathcal{B}\}$.

**Exemple** :
Soit $(X;\leq)$ un ensemble totalement ordonné. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intervalles ouverts et semi-ouverts de $X$, ainsi que $X$.
Alors $\mathcal{B}$ vérifie (B1) et (B2), et sa topologie engendrée sur $X$ est appelée **topologie de l'ordre** de $(X;\leq)$.

## 1.3 Prébase

**Proposition 4 (Intersection de topologies)**

Soit $X$ un ensemble, et soit $\mathcal{X}$ un ensemble **non vide** de topologies sur $X$.
Alors $\bigcap\limits_{\mathcal{T}\in\mathcal{X}} \mathcal{T}$ est une topologie sur $X$.

**Définition 4 (Topologie engendrée et prébase)**

Soit $X$ un ensemble.

1. Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X)$. On appelle **topologie engendrée** par $\mathcal{P}$ sur $X$ la plus petite topologie (au sens de l'inclusion) $\mathcal{T}$ sur $X$ telle que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$. Son existence est assurée par le fait que c'est $\bigcap\limits_{\mathcal{T}\in\mathcal{X}} \mathcal{T}$ où $\mathcal{X} = \{\mathcal{T} \subseteq \mathscr{P}(X) \mid \mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \text{ et } \mathcal{T} \text{ est une topologie sur } X\}$ qui est non vide puisque $\mathscr{P}(X) \in \mathcal{X}$.
2. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $X$. On appelle **prébase** de $\mathcal{T}$ tout $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X)$ telle que $\mathcal{T}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{P}$ sur $X$.

**Proposition 5 (Une base d'ouverts est une prébase)**

Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de $\mathcal{T}$.
Alors $\mathcal{B}$ est une prébase de $\mathcal{T}$.
Autrement dit, $\mathcal{T}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

**Proposition 6 (Caractérisation de la topologie engendrée)**

Soit $X$ un ensemble. Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X)$ non vide.
Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{P}$, auquel on ajoute $X$.
Alors $\mathcal{B}$ vérifie les axiomes **(B1)** et **(B2)**, et l'unique topologie sur $X$ associée à $\mathcal{B}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{P}$.

## 1.4 Voisinages

**Définition 5 (Voisinage)**

Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique.

- Soit $x \in X$. On appelle **voisinage** de $x$ toute partie $V \subseteq X$ tel qu'il existe un ouvert $U$ tel que $x \in U \subseteq V$.
- Soit $A \subseteq X$. On appelle voisinage de $A$ toute partie $V \subseteq X$ tel qu'il existe un ouvert $U$ tel que $A \subseteq U \subseteq V$.

**Proposition 7 (Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points)**

Pour qu'une partie d'un espace topologique $X$ soit un ouvert, il faut et il suffit qu'elle soit un voisinage de chacun de ses points.
En particulier, une topologie est entièrement caractérisée par ses voisinages.

**Proposition 8 (Unique topologie issue des voisinages)**

Soient $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique.
Pour tout $x \in X$, soit $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de $x$.
Soit $x \in X$. On a alors :

**(V1)** $\mathcal{V}(x)$ est non vide, et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $x \in V$

**(V2)** Toute partie de $X$ qui contient un élément de $\mathcal{V}(x)$ est aussi un élément de $\mathcal{V}(x)$.

**(V3)** L'intersection de deux éléments de $\mathcal{V}(x)$ est un élément de $\mathcal{V}(x)$.

**(V4)** Pour tout $y \in X$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(y)$, il existe $W \in \mathcal{V}(y)$ tel que pour tout $z \in W$, on a $V \in \mathcal{V}(z)$.

Réciproquement, pour $X$ un ensemble quelconque et pour tout $x \in X$ un ensemble $\mathcal{V}(x)$ vérifiant **(V1)**, **(V2)**, **(V3)** et **(V4)**, alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur $X$ vérifiant que pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de $x$.
Il s'agit tout simplement de $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X \mid \forall x \in U, U \subseteq \mathcal{V}(x)\}$.

## 1.5 Base de voisinages

### Définition 6 (Base de voisinages)

Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle **base de voisinages** de $(X; \mathcal{T})$ toute famille $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ où pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ est un ensemble de voisinages de $x$ tels que pour tout voisinage $V$ de $x$, il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subseteq V$.

**Remarque** :
Si $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ est une base de voisinages de $(X; \mathcal{T})$, alors pour tout $x \in X$ on a
$\mathcal{V}(x) = \{V \subseteq X \mid \exists W \in \mathcal{B}(x), W \subseteq V\}$.

**Exemple** :

- Pour tout espace topologique $(X; \mathcal{T})$, la famille $(\mathcal{V}(x))_{x \in X}$ est une base de voisinages.
- Si pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ est l'ensemble des ouverts contenant $x$, alors $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ est une base de voisinages.
- Si $X$ est discret, alors $\big(\{x\}\big)_{x \in X}$ est une base de voisinages de $X$.
- Dans $\mathbb{R}$, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(x) := \left\{ ]x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}[ \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$, et si $\mathcal{B}'(x) := \left\{ [x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}] \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$, alors $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ et $(\mathcal{B}'(x))_{x \in X}$ sont des bases de voisinages de $X$.
- Dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\{[-\infty; n[ \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinages associés à $-\infty$. De même, l'ensemble $\{]n; +\infty] \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinages associés à $+\infty$.

### Proposition 9 (Base d'ouverts et base de voisinages)

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

*(i)* $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $X$.

*(ii)* $\Big(\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}\Big)_{x \in X}$ est une base de voisinages de $X$.

### Proposition 10 (Base de voisinages ouverts et axiomes de Hausdorff)

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ une base de voisinages, constituée uniquement d'ouverts. Alors $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ vérifie les assertions suivantes, appelées **axiomes de Hausdorff** :

**(H1)** Pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \varnothing$ et pour tout $U \in \mathcal{B}(x)$, on a $x \in U$.

**(H2)** Pour tout $x \in X$ et tout $U_1$ et $U_2$ dans $\mathcal{B}(x)$, il existe $U_3 \in \mathcal{B}(x)$ tel que $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

**(H3)** Pour tout $x \in X$, tout $U \in \mathcal{B}(x)$ et tout $y \in U$, il existe $W \in \mathcal{B}(y)$ tel que $W \subseteq U$.

Réciproquement, pour un ensemble $X$ quelconque, si $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ est une famille d'ensemble de parties de $X$ vérifiant **(H1)**, **(H2)** et **(H3)**, alors il existe une unique topologique $\mathcal{T}$ sur $X$ telle que $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ est une base de voisinages, constitués uniquement d'ouverts. Il s'agit de la topologie associé à la base d'ouverts $\mathcal{B} := \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}(x)$.

# 2 Intérieur et adhérence

## 2.1 Intérieur et adhérence

**Définition 7 (Intérieur, adhérence, frontière, point d'acc. et isolé)**

Soient $X$ un espace topologique, $x \in X$ et $A \subseteq X$.

1. On dit que $x$ est **intérieur** à $A$ si et seulement si $A$ est un voisinage de $x$. L'ensemble des points intérieurs à $A$ s'appelle son **intérieur**, et est noté $\overset{\circ}{A}$.
2. On dit que $x$ est **adhérent** à $A$ si et seulement si pour tout voisinage $V$ de $x$, on a $V \cap A \neq \varnothing$. L'ensemble des points adhérents à $A$ s'appelle son **adhérence**, et est noté $\overline{A}$.
3. On dit que $x$ est un **point frontière** de $A$ si et seulement si $x$ est adhérent à la fois à $A$ et à $X \backslash A$. L'ensemble des points frontière de $A$ est noté $\mathrm{Fr}(A)$, qui est donc $\overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$.
4. On dit que $x$ est un **point d'accumulation** de $A$ si et seulement si pour tout voisinage $V$ de $x$, il existe $y \in V \cap A$ avec $y \neq x$. L'ensemble des points d'accumulation de $A$ s'appelle **l'ensemble dérivé** de $A$, et est noté $A'$.
5. On dit que $x$ est un **point isolé** de $A$ si et seulement s'il existe un voisinage $V$ de $x$ tel que $V \cap A = \{x\}$.

**Proposition 11**

Soient $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique, $x \in X$ et $A \subseteq X$. On a alors :

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ et $A \subseteq \overline{A}$.
2. $x \in \overset{\circ}{A} \iff$ il existe un ouvert $U$ de $X$ tel que $x \in U \subseteq A$
3. $x \in A' \iff$ pour tout voisinage $V$ de $x$, on a $(V \backslash \{x\}) \cap A \neq \varnothing$
4. $\overline{A} \backslash A \subseteq A' \subseteq \overline{A}$ et $\overline{A} = A \cup A'$
5. $x \in A' \iff x \in \overline{A \backslash \{x\}}$
6. $x$ est isolé dans $X$ si et seulement si $\{x\}$ est un ouvert de $X$
7. Si $X$ est discret, alors $A' = \varnothing$ : ainsi il est faux en toute généralité de dire $A \subseteq A'$.

## Proposition 12 (Intérieur, adhérence et base de voisinages)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, $x \in X$, $A \subseteq X$ et $\mathcal{B}(x)$ une base de voisinages de $x$. On a alors :

1. $x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists V \in \mathcal{B}(x), V \subseteq A$
2. $x \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathcal{B}(x), V \cap A \neq \varnothing$

## Proposition 13 (Propriétés des adhérences et des intérieurs)

Soient $A$ et $B$ des parties d'un espace topologique $(X;\mathcal{T})$.

1. Si $A \subseteq B$, alors $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
2. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, et c'est le plus grand des ouverts contenus dans $A$.
   On a donc $\overset{\circ}{A} = \displaystyle\bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ ouvert}}} U$.
3. $\overline{A}$ est un fermé, et c'est le plus petit des fermés contenant $A$.
   On a donc $\overline{A} = \displaystyle\bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ fermé}}} F$.
4. $A$ est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$. En particulier $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$
5. $A$ est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$. En particulier $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

## Proposition 14 (Complémentaire de l'adhérence et de l'intérieur)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, et $A \subseteq X$.

On a alors :

1. $\overset{\circ}{\overbrace{X \backslash A}} = X \backslash \overline{A}$
2. $\overline{X \backslash A} = X \backslash \overset{\circ}{A}$

## Proposition 15 (Adhérence et intérieur, union et intersection)

Soit $X$ un espace topologique. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $X$.

On a alors :

1. $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$

2. $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$
3. Si $I$ est fini, alors $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.
4. $\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$.
5. Si $I$ est fini, alors $\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i\in I} A_i}} = \bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$.
6. $\overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{i\in I} A_i}} \supseteq \bigcup_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$.

## 2.2 Famille localement finie

**Définition 8 (Famille de parties localement finie)**

Soient $X$ un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $X$.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est **localement finie** si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $V$ de $x$ tel que pour tout $i \in I$ (sauf éventuellement en un nombre fini de $i$), on a $V \cap A_i = \varnothing$.

**Proposition 16 (Localement finie, adhérence et union)**

Soient $X$ un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille localement finie de parties de $X$.

1. La famille $\left(\overline{A_i}\right)_{i\in I}$ est aussi localement finie.
2. On a $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$. Par conséquent, la réunion quelconque d'une famille localement finie de parties fermées est elle aussi fermée.

## 2.3 Parties denses et espaces séparables

## Définition 9 (Partie dense et espace séparable)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, et $A \subseteq X$.

1. On dit que $A$ est **dense** dans $X$ si et seulement si $\overline{A} = X$.
2. On dit que $X$ est **séparable** si et seulement s'il existe une partie de $X$ dense dans $X$ qui est au plus dénombrable.

**Exemple** :
Dans $\mathbb{R}$ munit de sa topologie habituelle, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}$ est séparable.

## Proposition 17 (Densité, complémentaire et intérieur)

Soient $X$ un espace topologique, et $A \subseteq X$.

1. $A$ est dense dans $X$ si et seulement si $\overbrace{X\backslash A}^{\circ} = \varnothing$.
2. $\overset{\circ}{A} = \varnothing$ si et seulement si $X\backslash A$ est dense dans $X$.

## Proposition 18 (Partie dense et base d'ouverts)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de $X$ et $A \subseteq X$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ est dense dans $X$
2. Pour tout ouvert non vide $U$ de $X$, on a $U \cap A \neq \varnothing$.
3. Pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \varnothing$, on a $B \cap A \neq \varnothing$.

## Proposition 19 (Espace séparable et famille d'ouverts 2 à 2 disjoints)

Soit $X$ un espace topologique. Si $X$ est séparable, alors pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts deux à deux disjoints, $I$ est au plus dénombrable.

## Définition 10 (Axiomes de dénombrabilité)

Soit $X$ un espace topologique.

1. On dit que $X$ vérifie le **1^er^axiome de dénombrabilité** si et seulement si tout $x \in X$ admet une base au plus dénombrable de voisinages.
2. On dit que $X$ vérifie le **2^ème^axiome de dénombrabilité** si et seulement si $X$ admet une base au plus dénombrable d'ouverts.

## Proposition 20 (Lien entre les axiomes de dénombrabilité)

Soit $X$ un espace topologique. Si $X$ vérifie le $2^{\text{ème}}$axiome de dénombrabilité, alors $X$ vérifie le $1^{\text{er}}$axiome de dénombrabilité.

**Remarque** :
La réciproque est fausse : en effet en considérant $X$ infini indénombrable, muni de la topologie discrète, alors pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x) := \{\{x\}\}$ est une base de voisinages de $x$ qui est bien au plus dénombrable, mais $X$ n'admet pas de base d'ouverts qui est au plus dénombrable, puisqu'elle devrait contenir en particulier l'ensemble $\{\{x\} \mid x \in X\}$ qui est indénombrable.

**Exemple** :
L'espace $\mathbb{R}$ munit de la topologie usuelle admet une base dénombrable d'ouverts. En effet, il suffit de considérer $\mathcal{B} := \{]a; b[ \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q} \text{ et } a < b\}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathcal{B}$ l'est aussi. Il reste donc à montrer que c'est une base d'ouverts : cela revient, d'après la prop. 9 p. 10, à montrer que pour tout $x \in X$, $\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ est une base de voisinages de $x$. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $p_n$ et $q_n$ dans $\mathbb{Q}$ tels que $x - \frac{1}{n} < p_n < x < q_n < x + \frac{1}{n}$. Alors $\{]p_n; q_n[ \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathcal{B}$ est une base de voisinages de $x$.
De même, dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathcal{B} \cup \{[-\infty; n[ \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{]n; +\infty] \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base dénombrable d'ouverts.

## Théorème 1 (Base dénombrable d'ouverts et séparabilité)

Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique.
Si $X$ admet une base dénombrable d'ouverts, alors $X$ est séparable.

**Remarque** :
La réciproque de ce théorème est vraie si l'espace est métrique, mais est fausse en toute généralité. En effet, soit $X$ un ensemble infini, munis de la topologie cofinie, c'est-à-dire $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid X \backslash A \text{ est finie}\}$.

• Commençons par montrer que toute partie infinie $A$ de $X$ est dense dans $X$. En effet, pour tout ouvert $U$ on a par définition que $X \backslash U$ est finie, si bien que $A \nsubseteq X \backslash U$ et donc $A \cap U \neq \varnothing$. Cela équivaut à dire que $A$ est dense d'après la prop. 18 p. 14. En particulier, toute partie infinie dénombrable de $X$ est dense, si bien que $X$ est séparable.

• Cependant, en supposant que $X$ est non dénombrable, montrons que $X$ n'admet pas de base dénombrable d'ouverts. Pour cela, supposons par l'absurde que ça soit le cas. Il existe donc une suite de parties finies $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X$ telle que $\{X \backslash A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base dénombrable d'ouverts. Comme $X$ est infini indénombrable, il existe $x \in X \backslash \left( \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right)$. Posons alors $U = X \backslash \{x\}$, qui est cofini donc ouvert. Comme $\{X \backslash A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base d'ouverts, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X \backslash A_n \subseteq U$. Mais $A_n \subseteq U$ puisque $x \notin A_n$, si bien que $X \subseteq U$ et donc $X = U$, ce qui est absurde puisque $x \in X$.

# 3 Applications continues

## 3.1 Applications continues

**Définition 11 (Applications continues en un point)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $f : X \to Y$.
On dit que $f$ est **continue** en $x_0$ si et seulement si elle vérifie l'une des deux assertions suivantes, qui sont équivalentes :

1. Pour tout voisinage $W$ de $f(x_0)$, $f^{\leftarrow}(W)$ est un voisinage de $x_0$.
2. Pour tout voisinage $W$ de $f(x_0)$, il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $f^{\rightarrow}(V) \subseteq W$.

Intuitivement, cela veut dire que si $x$ est voisin de $x_0$ (donc si $x \in f^{\leftarrow}(W)$), alors $f(x)$ est voisin de $f(x_0)$ (car $f(x) \in W$).

**Définition 12 (Applications continues et homéomorphismes)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$.

1. On dit que $f$ est **continue** si et seulement si $f$ est continue en tout point de $x$.
2. On dit que $f$ est un **homéomorphisme** de $X$ dans $Y$ si et seulement si $f$ est bijective, et que $f$ et $f^{-1}$ sont continues.
3. On dit que $X$ et $Y$ sont **homéomorphes** si et seulement s'il existe un homéomorphisme de $X$ dans $Y$.

Les propriétés qui se conservent par homéomorphisme sont appelées **propriétés topologiques**.

**Exemple** :
1. Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors $\mathrm{id}_X : (X; \mathcal{T}) \to (X; \mathcal{T})$ est continue. En effet, pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage $W$ de $\mathrm{id}_X(x_0) = x_0$, on a $\mathrm{id}_X{}^{\leftarrow}(W) = W$ qui est donc un voisinage de $x_0$.

2. Soient $(X; \mathcal{T})$ et $(Y; \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Soit $c \in Y$ et soit $f : X \to Y$ l'application constante égale à $c$ : alors $f$ est continue de $(X; \mathcal{T})$ dans $(Y; \mathcal{T}')$ . En effet, pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage $W$ de $f(x_0) = c$, on a $c \in W$ donc $\{c\} \subseteq W$ donc $f^{\leftarrow}(W) = X$, qui est bien un voisinage de $x_0$.

3. Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$. L'application $1_A : X \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si $A$ est à la fois ouvert et fermé dans $X$ :

en effet, pour toute partie $B$ de $\mathbb{R}$, on a $1_A{}^{\leftarrow}(B) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \notin B \\ A & \text{si } 1 \in B \text{ et } 0 \notin B \\ X \backslash A & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \notin B \\ X & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \in B \end{cases}$

**Remarque** :
Soient $(X; \mathcal{T}_X)$ et $(Y; \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques.

1. Si $Y$ est muni de la topologie grossière (c'est-à-dire $\mathcal{T}_Y = \{\varnothing; Y\}$), alors toute application de $X$ dans $Y$ est continue.
2. Si $X$ est muni de la topologie discrète (c'est-à-dire $\mathcal{T}_X = \mathscr{P}(X)$), alors toute application de $X$ dans $Y$ est continue.
3. Si $X$ est muni de la topologie grossière, alors une application de $X$ dans $Y$ est continue si et seulement si elle est constante.

**Remarque** :
Une application continue et bijective n'est pas nécessairement un homéomorphisme. En effet, prenons $X = Y = \mathbb{R}$ et $\mathcal{T}_X = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ la topologie discrète sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{T}_Y$ la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, alors l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : (X; \mathcal{T}_X) \to (Y; \mathcal{T}_Y)$ est continue bijective mais $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : (Y; \mathcal{T}_Y) \to (X; \mathcal{T}_X)$ n'est pas continue.

## Proposition 21 (Composée d'applications continues)

Soient $X$, $Y$ et $Z$ trois espaces topologiques. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$.

1. Si $f$ est continue en un point $x_0 \in X$, et si $g$ est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en $x_0$.
2. Si $f$ et $g$ sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

## Théorème 2 (Caractérisation des applications continues)

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f$ est continue.
2. Pour tout ouvert $U$ de $Y$, $f^{\leftarrow}(U)$ est un ouvert de $X$.
3. Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $Y$, alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{\leftarrow}(U)$ est un ouvert de $X$.
4. Pour toute partie $B$ de $Y$, $f^{\leftarrow}\left(\overset{\circ}{B}\right) \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{f^{\leftarrow}(B)}}$.

5. Pour tout fermé $F$ de $Y$, $f^{\leftarrow}(F)$ est un fermé de $X$.
6. Pour toute partie $A$ de $X$, $f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f^{\rightarrow}(A)}$.
7. Pour toute partie $B$ de $Y$, $\overline{f^{\leftarrow}(B)} \subseteq f^{\leftarrow}\left(\overline{B}\right)$.

**Remarque** :
L'image directe d'un ouvert (respectivement d'un fermé) par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (respectivement un fermé). Par exemple avec $f = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{pmatrix}$, on a $f^{\rightarrow}(\mathbb{R}) = [0; +\infty[$ qui n'est ni ouvert ni fermé.

## 3.2 Applications ouvertes et applications fermées

**Définition 13 (Applications ouverts et fermées)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$.

1. On dit que $f$ est **ouverte** si et seulement si l'image de tout ouvert de $X$ est un ouvert de $Y$.
2. On dit que $f$ est **fermée** si et seulement si l'image de tout fermé de $X$ est un fermé de $Y$.

**Proposition 22 (Caractérisation des applications ouvertes)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f$ est une application ouverte.
2. Pour toute partie $A$ de $X$, on a $f^{\rightarrow}\left(\mathring{A}\right) \subseteq \overbrace{f^{\rightarrow}(A)}^{\circ}$.
3. Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $X$, alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert de $Y$.
4. Pour tout $x \in X$ et tout voisinage $V$ de $x$, $f^{\rightarrow}(V)$ est un voisinage de $f(x)$.
5. Pour tout $B \subseteq Y$ et tout fermé $F$ de $X$ tels que $f^{\leftarrow}(B) \subseteq F$, il existe un fermé $D$ de $Y$ tel que $B \subseteq D$ et $f^{\leftarrow}(D) \subseteq F$.

**Proposition 23 (Caractérisation des applications fermées)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f$ est fermée.
2. Pour toute partie $A$ de $X$, on a $\overline{f^{\to}(A)} \subseteq f^{\to}\left(\overline{A}\right)$.
3. Pour tout $B \subseteq Y$ et tout ouvert $U$ de $X$ tels que $f^{\leftarrow}(B) \subseteq U$, il existe un ouvert $W$ de $Y$ tel que $B \subseteq W$ et $f^{\leftarrow}(W) \subseteq U$.
4. Pour tout $y \in Y$ et tout ouvert $U$ de $X$ tels que $f^{\leftarrow}\left(\{y\}\right) \subseteq U$, il existe un voisinage $V$ de $y$ tel que $f^{\leftarrow}(V) \subseteq U$.

**Proposition 24 (Caractérisation des applications continues fermées)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$.
Alors $f$ est continue et fermée si et seulement si pour tout $A \subseteq X$, on a $f^{\to}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{\to}(A)}$.

### 3.3 Continuité, ouverture, fermeture et bijectivité

**Proposition 25 (Applications bijectives, continues, ouvertes et fermées)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$ **bijective**.
On a alors :

1. $f$ est ouverte si et seulement si $f$ est fermée.
2. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $f$ est continue.
   (b) $f^{-1}$ est ouverte.
   (c) $f^{-1}$ est fermée.

**Théorème 3 (Caractérisation des homéomorphismes)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$ **bijective**.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f$ est un homéomorphisme.

2. $f$ est continue et ouverte.
3. $f$ est continue et fermée.
4. $f$ et $f^{-1}$ sont ouvertes.
5. $f$ et $f^{-1}$ sont fermées.
6. Pour toute partie $A$ de $X$, on a $f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{\rightarrow}(A)}$.

## 4 Quelques constructions topologiques

**Définition 14 (Topologies plus fines, moins fines et comparables)**

Soient $X$ un ensemble, et $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur $X$.

- On dit que $\mathcal{T}_1$ est **moins fine** que $\mathcal{T}_2$ si et seulement si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, donc que tout ouvert pour $\mathcal{T}_1$ est aussi un ouvert pour $\mathcal{T}_2$. On dira aussi que $\mathcal{T}_2$ est **plus fine** que $\mathcal{T}_1$.
- On dit que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont comparables si et seulement si l'une des deux est plus fine que l'autre.

**Exemple** :
De toutes les topologies sur un ensemble $X$, la topologie grossière $\{\varnothing; X\}$ est la moins fine, et la topologie discrète $\mathscr{P}(X)$ est la plus fine.

**Proposition 26 (Caractérisation d'être moins fine que)**

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble $X$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$.
2. Tout ouvert pour $\mathcal{T}_1$ est un ouvert pour $\mathcal{T}_2$.
3. Tout fermé pour $\mathcal{T}_1$ est un fermé pour $\mathcal{T}_2$.
4. Pour tout $x \in X$, tout voisinage de $x$ pour $\mathcal{T}_1$ est un voisinage de $x$ pour $\mathcal{T}_2$.
5. Pour toute partie $A$ de $X$, $\mathring{A}_{\mathcal{T}_1} \subseteq \mathring{A}_{\mathcal{T}_2}$.
6. Pour toute partie $A$ de $X$, $\overline{A}_{\mathcal{T}_1} \supseteq \overline{A}_{\mathcal{T}_2}$.
7. L'application $\mathrm{id}_X : (X; \mathcal{T}_2) \to (X; \mathcal{T}_1)$ est continue.
8. L'application $\mathrm{id}_X : (X; \mathcal{T}_1) \to (X; \mathcal{T}_2)$ est ouverte.
9. L'application $\mathrm{id}_X : (X; \mathcal{T}_1) \to (X; \mathcal{T}_2)$ est fermée.

## 4.1 Topologie initiale

**Proposition 27 (Justification de la topologie initiale)**

Soit $X$ un ensemble. Soient $(Y_i;\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.
Soit pour tout $i \in I$, $f_i : X \to Y_i$.
Posons $\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ fini non vide, et } \forall i \in J, U_i \in \mathcal{T}_i \right\}$.
Alors $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ vérifie **(B1)** et **(B2)**, à savoir :

**(B1)** Pour tout $x \in X$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U$.

**(B2)** Pour tout $W$ et $W'$ dans $\mathcal{B}$, il existe $W'' \in \mathcal{B}$ tel que $U'' \subseteq U \cap U'$.

Autrement dit, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur $X$ telle que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $(X;\mathcal{T})$.
C'est $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X \mid U \text{ est une réunion d'éléments de } \mathcal{B}\}$.

**Définition 15 (Topologie initiale)**

Soit $X$ un ensemble. Soient $(Y_i;\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.
Soit pour tout $i \in I$, $f_i : X \to Y_i$.
Soit $\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ fini non vide, et } \forall i \in J, U_i \in \mathcal{T}_i \right\}$.
L'ensemble $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X \mid U \text{ est une réunion d'éléments de } \mathcal{B}\}$ est, d'après la proposition précédente, une topologie sur $X$ dont $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts.

On l'appellera **topologie initiale** sur $X$ associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$.

**Exemple** :
Pour $X$ un ensemble, $Y$ un espace topologique et $f : X \to Y$, la topologie initiale associée à $f$ est alors $\{f^{\leftarrow}(U) \mid U \text{ est un ouvert de } Y\} = \left(f^{\leftarrow}\right)^{\rightarrow}(\mathcal{T})$.
On dira que c'est l'image réciproque par $f$ de la topologie sur $Y$.

**Proposition 28 (Topologie initiale associée à une bijection)**

Soit $X$ un ensemble. Soit $Y$ un espace topologique. Soit $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ une bijection.
Si l'on munit $X$ de la topologie initiale associée à $f$, alors $f$ est un homéomorphisme.

**Lemme 1 (Base d'ouverts et de voisinages de la topologie initiale)**

Soient $X$ un ensemble, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques,pour tout $i \in I$, $f_i : X \to Y_i$ et $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur $X$ associée à $(f_i)_{i\in I}$.

1. Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\left\{ \bigcap_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ fini non vide}, \forall i \in J, f_i(x) \in U_i \text{ ouvert de } Y_i \right\}$ est une base de voisinages ouverts de $x$ dans $\mathcal{T}$.
2. Si pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de $Y_i$, alors $\left\{ \bigcap_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ fini non vide}, \forall i \in J, U_i \in \mathcal{B}_i \right\}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}$.

**Proposition 29 (Caractérisation de la topologie initiale)**

Soient $X$ un ensemble, $(Y_i; \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, pour tout $i \in I$, $f_i : X \to Y_i$, et $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur $X$ associée à $(f_i)_{i\in I}$.

1. La topologie $\mathcal{T}$ est la moins fine (la plus petite pour l'inclusion) sur $X$ telle que pour tout $i \in I$, $f_i$ est continue.
2. On munit $X$ de la topologie $\mathcal{T}$. Alors pour tout espace topologique $E$ et $g : E \to X$, $g$ est continue en $a \in E$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g : E \to Y_i$ est continue en $a$.
3. La topologie $\mathcal{T}$ est l'unique topologie sur $X$ ayant la propriété **universelle** suivante : pour tout espace topologique $E$, une application $g : E \to (X; \mathcal{T})$ est en continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g : E \to Y_i$ est continue.

**Proposition 30 (Prébase de la topologie initiale)**

Soit $X$ un ensemble. Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soit pour tout $i \in I$, $f_i : X \to Y_i$. On munit $X$ de la topologie initiale associée à $(f_i)_{i\in I}$.

Alors $\{f_i^{\leftarrow}(U_i) \mid i \in I \text{ et } U_i \text{ ouvert de } Y_i\}$ est une prébase de $X$.

## 4.2 Topologie induite

**Définition 16 (Topologie induite)**

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, et $A$ une partie de $X$.
On appelle **topologie induite** par $(X;\mathcal{T})$ sur $A$ la topologie initiale sur $A$ associée à l'injection canonique $\iota : A \hookrightarrow X$, donc comme on a pu le voir dans l'exemple de topologie initiale, c'est la topologie dont une base d'ouverts est $\{\iota^{\leftarrow}(U) \mid U \in \mathcal{T}\}$ (c'est en fait la topologie elle-même dans ce cas précis car on a qu'un seul $f_i$). On dit alors que $A$ est un **sous-espace topologique**.

**Proposition 31 (Ouverts, fermés et voisinages de la topologie induite)**

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, et $A$ une partie de $X$. On munit $A$ de la topologie induite $\mathcal{T}_A$.

1. Les ouverts de $A$ sont les ensembles de la forme $A \cap U$ où $U$ est un ouvert de $X$.
   Autrement dit, $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$.
2. Les fermés de $A$ sont les ensembles de la forme $A \cap F$ où $F$ est un fermé de $X$.
3. Pour tout $a \in A$, les voisinages de $a$ dans $A$ sont les ensembles de la forme $A \cap V$ où $V$ est un voisinage de $a$ dans $X$.

**Remarque** :
Soient $X$ un espace topologique et $A$ un sous-espace topologique de $X$.

1. Pour toute partie $B$ de $A$, la topologie induite par $A$ sur $B$ est égale à la topologie induite par $X$ sur $B$ puisque pour tout ouvert $U$ de $X$, on a $B \cap U = (B \cap A) \cap U = B \cap (A \cap U)$.
2. Un ouvert de $A$ (respectivement un fermé) n'est pas nécessairement un ouvert (respectivement un fermé) de $X$ : par exemple si $X = \mathbb{R}$ et $A = [0;1[$, alors $[0;\frac{1}{2}[$ est un ouvert de $A$ mais pas de $X$.

**Proposition 32 (Topologie induite sur un ouvert ou un fermé)**

Soient $X$ un espace topologique et $A$ un sous-espace topologique de $X$.

1. Si $A$ est un ouvert de $X$, alors les ouverts de $A$ sont les ouverts de $X$ inclus dans $A$.
2. $A$ est un ouvert de $X$ si et seulement si $\iota : A \hookrightarrow X$ est ouverte.
3. Si $A$ est un fermé de $X$, alors les fermés de $A$ sont les fermés de $X$ inclus dans $A$.
4. $A$ est un fermé de $X$ si et seulement si $\iota : A \hookrightarrow X$ est fermée.

## Proposition 33 (Adhérence et intérieur pour la topologie induite)

Soit $X$ un espace topologique. Soit $Y$ une partie de $X$ munie de la topologie induite.
Soit $A$ une partie de $Y$.

1. On a $\overline{A}_Y = \overline{A}_X \cap Y$.
2. $\mathring{A}_Y \supseteq \mathring{A}_X$.

## Proposition 34 (Continuité et restriction)

Soient $X$ et $Y$ des espaces topologiques, $A$ une partie de $X$ et $f : X \to Y$. On munit $A$ de la topologie induite par $X$ sur $A$.

1. Pour tout $a \in A$, si $f$ est continue en $a$ alors $f_{|A}$ est continue en $a$.
2. Si $f$ est continue, alors $f_{|A}$ est continue.
3. Pour tout $a \in A$, si $A$ est un voisinage de $a$ dans $X$ et si $f_{|A}$ est continue en $a$, alors $f$ est continue en $a$.
4. Si $A$ est un ouvert de $X$ et si $f_{|A}$ est continue, alors $f$ est continue en tout point de $A$.

## Proposition 35 (Restriction et recouvrements)

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$.

1. On suppose que $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ est une réunion quelconque d'ouverts.
   Si pour tout $i \in I$, $f_{|U_i}$ est continue, alors $f$ est continue.
2. On suppose que $X = \bigcup\limits_{i \in I} F_i$ est une réunion quelconque de fermés, et que $(F_i)_{i \in I}$ est localement finie. Si pour tout $i \in I$, $f_{|F_i}$ est continue, alors $f$ est continue.
3. On suppose que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ est une réunion finie de fermés.
   Si pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $f_{|F_i}$ est continue, alors $f$ est continue.

## Proposition 36 (Applications qui coïncident sur un ouvert)

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$.
Supposons qu'il existe un ouvert $U$ de $X$ tel que $\forall x \in U, f(x) = g(x)$.

Si $f$ est continue en un point $a$ de $U$, alors $g$ est continue en $a$.

**Proposition 37 (Caractérisation de la topologie induite)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$.

1. Soit $A$ une partie de $X$. Soit $\iota : A \hookrightarrow X$ l'injection canonique.
   Alors la topologie induite par $X$ sur $A$ est l'unique topologie sur $A$ ayant la propriété disant que pour tout espace topologique $E$ et toute application $g : E \to A$, alors $g$ est continue si et seulement si $\iota \circ g = E \to Y$ est continue.
2. Soit $B$ une partie de $Y$ telle que $\mathrm{im}(f) \subseteq B$. On munit $B$ de la topologie induite par $Y$. Notons alors $\mathcal{T}_Y$ la topologie sur $Y$ et $\mathcal{T}_B$ la topologie sur $B$. Alors $f : X \to (Y; \mathcal{T}_Y)$ est continue si et seulement si $f : X \to (B; \mathcal{T}_B)$ est continue.

**Proposition 38 (Applications fermées, ouvertes et restrictions)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$.
Pour toute partie $A$ de $X$, on notera $\mathcal{T}_A$ la topologie induite par $X$ sur $A$.
Pour toute partie $B$ de $Y$, on notera $\mathcal{T}'_B$ la topologie induite par $Y$ sur $B$.

1. Si $f$ est ouverte, alors pour tout $B \subseteq Y$, $f_{|f^{\leftarrow}(B)} : (f^{\leftarrow}(B); \mathcal{T}_{f^{\leftarrow}(B)}) \to (B; \mathcal{T}'_B)$ est ouverte.
2. Si $f$ est fermée, alors pour tout $B \subseteq Y$, $f_{|f^{\leftarrow}(B)}(f^{\leftarrow}(B); \mathcal{T}_{f^{\leftarrow}(B)}) \to (B; \mathcal{T}'_B)$ est fermée.
3. Si $f$ est ouverte et si $A \subseteq X$ est un ouvert, alors $f_{|A} : (A; \mathcal{T}_A) \to Y$ est ouverte.
4. Si $f$ est fermée et si $A \subseteq X$ est un fermé, alors $f_{|A} : (A; \mathcal{T}_A) \to Y$ est fermée.

## 4.3 Topologie produit

**Définition 17 (Topologie produit)**

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soit $X := \prod_{i \in I} X_i$. Soit pour tout $i \in I$, $p_i : X \twoheadrightarrow X_i$ la projection canonique. On appelle **topologie produit** sur $X$ la topologie initiale associée à $(p_i)_{i \in I}$.

Pour tout $i \in I$ et pour tout ouvert $U_i$ de $X_i$, on a $p_i^{\leftarrow}(U_i) = \prod_{j \in I} U_j$ où $U_j = X_j$ si $j \neq i$. On appellera **ouvert élémentaire** de $X$ pour la topologie produit tout ensemble de la forme $\bigcap_{i \in J} p_i^{\leftarrow}(U_i)$ où $J \subseteq I$ est fini et $U_i$ est un ouvert de $X_i$. C'est donc un ensemble de la forme $\prod_{i \in I} U_i$ où l'ensemble $\{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$ est fini.

**Remarque** :

• D'après le lemme 1 page 24, si pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de $X_i$, alors l'ensemble des ouverts élémentaires $\prod_{i \in I} U_i$ où si $U_i \neq X_i$, alors $U_i \in \mathcal{B}_i$ forme une base d'ouverts de $X$ pour la topologie produit.

• Dans le cas où $I$ est fini, un ouvert de $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ est alors simplement un produit $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ où $U_i$ est un ouvert de $X_i$.

• Dans le cas où pour tout $i \in I$, $X_i = Y$ un espace topologique, on a alors $X = Y^I$ et la topologie produit sur $Y^I$ est aussi appelée **topologie de la convergence simple**.

• La topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$ sera la topologie produit. La topologie usuelle sur $\mathbb{C}$ associée à l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x+iy & \longmapsto & (x;y) \end{array}$ où $\mathbb{R}^2$ est munit de la topologie usuelle, ce qui fait de cette application un homéomorphisme.

## Proposition 39

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques où $I$ est infini.

1. Si pour tout $i \in I$, $U_i \notin \{X_i; \varnothing\}$, alors $\prod_{i \in I} U_i$ n'est pas un ouvert de $\prod_{i \in I} X_i$ munit de la topologie produit. Mieux, il faut même qu'il n'y ait qu'un nombre fini de $i \in I$ tel que $U_i \neq X_i$.
2. Si pour tout $i \in I$, $X_i$ est discret et possède au moins deux éléments, alors $\prod_{i \in I} X_i$ n'est pas discret pour la topologie produit.

## Proposition 40 (Topologie produit à l'arrivée et applications composantes

Soit $X$ un espace topologique. Soit $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques.
On munit $\prod_{i \in I} Y_i$ de sa topologie produit. Pour tout $i \in I$, on considère $f_i : X \to Y_i$ puis l'application

$$f := \left( \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \prod_{i \in I} Y_i \\ x & \longmapsto & \big(f_i(x)\big)_{i \in I} \end{array} \right).$$

Alors la topologie initiale sur $X$ associée à $f$ est égale à la topologie initiale sur $X$ associée à $(f_i)_{i \in I}$.

### Proposition 41 (Propriété universelle de la topologie produit)

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soit $X := \prod\limits_{i\in I} X_i$ munit de la topologie produit.

1. Pour tout $i \in I$, l'application $p_i : X \to X_i$ est ouverte.
2. Pour tout $i \in I$, l'application $p_i : X \to X_i$ est continue.
3. Pour tout espace topologique $E$ et toute application $f : E \to X$, $f$ est continue en un point $a \in E$ si et seulement si pour tout $i \in I, p_i \circ f : E \to X_i$ est continue en $a$.
4. La topologie produit sur $X$ est l'unique topologie sur $X$ vérifiant la proposition 3.

**Remarque** :
Les projections ne sont en général pas fermées : par exemple pour $F = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ mais la projection selon $x$ donne $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

### Proposition 42 (Produit d'une suite d'espaces séparables)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces séparables. Alors l'espace produit $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est séparable.

### Définition 18 (Application partielle)

Soit $(X_1; X_2; \cdots; X_n)$ une famille **finie** d'espaces topologiques. Soit $Y$ un espace topologique. Soit $f : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y$. Soit $a = (a_1; a_2; \cdots; a_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Pour tout $j \in \{1; \cdots; n\}$, on appelle **$j^{\text{ème}}$ application partielle de $f$ au point $a$** l'application

$$\begin{array}{ccc} X_j & \longrightarrow & Y \\ x_j & \longmapsto & f(a_1; \cdots; a_{j-1}; x_j; a_{j+1}; \cdots; a_n) \end{array}.$$

### Proposition 43 (Continuité de l'application partielle)

Soit $(X_1; X_2; \cdots; X_n)$ une famille **finie** d'espaces topologiques. Soit $Y$ un espace topologique. Soit $f : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y$. Soit $a = (a_1; a_2; \cdots; a_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

1. Pour tout $j \in \{1; \cdots; n\}$, l'application $\begin{array}{ccc} X_j & \longrightarrow & X_1 \times \cdots \times X_n \\ x_j & \longmapsto & (a_1; \cdots; a_{j-1}; x_j; a_{j+1}; \cdots; a_n) \end{array}$ est continue.

2. Si $f$ est continue, alors pour tout $j \in \{1; \cdots; n\}$ la $j^{\text{ème}}$ application partielle de $f$ est continue.

**Remarque** :
La réciproque de 2. est fausse : on peut avoir une fonction dont les applications partielles sont continues sans que la fonction en elle-même le soit. Par exemple $f := \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases} \end{array} \right)$ puisque ses applications partielles sont continues sur $\mathbb{R}$ mais $f$ n'est pas continue puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x;x) = \frac{1}{2}$ et $f(0;0) = 0$.

Cependant le résultat 2 se généralise pour n'importe quelle famille d'espaces topologiques car l'application décrite en 1. est tout autant continue (l'argument reste le même : seul l'espace qui nous intéresse est en soi concerné parmi toute la famille).

**Proposition 44 (Adhérence d'un produit de parties)**

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques.
Pour tout $i \in I$, soit $A_i$ une partie de $X_i$.
On munit $\prod_{i \in I} X_i$ de la topologie produit.

On a alors $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.
En particulier, un produit de parties non vides est un fermé si et seulement si chaque partie est un fermé.

## 4.4 Topologie finale

**Proposition 45 (Justification de la topologie finale)**

Soit $X$ un ensemble. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, et soit pour tout $i \in I$, $f_i : X_i \to X$. Soit $\mathcal{T} := \{U \subseteq X \mid \forall i \in I, f_i^{\leftarrow}(U) \text{ est un ouvert de } X_i\}$.

Alors $\mathcal{T}$ est une topologie sur $X$, et par définition elle rend continue tous les $f_i$.

**Définition 19 (Topologie finale)**

Soit $X$ un espace topologique. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, et soit pour tout $i \in I$, $f_i : X_i \to X$.

On appelle **topologie finale** associée à $(f_i)_{i\in I}$
l'ensemble $\{U \subseteq X \mid \forall i \in I, {f_i}^{\leftarrow}(U) \text{ est un ouvert de } X_i\}$.

**Remarque** :
Pour tout espace topologique $Y$, tout ensemble $X$ et toute application $f : Y \to X$, la topologie finale sur $X$ associée à $f$ est donc $\mathcal{T} := \{U \subseteq X \mid f^{\leftarrow}(U) \text{ est un ouvert de } Y\}$.

**Proposition 46 (Caractérisation de la topologie finale)**

Soit $X$ un ensemble. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soit pour tout $i \in I$, $f_i : X_i \to X$. Soit $\mathcal{T}$ la topologie finale sur $X$ associée à $(f_i)_{i\in I}$.

1. $\mathcal{T}$ est la topologie sur $X$ la plus grande (pour l'inclusion) qui rend continue chacune des $f_i$.
2. $\mathcal{T}$ est l'unique topologie sur $X$ ayant la **propriété universelle** suivante : pour tout espace topologique $E$, une application $g : X \to E$ est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $g \circ f_i : X_i \to E$ est continue.

## 4.5 Topologie quotient

**Définition 20 (Topologie quotient)**

Soient $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$ et $p : X \twoheadrightarrow X/\mathcal{R}$ la surjection canonique.

La **topologie quotient** sur $X/\mathcal{R}$ est la topologie finale associée à $p$.

Comme c'est un cas particulier de topologie finale, on a immédiatement la propriété universelle suivante :

### Proposition 47 (Propriété universelle de la topologie quotient)

Soient $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$ et $p : X \twoheadrightarrow X/\mathcal{R}$ la surjection canonique.

1. La topologie quotient est la plus grande topologie (pour l'inclusion) sur $X/\mathcal{R}$ qui rend continue $p$.
2. La topologie quotient est l'unique topologie sur $X/\mathcal{R}$ vérifiant la **propriété universelle** suivante : pour tout espace topologique $E$, alors toute application $g : X/\mathcal{R} \to E$ est continue si et seulement si $g \circ p : X \to E$ est continue.

### Proposition 48 (Espace quotient séparable)

Soient $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$.
Si $X$ est séparable, alors l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est séparable.

### Définition 21 (Saturé d'une partie et relation ouverte, fermée)

Soient $X$ un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$ et $p : X \twoheadrightarrow X/\mathcal{R}$ la projection canonique.

1. Soit $A \subseteq X$. On appelle **saturé** de $A$ pour $\mathcal{R}$ l'ensemble $p^{\leftarrow}\big(p^{\rightarrow}(A)\big)$, c'est-à-dire $\{x \in X \mid \exists a \in A, x\mathcal{R}a\}$, ou encore $\bigcup\limits_{a \in A} \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$.
2. Soit $A \subseteq X$. On dit que $A$ est **saturée** pour $\mathcal{R}$ si $A$ est son propre saturé pour $\mathcal{R}$, c'est-à-dire $A = p^{\leftarrow}\big(p^{\rightarrow}(A)\big)$, ce qui revient à dire que pour tout $a \in A$, $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a) \subseteq A$.
3. On dit que $\mathcal{R}$ est **ouverte** (respectivement **fermée**) si et seulement le saturé de tout ouvert (respectivement fermé) de $X$ est un ouvert (respectivement fermé) de $X$.

### Proposition 49 (Saturés et relations ouvertes, fermées)

Soient $X$ un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$ et $p : X \twoheadrightarrow X/\mathcal{R}$ la projection canonique. On munit $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient.

1. Soit $A \subseteq X$. $A$ est saturée pour $\mathcal{R}$ si et seulement si il existe $B \subseteq X/\mathcal{R}$ telle que $A = p^{\leftarrow}(B)$.
2. Soit $A \subseteq X$. $A$ est saturée pour $\mathcal{R}$ si et seulement si $X \backslash A$ est saturée pour $\mathcal{R}$.
3. $\mathcal{R}$ est ouverte si et seulement si $p : X \twoheadrightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte.

4. $\mathcal{R}$ est fermée si et seulement si $p : X \twoheadrightarrow X/\mathcal{R}$ est fermée.
5. Soit $A \subseteq X$. Si $A$ est un ouvert de $X$ saturé pour $\mathcal{R}$, alors $p^{\rightarrow}(A)$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$.
6. Soit $A \subseteq X$. Si $A$ est un fermé de $X$ saturé pour $\mathcal{R}$, alors $p^{\rightarrow}(A)$ est un fermé de $X/\mathcal{R}$.

## Proposition 50 (Premier théorème d'isomorphisme version topologie)

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$. Soit $f : X \to Y$ une application qui passe au quotient dans $X/\mathcal{R}$, c'est-à-dire que
$\forall x \in X, \forall y \in X, \big(x\mathcal{R}y \implies f(x) = f(y)\big)$. D'après le premier théorème d'isomorphisme version équipotence, il existe une unique application $\overline{f} : X/\mathcal{R} \to Y$ telle que $f = \overline{f} \circ p$ où $p : X \to X/\mathcal{R}$ est la projection canonique.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "p"'] & Y \\ X/\mathcal{R} \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

En munissant $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient, on a alors $f$ continue si et seulement si $\overline{f}$ continue.

## Proposition 51 (Espace quotient associé à une application)

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques.
Soit $f : X \longrightarrow Y$ continue et surjective dans $Y$. Soit $\mathcal{R}_f$ la relation d'équivalence sur $X$ associée à $f$, c'est-à-dire que $\forall x \in X, \forall y \in X, \big(x\mathcal{R}_f y \iff f(x) = f(y)\big)$. Soit $\overline{f} : X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Y$ l'application quotient associée à $f$. On munit $X/\mathcal{R}_f$ de la topologie quotient.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\overline{f} : X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme.
2. Pour tout ouvert $U$ de $X$ saturé pour $\mathcal{R}_f$, $f^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert de $Y$.
3. Pour tout fermé $F$ de $X$ saturé pour $\mathcal{R}_f$, $f^{\rightarrow}(F)$ est un fermé de $Y$.
4. Pour tout $B \subseteq Y$, $B$ est un ouvert de $Y$ si et seulement $f^{\leftarrow}(B)$ est un ouvert de $X$.
5. Pour tout $B \subseteq Y$, $B$ est un fermé de $Y$ si et seulement $f^{\leftarrow}(B)$ est un fermé de $X$.

**Proposition 52 (Appli. cont. surj., ouv. ou fermée et appli. quot.)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques.
Soit $f : X \longrightarrow Y$ continue et surjective dans $Y$. Soit $\mathcal{R}_f$ la relation d'équivalence sur $X$ associée à $f$, c'est-à-dire que $\forall x \in X, \forall y \in X, \big(x\mathcal{R}_f y \iff f(x) = f(y)\big)$. Soit $\overline{f} : X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Y$ l'application quotient associée à $f$. On munit $X/\mathcal{R}_f$ de la topologie quotient.

Si $f$ est ouverte, ou si $f$ est fermée, alors $\overline{f}$ est un homéomorphisme.

**Proposition 53 (Topo. quot. et contin. et ouverture/fermeture de la proj.)**

Soit $X$ un espace topologique. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $X/\mathcal{R}$.

Si $p : X \twoheadrightarrow (X/\mathcal{R}; \mathcal{T})$ est continue et ouverte, ou continue et fermée, alors $\mathcal{T}$ est la topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$.

# 5 Espaces topologiques séparés

**Définition 22 (Axiomes de séparations)**

Soit $X$ un espace topologique.

1. On dit que $X$ est un $T_0-$**espace** (ou que c'est un **espace de Kolmogorov**) si et seulement si pour tout points distincts $x$ et $y$ dans $X$, l'un au moins des deux points admet un voisinage qui ne contient pas l'autre point.
2. On dit que $X$ est un $T_1-$**espace** (ou que c'est un **espace de Fréchet**, ou encore un **espace accessible**) si et seulement si pour tout points distincts $x$ et $y$ dans $X$, il existe un voisinage $V$ de $x$ dans $X$ et un voisinage $W$ de $y$ dans $X$ tels que $x \notin W$ et $y \notin V$.
3. On dit que $X$ est un $T_2-$**espace** (ou que c'est un **espace de Hausdorff**, ou que c'est un **espace séparé**) si et seulement si pour tout points distincts $x$ et $y$ dans $X$, il existe un voisinage $V$ de $x$ dans $X$ et un voisinage $W$ de $y$ dans $X$ tels que $V \cap W = \varnothing$.

**Remarque** :
On a évidement $T_2 \implies T_1 \implies T_0$, mais les implications réciproques sont généralement fausses.

**Proposition 54 (Exemples et contre-exemples d'espaces vérifiant les Ti)**

1. Pour tout ensemble $X$ de cardinal $\geq 2$ munit de la topologie grossière $\{\varnothing; X\}$ n'est pas $T_0$.
2. Tout ensemble infini $X$ munit de la topologie cofinie est $T_1$ mais pas séparé.
3. Tout ensemble $X$ totalement ordonné munit de la topologie de l'ordre est séparé.
4. $\mathbb{R}$ munit de la topologie usuelle est séparé.

**Proposition 55 (Caractérisation des espaces T1)**

Soit $X$ un espace topologique.
$X$ est $T_1$ si et seulement si tout singleton est un fermé de $X$.

**Remarque** :
Comme tout espace séparé est en particulier $T_1$, dans tout espace séparé les singletons sont des fermés.

### Proposition 56 (Transmission du fait d'être séparé)

Soit $X$ un espace topologique séparé. Soit $Y$ un espace topologique.

1. S'il existe une application $f : Y \hookrightarrow X$ injective et continue, alors $Y$ est séparé.
2. Si $Y$ est homéomorphe à $X$, alors $Y$ est séparé.
3. Si $Y$ est un sous-espace topologique de $X$, alors $Y$ est séparé.

### Définition 23 (Famille séparante d'applications)

Soient $X$ un ensemble et $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Soit pour tout $i \in I$ une application $f_i : X \longrightarrow Y_i$.

On dit que $(f_i)_{i \in I}$ est **séparante** si et seulement si pour tout points $x$ et $y$ de $X$ tels que $x \neq y$, il existe $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

### Lemme 2 (Topologie initiale associée à une famille séparante)

Soit $X$ un ensemble. Soit $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces **séparés**. Soit pour tout $i \in I$, une application $f_i : X \longrightarrow Y_i$. On munit $X$ de la topologie initiale associée à $(f_i)_{i \in I}$.

Si $(f_i)_{i \in I}$ est séparante, alors $X$ est séparé.

### Proposition 57 (Espace produit séparé)

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques **tous non vides ou tous vides**. On munit $\prod_{i \in I} X_i$ de la topologie produit.

$\prod_{i \in I} X_i$ est séparé si et seulement si pour tout $i \in I$, $X_i$ est séparé.

### Proposition 58 (Caractérisation du fait d'être séparé)

Soit $X$ un espace topologique. Pour tout $x \in X$, notons $\mathcal{V}_F(x)$ l'ensemble des voisinages fermés de $x$ dans $X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est séparé.
2. La diagonale $\Delta := \{(x;x) \in X^2 \mid x \in X\}$ est fermée dans $X^2$ munit de la topologie produit.
3. Pour tout $x \in X$, on a $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}_F(x)} V = \{x\}$.

## Proposition 59 (Applications continues dans un espace séparé)

Soit $X$ un espace topologique. Soit $Y$ un espace **séparé**. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X \longrightarrow Y$ deux applications **continues**.

1. L'ensemble $F := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de $X$.
2. S'il existe une partie $D$ dense dans $X$ telle que $\forall x \in D, f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

**Remarque** :

En général les espaces quotients ne sont pas séparés. Par exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ sont séparés pour la topologie usuelle, mais $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ne l'est pas pour la topologie quotient, car il s'agit de la topologie grossière $\{\varnothing; \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$. En effet, soit $F$ un fermé non vide de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Alors en posant $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ la projection canonique, $p^{\leftarrow}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}$ par continuité de $p$. Comme $F$ est une partie non vide de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{cl}_{\mathbb{Q}}(x) \in F$ donc $\mathrm{cl}_{\mathbb{Q}}(x) \subseteq p^{\leftarrow}(F)$ et comme par définition de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, on a $\mathrm{cl}_{\mathbb{Q}}(x) = x + \mathbb{Q}$, on obtient $x + \mathbb{Q} \subseteq p^{\leftarrow}(F)$ et donc $\overline{x + \mathbb{Q}} \subseteq p^{\leftarrow}(F)$ par minimalité de l'adhérence. Mais $x + \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc $\overline{x + \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et donc $\mathbb{R} \subseteq p^{\leftarrow}(F)$ donc $\mathbb{R} = p^{\leftarrow}(F)$, et donc $F = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

## Proposition 60 (Espace quotient séparé)

Soit $X$ un espace topologique. Soit $Y$ un espace **séparé**. Soit $f : X \longrightarrow Y$. Soit $\mathcal{R}_f$ la relation d'équivalence sur $X$ associée à $f$, c'est-à-dire que $\forall x \in X, \forall y \in X, \big(x\mathcal{R}_f y \iff f(x) = f(y)\big)$. On munit $X/\mathcal{R}_f$ de la topologie quotient.

Si $f$ est continue, alors $X/\mathcal{R}_f$ est séparé.

## Proposition 61 (Critère de séparation des espaces topologiques quotient)

Soit $X$ un espace topologique. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$. On munit $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. On munit $X^2$ de la topologie produit.

1. Si $X/\mathcal{R}$ est séparé, alors $\mathcal{R}$ est fermé en tant que partie de $X^2$.

2. Si $\mathcal{R}$ est ouverte en tant que relation d'équivalence sur $X$, et si $\mathcal{R}$ est fermée en tant que partie de $X^2$, alors $X/\mathcal{R}$ est séparé.

# 6 Limites et valeurs d'adhérences

**Définition 24 (Valeur d'adhérence, limite et limite selon une partie)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Soient $A$ une partie de $X$ et $a \in \overline{A}$.
Soit $f : A \longrightarrow Y$. Soit $\ell \in Y$.

1. On dit que $\ell$ est une **valeur d'adhérence** de $f$ en $a$ si et seulement si pour tout $V$ de $\ell$ dans $Y$ et tout voisinage $W$ de $a$ dans $X$, il existe $x \in A \cap W$ tel que $f(x) \in V$.
2. On dit que $\ell$ est une **limite** de $f$ en $a$, ou encore que $f$ **tend vers** $\ell$ en $a$ si et seulement si pour tout voisinage $V$ de $\ell$ dans $Y$, il existe un voisinage $W$ de $a$ dans $X$ tel que $f^{\rightarrow}(W \cap A) \subseteq V$.
3. Soit $B$ une partie de $A$ tel que $a \in \overline{B}$. On dit que $\ell$ est une **limite** de $f$ en $a$ **en restant** dans $B$ si et seulement si $\ell$ est une limite de $f_{|B}$ en $a$. Autrement dit, pour tout voisinage $V$ de $\ell$ dans $Y$, il existe un voisinage $W$ de $a$ dans $X$ tel que $f^{\rightarrow}(W \cap B) \subseteq V$.

**Remarque** :
• On peut reformuler de deux manière la définition 2.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\ell$ est une limite de $f$ en $a$.
2. Pour tout voisinage $V$ de $\ell$ dans $Y$, $f^{\leftarrow}(V)$ est un voisinage de $a$ dans $X$ intersecté avec $A$.
3. Pour tout voisinage $V$ de $\ell$ dans $Y$, il existe un voisinage $W$ de $a$ dans $X$ tel que $\forall x \in X, \Big(x \in W \cap A \implies f(x) \in V\Big)$.

• Dans les trois définitions ci-dessus, on peut remplacer le fait que $V$ soit un voisinage quelconque de $\ell$ dans $Y$ par le fait que $V$ soit dans une base de voisinages de $\ell$ dans $Y$.
• Si $a \in A$, alors $f(a)$ est une valeur d'adhérence de $f$ en $a$ ($a$ peut à chaque fois être le point $x$ en question).

**Proposition 62 (Continuité et limite)**

Soient $X$ et $Y$ des espaces topologiques. Soient $A \subseteq X$, $a \in A$ et $f : A \longrightarrow Y$.

$f(a)$ est une limite de $f$ en $a$ si et seulement si $f$ est continue en $a$.

### Proposition 63 (Continuité et limite, points d'accumulation)

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques.

Soient $A \subseteq X$, $a \in \overline{A} \backslash A$, $\ell \in Y$ et $f : A \longrightarrow Y$. On munit $A \cup \{a\}$ de la topologie induite par celle de $X$, et on considère $g := \left( \begin{array}{ccc} A \cup \{a\} & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right)$.

Alors $\ell$ est une limite de $f$ en $a$ si et seulement si $g$ est continue en $a$.

### Proposition 64 (Limites et valeurs d'adhérence)

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Soient $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$, $\ell \in Y$ et $f : A \longrightarrow Y$.

1. Si $\ell$ est une limite de $f$ en $a$, alors $\ell$ est une valeur d'adhérence de $f$ en $a$.
2. Soit $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de $a$ dans $X$. Alors $\bigcap\limits_{W \in \mathcal{V}(a)} \overline{f^{\rightarrow}(W \cap A)}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérences de $f$ en $a$. En particulier, c'est un fermé de $Y$.
3. Si $\ell$ est une valeur d'adhérence (ou une limite) de $f$ en $a$, alors $\ell \in \overline{f^{\rightarrow}(A)}$.

**Exemple** :
Si $Y$ est munit de la topologie grossière, alors tout élément de $Y$ est une limite de $f$ en $a$.

### Proposition 65 (Limite d'une fonction à valeurs dans un espace séparé)

Soit $X$ un espace topologique. Soit $Y$ un espace **séparé**. Soient $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$.

1. Si $\ell$ est une limite de $f$ en $a$, alors $\ell$ est la seule valeur d'adhérence de $f$ en $a$.
2. $f$ admet au plus une limite de $f$ en $a$.
3. Si $a \in A$ et si $f$ admet une limite en $a$, alors cette limite est $f(a)$.

**Exemple** :
1. Si $f = \left( \begin{array}{ccc} [0;1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array} \right)$, alors $f$ admet $0$ pour unique valeur d'adhérence en $1$, mais n'admet pas pour autant de limite en $1$.

2. Si $g = \left(\begin{array}{ccc} [0;1[\cup]1;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0;1[ \\ 1 & \text{si } x \in ]1;2] \end{cases} \end{array}\right)$, alors $g$ admet $\{0;1\}$ comme ensemble de valeurs d'adhérences en $1$. $g$ n'admet donc pas non plus de limite en $1$.

### Notation

Soit $X$ un espace topologique. Soit $Y$ un espace **séparé**. Soient $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$.

1. Si $f$ admet une limite $\ell$ en $a$, on notera $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou encore $\lim\limits_{a} f = \ell$.
2. Si $B \subseteq A$ telle que $a \in \overline{B}$, et que $f$ admet une limite $\ell$ en $a$ suivant $B$, on notera $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = \ell$.
   S'il existe une assertion $P$ telle que $B = \{x \in A \mid P(x)\}$, alors on notera aussi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ P(x)}} f(x) = \ell$.
   Par exemple, si $B = A \backslash \{a\}$, on notera $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell$.
3. Dans le cas où $X = \mathbb{R}$ munit de la topologie usuelle, $B = A \cap ]-\infty; a[$ et $C = A \cap ]a; +\infty[$, si $a \in \overline{B}$, alors on dira que $f$ admet une limite en $a$ **par la gauche** si et seulement si $f$ admet une limite en $a$ suivant $B$, et on la notera alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$. De même, si $a \in \overline{C}$, alors on dira que $f$ admet une limite en $a$ **par la droite** si et seulement si $f$ admet une limite en $a$ suivant $C$, et on la notera alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

### Proposition 66 (Limite pointée, épointée et continuité)

Soient $X$ un espace topologique, $Y$ un espace **séparé**, $A \subseteq X$, $a \in A$ et $f : A \longrightarrow Y$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.
3. $f$ est continue en $a$.

Dans ce cas, on a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

**Remarque** :
Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $A \subseteq X$, $B \subseteq A$, $a \in \overline{B}$, $f : A \longrightarrow Y$ et $\ell \in Y$.

Si $\ell$ est une limite de $f$ en $a$, alors $\ell$ est une limite de $f$ en $a$ suivant $B$. La réciproque n'est cependant pas vrai. On a toutefois la proposition suivante.

### Proposition 67 (Limite sur un recouvrement)

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$, $f : A \cup B \longrightarrow Y$ et $\ell \in Y$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\ell$ est une limite de $f$ en $a$.
2. $\ell$ est une limite de $f$ en $a$ suivant $A$ et $\ell$ est une limite de $f$ en $a$ suivant $B$.

**Exemple** :
Cela permet de montrer que dans $\mathbb{R}$, si $f$ admet une même limite à gauche et à droite de $a$, alors $f$ admet cette limite en $a$.

### Proposition 68 (Composition des limites)

Soient $X$, $Y$ et $Z$ des espaces topologiques. Soient $A \subseteq X$, $f : A \longrightarrow Y$, $B \subseteq Y$ tel que $f^{\rightarrow}(A) \subseteq B$, $g : B \longrightarrow Z$, $a \in \overline{A}$, $b \in Y$ et $\ell \in Z$.

Si $b$ est une limite de $f$ en $a$, et $\ell$ une limite de $g$ en $b$, alors $\ell$ est une limite de $g \circ f$ en $a$.

# 7 Suites dans les espaces topologiques

**Définition 25 (Limites et valeurs d'adhérences d'une suite)**

Soient $X$ un espace topologique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X$ et $\ell \in X$.

1. On dit que $\ell$ est une **valeur d'adhérence** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout voisinage $V$ de $\ell$ dans $X$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in V$.
2. On dit que $\ell$ est une **limite** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout voisinage $V$ de $\ell$ dans $X$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, x_n \in V$.
3. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** dans $X$ si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une limite dans $X$. Dans le cas contraire, on dira que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

**Exemple** :

1. Si $X$ est munit de la topologie grossière $\left\{\varnothing; X\right\}$, alors toute suite converge vers tout point de $X$.
2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à $a \in X$, alors $a$ est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $X$.
3. Si $X$ est munit de la topologie discrète $\mathscr{P}(X)$, alors une suite est convergente vers un point $a \in X$ si et seulement si elle est stationnaire à ce point.

**Remarque** :
Les notions de valeurs d'adhérence et de limites d'une suite sont en fait des cas particuliers de ce que l'on a déjà vu pour les applications. En effet, il suffit de se placer dans $\overline{\mathbb{R}}$ munit de sa topologie usuelle et de considérer $A = \mathbb{N}$. Alors $+\infty \in \overline{\mathbb{N}}$ et toute les définitions ci-dessus correspondent aux valeurs d'adhérences et aux limites de la suite au point $+\infty$.

En effet, si $V$ est un voisinage de $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $]x; +\infty] \subseteq V$. En posant $N := \lfloor x \rfloor$, on a $]x; +\infty] \cap \mathbb{N} = ]\!]N; +\infty[\![$ et donc $V \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$, donc tout voisinage de $+\infty$ rencontre $\mathbb{N}$.

On en déduit la proposition suivante, conséquence directe de la proposition 64 page 40.

**Proposition 69 (Ensemble des valeurs d'adhérences d'une suite)**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace topologique $X$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $A_n := \{x_m \mid m \geq n\}$. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En particulier, l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un fermé de $X$.

### Proposition 70 (Limites, valeurs d'adhérence, suites et sous-suites)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace topologique $X$, et $\ell \in X$.

1. Si $\ell$ est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\ell$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si $X$ est séparé et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $X$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique limite qui est aussi l'unique valeur d'adhérence.
3. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$, alors toute sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\ell$.
4. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ si et seulement si $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ell$.
5. Si $\ell$ est une valeur d'adhérence d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\ell$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Si $\ell$ est une limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\ell$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Réciproquement, si $\ell$ admet une base dénombrable de voisinages dans $X$ et si $\ell$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell$.

### Notation

Si $\ell$ est la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace séparé $X$, alors on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$ ou $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

### Théorème 4 (Adhérence d'un ensemble et limites de suite)

Soient $X$ un espace topologique, $A \subseteq X$ et $x \in X$.

1. S'il existe une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x$, alors $x \in \overline{A}$.
2. Si $x$ admet une base dénombrable de voisinages dans $X$, et si $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x$.

### Proposition 71 (Caractérisation séquent. de l'adhérence et des fermés)

Soit $X$ un espace topologique **vérifiant le 1$^{\text{er}}$ axiome de dénombrabilité** (c'est-à-dire que tout point de $X$ admet une base dénombrable de voisinage). Soient $A \subseteq X$ et $x \in X$.

1. $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x$.
2. $A$ est un fermé de $X$ si et seulement si toute limite de suite d'élément de $A$ est dans $A$.

**Remarque** :

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace topologique $X$, $\ell \in X$ et $B := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Si $\ell$ est une limite ou une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\ell \in \overline{B}$.

2. Si $\ell \in \overline{B}$, $\ell$ n'est pas nécessairement une limite ou une valeur d'adhérence de $B$. En effet, pour $X = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ et $x_n = 1$ pour tout $n \geq 1$. Alors $0 = x_0 \in B \subseteq \overline{B}$ mais n'est pas valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De ce fait, on ne trouvera même pas de sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x$ ou dont $x$ est une valeur d'adhérence.

3. Si $X$ est séparé, alors les points d'accumulations de $B$ sont tous **des** valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais la réciproque n'est pas vraie à moins que les termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient distincts deux à deux. Ainsi, comme $B'$ a été défini comme l'ensemble des points d'accumulations de $B$, et qu'on a montré lors de la proposition 11 page 11 que $\overline{B} = B \cup B'$, on en déduit que $\overline{B}$ est la réunion (non forcément disjointe) de $B$ avec les valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Théorème 5 (Limites de fonctions et limites de suites)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$, $\ell \in Y$ et $f : A \longrightarrow Y$.

1. Si $\ell$ est une limite de $f$ en $a$, alors pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ dont $a$ est une limite, $\ell$ est une limite de la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si $a$ admet une base dénombrable de voisinages dans $X$, et si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ dont $a$ est une limite, $\ell$ est une limite de la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\ell$ est une limite de $f$ en $a$.

**Proposition 72 (Caractérisation séquentielle des limites de fonctions)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, avec $Y$ **séparé**. Soient $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$.
On suppose de plus que $a$ admet une base dénombrable de voisinages dans $X$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f$ admet une limite en $a$.
2. Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $a$, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Dans ce cas-là, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

**Théorème 6 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $x \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$.

1. Si $f$ est continue en $x$, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ qui converge vers $x$, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
2. Si $x$ admet une base dénombrable de voisinages et si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ qui converge vers $x$, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, alors $f$ est continue en $x$.

**Proposition 73 (Convergence des suites pour la topologie initiale)**

Soient $X$ un ensemble, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, pour tout $i \in I$, $f_i : X \longrightarrow Y_i$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X$ et $x \in X$. On munit $X$ de la topologie initiale associée à $(f_i)_{i\in I}$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ si et seulement si pour tout $i \in I$, la suite $\big(f_i(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f_i(x)$.

# 8 Filets dans les espaces topologiques

**Définition 26 (Ensemble ordonné filtrant)**

Un ensemble ordonné $(\Lambda; \leq)$ est dit **filtrant** si et seulement si pour tout $\alpha$ et $\beta$ dans $\Lambda$, il existe au moins un $\lambda \in \Lambda$ tel que $a \leq \lambda$ et $b \leq \lambda$.

**Exemple** :

1. Les ensembles totalement ordonnés comme $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$ sont des ensembles ordonnés filtrants.

2. Pour $X$ un espace topologique et $x \in X$, l'ensemble $\big(\mathcal{V}(x); \supseteq\big)$ des voisinages de $x$ est un ensemble ordonné filtrant : pour $V_1$ et $V_2$ des voisinages de $x$, en posant $V_3 = V_1 \cap V_2$, on a $V_3 \in \mathcal{V}(x)$ et $V_1 \supseteq V_3$ et $V_2 \supseteq V_3$.

3. Pour $X$ un ensemble, alors $\big(\mathscr{P}(X); \subseteq\big)$ est un ensemble ordonné filtrant (cette fois on prend l'union à la place de l'intersection). Il en va de même pour l'ensemble des parties finies de $X$.

**Définition 27 (Filets)**

Soit $X$ un espace topologique. On appelle **filet** à valeurs dans $X$ toute application $x : \Lambda \longrightarrow X$ où $\Lambda$ est un ensemble ordonné filtrant. A la manière des suites, pour $\lambda \in \Lambda$, on notera $x_\lambda$ plutôt que $x(\lambda)$, et on notera $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ plutôt que $x$.

**Exemple** :

Si $\lambda = \mathbb{N}$ munit de son ordre habituel, alors on retrouve la notion de suites, d'où le fait que les filets sont aussi parfois appelés **suites-généralisées**.

**Définition 28 (Valeurs d'adhérence et limites d'un filet)**

Soit $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un filet d'éléments d'un espace topologique $X$. Soit $\ell \in X$.

1. On dit que $\ell$ est une **valeur d'adhérence** de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ si et seulement si pour tout voisinage $V$ de $\ell$ dans $X$ et pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $\alpha \leq \lambda$ et $x_\lambda \in V$.
2. On dit que $\ell$ est une **limite** de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ si et seulement si pour tout voisinage $V$ de $\ell$ dans $X$, il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a $\lambda_0 \leq \lambda \implies x_\lambda \in V$. On dit alors que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ **converge** vers $\ell$.

### Proposition 74 (Ensemble des valeurs d'adhérence d'un filet)

Soit $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un filet d'éléments d'un espace topologique $X$.
Pour tout $\lambda \in \Lambda$, posons $A_\lambda := \{x_\mu \mid \mu \in \Lambda \text{ et } \lambda \leq \mu\}$.

L'ensemble des valeurs d'adhérences de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$ donc en particulier est un fermé de $X$.

### Définition 29 (Sous-filets)

Soient $X$ un espace topologique et $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(y_\mu)_{\mu\in\Gamma}$ deux filets de $X$.

On dit que $(y_\mu)_{\mu\in\Gamma}$ est un **sous-filet** de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si et seulement s'il existe une application $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ vérifiant :

1. Pour tout $\mu \in \Gamma, y_\mu = x_{\varphi(\mu)}$.
2. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $\mu_0 \in \Gamma$ tel que $\forall \mu \geq \mu_0, \varphi(\mu) \geq \lambda$.

### Proposition 75 (Caractérisation par les filets des séparés)

Soit $X$ un espace topologique.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est séparé.
2. Tout filet à valeurs dans $X$ admet au plus une limite.

**Notation**

Dans un espace topologique séparé, si un filet $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge, on notera $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ sa limite.

### Proposition 76 (Limites et valeurs d'adhérence d'un filet)

Soient $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un filet d'un espace topologique $X$ et $\ell \in X$.

1. Si $\ell$ est une limite de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, alors $\ell$ est une valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
   Si de plus $X$ est séparé, alors c'est la seule valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
2. Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $\ell$, alors tout sous-filet de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge aussi vers $\ell$.

3. Si $\ell$ est une valeur d'adhérence d'un sous-filet de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, alors $\ell$ est aussi une valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
4. $\ell$ est une valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si et seulement s'il existe un sous-filet de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ qui converge vers $\ell$.

**Théorème 7 (Caractérisation par les filets de l'adhérence)**

Soient $X$ un espace topologique, $A \subseteq X$ et $x \in X$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $x \in \overline{A}$.
2. Il existe un filet $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ à valeurs dans $A$ qui converge vers $x$.

**Proposition 77 (Caractérisation par les filets des fermés)**

Soit $A$ une partie d'un espace topologique $X$.
$A$ est fermé si et seulement si tout filet à valeurs dans $A$ qui converge a toutes ses limites dans $A$.

**Théorème 8 (Caractérisation par les filets des limites de fonctions)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$, $\ell \in Y$ et $f : A \longrightarrow Y$.

1. $\ell$ est une limite de $f$ en $a$.
2. Pour tout filet $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ à valeurs dans $A$ qui converge vers $a$, le filet $\big(f(a_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $\ell$.

**Théorème 9 (Caractérisation par les filets de la continuité)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $x \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f$ est continue en $x$.
2. Pour tout filet $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ à valeurs dans $X$ qui converge vers $x$, le filet $\big(f(x_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $f(x)$.

### Proposition 78 (Convergence des filets pour la topologie initiale)

Soient $X$ un ensemble, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, pour tout $i \in I$, $f_i : X \longrightarrow Y_i$, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un filet à valeurs dans $X$ et $x \in X$. On munit $X$ de la topologie initiale associée à $(f_i)_{i\in I}$.

$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $x$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $\big(f_i(x_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $f_i(x)$.

### Proposition 79 (Convergence des filets dans un produit cartésien)

Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On munit $\prod\limits_{i\in I} Y_i$ de la topologie produit. Soit $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un filet à valeurs dans $\prod\limits_{i\in I} Y_i$.
Pour tout $\lambda \in \Lambda$, notons $y_\lambda = (y_{\lambda;i})_{i\in I}$. Soit $(y_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} Y_i$.

Alors $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $(y_i)_{i\in I}$ si et seulement si pour tout $i \in I$, le filet $(y_{\lambda;i})_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $y_i$.

### Proposition 80 (Homéomorphisme dans un espace produit)

Soient $X$ un ensemble, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour tout $i \in I$, $f_i : X \longrightarrow Y_i$. On munit $X$ de la topologie initiale associée aux $(f_i)_{i\in I}$. On suppose que $(f_i)_{i\in I}$ est **séparante**.

Soit $f := \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \prod\limits_{i\in I} Y_i \\ x & \longmapsto & \big(f_i(x)\big)_{i\in I} \end{pmatrix}$.

Alors $f$ est un homéomorphisme de $X$ dans son image $f^{\rightarrow}(X)$.

# 9 Espaces réguliers et espaces normaux

**Définition 30 (Espaces réguliers, complètement réguliers et normaux)**

Soit $X$ un espace topologique **séparé**.

1. On dit que $X$ est un $T_3$**-espace**, ou est **régulier** si et seulement si pour toute partie fermée $F$ de $X$ et tout $x \in X$, si $x \notin F$ alors il existe deux ouverts disjoints $U$ et $V$ de $X$ tels que $x \in U$ et $F \subseteq V$.
2. On dit que $X$ est **complètement régulier**, ou est **de Tychonoff** si et seulement si pour toute partie fermée $F$ de $X$ et tout point $x \in X$, si $x \notin F$ alors il existe une application continue $f : X \longrightarrow [0;1]$ telle que $f(x) = 1$ et $\forall y \in F, f(y) = 0$.
3. On dit que $X$ est un $T_4$**-espace**, ou est **normal** si et seulement si pour toutes parties fermées $A$ et $B$ de $X$, si $A \cap B = \varnothing$ alors il existe deux ouverts disjoints $U$ et $V$ de $X$ tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

**Remarque** :

Tout espace complètement régulier est régulier. En effet soit $X$ un espace complètement régulier. Soient $F$ une partie fermée de $X$ et $x \in X$. Supposons que $x \notin F$. Comme $X$ est complètement régulier, il existe une application continue $f : X \longrightarrow [0;1]$ telle que $f(x) = 1$ et $\forall y \in F, f(y) = 0$. Alors $]\frac{3}{4};1]$ est un ouvert de $[0;1]$ qui contient $f(x)$ donc $x \in U := f^{\leftarrow}\left(]\frac{3}{4};1]\right)$, et de même $f^{\rightarrow}(F) \subseteq [0;\frac{1}{4}[$ qui est un ouvert de $[0;1]$ donc $F \subseteq V := f^{\leftarrow}\left([0;\frac{1}{4}[\right)$, $U$ et $V$ étant évidemment disjoints.

**Exemple** :

Soient $D := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|;|y|) < 1\}$, $S := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|;|y|) = 1\}$ et $X := D \cup S$.

Soient $z = (x;y) \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $z \in D$, on pose $B_n(z) := \left(]x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}[\times]y - \frac{1}{n}; y + \frac{1}{n}[\right) \cap D$.

Si $z \in S$, on pose $B_n(z) := \{z\} \cup \left(\left(]x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}[\times]y - \frac{1}{n}; y + \frac{1}{n}[\right) \cap D\right)$.

Pour tout $z \in X$, on pose $\mathcal{B}(z) := \{B_n(z) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Soit $z = (x;y) \in X$.

- $\mathcal{B}(z)$ vérifie **(H1)**, c'est-à-dire que $\mathcal{B}(z) \neq \varnothing$ et $\forall U \in \mathcal{B}(z), z \in U$.
- $\mathcal{B}(z)$ vérifie **(H2)** : en effet soient $B_n(z)$ et $B_m(z)$ dans $\mathcal{B}(z)$. Sans perte de généralité, supposons $m \leq n$. Alors $B_n(z) \subseteq B_m(z)$ donc $B_n(z) \subseteq B_n(z) \cap B_m(z)$.
- $\mathcal{B}(z)$ vérifie **(H3)** : soient $B_n(z) \in \mathcal{B}(z)$ et $t = (x_t; y_t) \in B_n(z)$. On donc $x_t \in ]x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}[$ et $y_t \in ]y - \frac{1}{n}; y + \frac{1}{n}[$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $]x_t - \frac{1}{m}; x_t + \frac{1}{m} \subseteq ]x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}[$ et $]y_t - \frac{1}{m}; y_t + \frac{1}{m}[\subseteq]y - \frac{1}{n}; y + \frac{1}{n}[$. Alors $B_m(t) \subseteq B_n(z)$.

Ainsi, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur $X$ telle que pour tout $z \in X$, $\mathcal{B}(z)$ soit une base de voisinage de $z$ dans $(X;\mathcal{T})$ constituée uniquement d'ouverts. On peut remarquer que la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur $D$ est aussi la topologie induite sur $D$ par celle usuelle de $\mathbb{R}^2$. Il est clair (quitte à prend un $n$ et un $m$ suffisamment grands) que $(X;\mathcal{T})$ est séparé. $D = \bigcup_{z\in D}\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(z)$ donc $D$ est un ouvert de $(X;\mathcal{T})$.

Soient $z \in S$ et $F := S\backslash\{z\}$. $F$ est alors un fermé de $X$ car $X\backslash F = D \cup B_1(z)$ est un ouvert de $X$ comme réunion de deux ouverts. On a $x \notin F$ mais si $U$ et $V$ sont des ouverts de $X$ tels que $x \in U$ et $F \subseteq V$, alors nécessairement $U$ et $V$ ne sont pas disjoints. Donc $(X;\mathcal{T})$ n'est pas régulier.

Ainsi $(X;\mathcal{T})$ est séparé mais non régulier.

**Proposition 81 (Sous-espaces d'espaces réguliers et complètement régul**

Soient $X$ un espace topologique et $A \subseteq X$, que l'on munie de la topologie induite par $X$.

1. Si $X$ est régulier, alors $A$ est régulier.
2. Si $X$ est complètement régulier, alors $A$ est complètement régulier.
3. Si $X$ est normal et si $A$ est un fermé de $X$, alors $A$ est normal.

**Proposition 82 (Caractérisation des espaces réguliers parmi les séparés)**

Soit $X$ un espace **séparé**.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est régulier.
2. Pour tout $x \in X$ et tout voisinage $V_x$ de $x$ dans $X$, il existe un ouvert $U_x$ de $X$ tel que $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq V_x$. Autrement dit, tout $x \in X$ admet une base de voisinages constituée uniquement de fermés dans $X$.
3. Pour tout $x \in X$ et toute partie fermée $F$ de $X$, si $x \notin F$ alors il existe deux ouverts $U$ et $V$ de $X$ tels que $x \in U$, $F \subseteq V$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

**Théorème 10 (Prolongation par continuité dans un régulier)**

Soit $A$ une partie **dense** d'un espace topologique $X$. Soient $Y$ un espace **régulier** et $g : A \longrightarrow Y$ une application continue.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une application $f : X \longrightarrow Y$ continue qui prolonge $g$.
2. Pour tout $x \in X$, $\lim\limits_{a\to x} g(a)$ existe dans $Y$.

### Proposition 83 (Caractérisation des espaces normaux parmi les séparés)

Soit $X$ un espace **séparé**.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est normal.
2. Pour toute partie fermée $A$ de $X$ et tout ouvert $U$ de $X$ tel que $A \subseteq U$, il existe $W$ un ouvert de $X$ tel que $A \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$.
3. Pour toutes parties fermées $A$ et $B$ de $X$ qui sont disjointes, il existe $U$ et $V$ deux ouverts de $X$ tels que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

### Lemme 3 (Caractérisation des espaces normaux parmi les T1)

Soit $X$ un espace topologique $T_1$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est normal.
2. Pour tout ouverts $U'$ et $V'$ de $X$ tels que $U' \cup V' = X$, il existe des fermés $E$ et $F$ de $X$ tels que $E \subseteq U'$, $F \subseteq V'$ et $E \cup F = X$.

### Proposition 84 (Transmission du fait d'être T1 et normal)

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, et $f : X \longrightarrow Y$ une application fermée et surjective dans $Y$.

1. Si $X$ est $T_1$, alors $Y$ est $T_1$.
2. Si $X$ est normal et si $f$ est continue, alors $Y$ est normal.

### Proposition 85 (Quotient d'un espace normal par une relation fermée)

Soient $X$ un espace normal et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$ qui est fermée en tant que relation. Alors $X/\mathcal{R}$ munit de la topologie quotient est normal.

**Lemme 4 (Chaîne d'ouverts et d'adhérences dans un normal)**

Soient $X$ un espace normal, $F$ un fermé de $X$ et $V$ un ouvert de $X$ tel que $F \subseteq V$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k \in [\![1; 2^n - 1]\!] \right\}$ et soit $D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$.

Alors il existe une famille $(U_r)_{r\in D}$ d'ouverts de $X$ tels que pour tout $r$ et $s$ dans $D$ tels que $r < s$, alors $F \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq U_s \subseteq \overline{U_s} \subseteq V$.

**Lemme 5 (Fonction sur une chaîne d'ouverts et d'adhérences)**

Soient $X$ un espace topologique, $F$ un fermé de $X$ et $V$ un ouvert de $X$ tels que $F \subseteq V$. Soient $D$ une partie dense de $[0; 1]$ et $(U_r)_{r\in D}$ une famille d'ouverts de $X$ tels que pour tout $r$ et $s$ dans $D$ vérifiant $r < s$, on a $F \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq U_s \subseteq \overline{U_s} \subseteq V$. Pour tout $x \in X$, si $x \in \bigcup_{r\in D} U_r$ alors on pose $f(x) := \inf \{r \in D \mid x \in U_r\}$ et sinon, on pose $f(x) = 1$.

Alors $f : X \longrightarrow [0; 1]$ est une application continue telle que $\forall x \in F, f(x) = 0$ et $\forall x \in X \backslash V, f(x) = 1$.

**Théorème 11 (Urysohn)**

Soit $X$ un espace topologique **séparé**.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est normal.
2. Pour tous fermés non vides et disjoints $A$ et $B$ de $X$, il existe une application continue $f : X \longrightarrow [0; 1]$ telle que $\forall x \in A, f(x) = 0$ et $\forall x \in B, f(x) = 1$.

**Proposition 86 (Tout espace normal est complètement régulier)**

Tout espace normal est complètement régulier

**Définition 31 (Parties complètement séparées d'un espace topologique)**

Soient $X$ un espace topologique et $A$ et $B$ deux parties de $X$.
On dit que $A$ et $B$ sont **complètement séparées** si et seulement s'il existe une application $f$ :

$X \longrightarrow [0;1]$ continue telle que $\forall x \in A, f(x) = 0$ et $\forall x \in B, f(x) = 1$. On dit alors que $f$ **sépare complètement** $A$ et $B$.

**Remarque** :
Ainsi, le théorème d'Urysohn nous dit qu'un espace $X$ séparé est normal si et seulement si tous ses fermés disjoints sont complètement séparés.

## Proposition 87 (Caractérisation des parties complètement séparées)

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un espace topologique $X$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ et $B$ sont complètement séparées.
2. Il existe $r$ et $s$ deux réels tels que $r < s$ et il existe une application continue $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in A, g(x) \leq r$ et $\forall x \in B, s \leq g(x)$.

## Proposition 88 (Images réciproques de 0 complètement séparées)

Soient $A$ et $B$ deux parties disjointes d'un espace topologique $X$.
S'il existe deux applications continues $g : X \longrightarrow [0;1]$ et $h : X \longrightarrow [0;1]$ telles que $A = g^{\leftarrow}(\{0\})$ et $B = h^{\leftarrow}(\{0\})$, alors il existe une application continue $f : X \longrightarrow [0;1]$ telle que $A = f^{\leftarrow}(\{0\})$ et $B = f^{\leftarrow}(\{1\})$. En particulier $A$ et $B$ sont complètement séparées.

## Théorème 12 (Urysohn 2)

Soient $X$ un espace topologique et $Y$ un sous-espace topologique de $X$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Pour toute fonction continue $f : Y \longrightarrow [-1;1]$,
   il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [-1;1]$ qui prolonge $f$.
2. Pour tous réels $a$ et $b$ tels que $a < b$ et toute fonction continue $f : Y \longrightarrow [a;b]$,
   il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [a;b]$ qui prolonge $f$.
3. Pour toutes parties $A$ et $B$ de $Y$, si $A$ et $B$ sont complètement séparées dans $Y$, alors $A$ et $B$ sont complètement séparées dans $X$.

## Théorème 13 (de prolongement de Tietze)

Soit $X$ un espace **séparé**.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est normal.
2. Pour tous $a$ et $b$ réels tels que $a < b$,tout fermé $A$ de $X$ et toute $f : A \longrightarrow [a; b]$ continue, il existe $g : X \longrightarrow [a; b]$ continue qui prolonge $f$.
3. Pour tout fermé $A$ de $X$ et toute $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui prolonge $f$.

## Définition 32 (Recouvrement ouvert et sous-recouvrement)

Soit $X$ un espace topologique.

Un **recouvrement ouvert** de $X$ est une famille $(U_i)_{i\in I}$ constituée d'ouverts de $X$ telle que $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

S'il existe $J \subseteq I$ tel que $X = \bigcup\limits_{j\in J} U_j$, alors on dit que $(U_j)_{j\in J}$ est un **sous-recouvrement** de $(U_i)_{i\in I}$, que l'on peut qualifier de dénombrable si $J$ est dénombrable, et de fini si $J$ est fini.

## Définition 33 (Espace de Lindelöf)

Soit $X$ un espace topologique. On dit que $X$ est de **Lindelöf** si et seulement si pour tout recouvrement ouvert de $X$, il en existe un sous-recouvrement au plus dénombrable, c'est-à-dire que pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de $X$, il existe $J \subseteq I$ au plus dénombrable telle que $X = \bigcup\limits_{j\in J} U_j$.

## Théorème 14 (Base dénombrable d'ouverts et Lindelöf)

Soit $X$ un espace topologique.

Si $X$ admet une base dénombrable d'ouverts, alors $X$ est de Lindelöf.

## Théorème 15 (de Tychonoff)

Soit $X$ un espace de Lindelöf (en particulier les espaces admettant une base au plus dénombrable d'après le théorème précédent). Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est normal.

2. $X$ est complètement régulier.
3. $X$ est régulier.

Chapitre 2

# Espaces métriques

## 1 Inégalités prémilinaires

**Proposition 89 (Inégalité de Jensen - version finie)**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Pour tout $x_1; x_2; \cdots; x_n$ dans $I$ et tout $\lambda_1; \lambda_2; \cdots; \lambda_n$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

**Proposition 90 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

1. Soit $\big(E; \langle \cdot\,;\cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien réel ou complexe.
   Alors pour tout $x$ et $y$ dans $E$, on a $\big|\, \langle x\,;y \rangle \,\big| \leq ||x|| \cdot ||y||$.
2. En particulier, pour $E = \mathbb{R}^n$ et $\langle x\,;y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, on a $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

**Définition 34 (Exposant conjugué d'un nombre réel)**

Soit $p \in [1; +\infty[$. On appelle **exposant conjugué** de $p$ l'unique $q \in [1; +\infty[$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

On a donc $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p}$ donc $q = \dfrac{p}{p-1}$.

### Proposition 91 (Inégalités de Hölder - version finie)

Soient $p$ et $q$ deux réels dans $[1;+\infty[$ tels que $q$ soit l'exposant conjugué de $p$.

Soient $a_1;a_2;\cdots;a_n;b_1;b_2;\cdots;b_n$ dans $\mathbb{R}_+$.

On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

### Proposition 92 (Inégalité de Minkowski - version finie)

Soient $p \in [1;+\infty[$ et $u_1;u_2;\cdots;u_n;v_1;v_2;\cdots;v_n$ dans $\mathbb{C}$.

On a alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |u_i+v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

# 2 Topologie des espaces métriques

## Définition 35 (Distance/Métrique sur un ensemble)

Une **distance**, ou une **métrique**, sur un ensemble $X$ est une application $d : X \longrightarrow [0; +\infty[$ vérifiant :

**(M1)** $\forall x, y \in X, \Big(d(x; y) = 0 \iff x = y\Big)$. (**séparation**)

**(M2)** $\forall x, y \in X, d(x; y) = d(y; x)$. (**symétrie**)

**(M3)** $\forall x, y, z \in X, d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z)$. (**inégalité triangulaire**)

On dira alors que $(X; d)$ est un **espace métrique**.

**Exemple** :

1. Soit $X$ un ensemble. Alors $d := \left(\begin{array}{ccc} X^2 & \longrightarrow & [0; +\infty[ \\ (x; y) & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} \end{array}\right)$ est une distance sur $X$ appelée **distance discrète**, ou **distance triviale** sur $X$.

2. Si $d$ est une distance sur un ensemble $X$, alors pour tout réel $\alpha > 0$, $\alpha d$ est aussi une distance sur $X$.

3. Soit $E := \mathcal{C}([0; 1] \to \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. Alors en posant pour tout $f$ et $g$ dans $E$, $d(f; g) := \displaystyle\int_0^1 |f(t) - g(t)|\mathrm{d}t$, $d$ est une distance sur $E$.

## Proposition 93 (Inégalités immédiates pour une distance)

Soit $(X; d)$ un espace métrique.

1. Pour tout $x$, $y$ et $z$ dans $X$, on a $|d(x; z) - d(z; y)| \leq d(x; y)$.
2. Pour tout $x_1; \cdots; x_n; x_{n+1}$ dans $X$, on a $d(x_1; x_{n+1}) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d(x_i; x_{i+1})$.

## Définition 36 (Boules ouvertes, fermées et sphères)

Soient $(X; d)$ un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$.

1. On appelle **boule ouverte** de centre $a$ et de rayon $r$ l'ensemble
   $\mathcal{B}(a; r) := \{x \in X \mid d(a; x) < r\}$.
2. On appelle **boule fermée** de centre $a$ et de rayon $r$ l'ensemble

$\mathcal{B}^f(a;r) := \{x \in X \mid d(a;x) \leq r\}$.

3. On appelle **sphère** de centre $a$ et de rayon $r$ l'ensemble
$\mathcal{S}(a;r) := \{x \in X \mid d(a;x) = r\}$.

## Proposition 94 (Justification des ouverts d'un espace métrique)

Soit $(X;d)$ un espace métrique.

1. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des boules ouvertes de $X$. Alors $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
2. Soient $a \in X$ et $r > 0$. Alors pour tout $x \in \mathcal{B}(a;r)$, en posant $\rho := r - d(a;x)$ on a $\mathcal{B}(x;\rho) \subseteq \mathcal{B}(a;r)$.
3. Soient $a$ et $b$ dans $X$, $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$. Alors pour tout $x \in \mathcal{B}(a;r_1) \cap \mathcal{B}(b;r_2)$, il existe $\rho > 0$ tel que $\mathcal{B}(x;\rho) \subseteq \mathcal{B}(a;r_1) \cap \mathcal{B}(b;r_2)$. En particulier, $\mathcal{B}(a;r_1) \cap \mathcal{B}(b;r_2)$ est une réunion de boules ouvertes.

## Définition 37 (Topologie associée à un espace métrique)

Soit $(X;d)$ un espace métrique. D'après la proposition précédente, l'ensemble des boules ouvertes vérifie les axiomes **(B1)** et **(B2)** d'une base d'ouverts de $X$ : on considère donc désormais sur $X$ l'unique topologie associée à cet ensemble.

Ainsi, une partie $U$ de $X$ est ouverte si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x;r) \subseteq U$, ce qui revient à dire que $U$ est une réunion de boules ouvertes.

## Proposition 95 (Propriétés topologiques d'un espace métrique)

Soit $(X;d)$ un espace métrique.

1. $(X;d)$ est séparé.
2. $(X;d)$ vérifie le premier axiome de dénombrabilité, c'est-à-dire que tout $x \in X$ admet une base au plus dénombrable de voisinages.
3. Soient $(Y;d')$ un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$. Alors $f$ est continue si et seulement si pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu > 0$ tel que $f^{\rightarrow}\Big(\mathcal{B}(x;\mu)\Big) \subseteq \mathcal{B}(f(x);\varepsilon)$.

**Remarque** :

1. Soient $(X;d)$ un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $X$ et $x \in X$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ dans $(X;d)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, d(x_n;x) < \varepsilon$. Autrement dit, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ dans $(X;d)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n;x) = 0$.

2. Soient $(X;d)$ un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $X$ et $x$ et $y$ dans $X$. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n;y_n) = d(x;y)$.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |d(x_n;y_n) - d(x;y)| &= |d(x_n;y_n) - d(x_n;y) + d(x_n;y) - d(x;y)| \\ &\leq |d(x_n;y_n) - d(x_n;y)| + |d(x_n;y) - d(x;y)| \text{ par inégalité triangulaire de } |\cdot| \\ &\leq d(y_n;y) + d(x_n;x) \text{ d'après la prop. 93 p. 61} \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(y_n;y) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n;x) = 0$ pour conclure.

## Proposition 96 (Caractérisations par les suites dans un espace métrique)

Soient $(X;d)$ un espace métrique.

1. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $X$ et $a \in X$. Alors $a$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement s'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $a$.
2. Soient $A \subseteq X$ et $a \in X$. Alors $a \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite à valeurs dans $A$ qui converge vers $a$.
3. Soit $A \subseteq X$. Alors $A$ est un fermé de $X$ si et seulement si toute suite à valeurs dans $A$ qui converge dans $X$ a sa limite dans $A$.
4. Soient $Y$ un espace topologique, $f : X \longrightarrow Y$ et $a \in X$. Alors $f$ est continue en $a$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ qui converge vers $a$, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

## Définition 38 (Distances entre les parties)

Soient $A$ et $B$ deux parties non vides d'un espace métrique $(X;d)$. Soient $x \in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$.

1. On appelle **distance** de $x$ à $A$ le réel $d(x;A) := \inf\limits_{a\in A} d(x;a)$.
2. On appelle **distance** de $A$ à $B$ le réel $d(A;B) := \inf\limits_{\substack{a\in A\\ b\in B}} d(a;b)$.
3. On appelle **diamètre** de $A$ le "nombre" $\delta(A) := \sup\limits_{\substack{x\in A\\ y\in A}} d(x;y)$. Attention, $\delta(A) \in [0;+\infty]$.

4. On dit que $A$ est **bornée** si et seulement si $\delta(A) < +\infty$. Autrement dit, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in A, \forall y \in A, d(x;y) < \lambda$, ce qui revient à dire qu'il existe $x \in A$ et $r > 0$ tel que $A \subseteq \mathcal{B}\,(x;r)$.
5. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si et seulement si $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est bornée.

## Proposition 97 (Propriétés de la distance à une partie)

Soient $(X;d)$ un espace métrique et $A$ une partie non vide de $X$.

1. Pour tout $x$ et $y$ dans $X$, on a $|d(x;A) - d(y;A)| \leq d(x;y)$. En particulier, $d(\bullet;A)$ est continue, et donc en particulier pour tout $y \in X$, $d(\bullet;y)$ est continue.
2. On a $\overline{A} = \{x \in X \mid d(x;A) = 0\}$ et $\mathring{A} = \{x \in X \mid d\,(x; X\backslash A) > 0\}$.
3. Si $A$ est un fermé de $X$ et si $x \notin A$, alors $d(x;A) > 0$.

**Remarque** :
Si l'on munit $\mathbb{R}$ d'une métrique $d_p$ avec $p \in [1;+\infty]$, alors les ensembles $A = \{(x;0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ sont disjoints mais pourtant $d(A;B) = 0$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d(A;B) \leq d\big((n;0);(n;\frac{1}{n})\big) = \frac{1}{n}$.

## Proposition 98 (Propriétés du diamètre)

Soient $A$ et $B$ des parties non vides d'un espace métrique $(X;d)$.

1. Si $A \subseteq B$, alors $\delta(A) \leq \delta(B)$.
2. On a $\delta\left(\overline{A}\right) = \delta(A)$.
3. Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, on a $\delta\Big(\mathcal{B}\,(x;r)\Big) \leq \delta\Big(\mathcal{B}^f\,(x;r)\Big) \leq 2r$.
4. On a $d(A;B) = d(A;\overline{B}) = d(\overline{A};B) = d(\overline{A};\overline{B})$.
5. On a $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(A;B) + \delta(B)$. En particulier, si $A$ et $B$ sont bornées, $A \cup B$ est bornée.

## Proposition 99 (Réunion dénombrable de fermés)

Soit $(X;d)$ un espace métrique.

1. Tout ouvert est une réunion dénombrable de fermés.

2. Tout fermé est une intersection dénombrable d'ouverts.

## Proposition 100 (Un espace métrique est normal)

Un espace métrique est normal.

## Proposition 101 (Théorème de Tietze version espaces métriques)

Soient $A$ un fermé d'un espace métrique $(X; d)$ et $f : A \longrightarrow [a; b]$ une application continue, où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $1 \leq a < b$. Posons $g := \left( \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [a; b] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \inf\limits_{y \in A} f(y) \dfrac{d(x; y)}{d(x; A)} & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array} \right)$.

Alors $g : X \longrightarrow [a; b]$ est continue et prolonge $f$.

## Théorème 16 (Espace métrique de Lindelöf et séparable)

Soit $(X; d)$ un espace métrique.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ admet une base dénombrable d'ouverts.
2. $X$ est séparable.
3. $X$ est de Lindelöf.

# 3 Comparaison de distances

## 3.1 Applications uniformément continues, lipschitzienne et isométriques

**Définition 39 (Applications uniformément continues, lipschitzienne et iso**

Soient $(X;d)$ et $(Y;d')$ deux espaces métriques, et $f : X \longrightarrow Y$.

1. On dit que $f$ est **uniformément continue** si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x$ et $y$ dans $X$, $d(x;y) < \eta \implies d'\big(f(x);f(y)\big) < \varepsilon$.
2. Soit $k \geq 0$. On dit que $f$ est **$k$-lipschitzienne** si et seulement si pour tout $x$ et $y$ dans $X$, on a $d'\big(f(x);f(y)\big) \leq kd(x;y)$. D'une manière générale, on dira que $f$ est **lipschitzienne** si et seulement s'il existe $k \geq 0$ tel que $f$ est $k$-lipschitzienne.
3. On dit que $f$ est **contractante** si et seulement s'il existe $k \in [0;1[$ tel que $f$ est $k$-lipschitzienne.
4. On dit que $f$ est **isométrique** si et seulement si $f$ est pour tout $x$ et $y$ dans $X$, on a $d'\big(f(x);f(y)\big) = d(x;y)$. On dit de plus que $f$ est une **isométrie** dans $Y$ si et seulement si $f$ est isométrique et surjective dans $Y$.
5. $(X;d)$ et $(Y;d')$ sont dit **isométriques** si et seulement s'il existe une isométrie de $X$ dans $Y$.

**Proposition 102 (Propriétés des app. unif. cont., lipsch. et isom.)**

1. Si une application est uniformément continue, alors elle est continue.
2. Si une application est lipschitzienne, alors elle est uniformément continue.
3. Si une application est isométrique, alors elle est lipschitzienne et injective.

4. La composée de deux applications uniformément continues est uniformément continue.
5. La composée de deux applications lipschitziennes est lipschitzienne.
6. La composée de deux applications isométriques est isométrique.

7. L'application identité d'un espace métrique dans lui-même est une isométrie.
8. L'application réciproque d'une isométrie est une isométrie.
9. Si une application est une isométrie, alors c'est un homéomorphisme.

**Exemple** :

• D'après la proposition 97 page 64, pour une partie $A$ d'un espace métrique $(X;d)$, l'application $d(\bullet;A)$

est 1-lipschitzienne.

• Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application $t_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x$ associe $x + a$ est une isométrie : en effet $|t_a(y) - t_a(x)| = |(y+a) - (x+a)| = |y - x|$ pour tout $x$ et $y$ réels.

## Proposition 103 (Caractérisation séquentielle de la continuité uniforme)

Soient $(X; d)$ et $(Y; d')$ deux espaces métriques, et $f : X \longrightarrow Y$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f$ est uniformément continue.
2. Pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n; y_n) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d'\big(f(x_n); f(y_n)\big) = 0$.

**Exemple** :

• L'application $f := \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{pmatrix}$ est continue mais pas uniformément continue car la suite $f\big(n + \frac{1}{n}\big) - f(n) = 2 + \frac{1}{n}$ ne tend pas vers $0$, alors que c'est le cas de $\big(n + \frac{1}{n}\big) - n$.

• De même, l'application $g := \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x^2) \end{pmatrix}$ est continue et bornée mais elle n'est pas uniformément continue car si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n := \sqrt{2n\pi}$ et $y_n := \sqrt{(2n+1)\pi}$, alors on a $y_n - x_n$ tend vers $0$ mais pas $g(x_n) - g(y_n) = 2$.

## Proposition 104 (Majoration d'une application réelle unif. continue)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application uniformément continue.

Alors il existe deux réels positifs $a$ et $b$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a|x| + b$.

**Remarque** :

La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie : par exemple la fonction $x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas uniformément continue, mais pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x^2)| \leq 1 \leq 2|x| + 1$.

### Proposition 105 (Caractérisation des lipschitzienne réelles dérivables)

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $I$, et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, et $k \in [0; +\infty[$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f$ est $k$-lipschitzienne.
2. Pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, on a $|f'(x)| \leq k$.

En particulier, $f$ est lipschitzienne si et seulement si $f'$ est bornée sur $\overset{\circ}{I}$.

**Exemple** :

Soit $\alpha > 0$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est uniformément continue sur $[\alpha; +\infty[$. En effet, $f$ est dérivable sur $[\alpha; +\infty[$ et on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{\alpha^2}$ et donc $f$ est lipschitzienne sur $[\alpha; +\infty[$ donc uniformément continue. Cependant, $f$ n'est pas uniformément continue sur $]0; +\infty[$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f\left(\frac{1}{n+1}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = 0$.

### Lemme 6 (Borne inf d'une famille de fonctions réelles lipschitziennes)

Soient $(X; d)$ un espace métrique, $k \geq 0$ et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications $k$-lipschitziennes de $X$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $\inf\limits_{i \in I} f_i(x_0)$ existe dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in X$, $\inf\limits_{i \in I} f_i(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et l'application $f := \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \inf\limits_{i \in I} f_i(x) \end{pmatrix}$ est $k$-lipschitzienne.

### Proposition 106 (Prolongement d'une fonction lipschitzienne réelle)

Soient $(X; d)$ un espace métrique, $A$ une partie non vide de $X$, $k \geq 0$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $k$-lipschitzienne. Posons $g := \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \inf\limits_{a \in A} \Big(f(a) + kd(x; a)\Big) \end{pmatrix}$.

Alors $g$ est bien définie, prolonge $f$ et est $k$-lipschitzienne.

## 3.2 Comparaison de distances

### Définition 40 (Équivalence des distances)

Soient $d_1$ et $d_2$ deux distances sur un ensemble $X$.

1. On dit que $d_1$ et $d_2$ sont **topologiquement équivalentes** si et seulement si les topologies associées sur $X$ sont égales. Autrement dit, les applications identités $\mathrm{id}_X : (X; d_1) \longrightarrow (X; d_2)$ et $\mathrm{id}_X : (X; d_2) \longrightarrow (X; d_1)$ sont continues.

2. On dit que $d_1$ et $d_2$ sont **uniformément équivalentes** si et seulement si les applications identités $\mathrm{id}_X : (X; d_1) \longrightarrow (X; d_2)$ et $\mathrm{id}_X : (X; d_2) \longrightarrow (X; d_1)$ sont uniformément continues. On dira alors que $d_1$ et $d_2$ définissent la **même structure d'espace métrique**.

3. On dit que $d_1$ et $d_2$ sont **équivalentes**, ou **comparables**, si et seulement s'il existe deux réels **strictement** positifs $A$ et $B$ tels que pour tout $x$ et $y$ dans $X$,
on a $Ad_1(x; y) \leq d_2(x; y) \leq Bd_1(x; y)$, ce qui revient à dire que les applications identités $\mathrm{id}_X : (X; d_1) \longrightarrow (X; d_2)$ et $\mathrm{id}_X : (X; d_2) \longrightarrow (X; d_1)$ sont lipschitziennes.

### Proposition 107 (Distances définies à partir d'une autre)

Soient $(X; d)$ un espace métrique et $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application croissante telle que $\varphi(0) = 0$, $\forall t > 0, \varphi(t) > 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall s \in \mathbb{R}_+, \varphi(t + s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$.

1. Si l'on pose $d'(x; y) := \varphi\big(d(x; y)\big)$ pour tout $x$ et $y$ dans $X$, alors $d'$ est une distance sur $X$.
2. Si $\varphi$ est continue en $0$, alors $d$ et $d'$ sont uniformément équivalentes.
3. Les applications $\varphi : t \mapsto \min(1; r)$ et $\varphi : t \mapsto \frac{t}{1+t}$ vérifient toutes les hypothèses de l'énoncé et sont de plus continues sur $\mathbb{R}_+$ (donc en particulier en $0$), donc toute distance d'un espace métrique quelconque est uniformément équivalente à une distance bornée.
4. L'application $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) = 1$ pour tout $t > 0$, alors $\varphi$ vérifie les hypothèses de l'énoncé mais elle n'est pas continue en $0$. Pour $X = \mathbb{R}$ et $d$ la distance usuelle, $d'$ est alors la distance discrète, donc $d$ et $d'$ ne sont même pas topologiquement équivalentes : l'hypothèse de continuité en $0$ est donc cruciale.

**Exemple** :
Si $d$ est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et $d' := \frac{d}{d+1}$, alors comme on vient de le montrer $d$ et $d'$ sont uniformément équivalentes, mais ne sont pas équivalentes car $d'$ est bornée et $d$ ne l'est pas.

# 4 Quelques constructions d'espaces métriques

## 4.1 Sous-espace métrique

**Définition 41 (Distance induite)**

Soient $(X;d)$ un espace métrique et $A \subseteq X$. L'application $d_{|A^2}$ est appelée **distance induite** par $d$ sur $A$, et sera par abus de notation aussi notée $d$. On dira alors que $(A;d)$ est un **sous-espace métrique** de $(X;d)$.

**Proposition 108 (Topologie d'un sous-espace métrique)**

Soient $(X;d)$ un espace métrique, $\mathcal{T}_{(X;d)}$ la topologie associée à $(X;d)$ et $A \subseteq X$.
Soient $\mathcal{T}_{A;(X;d)}$ la topologie induite par $\mathcal{T}_{(X;d)}$ sur $A$, et $\mathcal{T}_{(A;d)}$ la topologie associée à $(A;d)$.
Alors $\mathcal{T}_{A;(X;d)} = \mathcal{T}_{(A;d)}$.

**Proposition 109 (Sous-espace d'un espace métrique séparable)**

Soient $(X;d)$ un espace métrique et $A \subseteq X$.
Si $(X;d)$ est séparable, alors $(A;d)$ est séparable.

## 4.2 Espaces métriques produits

**Proposition 110 (Topologie sur un produit fini d'espaces métriques)**

Soient $(X_1;d_1), (X_2;d_2); \cdots ; (X_n;d_n)$ des espaces métriques, et $X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.
Pour tout $x = (x_1;x_2;\cdots;x_n)$ et $y = (y_1;y_2;\cdots;y_n)$ dans $X$, posons

$$D_1(x;y) := \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i;y_i) \qquad D_2(x;y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i;y_i)^2} \qquad D_\infty(x;y) := \max_{i \in [\![1;n]\!]} d_i(x_i;y_i)$$

Alors $D_1$, $D_2$ et $D_\infty$ sont trois distances sur $X$, équivalentes deux à deux, et dont la topologie associée est la topologie produit sur $X$.

**Proposition 111 (Topo. sur un produit dénombrable d'espaces métriques)**

Soit $\big((X_n;d_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques. Soit $X := \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
Pour $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $X$, posons

$$D_\infty(x;y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\min\big(1;d_n(x_n;y_n)\big) \quad D_1(x;y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\min\big(1;d_n(x_n;y_n)\big)$$

$$D(x;y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n;y_n)}{1+d_n(x_n;y_n)}$$

Alors $D_\infty$, $D_1$ et $D$ sont trois distances sur $X$ qui sont topologiquement équivalentes, et dont la topologie associée est la topologie produit sur $X$.

**Exemple** :

L'application $\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & [0;+\infty[ \\ (u;v) & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|u_n-v_n|}{1+|u_n-v_n|}\end{array}\right)$ est une distance sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, qui est majorée par 2.

**Proposition 112 (Topo. 2 sur un produit dénomb. d'espaces métriques)**

Soit $\big((X_n;d_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques. Soit $X = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
Supposons qu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ telle que

1. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|c_n|^2 < +\infty$
2. $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x_n\in X_n, \forall y_n\in X_n, d_n(x_n;y_n)\leq |c_n|$.

Pour tout $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $X$, posons $D_2(x;y) := \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}d_n(x_n;y_n)^2}$.

Alors $D_2$ est une distance sur $X$ dont la topologie associée est la topologie produit sur $X$.

### 4.3 Distance transportée par une application injective

**Définition 42 (Distance transportée par une application injective)**

Soient $X$ un ensemble, $(Y; d')$ un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$ une application injective.
On appelle **distance transportée** de $d'$ par $f$ sur $X$ la distance sur $X$ définie pour tout $x$ et $y$ dans $X$ par

$$d(x; y) := d'\big(f(x); f(y)\big)$$

$f$ est alors rendue isométrique de $(X; d)$ dans $(Y; d')$.

**Exemple** :

La fonction $f := \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & ]-1;1[ \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{pmatrix}$ est une bijection dans $]-1;1[$.

► En effet, elle est injective puisqu'on peut aussi l'écrire $f = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & ]-1;1[ \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{pmatrix}$.

Soient $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$.

♦ Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$ donc $x(1+y) = y(1+x)$ donc $x + xy = y + xy$ donc $x = y$.

♦ Si $x < 0$ et $y < 0$, alors $\frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y}$ donc $x(1-y) = y(1-x)$ donc $x - xy = y - xy$ donc $x = y$.

♦ Si $x \geq 0$ et $y < 0$ alors $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1-y}$ donc $x(1-y) = y(1+x)$ donc $x - xy = y + xy$ donc $x - y = 2xy$. Mais $x - y \geq 0$ alors que $2xy \leq 0$ donc $2xy = 0 = x - y$ donc comme $y < 0$, on a $x = 0$ donc $x - y = -y$ mais comme $x - y = 2xy$ on a $-y = 0$ ce qui est absurde. Ce cas ne se présente donc pas.

Ceci montre bien que $f$ est injective.

► $f$ est bien surjective dans $]-1;1[$. En effet, soit $y \in ]-1;1[$.

♦ Si $y \geq 0$, posons $x := \frac{y}{1-y}$. Comme $y \in [0;1[$, on a $x \geq 0$ donc $f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{\frac{y}{1-y}}{1+\frac{y}{1-y}}$ $= \frac{y}{(1-y)\left(1+\frac{y}{1-y}\right)} = \frac{y}{1-y+\frac{(1-y)y}{1-y}} = \frac{y}{1-y+y} = \frac{y}{1} = y$.

♦ Si $y < 0$, posons $x := \frac{y}{1+y}$. Comme $y \in ]-1;0[$, on a $x < 0$ donc $f(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{\frac{y}{1+y}}{1-\frac{y}{1+y}}$ $= \frac{y}{(1+y)\left(1-\frac{y}{1+y}\right)} = \frac{y}{1+y-\frac{(1+y)y}{1+y}} = \frac{y}{1+y-y} = \frac{y}{1} = y$.

Donc $f$ est bien surjective dans $]-1;1[$.

Considérons ensuite $g : [-\infty; +\infty] \longrightarrow [-1;1]$ qui prolonge $f$ en posant $g(-\infty) = -1$ et $g(+\infty) = 1$, de sorte que $g$ est aussi bijective dans $[-1;1]$. On peut alors transposer la métrique de $[-1;1]$ dans $[-\infty; +\infty]$ : pour tout $x$ et $y$ dans $[-\infty; +\infty]$, on pose $d(x; y) = |g(x) - g(y)|$. Il s'avère que la topologie issue de

$\big([-\infty; +\infty]; d\big)$ est la topologie de l'ordre sur $[-\infty; +\infty]$.

## 5 Espaces topologiques métrisables

**Définition 43 (Espaces topologiques métrisables)**

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique.
On dit que $(X;\mathcal{T})$ est **métrisable** si et seulement s'il existe une distance $d$ sur $X$ telle que $\mathcal{T}$ est la topologie issue de $(X;d)$.

**Exemple** :
1. Si $\mathcal{T}$ est métrisable, alors il existe une infinité de distance qui lui sont associées : en effet, si $\mathcal{T}$ est la topologie issue de $(X;d)$, alors pour tout $r>0$, $\mathcal{T}$ est la topologie issue de $(X;rd)$.
2. Toute topologie discrète est métrisable puisqu'il s'agit simplement de la topologie issue de la distance discrète.
3. Si $\mathrm{card}(X)\geq 2$ alors la topologie grossière $\left\{\varnothing;X\right\}$ n'est pas métrisable. En effet, supposons par l'absurde que ça soit le cas pour une distance $d$ : comme $\mathrm{card}(X)\geq 2$ il existe $x$ et $y$ dans $X$ tels que $x\neq y$. Posons $r:=d(x;y)$ et considérons alors $U:=\mathcal{B}_d\left(x;\frac{r}{2}\right)$. $U$ est un ouvert de $(X;d)$ mais $x\in U$ donc $U\neq\varnothing$ et $y\notin U$ donc $U\neq X$, si bien que $U\notin\left\{\varnothing;X\right\}$.

**Théorème 17 (d'Urysohn sur les espaces métrisables séparables)**

Soit $X$ un espace topologique.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est métrisable et séparable.
2. $X$ est homéomorphe à un sous-espace métrique de l'espace métrique produit $[0;1]^{\mathbb{N}}$.
3. $X$ est régulier et admet une base dénombrable d'ouverts.

**Proposition 113 (Topologie initiale métrisable)**

Soient $X$ un ensemble et $\big((Y_n;d_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques.
Soit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n:X\longrightarrow Y_n$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **séparante**.

Alors la topologie initiale sur $X$ associée à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est métrisable.

# 6 Suites de Cauchy et espaces métriques complets

## 6.1 Suites de Cauchy

**Définition 44 (Suites de Cauchy et filtres de Cauchy)**

Soit $(X;d)$ un espace métrique.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $X$.
   On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **de Cauchy** dans $(X;d)$ si et seulement si
   $$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, \forall m\geq N, d(x_n;x_m)<\varepsilon$$
   ce qui est équivalent à dire que
   $$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, \forall p\in\mathbb{N}, d(x_{n+p};x_n)<\varepsilon$$
2. Soit $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un filet à valeurs dans $X$.
   On dit que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est **de Cauchy** dans $(X;d)$ si et seulement si
   $$\forall\varepsilon>0, \exists\lambda_0\in\Lambda, \forall\lambda\geq\lambda_0, \forall\mu\geq\lambda_0, d(x_\lambda;x_\mu)<\varepsilon$$

**Proposition 114 (Reformulation d'être de Cauchy avec la diamètre)**

Soit $(X;d)$ un espace métrique.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $X$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $A_n:=\{x_k \mid k\geq n\}$.
   Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si la suite $\big(\delta(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0$.
2. Soit $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un filet à valeurs dans $X$ et pour tout $\lambda\in\Lambda$, on pose $A_\lambda:=\{x_\mu \mid \mu\geq\lambda\}$.
   Alors $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est de Cauchy si et seulement si le filet $\big(\delta(A_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ tend vers $0$.

**Proposition 115 (Propriétés des suites de Cauchy)**

Dans un espace métrique :

1. toute suite qui converge est de Cauchy.
2. toute suite de Cauchy est bornée.
3. toute sous-suite d'une suite de Cauchy est elle-même une suite de Cauchy.

## Proposition 116 (Propriétés des filets de Cauchy)

Dans un espace métrique :

1. tout filet qui converge est de Cauchy.
2. tout sous-filet d'un filet de Cauchy est lui-même un filet de Cauchy.

## Proposition 117 (Suite de Cauchy et valeurs d'adhérences)

Soient $(X; d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente, ce qui est aussi équivalent à admettre une valeur d'adhérence d'après la prop. 96 p. 63, valeur d'adhérence qui sera donc unique puisque c'est la limite de la suite.
2. Pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre réels strictement positifs, il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, d(x_{\varphi(n+1)}; x_{\varphi(n)}) < \varepsilon_n$.

**Proposition 118 (Image d'une suite de Cauchy par une appli. unif. cont.)**

Soient $(X;d)$ et $(Y;d')$ deux espaces métriques.

Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application **uniformément continue** et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $X$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(X;d)$, alors $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(Y;d')$.

**Remarque** :

La continuité uniforme est une hypothèse importante : par exemple l'application $f := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}\right)$ est continue, et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, x_n := \frac{1}{n}$ est de Cauchy (on peut le voir en se plaçant dans $\mathbb{R}_+$ dans lequel elle converge), mais $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = n$ donc $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et donc pas de Cauchy.

## 6.2 Espaces complets

**Définition 45 (Espace métrique complet)**

Soit $(X;d)$ un espace métrique.

On dit que $(X;d)$ est **complet** si et seulement si toute suite de Cauchy dans $(X;d)$ est convergente.

**Exemple** :

Pour $X$ un ensemble munit de la distance discrète $d$, $X$ est complet puisque pour tout $x$ et $y$ dans $X$, si $x \neq y$ alors $d(x;y) = 1$ donc toute suite de Cauchy est forcément stationnaire donc convergente.

Attention cependant, un espace peut avoir une topologie associée qui est la topologie discrète, sans pour autant que l'espace ne soit complet pour sa métrique. En effet, en prenant $X := \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ munit de la distance usuelle, alors toutes les parties de $X$ sont ouvertes : pour une partie $A$ quelconque non vide de $X$, et un $\frac{1}{n} \in A$, en prenant $r := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ puis $r' := \frac{r}{2}$, on a $\mathcal{B}\left(\frac{1}{n}; r'\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\} \subseteq A$ donc $A$ est ouverte. Pourtant, $X$ n'est pas complet puisque la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy mais ne converge pas.

**Remarque** :

Le fait que deux espaces soient homéomorphes n'assure pas l'équivalence entre être complet pour l'un et être complet pour l'autre ! Par exemple, $]-1;1[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes mais $\mathbb{R}$ est complet alors que $]-1;1[$ ne l'est pas.

**Proposition 119 (Uniforme continuité et espaces complets)**

Soient $(X;d)$ et $(Y;d')$ deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ un **homéomorphisme**.
Si $f$ est uniformément continue et si $Y$ est complet, alors $X$ est complet.

**Proposition 120 (Suites de Cauchy et distances uniformément équivalente**

Soient $X$ un ensemble, et $d$ et $d'$ deux distances sur $X$ qui sont **uniformément équivalentes**.

1. Une suite est de Cauchy dans $(X;d)$ si et seulement si elle est de Cauchy dans $(X;d')$.
2. $(X;d)$ est complet si et seulement si $(X;d')$ est complet.

**Remarque** :
La seule équivalence topologique entre deux distances ne suffit pas toujours. Par exemple pour $X :=]0;+\infty[$, avec $d_1(x;y) := |x-y|$ et $d_2(x;y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$, alors $d_1$ et $d_2$ sont topologiquement équivalentes mais pas uniformément équivalentes, et $(X;d_1)$ et $(X;d_2)$ n'ont pas les mêmes suites de Cauchy.

L'uniforme équivalence n'est cependant pas forcément nécessaire : pour $X = \mathbb{R}$, avec $d_1(x;y) := |x-y|$ et $d_2(x;y) := |x^3 - y^3|$, alors $d_1$ et $d_2$ sont topologiquement équivalentes mais pas uniformément équivalentes, et pourtant $(X;d_1)$ et $(X;d_2)$ ont les mêmes suites de Cauchy.

**Proposition 121 (Espaces métriques isométriques et complétude)**

Soient $(X;d)$ et $(Y;d')$ deux espaces métriques **isométriques**.
Alors $(X;d)$ est complet si et seulement si $(Y;d')$ est complet.

**Exemple** :
L'espace métrique $[-\infty;+\infty]$ est complet car isométrique à $[-1;1]$.

**Proposition 122 (Parties d'un espace métrique et complétude)**

Soient $(X;d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $X$.

1. Si $(A;d)$ est complet, alors $A$ est un fermé de $(X;d)$.
2. Réciproquement en supposant que $(X;d)$ est complet,
   si $A$ est un fermé de $(X;d)$, alors $(A;d)$ est complet.

3. Si $A$ est dense dans $(X; d)$ et si $A \neq X$, alors $(A; d)$ n'est pas complet.

## 6.3 Produits d'espaces complets

**Proposition 123 (Produit fini d'espaces complets)**

Soit $(X_1; d_1)$, $(X_2; d_2)$,...,$(X_p; d_p)$ des espaces métriques.

On munit $X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p$ d'une des distances usuelles (prop. 110 page 70).

Alors $X$ est complet si et seulement si pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $(X_i; d_i)$ est complet.

**Proposition 124 (Produit dénombrable d'espaces complets)**

Soit $\big((X_n; d_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques.

On munit $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ de la métrique $D_1(x; y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min\big(1; d_n(x_n; y_n)\big)$.

Alors $(X; D_1)$ est complet si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X_n; d_n)$ est complet.

**Proposition 125 (Complétude de R et de C)**

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets pour leur distance usuelle.

## 6.4 Grands résultats sur la complétude

**Théorème 18 (de Cantor sur la complétude)**

Soit $(X; d)$ un espace métrique.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(X; d)$ est complet.
2. Tout filet de Cauchy de $(X; d)$ est convergeant.
3. Pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides de $(X; d)$ qui est décroissante pour l'inclusion et telle que $\lim_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

**Remarque** :
L'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ est indispensable : par exemple les $[n; +\infty[$ sont fermés non vides de $\mathbb{R}$ et forment une suite décroissante, mais leur intersection est vide.

## Théorème 19 (de prolongement entre esp. métriques dans un complet)

Soient $(X; d)$ et $(Y; d')$ deux espaces métriques.
Soient $A$ une partie **dense** dans $X$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application **uniformément continue**.

Si $(Y; d')$ est complet, alors il existe une unique application $\widetilde{f} : X \longrightarrow Y$ qui prolonge $f$ et qui est continue. De plus, $\widetilde{f}$ est alors uniformément continue.

**Remarque** :
L'hypothèse d'uniforme continuité de $f$ est indispensable.
En effet, soient $X := [0; 1]$, $A := [0; 1[$ et $f := \left(\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1-x} \end{array}\right)$. Alors $A$ est dense dans $X$, $f$ est continue sur $A$ et $\mathbb{R}$ est complet, mais on ne peut pas prolonger $f$ à $X$ en une fonction continue.

## Théorème 20 (du point fixe)

Soit $(X; d)$ un espace métrique **complet**.
Soit $f : X \longrightarrow X$ une application **contractante** de rapport $k$.

1. $f$ admet un unique point fixe $a \in X$.
2. Pour tout $x \in X$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{\circ n}(x) = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, d\Big(a; f^{\circ n}(x)\Big) \leq \dfrac{k^n}{1-k} d\Big(x; f(x)\Big)$.

**Remarque** :
1. Si $k \geq 1$, alors le théorème précédent n'est plus vrai. En effet $X := \mathbb{N}$ munit de la distance usuelle est complet, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $f := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & kn+1 \end{array}\right)$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, $d\big(f(n); f(m)\big) = |(kn+1)-(km+1)| = |kn-km| = k|n-m| = kd(n; m) \leq kd(n; m)$ mais $f$ n'admet aucun point fixe.

2. Si $(X; d)$ n'est pas complet, alors le théorème précédent n'est pas vrai. En effet, $X := ]0; 1]$ n'est pas

complet pour la distance usuelle, et l'application $f := \left(\begin{array}{ccc} ]0;1] & \longrightarrow & ]0;1] \\ x & \longmapsto & \frac{x}{2} \end{array}\right)$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$, mais elle n'admet pas de point fixe.

3. Dans un espace métrique $(X;d)$, pour une application $f : X \longrightarrow X$ contractante, pour tout $x$ et $y$ dans $X$ tels que $x \neq y$, on a $d\big(f(x);f(y)\big) < d(x;y)$. Cependant, la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, pour $X := [0;+\infty[$ munit de la distance usuelle, (il est complet) et $f := \left(\begin{array}{ccc} [0;+\infty[ & \longrightarrow & [0;+\infty[ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}\right)$, pour tout $x$ et $y$ dans $[0;+\infty[$ tels que $x \neq y$, on a :

Comme $x \neq y$, on a $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ donc $0 < x^2+y^2$ donc $0 < \sqrt{x^2+y^2}$.
Donc $\sqrt{x^2y^2} + \sqrt{1} < \sqrt{x^2y^2} + \sqrt{1} + \sqrt{x^2+y^2}$.
Donc $xy + 1 < \sqrt{x^2y^2} + \sqrt{1} + \sqrt{x^2+y^2}$.
Or par concavité de la racine carrée, on a $\sqrt{x^2y^2} + \sqrt{1} + \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}$.
Donc $xy+1 < \sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}$.
Donc $2xy+2 < 2\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}$.
Donc $2 - 2\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1} < -2xy$.
Donc $x^2+y^2+2-2\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1} < x^2+y^2-2xy$.
Donc $x^2+y^2+2-2\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1} < (x-y)^2$.
Donc $x^2+y^2+2-2\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} < (x-y)^2$.
Donc $x^2+y^2+2-2\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1} < (x-y)^2$.
Donc $(x^2+1)+(y^2+1)-2\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1} < (x-y)^2$.
Donc $\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}\right)^2 < (x-y)^2$.
Donc $\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}\right| < |x-y|$.
Donc $d\left(f(x);f(y)\right) < d(x;y)$.

Cependant, $f$ n'admet aucun point fixe, donc n'est pas contractante.

## Proposition 126 (Composée p-ème contractante et point fixe)

Soient $(X;d)$ un espace métrique **complet** et $f : X \longrightarrow X$.
On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{\circ p} : X \longrightarrow X$ est **contractante**.
Alors :

1. L'application $f$ possède un unique point fixe $a$.
2. Pour tout $x \in X$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{\circ n} = a$.

**Remarque** :

Une application contractante étant lipschitzienne, elle est continue. Cependant, dans la proposition précédente, $f$ n'a pas de raison d'être continue, on demande juste à $f^{\circ p}$ d'être contractante donc continue. Par exemple l'application $f := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right)$ n'est pas continue, mais $f \circ f$ est la fonction nulle donc est contractante. L'unique point fixe de $f$ est alors $0$.

## 6.5 Applications bornées

**Définition 46 (Application bornée)**

Soient $X$ un ensemble, et $(Y; d)$ un espace métrique. Soit $f : X \longrightarrow Y$.
On dit que $f$ est **bornée** si et seulement si $f^{\rightarrow}(X)$ est bornée.

**Notation**

Soient $X$ un ensemble et $(Y; d)$ un espace métrique.

1. On notera $\mathcal{B}(X \to Y)$ l'ensemble des applications bornées de $X$ dans $Y$.
2. On suppose ici de plus que $X$ est un espace topologique.
   (a) On a déjà la notation $\mathcal{C}(X \to Y)$ pour l'ensemble des applications continues de $X$ dans $Y$.
   (b) On notera $\mathcal{C}_b(X \to Y)$ l'ensemble des applications continues et bornées de $X$ dans $Y$.

**Proposition 127 (Topologie des ensembles de fonctions)**

Soient $X$ un ensemble et $(Y; d)$ un espace métrique.

1. Pour $f$ et $g$ dans $\mathcal{B}(X \to Y)$, on pose $d_\infty(f; g) = \sup\limits_{x \in X} d\big(f(x); g(x)\big)$.
   Alors $d_\infty$ est une distance sur $\mathcal{B}(X \to Y)$, appelée **distance de la convergence uniforme**.
2. Si $(Y; d)$ est complet, alors $\big(\mathcal{B}(X \to Y); d_\infty\big)$ est complet.
3. On suppose ici que $X$ est un espace topologique.
   (a) $\mathcal{C}_b(X \to Y)$ est un fermé de $\big(\mathcal{B}(X \to Y); d_\infty\big)$.
   (b) Si $(Y; d)$ est complet, alors $\big(\mathcal{C}_b(X \to Y); d_\infty\big)$ est complet.
4. Les espaces métriques $\big(\mathcal{C}([0;1] \to \mathbb{R}); d_\infty\big)$ et $\big(\mathcal{C}([0;1] \to \mathbb{C}); d_\infty\big)$ sont complets.

# 7 Complétion des espaces métriques

## Théorème 21 (Complétion d'un espace métrique)

Soit $(X; d)$ un espace métrique.

1. Il existe un espace métrique complet $\left(\widehat{X}; \widehat{d}\right)$ et il existe une application isométrique $i : X \longrightarrow \widehat{X}$ telle que $i^{\rightarrow}(X)$ est dense dans $\widehat{X}$.

2. Pour tout espace métrique complet $(Y; d')$, s'il existe une application isométrique $j : X \longrightarrow Y$ telle que $j^{\rightarrow}(X)$ soit dense dans $Y$, alors il existe une unique application continue $\varphi : \widehat{X} \longrightarrow Y$ telle que $j = \varphi \circ i$, c'est-à-dire qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & \widehat{X} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, $\varphi$ est alors une isométrie de $\widehat{X}$ sur $Y$. Ainsi, $\left(\widehat{X}; \widehat{d}\right)$ et $(Y; d')$ sont isométriques.

### Notation

Désormais, étant donné un espace métrique $(X; d)$, on notera $\left(\widehat{X}; \widehat{d}\right)$ un de ces espaces métriques complets tel qu'il existe une application isométrique $i : X \longrightarrow \widehat{X}$ telle que $i^{\rightarrow}(X)$ est dense dans $\widehat{X}$. Comme il y a unicité à isométrie près, pour les propriétés qui nous intéressent, le choix d'un représentant importe peu. $i$ sera alors appelée une **isométrie de complétion**.

## Proposition 128 (Prolongement au départ et à l'arrivée)

Soient $(X; d)$ et $(Y; d')$ deux espaces métriques, et $f : (X; d) \longrightarrow (Y; d')$.
On note $i : (X; d) \longrightarrow \left(\widehat{X}; \widehat{d}\right)$ et $j : (Y; d') \longrightarrow \left(\widehat{Y}; \widehat{d'}\right)$ des isométries de complétion.

Si $f$ est uniformément continue, alors il existe une unique application continue $\widehat{f} : \left(\widehat{X}; \widehat{d}\right) \longrightarrow \left(\widehat{Y}; \widehat{d'}\right)$ telle que $\widehat{f} \circ i = j \circ f$, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "j"] \\ \widehat{X} \arrow[r, "\widehat{f}"] & \widehat{Y} \end{tikzcd}$$

Cette application est alors uniformément continue.

**Proposition 129 (Complétion d'espaces uniformément homéomorphes)**

Soient $(X;d)$ et $(Y;d')$ deux espaces métriques.

Si $f:(X;d)\longrightarrow(Y;d')$ est une application bijective uniformément continue dont la réciproque est uniformément continue, alors $\widehat{f}:\left(\widehat{X};\widehat{d}\right)\longrightarrow\left(\widehat{Y};\widehat{d'}\right)$ est une application bijective uniformément continue dont la réciproque est uniformément continue, et on a alors $\widehat{f^{-1}}=\left(\widehat{f}\right)^{-1}$.

Ainsi si $(X;d)$ et $(Y;d')$ sont uniformément homéomorphes, alors $\left(\widehat{X};\widehat{d}\right)$ et $\left(\widehat{Y};\widehat{d'}\right)$ sont uniformément homéomorphes.

En particulier, des distances uniformément équivalentes donnent lieu à des complétés uniformément homéomorphes.

**Exemple** :

Deux distances topologiquement équivalentes n'engendrent pas forcément deux complétés qui sont homéomorphes ! Par exemple si $X:=]-1;1[$ munit de $d$ la distance usuelle, alors $\big([-1;1];d\big)$ est un complété de $(X;d)$. D'autre part, $(X;d)$ est homéomorphe à $(\mathbb{R};d)$ via l'application $f:=\begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1-|x|}\end{pmatrix}$. Si l'on considère $d'$ la distance sur $X$ définie par $d'(x;y)=d\big(f(x);f(y)\big)$, alors $d$ et $d'$ sont topologiquement équivalentes. $f$ est alors par définition une isométrie de $(X;d')$ dans $(\mathbb{R};d)$. Or $(\mathbb{R};d)$ est complet, ce qui fait de lui un complété de $(X;d')$. Mais $\big([-1;1];d\big)$ et $(\mathbb{R};d)$ ne sont pas homéomorphes !

**Proposition 130 (Complété et adhérence)**

Soit $(X;d)$ un espace métrique complet. Soit $A$ une partie de $X$.

Alors $\left(\overline{A};d\right)$ est un complété de $(A;d)$.

**Proposition 131 (Complété des fonctions réelles à support compact)**

Soit $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R};\mathbb{C}\}$.

Notons $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}\to\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{K}$ et qui convergent vers $0$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Notons $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}\to\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{K}$ à « *support compact* », c'est-à-dire qui valent $0$ en dehors d'un fermé borné de $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}\to\mathbb{K})$ de la distance de la convergence uniforme $d_\infty$, décrite lors de la proposition 127 page 82.

On a alors :

1. $\mathcal{C}_c(\mathbb{R} \to \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{C}_0(\mathbb{R} \to \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{C}_b(\mathbb{R} \to \mathbb{K})$.
2. $\mathcal{C}_0(\mathbb{R} \to \mathbb{K})$ est un fermé de $\Big(\mathcal{C}_b(\mathbb{R} \to \mathbb{K})\,;d_\infty\Big)$, donc $\Big(\mathcal{C}_0(\mathbb{R} \to \mathbb{K}); d_\infty\Big)$ est complet.
3. $\mathcal{C}_c(\mathbb{R} \to \mathbb{K})$ est dense dans $\Big(\mathcal{C}_0(\mathbb{R} \to \mathbb{K}); d_\infty\Big)$, donc $\Big(\mathcal{C}_0(\mathbb{R} \to \mathbb{K}); d_\infty\Big)$ est un complété de $\Big(\mathcal{C}_c(\mathbb{R} \to \mathbb{K}); d_\infty\Big)$.

# 8 Espaces de Baire

**Proposition 132 (Caractérisations d'un espace de Baire)**

Soit $X$ un espace topologique.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de $X$.
   Si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors la réunion des intérieurs $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F_n}$ est dense dans $X$.
2. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de $X$.
   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le fermé $F_n$ est d'intérieur vide, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.
3. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de $X$.
   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ouvert $U_n$ est dense dans $X$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans $X$.

**Définition 47 (Espace de Baire)**

Un espace topologique est dit **de Baire** si et seulement s'il vérifie une des trois assertions équivalentes de la proposition précédente.

**Exemple** :

1. Soit $X$ un ensemble munit de la topologie discrète. Alors $X$ est de Baire. En effet, toute partie y est alors ouverte, donc est son propre intérieur. Ainsi, si l'on a une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés d'intérieurs vides, cela veut dire qu'ils sont tous vides, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est vide et donc aussi d'intérieur vide.

2. $\mathbb{Q}$ munit de la topologie usuelle n'est pas de Baire. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on peut l'écrire $\mathbb{Q} = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et donc $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{r_n\}$. Comme $\mathbb{Q}$ est métrique, il est séparé donc tous les singletons sont des fermés. Les singletons ne sont pas ouverts dans $\mathbb{Q}$ (puisque tout boule va forcément comporter d'autres éléments que celui du singleton), ce qui force les singletons à être d'intérieur vides (le seul ouvert inclus dans un singleton). Ainsi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\{r_n\}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varnothing = \varnothing$, qui n'est donc pas dense dans $\mathbb{Q}$. Autrement dit, $\mathbb{Q}$ est une réunion dénombrable de fermés mais la réunion de leurs intérieurs n'est pas dense dans $\mathbb{Q}$. Cela contrevient à la première assertion caractéristique des espaces de Baire.

### Proposition 133 (Ouvert d'un espace de Baire)

Soit $X$ un espace de Baire. Soit $A$ une partie de $X$, que l'on munit de la topologie induite.
Si $A$ est un ouvert de $X$, alors $A$ est un espace de Baire.

### Théorème 22 (de Baire)

Un espace métrique **complet** est un espace de Baire.

### Théorème 23 (Espace de Baire, métrique et ensemble de continuité)

Soient $X$ un espace de Baire et $(Y\,;d)$ un espace métrique. Soit $f : X \longrightarrow Y$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues $X \longrightarrow Y$ telle que $\forall x \in X,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
Soit $C := \{x \in X \mid f \text{ est continue en } x\}$.

Alors $C$ est dense dans $X$.

## 9 Écarts

### Définition 48 (Écart)

Soit $X$ un ensemble. Soit $e : X^2 \longrightarrow [0; +\infty]$.
On dit que $e$ est un **écart** sur $X$ si et seulement si les 3 assertions suivantes sont vérifiées :

1. $\forall x \in X, e(x; x) = 0$
2. $\forall x \in X, \forall y \in X, e(x; y) = e(y; x)$
3. $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, e(x; y) \leq e(x; z) + e(z; y)$.

**Remarque** :
Les seules différences entre un écart et une distance sont le fait qu'un écart peut prendre la valeur $+\infty$, et que l'on n'impose pas pour un écart de vérifie $e(x; y) = 0 \implies x = y$.

### Définition 49 (Écart fini et écart séparé)

Soient $X$ un ensemble et $e$ un écart sur $X$.

1. On dit que $e$ est **fini** si et seulement si $\forall x \in X, e(x) \neq +\infty$.
2. On dit que $e$ est **séparé** si et seulement si $\forall x \in X, \forall y \in X, \Big(e(x; y) = 0 \implies x = y\Big)$.

**Exemple** :
1. Une distance sur un ensemble $X$ est un écart sur $X$ qui est fini et séparé.

2. Soient $X$ un ensemble, $(Y; d)$ un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$.
Pour tout $x$ et $y$ dans $X$, posons $e(x; y) := d\big(f(x); f(y)\big)$. Alors $e$ est un écart fini sur $X$, et $e$ est séparé si et seulement si $f$ est injective.

3. En particulier pour tout ensemble $X$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}\}$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, en posant pour tout $x \in X$ et $y \in X$, $e(x; y) := |f(x) - f(y)|$, alors $e$ est un écart fini qui est séparé si et seulement si $f$ est injective.

**Notation**

Étant donnés $X$ un ensemble, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}\}$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$,

on notera $e_f$ l'écart $\begin{array}{ccc} X^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x; y) & \longmapsto & |f(x) - f(y)| \end{array}$

## Proposition 134 (Borne supérieure d'une famille d'écarts)

Soit $X$ un ensemble.

1. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'écarts sur $X$.
   Pour tout $x$ et $y$ dans $X$, posons $e(x;y) := \sup\limits_{i\in I} e_i(x;y)$.
   Alors $e$ est un écart sur $X$.

2. Soit $d$ une distance sur $X$.
   Alors il existe $A$ un ensemble d'applications $X \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que
   pour tout $x$ et $y$ dans $X$, on a $d(x;y) = \sup\limits_{f\in A} e_f(x;y)$.

## Définition 50 (Boule ouverte d'un écart)

Soient $X$ un ensemble, et $e$ un écart sur $X$.
Soient $x \in X$ et $r \in [0;+\infty]$.
On appelle **boule ouverte** pour $e$ l'ensemble $\mathcal{B}_e(x;r) := \{y \in X \mid e(x;y) < r\}$.

## Proposition 135 (Justification de la topologie associée à un écart)

Soient $X$ un ensemble et $e$ un écart sur $X$.
Soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_e(x;r) \mid x \in X \text{ et } r \in [0;+\infty]\}$.

1. Pour tout $x \in X$, il existe $r \in ]0;+\infty]$ tel que $x \in \mathcal{B}_e(x;r)$.
   Ainsi, $\mathcal{B}$ vérifie la 1ère assertion **(B1)** des bases d'ouverts.

2. Soient $a \in X$ et $r \in ]0;+\infty]$.
   Alors pour tout $x \in \mathcal{B}_e(a;r)$, en posant $\rho := r - e(a;x)$ on a $\mathcal{B}_e(x;\rho) \subseteq \mathcal{B}_e(a;r)$.

3. Soient $a \in X$, $b \in X$, $r_1 \in [0;+\infty]$ et $r_2 \in [0;+\infty]$.
   Alors pour tout $x \in \mathcal{B}_e(a;r_1) \cap \mathcal{B}_e(b;r_2)$, il existe $\rho \in ]0;+\infty]$ tel que
   $\mathcal{B}_e(x;\rho) \subseteq \mathcal{B}_e(a;r_1) \cap \mathcal{B}_e(b;r_2)$.
   Ainsi, $\mathcal{B}$ vérifie la 2ème assertion **(B2)** des bases d'ouverts.

**Définition 51 (Topologie associée à un écart)**

Soient $X$ un ensemble et $e$ un écart sur $X$.
D'après la proposition précédente, l'ensemble $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_e(x;r) \mid x \in X \text{ et } r \in [0;+\infty]\}$ vérifie les assertions **(B1)** et **(B2)** des bases d'ouverts. Il existe donc une unique topologie $\mathcal{T}$ sur $X$ telle que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}$.

Autrement dit, une partie $U$ de $X$ est un ouvert de $\mathcal{T}$
si et seulement si $\forall x \in U, \exists r \in ]0;+\infty], \mathcal{B}_e(x;r) \subseteq U$.

**Exemple** :
Soit $X$ un ensemble.
1. Si pour tout $x$ et $y$ de $X$, on pose $e(x;y) = 0$, alors $e$ est un écart sur $X$ et la topologie associée à cet écart est la topologie grossière $\{\varnothing; X\}$.
2. Si pour tout $x$ et $y$ de $X$, on pose $e(x;y) = 0$ si $x = y$ et $e(x;y) = +\infty$ si $x \neq y$, alors $e$ est un écart sur $X$ et la topologie associée à cet écart est la topologie discrète $\mathscr{P}(X)$.

**Proposition 136 (Écart, espace séparé et limites de suites)**

Soient $X$ un ensemble et $e$ un écart sur $X$.
Soit $\mathcal{T}_e$ la topologie sur $X$ associée à $e$.

1. $\mathcal{T}_e$ est séparée si et seulement si $e$ est séparé.
2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $X$, et $x \in X$.
   $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ dans $\mathcal{T}_e$ si et seulement si $\big(e(x_n;x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

**Proposition 137 (Distance définie comme minimum entre un écart et 1)**

Soient $X$ un ensemble et $e$ un écart **séparé** sur $X$.
Pour tout $x$ et $y$ dans $X$, on pose $d(x;y) := \min\big(e(x;y);1\big)$.

1. $d$ est une distance sur $X$.
2. La topologie associée à $d$ est égale à la topologie associée à $e$.

## Proposition 138 (Écart et distance de la convergence uniforme)

Soient $X$ un ensemble et $(Y; d')$ un espace métrique.
Pour $f$ et $g$ deux applications $X \longrightarrow Y$, on pose $e(f; g) := \sup_{x \in X} d'\big(f(x); g(x)\big) \in [0; +\infty]$.

1. $e$ est un écart séparé sur $\mathcal{A}(X \to Y)$.
2. $d := \min(e; 1)$ est une distance sur $\mathcal{A}(X \to Y)$.
3. La restriction de $d$ à $\mathcal{B}(X \to Y)$ est uniformément équivalente à $d_\infty$ la distance de la convergence uniforme $d_\infty(f; g) = \sup_{x \in X} d'\big(f(x); g(x)\big)$.

## Proposition 139 (Relation d'équivalence associée à un écart)

Soient $X$ un ensemble et $e$ un écart sur $X$.
Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $X$ définie par $\forall x \in X, \forall y \in X, \Big(x \mathcal{R} y \iff e(x; y) = 0\Big)$.

1. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $X$.
2. Il existe un écart séparé $\overline{e}$ sur $X/\mathcal{R}$ tel que $\forall x \in X, \forall y \in X, \overline{e}\big(\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x); \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x)\big) = e(x; y)$.

Chapitre 3

# Espaces compacts

## 1 Espaces compacts

### 1.1 Définition, caractérisations et exemples

**Définition 52 (Recouvrement d'ouverts)**

Soit $X$ un espace topologique. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $X$.
On dit que $(U_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement ouvert** de $X$ si et seulement si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $X$ et pour tout $i \in I, U_i$ est un ouvert de $X$.

**Définition 53 (Espaces quasi-compacts)**

Soit $X$ un espace topologique.

1. On dit que $X$ est **quasi-compact** si et seulement si pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de $X$, il existe une partie finie $J$ de $I$ telle que $(U_j)_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de $X$.
2. On dit que $X$ est **compact** si et seulement si $X$ est quasi-compact et séparé.

**Exemple** :
L'espace $\mathbb{R}$ munit de la topologie usuelle n'est pas quasi-compact : en effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n := ]-n; n[$, alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, mais il n'est pas possible d'en extraire un sous-recouvrement fini de $\mathbb{R}$.

**Proposition 140 (Propriétés caractéristiques des quasi-compacts)**

Soit $X$ un espace topologique.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est quasi-compact.

2. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de $X$.
   Si $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \varnothing$, alors il existe une partie finie non vide $J$ de $I$ telle que $\bigcap\limits_{j\in J} F_j = \varnothing$.
3. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de $X$.
   Si pour toute partie finie non vide $J$ de $I$, on a $\bigcap\limits_{j\in J} F_j \neq \varnothing$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \varnothing$.

## Définition 54 (Parties quasi-compactes et relativement quasi-compacts)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique et $A$ une partie de $X$.
Soit $\mathcal{T}_A$ la topologie sur $A$ induite par $\mathcal{T}$.

1. On dit que $A$ est un **quasi-compact** de $(X;\mathcal{T})$ si et seulement si $(A;\mathcal{T}_A)$ est quasi-compact.
2. On dit que $A$ est **relativement quasi-compact** dans $(X;\mathcal{T})$ si et seulement si $\overline{A}$ est un quasi-compact de $(X;\mathcal{T})$.
3. On dit que $A$ est un **compact** de $(X;\mathcal{T})$ si et seulement si $(A;\mathcal{T}_A)$ est compact.
4. On dit que $A$ est **relativement compact** dans $(X;\mathcal{T})$ si et seulement si $\overline{A}$ est un compact de $(X;\mathcal{T})$.

## Proposition 141 (Caractérisation des parties quasi-compactes)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique et $A$ une partie de $X$.
Soit $\mathcal{T}_A$ la topologie sur $A$ induite par $\mathcal{T}$.

1. $A$ est un quasi-compact de $(X;\mathcal{T})$ si et seulement si pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $(X;\mathcal{T})$ telle que $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, il existe $J$ une partie finie de $I$ telle que $A \subseteq \bigcup\limits_{j\in J} U_j$.
2. Soient $B$ une partie de $A$.
   $B$ est un quasi-compact de $(X;\mathcal{T})$ si et seulement si $B$ est un quasi-compact de $(A;\mathcal{T}_A)$.

## Proposition 142 (Quasi-compacts et ensembles finis)

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique.

1. Soit $A$ une partie de $X$.
   Si $A$ est finie, alors $A$ est un quasi-compact de $(X;\mathcal{T})$.
2. Supposons ici que $\mathcal{T}$ est la topologie discrète $\mathscr{P}(X)$.

Alors $(X; \mathscr{P}(X))$ est quasi-compact si et seulement si $X$ est fini.

**Proposition 143 (L'image d'une suite convergente + sa limite est q-comp.)**

Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique séparé.
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $X$, et $x \in X$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ dans $(X; \mathcal{T})$, alors $\{x\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un quasi-compact de $(X; \mathcal{T})$.

**Proposition 144 (Espace homéomorphe à un compact)**

1. L'image par une application continue d'un quasi-compact est un quasi-compact.
2. En particulier, tout espace homéomorphe à un quasi-compact est quasi-compact.

## 1.2 Compacts et fermés

**Théorème 24 (Parties quasi-compactes et parties fermées)**

Soient $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique et $A$ une partie de $X$.

1. Supposons que $(X; \mathcal{T})$ est séparé.
   Si $A$ est un quasi-compact de $(X; \mathcal{T})$, alors $A$ est un fermé de $(X; \mathcal{T})$.
2. Supposons que $(X; \mathcal{T})$ est quasi-compact.
   Si $A$ est un fermé de $(X; \mathcal{T})$, alors $A$ est un quasi-compact de $(X; \mathcal{T})$.
3. Supposons que $(X; \mathcal{T})$ est compact.
   Alors $A$ est un quasi-compact de $(X; \mathcal{T})$ si et seulement si $A$ est un fermé de $(X; \mathcal{T})$.

**Remarque** :
Comme être compact, c'est être quasi-compact et séparé, et que les parties d'un espace séparée sont-elles même séparées d'après la prop. 56 p. 36, on peut reformuler les assertions 1 et 3 sous la forme :

1. Supposons que $(X; \mathcal{T})$ est séparé.
   Si $A$ est un **compact** de $(X; \mathcal{T})$, alors $A$ est un fermé de $(X; \mathcal{T})$.
3. Supposons que $(X; \mathcal{T})$ est compact.
   Alors $A$ est un **compact** de $(X; \mathcal{T})$ si et seulement si $A$ est un fermé de $(X; \mathcal{T})$.

**Proposition 145 (Intersection, réunions, fermés et compacts)**

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique.

1. Si $K$ est une partie quasi-compacte de $(X;\mathcal{T})$, et si $F$ est un fermé de $(X;\mathcal{T})$, alors $K\cap F$ est un quasi-compact de $(X;\mathcal{T})$.
2. Soient $F_1;\cdots;F_n$ des fermés de $(X;\mathcal{T})$.
   Alors $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ est un quasi-compact de $(X;\mathcal{T})$ si et seulement si pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, $F_i$ est un quasi-compact de $(X;\mathcal{T})$.
3. Supposons que $(X;\mathcal{T})$ est séparé. Si $(K_i)_{i\in I}$ est une famille de parties compactes de $(X;\mathcal{T})$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} K_i$ est un compact de $(X;\mathcal{T})$.

## 1.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

**Théorème 25 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**

Soit $X$ un espace **quasi-compact**.

1. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante pour l'inclusion de **fermés non vides** de $X$.
   Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide.
2. Toute suite à valeurs dans $X$ admet au moins une valeur d'adhérence.
3. Supposons ici $X$ **séparé donc compact**.
   Une suite à valeurs dans $X$ est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence, qui est alors sa limite.
4. Toute partie infinie de $X$ admet au moins un point d'accumulation.

**Remarque** :

• L'hypothèse de (quasi-)compacité est indispensable !
En effet, la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $a_{2n}=2n$ et $a_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$ admet $0$ pour unique valeur d'adhérence, mais ne converge pas pour autant.

• Ce n'est pas parce que toute partie infinie d'un espace admet un point d'accumulation que l'espace est (quasi-)compact !
Par exemple pour $\mathbb{N}$ muni de la topologie usuelle, et $\{0;1\}$ muni de la topologie grossière, on pose $X:=\mathbb{N}\times\{0;1\}$ muni de la topologie produit. Toute partie non vide de $X$ admet alors au moins un point d'accumulation.

En effet, soit $A$ une partie non vide de $X$, et $a\in A$.

Comme $a \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0; 1\}$ tel que $a = (n; k)$.
Posons $x := (n; 1 - k)$, on a donc $x \in X$ et $x \neq a$.

Soit $V$ un voisinage de $x$ dans $X$.
Par définition de la topologie produit sur $X$, il existe $U$ un ouvert de $\mathbb{N}$ et $W$ un ouvert de $\{0; 1\}$ tels que $x \in U \times W \subseteq V$. On a donc $(n; 1 - k) \in U \times W$ et donc $n \in U$.
Mais comme $\{0; 1\}$ est munit de la topologie grossière, on a nécessairement $W = \{0; 1\}$, si bien que $k \in W$, donc $a = (n; k) \in U \times W$ et donc $a \in V$.

Ainsi, pour tout voisinage $V$ de $x$ dans $X$, il existe $b \in A$ (en prenant $b := a$) tel que $b \neq x$ et $b \in V$.
Donc $x$ est un point d'accumulation de $A$.

Cependant, $X$ n'est pas quasi-compact. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n := \{n\} \times \{0; 1\}$. C'est un ouvert de $X$ comme produit d'un ouvert de $\mathbb{N}$ par un ouvert de $\{0; 1\}$. On a alors $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de $X$, mais on ne peut pas pour autant en extraire un sous-recouvrement fini.

## 1.4 Séparation de parties et compact

**Proposition 146 (Un séparé sépare les compacts)**

Soit $X$ un espace topologique séparé.
Soient $A$ et $B$ des parties compactes de $X$ telles que $A \cap B = \varnothing$.

Alors il existe $U$ et $V$ deux ouverts de $X$ tels que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ et $U \cap V = \varnothing$.

**Proposition 147 (Un compact est normal)**

Un espace compact est un espace normal.

**Proposition 148 (Séparation de parties fermées et compactes)**

Soit $X$ un espace topologique séparé.
Soient $F$ une partie fermée de $X$ et $K$ une partie compacte de $X$ telles que $K \cap F = \varnothing$.

1. Si $X$ est régulier, alors il existe deux ouverts $U$ et $V$ de $X$ tels que $K \subseteq U$, $F \subseteq V$ et $U \cap V = \varnothing$.
2. Si $X$ est complètement régulier, alors il existe une application continue $f : X \longrightarrow [0; 1]$ telle que $\forall x \in K, f(x) = 0$ et $\forall x \in F, f(x) = 1$.

**Proposition 149 (de Wallace)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit.
Soient $A$ un quasi-compact de $X$ et $B$ un quasi-compact de $Y$.
Soit $W$ un ouvert de $X \times Y$ tel que $A \times B \subseteq W$.

Alors il existe $U$ un ouvert de $X$ et $V$ un ouvert de $Y$ tels que $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$.

## 1.5 Espace métrique compact ; exemple de R

**Proposition 150 (Parties compactes d'un espace métrisable)**

Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique métrisable.
Soit $d$ une distance sur $X$ telle que $\mathcal{T}$ est la topologie sur $X$ associée à $d$.
Soit $A$ une partie de $X$.

Si $A$ est un compact de $(X; \mathcal{T})$, alors $A$ est bornée dans $(X; d)$.

**Théorème 26 (de Heine sur les fermés bornés de R)**

Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est un compact.

**Proposition 151 (Les compacts de R sont ses parties fermées bornées)**

Les parties de $\mathbb{R}$ qui sont compactes sont ses parties fermées bornées.

**Exemple** :
Comme $\overline{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $[-1; 1]$, $\overline{\mathbb{R}}$ est compact d'après la prop. 144 p. 95.

**Proposition 152 (Les compacts de R contiennent leurs bornes)**

Soit $C$ un compact **non vide** de $\mathbb{R}$.
Alors $C$ admet une borne inférieure et une borne supérieure, et celles-ci appartiennent à $C$.

## 1.6 Espaces métriques compacts et précompacts

**Définition 55 (Espace métrique précompact)**

Soit $(X;d)$ un espace métrique.
On dit que $(X;d)$ est **précompact** si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\{x_1;\cdots;x_n\}$ une partie finie de $X$ telle que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_d(x_i;\varepsilon)$.

**Exemple** :
Un espace métrique compact est nécessairement précompact. En effet, soient $(X;d)$ un espace métrique compact et $\varepsilon > 0$. On a alors $X = \bigcup_{x\in X}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in X}\mathcal{B}_d(x;\varepsilon) \subseteq X$ donc $X = \bigcup_{x\in X}\mathcal{B}_d(x;\varepsilon)$. Donc $\left(\mathcal{B}_d(x;\varepsilon)\right)_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de $X$ : il existe donc $\{x_1;\cdots;x_n\}$ une partie finie de $X$ telle que $X = \bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_d(x_i;\varepsilon)$.

**Proposition 153 (Propriétés des précompacts et des parties précompacte**

Soient $(X;d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $X$.

1. $(X;d)$ est précompact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\{x_1;\cdots;x_n\}$ une partie finie de $X$ et $\varepsilon_1;\cdots;\varepsilon_n$ des éléments de $]0;\varepsilon]$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_d(x_i;\varepsilon_i)$.
2. Si $(X;d)$ est précompact, alors $(A;d)$ est précompact.
3. Si $(A;d)$ est précompact, alors $\left(\overline{A};d\right)$ est précompact.

**Proposition 154 (Les précompacts sont séparables)**

Soit $(X;d)$ un espace métrique.
Si $(X;d)$ est précompact, alors $(X;d)$ est séparable.
En particulier, si $(X;d)$ est compact, alors $(X;d)$ est séparable.

**Proposition 155 (Lemme de Lebesgue)**

Soit $(X;d)$ un espace métrique.
Supposons que toute suite à valeurs dans $X$ admet une sous-suite convergente dans $(X;d)$.
Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $(X;d)$.

Alors il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in X, \exists i \in I, \mathcal{B}_d(x; r) \subseteq U_i$.

### Définition 56 (Nombre de Lebesgue d'un recouvrement ouvert)

Soit $(X; d)$ un espace métrique.

Supposons que toute suite à valeurs dans $X$ admet une sous-suite convergente dans $(X; d)$.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $(X; d)$.

On appelle **nombre de Lebesgue** de $(U_i)_{i \in I}$ tout $r > 0$ tel que $\forall x \in X, \exists i \in I, \mathcal{B}_d(x; r) \subseteq U_i$.

### Théorème 27 (Caractérisation des espaces métriques compacts)

Soit $(X; d)$ un espace métrique.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(X; d)$ est compact.
2. $(X; d)$ est précompact et complet.
3. Toute partie infinie de $X$ admet un point d'accumulation dans $(X; d)$.
4. Toute suite à valeurs dans $X$ admet une sous-suite convergeante dans $(X; d)$.
5. Pour toute suite décroissante pour l'inclusion $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de **fermés non vides** de $(X; d)$, on a $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

### Proposition 156 (Parties relativement compactes d'un espace métrique)

Soient $(X; d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $X$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ est relativement compact dans $(X; d)$.
2. Il existe $B$ une partie de $X$ telle que $(B; d)$ est compacte et $A \subseteq B$.
3. Toute suite à valeurs dans $A$ possède une sous-suite convergente dans $(X; d)$.

## Proposition 157 (Lien entre précompacts et relativement compacts)

Soient $(X; d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $X$.

1. Si $(A; d)$ est relativement compact, alors $(A; d)$ est précompact.
2. Réciproquement, supposons $(X; d)$ complet.
   Si $(A; d)$ est précompact, alors $(A; d)$ est relativement compact.

## Théorème 28 (Caractérisation de la compacité par les filets)

Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(X; \mathcal{T})$ est compact.
2. Tout filet $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ à valeurs dans $X$ admet un sous-filet $\left(x_{\varphi(\mu)}\right)_{\mu\in\Gamma}$ qui converge dans $(X; \mathcal{T})$.
   Autrement dit, tout filet $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ à valeurs dans $X$ admet une valeur d'adhérence dans $(X; \mathcal{T})$ d'après la prop. 76 p. 48.

## 2 Applications continues et espaces compacts

**Théorème 29 (Applications continues et espaces compacts)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, avec $Y$ **séparé**.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application **continue**.

On a alors :

1. L'image par $f$ d'un compact est un compact.
2. Si $X$ est quasi-compact, alors $f$ est fermée.
3. Si $X$ est quasi-compact et si $f$ est bijective, alors $f$ est un homéomorphisme.

**Exemple** :

a. Pour $d$ et $d'$ deux distances topologiquement équivalentes sur un espace $X$, $(X; d)$ est compact si et seulement si $(X; d')$ est compact.

b. Si $f$ est une application injective continue d'un espace compact $X$ dans un espace séparé, alors $f$ est un homéomorphisme de $X$ dans $f^{\rightarrow}(X)$.

c. Considérons $\mathbb{R}$ munit de la topologie usuelle, et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munit de la topologie quotient.
Considérons $\mathbb{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1 \right\}$ que l'on munit de la topologie induite par $\mathbb{C}$.
Considérons l'application $f := \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S} \\ t & \longmapsto & e^{2i\pi t} \end{pmatrix}$.

$f$ est alors continue et surjective dans $\mathbb{S}$.
Pour tout $t$ et $s$ dans $\mathbb{R}$, on a $t - s \in \mathbb{Z} \iff e^{2i\pi(t-s)} = 1 \iff e^{2i\pi t} = e^{2i\pi s} \iff f(t) = f(s)$.
Donc la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ associée à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est la relation associée à $f$.
Il existe donc une unique application injective $\overline{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}$ telle que $f = \overline{f} \circ p$ où $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est la projection canonique.
Comme $f$ est surjective dans $\mathbb{S}$, $\overline{f}$ est surjective dans $\mathbb{S}$, si bien que $\overline{f}$ est bijective dans $\mathbb{S}$.
Comme $f$ est continue, $\overline{f}$ est continue d'après la prop. 50 p. 33.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0; 1[$ tels que $x = n + r$ (parties entière et factionnaire), et donc $p(x) = p(r)$.
Donc $p^{\rightarrow}\big([0; 1]\big) = p^{\rightarrow}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
Or $p$ est continue car $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est munit de la topologie quotient.
De plus $[0; 1]$ est compact d'après la prop. 151 p. 98 car est un fermé borné de $\mathbb{R}$.

Donc $p^{\rightarrow}\big([0;1]\big)$ est compact d'après le théorème 29 page 102.
Donc $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact.

Comme $\mathbb{C}$ est séparé, $\mathbb{S}$ est séparé d'après la prop. 56 p. 36.
Ainsi, $\overline{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}$ est une application bijective continue, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact et $\mathbb{S}$ est séparé.
Donc $\overline{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}$ est un homéomorphisme d'après le théorème 29 page 102.

**Proposition 158 (Compact et adhérence de l'image continue)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques.
Supposons que $X$ est **quasi-compact** et que $Y$ est **séparé**.
Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application **continue**.

Pour toute partie $A$ de $X$, on a $f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{\rightarrow}(A)}$.

**Proposition 159 (Égalité entre une topologie quasi-compact et une séparé**

Soient $X$ un ensemble, et $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur $X$ telles que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.
Si $(X;\mathcal{T}_1)$ est séparé et $(X;\mathcal{T}_2)$ est quasi-compact, alors $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

**Théorème 30 (des bornes atteintes dans R)**

Soient $X$ un espace topologique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application **continue**.
Si $X$ est quasi-compact, alors $f$ est bornée et atteint ses bornes.

**Théorème 31 (de Heine)**

Soient $(X;d)$ et $(Y;d')$ deux espaces métriques et $f : (X;d) \longrightarrow (Y;d')$ une application **continue**.
Si $(X;d)$ est compact, alors $f$ est uniformément continue.

**Exemple** :
Soit $(X;d)$ un espace métrique compact. Alors toute distance sur $X$ topologiquement équivalente à $d$ est donc en fait uniformément équivalente à $d$.

**Théorème 32 (de Kuratowski)**

Soit $X$ un espace topologique **séparé**.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est compact.
2. Pour tout espace topologique $Y$, la projection canonique $\pi : X \times Y \twoheadrightarrow Y$ est une application fermé.
3. Pour tout espace topologique normal $Y$, la projection canonique $\pi : X \times Y \twoheadrightarrow Y$ est une application fermé.

# 3 Produits d'espaces compacts

**Théorème 33 (Produit de deux espaces quasi-compacts et compacts)**

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques **non vides**.

Alors $X \times Y$ est quasi-compact si et seulement si $X$ et $Y$ sont quasi-compacts.

En particulier, $X \times Y$ est compact si et seulement si $X$ et $Y$ sont compacts d'après la prop. 57 p. 36.

**Remarque** :

Dans le cas où $(X; d)$ et $(Y; d')$ sont des espaces métriques compacts, on peut montrer plus simplement que $X \times Y$ est compact. En effet, soit $\big((x_n; y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $X \times Y$. En particulier, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite valeurs dans $(X; d)$ qui est compact, donc il existe une sous-suite $\big(x_{\varphi(m)}\big)_{m\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge dans $(X; d)$. De même, $\big(y_{\varphi(m)}\big)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans le compact $(Y; d')$ donc il existe un sous-suite $\big(y_{\varphi\circ\psi(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $(Y; d')$. Alors $\big(x_{\varphi\circ\psi(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge aussi. Donc $\big((x_{\varphi\circ\psi(k)}; y_{\varphi\circ\psi(k)})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge d'après la prop. 73 p. 46, si bien que $X \times Y$ est compact.

**Proposition 160 (Produits finis de quasi-compacts et compacts)**

Soient $X_1; \cdots; X_n$ des espaces topologiques **non vides**.

Alors $\prod_{i=1}^{n} X_i$ est quasi-compact si et seulement si pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $X_i$ est quasi-compact.

En particulier $\prod_{i=1}^{n} X_i$ est compact si et seulement si pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $X_i$ est compact d'après la prop. 57 p. 36.

**Proposition 161 (Compacts de Rn)**

Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont ses parties fermées bornées.

**Proposition 162 (Caractérisation des précompacts de Rn)**

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}^n$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ est précompact.
2. $A$ est relativement compact.
3. $A$ est bornée.

4. Toute suite à valeurs dans $A$ possède une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}^n$.

### Théorème 34 (Produit dénombrable d'espaces métriques compacts)

Soit $\big((X_n; d_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques.

On munit $X := \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ de la distance $D_1(x;y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min\big(1; d_n(x_n;y_n)\big)$.

Alors $(X; D_1)$ est compact si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X_n; d_n)$ est compact.

### Théorème 35 (de Tychonoff)

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques **non vides**.

Alors $\prod\limits_{i\in I} X_i$ est quasi-compact si et seulement si pour tout $i \in I$, $X_i$ est quasi-compact.

En particulier, $\prod\limits_{i\in I} X_i$ est compact si et seulement si pour tout $i \in I$, $X_i$ est compact d'après la prop. 57 p. 36.

### Théorème 36 (Complément réguliers et produit de [0 ;1])

Soit $X$ un espace topologique.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est complètement régulier.

2. Il existe $J$ un ensemble tel que $X$ est homéomorphe à une partie de $[0;1]^J$.

### Théorème 37 (de D'Alembert-Gauss)

Toute fonction polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

# 4 Espaces localement compacts

**Définition 57 (Espace localement quasi-compact)**

Soit $X$ un espace topologique.

1. On dit que $X$ est **localement quasi-compact** si et seulement si tout point de $X$ admet un voisinage quasi-compact.
2. On dit que $X$ est **localement compact** si et seulement si tout point de $X$ admet un voisinage compact.
3. On dit que $X$ est **dénombrable à l'infini**, ou **$\sigma$-compact** si et seulement si $X$ est une réunion dénombrable de compacts.