Révisions de topologie

Daniel B. Williams

Janvier 2022

Table des matières

Chapitre 1

Espace séparable

1 Définition, caractérisations et premières propriétés

1.1 Définition et exemple

Définition 1 (Partie dense et espace séparable)

Soient X un espace topologique, et $A \subseteq X$.

1. On dit que A est **dense** dans X si et seulement si $\overline{A} = X$.
2. On dit que X est **séparable** si et seulement s'il existe une partie de X dense dans X qui est au plus dénombrable.

Exemple :
Dans $\mathbb{R}$ munit de sa topologie habituelle, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}$ est séparable.

1.2 Indice de familles dénombrables

Proposition 1 (Espace séparable et famille d'ouverts 2 à 2 disjoints)

Soit X un espace topologique. Si X est séparable, alors pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts deux à deux disjoints, I est au plus dénombrable.

2 Constructions

2.1 Produit dénombrable d'une suite d'espaces séparables

Proposition 2 (Produit d'une suite d'espaces séparables)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces séparables. Alors l'espace produit $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est séparable.

2.2 Espace quotient séparable

Proposition 3 (Espace quotient séparable)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X.
Si X est séparable, alors l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est séparable.

2.3 Sous-espace séparable

Proposition 4 (Sous-espace d'un espace métrique séparable)

Soient $(X;d)$ un espace métrique et $A \subseteq X$.
Si $(X;d)$ est séparable, alors $(A;d)$ est séparable.

3 Liens avec les autres qualificatifs

3.1 Admettre une base dénombrable d'ouverts

Théorème 1 (Base dénombrable d'ouverts et séparabilité)

Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique.
Si X admet une base dénombrable d'ouverts, alors X est séparable.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est vraie si l'espace est métrique, mais est fausse en toute généralité par exemple pour X un ensemble infini, munis de la topologie cofinie, c'est-à-dire $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid X \backslash A \text{ est finie}\}$.

Théorème 2 (Espace métrique de Lindelöf et séparable)

Soit $(X; d)$ un espace métrique.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X admet une base dénombrable d'ouverts.
2. X est séparable.
3. X est de Lindelöf.

Théorème 3 (d'Urysohn sur les espaces métrisables)

Soit X un espace topologique.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est métrisable et séparable.
2. X est homéomorphe à un sous-espace métrique de l'espace métrique produit $[0; 1]^{\mathbb{N}}$.
3. X est régulier et admet une base dénombrable d'ouverts.

3.2 Espaces réguliers

Théorème 4 (d'Urysohn sur les espaces métrisables)

Soit X un espace topologique.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est métrisable et séparable.
2. X est homéomorphe à un sous-espace métrique de l'espace métrique produit $[0;1]^{\mathbb{N}}$.
3. X est régulier et admet une base dénombrable d'ouverts.

3.3 Espaces de Lindelöf

Théorème 5 (Espace métrique de Lindelöf et séparable)

Soit $(X;d)$ un espace métrique.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X admet une base dénombrable d'ouverts.
2. X est séparable.
3. X est de Lindelöf.

3.4 Espaces métriques

Théorème 6 (Espace métrique de Lindelöf et séparable)

Soit $(X;d)$ un espace métrique.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X admet une base dénombrable d'ouverts.
2. X est séparable.
3. X est de Lindelöf.

Proposition 5 (Sous-espace d'un espace métrique séparable)

Soient $(X; d)$ un espace métrique et $A \subseteq X$.

Si $(X; d)$ est séparable, alors $(A; d)$ est séparable.

3.5 Espaces métrisables

Théorème 7 (d'Urysohn sur les espaces métrisables)

Soit X un espace topologique.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est métrisable et séparable.
2. X est homéomorphe à un sous-espace métrique de l'espace métrique produit $[0; 1]^{\mathbb{N}}$.
3. X est régulier et admet une base dénombrable d'ouverts.

Chapitre 2

Espaces admettant des bases dénombrables de voisinages

1 Définition, caractérisations et premières propriétés

1.1 Définitions et exemples

Définition 2 (Axiomes de dénombrabilité)

Soit X un espace topologique.

1. On dit que X vérifie le **1$^{\text{er}}$axiome de dénombrabilité** si et seulement si tout $x \in X$ admet une base au plus dénombrable de voisinages.
2. On dit que X vérifie le **2$^{\text{ème}}$axiome de dénombrabilité** si et seulement si X admet une base au plus dénombrable d'ouverts.

2 Lien avec les autres qualificatifs

2.1 Espaces admettant une base dénombrable d'ouverts

Proposition 6 (Lien entre les axiomes de dénombrabilité)

Soit X un espace topologique. Si X vérifie le 2$^{\text{ème}}$axiome de dénombrabilité, alors X vérifie le 1$^{\text{er}}$axiome de dénombrabilité.

Remarque :
La réciproque est fausse : en effet en considérant X infini indénombrable, muni de la topologie discrète, alors pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x) := \left\{\{x\}\right\}$ est une base de voisinages de x qui est bien au plus dénombrable, mais X n'admet pas de base d'ouverts qui est au plus dénombrable, puisqu'elle devrait contenir en particulier l'ensemble $\{\{x\} \mid x \in X\}$ qui est indénombrable.

2.2 Espaces métriques

Proposition 7 (Propriétés topologiques d'un espace métrique)

Soit $(X; d)$ un espace métrique.

1. $(X; d)$ est séparé.
2. $(X; d)$ vérifie le premier axiome de dénombrabilité, c'est-à-dire que tout $x \in X$ admet une base au plus dénombrable de voisinages.
3. Soient $(Y; d')$ un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$. Alors f est continue si et seulement si pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu > 0$ tel que $f^{\rightarrow}\Big(\mathcal{B}\left(x; \mu\right)\Big) \subseteq \mathcal{B}\left(f(x); \varepsilon\right)$.

3 Intérêts

3.1 Valeurs d'adhérences de suite

Proposition 8 (Limites, valeurs d'adhérence, suites et sous-suites)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace topologique X, et $\ell \in X$.

1. Si ℓ est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si X est séparé et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique limite qui est aussi l'unique valeur d'adhérence.
3. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors toute sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.
4. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.
5. Si ℓ est une valeur d'adhérence d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Si ℓ est une limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Réciproquement, si ℓ admet une base dénombrable de voisinages dans X et si ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ.

3.2 Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Théorème 8 (Adhérence d'un ensemble et limites de suite)

Soient X un espace topologique, $A \subseteq X$ et $x \in X$.

1. S'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x, alors $x \in \overline{A}$.
2. Si x admet une base dénombrable de voisinages dans X, et si $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Proposition 9 (Caractérisation séquent. de l'adhérence et des fermés)

Soit X un espace topologique **vérifiant le 1^er^ axiome de dénombrabilité** (c'est-à-dire que tout point de X admet une base dénombrable de voisinage). Soient $A \subseteq X$ et $x \in X$.

1. $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.
2. A est un fermé de X si et seulement si toute limite de suite d'élément de A est dans A.

3.3 Caractérisation séquentielle des limites de fonctions et de la continuité

Théorème 9 (Limites de fonctions et limites de suites)

Soient X et Y deux espaces topologiques, $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$, $\ell \in Y$ et $f : A \longrightarrow Y$.

1. Si ℓ est une limite de f en a, alors pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A dont a est une limite, ℓ est une limite de la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si a admet une base dénombrable de voisinages dans X, et si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A dont a est une limite, ℓ est une limite de la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, alors ℓ est une limite de f en a.

Proposition 10 (Caractérisation séquentielle des limites de fonctions)

Soient X et Y deux espaces topologiques, avec Y **séparé**. Soient $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$.
On suppose de plus que a admet une base dénombrable de voisinages dans X.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f admet une limite en a.
2. Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Dans ce cas-là, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Théorème 10 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient X et Y deux espaces topologiques, $x \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$.

1. Si f est continue en x, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers x, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
2. Si x admet une base dénombrable de voisinages et si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers x, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, alors f est continue en x.

Chapitre 3

Espaces admettant une base dénombrable d'ouverts

1 Définition, caractérisations et premières propriétés

1.1 Définitions et exemples

Définition 3 (Axiomes de dénombrabilité)

Soit X un espace topologique.

1. On dit que X vérifie le **1^er axiome de dénombrabilité** si et seulement si tout $x \in X$ admet une base au plus dénombrable de voisinages.
2. On dit que X vérifie le **2^ème axiome de dénombrabilité** si et seulement si X admet une base au plus dénombrable d'ouverts.

Exemple :
L'espace $\mathbb{R}$ munit de la topologie usuelle admet une base dénombrable d'ouverts. En effet, il suffit de considérer $\mathcal{B} := \{]a; b[\mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q} \text{ et } a < b\}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathcal{B}$ l'est aussi. Il reste donc à montrer que c'est une base d'ouverts : cela revient, d'après la prop. ?? p. ??, à montrer que pour tout $x \in X$, $\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ est une base de voisinages de x. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe p_n et q_n dans $\mathbb{Q}$ tels que $x - \frac{1}{n} < p_n < x < q_n < x + \frac{1}{n}$. Alors $\{]p_n; q_n[\mid n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathcal{B}$ est une base de voisinages de x.
De même, dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathcal{B} \cup \{[-\infty; n[\mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{]n; +\infty] \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base dénombrable d'ouverts.

2 Lien avec les autres qualificatifs

2.1 Espaces séparables

Théorème 11 (Base dénombrable d'ouverts et séparabilité)

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique.
Si X admet une base dénombrable d'ouverts, alors X est séparable.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est vraie si l'espace est métrique, mais est fausse en toute généralité. En effet, soit X un ensemble infini, munis de la topologie cofinie, c'est-à-dire $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid X \backslash A$ est finie$\}$.

Théorème 12 (d'Urysohn sur les espaces métrisables)

Soit X un espace topologique.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est métrisable et séparable.
2. X est homéomorphe à un sous-espace métrique de l'espace métrique produit $[0;1]^{\mathbb{N}}$.
3. X est régulier et admet une base dénombrable d'ouverts.

2.2 Espaces admettant des bases dénombrables de voisinages

Proposition 11 (Lien entre les axiomes de dénombrabilité)

Soit X un espace topologique. Si X vérifie le $2^{\text{ème}}$axiome de dénombrabilité, alors X vérifie le 1^{er}axiome de dénombrabilité.

Remarque :
La réciproque est fausse : en effet en considérant X infini indénombrable, muni de la topologie discrète, alors pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x) := \big\{\{x\}\big\}$ est une base de voisinages de x qui est bien au plus dénombrable, mais X n'admet pas de base d'ouverts qui est au plus dénombrable, puisqu'elle devrait contenir en particulier l'ensemble $\{\{x\} \mid x \in X\}$ qui est indénombrable.

2.3 Espaces réguliers

Théorème 13 (d'Urysohn sur les espaces métrisables)

Soit X un espace topologique.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est métrisable et séparable.
2. X est homéomorphe à un sous-espace métrique de l'espace métrique produit $[0;1]^{\mathbb{N}}$.
3. X est régulier et admet une base dénombrable d'ouverts.

2.4 Espaces de Lindelöf

Théorème 14 (Base dénombrable d'ouverts et Lindelöf)

Soit X un espace topologique.
Si X admet une base dénombrable d'ouverts, alors X est de Lindelöf.

2.5 Espaces métriques

Théorème 15 (Espace métrique de Lindelöf et séparable)

Soit $(X;d)$ un espace métrique.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X admet une base dénombrable d'ouverts.
2. X est séparable.
3. X est de Lindelöf.

2.6 Espaces métrisables

Théorème 16 (d'Urysohn sur les espaces métrisables)

Soit X un espace topologique.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est métrisable et séparable.
2. X est homéomorphe à un sous-espace métrique de l'espace métrique produit $[0;1]^{\mathbb{N}}$.
3. X est régulier et admet une base dénombrable d'ouverts.

Chapitre 4

Espaces séparés (T2) et espaces de Fréchet (T1)

1 Définition, caractérisations et premières propriétés

1.1 Définitions et exemples

Définition 4 (Axiomes de séparations)

Soit X un espace topologique.

1. On dit que X est un T_0-**espace** (ou que c'est un **espace de Kolmogorov**) si et seulement si pour tout points distincts x et y dans X, l'un au moins des deux points admet un voisinage qui ne contient pas l'autre point.
2. On dit que X est un T_1-**espace** (ou que c'est un **espace de Fréchet**, ou encore un **espace accessible**) si et seulement si pour tout points distincts x et y dans X, il existe un voisinage V de x dans X et un voisinage W de y dans X tels que $x \notin W$ et $y \notin V$.
3. On dit que X est un T_2-**espace** (ou que c'est un **espace de Hausdorff**, ou que c'est un **espace séparé**) si et seulement si pour tout points distincts x et y dans X, il existe un voisinage V de x dans X et un voisinage W de y dans X tels que $V \cap W = \varnothing$.

Remarque :
On a évidement $T_2 \implies T_1 \implies T_0$, mais les implications réciproques sont généralement fausses.

Proposition 12 (Exemples et contre-exemples d'espaces vérifiant les Ti)

1. Pour tout ensemble X de cardinal ≥ 2 munit de la topologie grossière $\{\varnothing; X\}$ n'est pas T_0.
2. Tout ensemble infini X munit de la topologie cofinie est T_1 mais pas séparé.
3. Tout ensemble X totalement ordonné munit de la topologie de l'ordre est séparé.
4. $\mathbb{R}$ munit de la topologie usuelle est séparé.

1.2 Caractérisation des espaces de Fréchet (T1)

Proposition 13 (Caractérisation des espaces T1)

Soit X un espace topologique.
X est T_1 si et seulement si tout singleton est un fermé de X.

Remarque :
Comme tout espace séparé est en particulier T_1, dans tout espace séparé les singletons sont des fermés.

1.3 Caractérisations des espaces séparés

Proposition 14 (Caractérisation du fait d'être séparé)

Soit X un espace topologique. Pour tout $x \in X$, notons $\mathcal{V}_F(x)$ l'ensemble des voisinages fermés de x dans X. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est séparé.
2. La diagonale $\Delta := \{(x;x) \in X^2 \mid x \in X\}$ est fermée dans X^2 munit de la topologie produit.
3. Pour tout $x \in X$, on a $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}_F(x)} V = \{x\}$.

Proposition 15 (Caractérisation par les filets des séparés)

Soit X un espace topologique.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est séparé.
2. Tout filet à valeurs dans X admet au plus une limite.

2 Constructions

2.1 Transmission du fait d'être séparé

Proposition 16 (Transmission du fait d'être séparé)

Soit X un espace topologique séparé. Soit Y un espace topologique.

1. S'il existe une application $f : Y \hookrightarrow X$ injective et continue, alors Y est séparé.
2. Si Y est homéomorphe à X, alors Y est séparé.
3. Si Y est un sous-espace topologique de X, alors Y est séparé.

2.2 Topologie initiale et famille séparante d'applications

Définition 5 (Famille séparante d'applications)

Soient X un ensemble et $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Soit pour tout $i \in I$ une application $f_i : X \longrightarrow Y_i$.

On dit que $(f_i)_{i\in I}$ est **séparante** si et seulement si pour tout points x et y de X tels que $x \neq y$, il existe $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Lemme 1 (Topologie initiale associée à une famille séparante)

Soit X un ensemble. Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces **séparés**. Soit pour tout $i \in I$, une application $f_i : X \longrightarrow Y_i$. On munit X de la topologie initiale associée à $(f_i)_{i\in I}$.

Si $(f_i)_{i\in I}$ est séparante, alors X est séparé.

2.3 Espace produit séparé

Proposition 17 (Espace produit séparé)

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques **tous non vides ou tous vides**. On munit $\prod_{i\in I} X_i$ de la topologie produit.

$\prod_{i\in I} X_i$ est séparé si et seulement si pour tout $i \in I$, X_i est séparé.

2.4 Espace quotient séparé

Remarque :
En général les espaces quotients ne sont pas séparés. Par exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ sont séparés pour la topologie usuelle, mais $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ne l'est pas pour la topologie quotient, car il s'agit de la topologie grossière $\{\varnothing; \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$.

Proposition 18 (Espace quotient séparé)

Soit X un espace topologique. Soit Y un espace **séparé**. Soit $f : X \longrightarrow Y$. Soit $\mathcal{R}_f$ la relation d'équivalence sur X associée à f, c'est-à-dire que $\forall x \in X, \forall y \in X, \big(x\mathcal{R}_f y \iff f(x) = f(y)\big)$. On munit $X/\mathcal{R}_f$ de la topologie quotient.

Si f est continue, alors $X/\mathcal{R}_f$ est séparé.

Proposition 19 (Critère de séparation des espaces topologiques quotient)

Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On munit $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. On munit X^2 de la topologie produit.

1. Si $X/\mathcal{R}$ est séparé, alors $\mathcal{R}$ est fermé en tant que partie de X^2.
2. Si $\mathcal{R}$ est ouverte en tant que relation d'équivalence sur X, et si $\mathcal{R}$ est fermée en tant que partie de X^2, alors $X/\mathcal{R}$ est séparé.

3 Liens avec les autres qualificatifs

3.1 Espaces réguliers

Définition 6 (Espaces réguliers, complètement réguliers et normaux)

Soit X un espace topologique **séparé**.

1. On dit que X est un **T_3-espace**, ou est **régulier** si et seulement si pour toute partie fermée F de X et tout $x \in X$, si $x \notin F$ alors il existe deux ouverts disjoints U et V de X tels que $x \in U$ et $F \subseteq V$.
2. On dit que X est **complètement régulier**, ou est **de Tychonoff** si et seulement si pour toute partie fermée F de X et tout point $x \in X$, si $x \notin F$ alors il existe une application continue $f : X \longrightarrow [0;1]$ telle que $f(x) = 1$ et $\forall y \in F, f(y) = 0$.
3. On dit que X est un **T_4-espace**, ou est **normal** si et seulement si pour toutes parties fermées A et B de X, si $A \cap B = \varnothing$ alors il existe deux ouverts disjoints U et V de X tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Proposition 20 (Caractérisation des espaces réguliers parmi les séparés)

Soit X un espace **séparé**.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est régulier.
2. Pour tout $x \in X$ et tout voisinage V_x de x dans X, il existe un ouvert U_x de X tel que $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq V_x$. Autrement dit, tout $x \in X$ admet une base de voisinages constituée uniquement de fermés dans X.
3. Pour tout $x \in X$ et toute partie fermée F de X, si $x \notin F$ alors il existe deux ouverts U et V de X tels que $x \in U$, $F \subseteq V$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

3.2 Espaces normaux

Proposition 21 (Caractérisation des espaces normaux parmi les séparés)

Soit X un espace **séparé**.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est normal.
2. Pour toute partie fermée A de X et tout ouvert U de X tel que $A \subseteq U$, il existe W un ouvert de X tel que $A \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$.
3. Pour toutes parties fermées A et B de X qui sont disjointes, il existe U et V deux ouverts de X tels que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

Théorème 17 (Urysohn)

Soit X un espace topologique **séparé**.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est normal.
2. Pour tous fermés non vides et disjoints A et B de X, il existe une application continue $f : X \longrightarrow [0;1]$ telle que $\forall x \in A, f(x) = 0$ et $\forall x \in B, f(x) = 1$.

Théorème 18 (de prolongement de Tietze)

Soit X un espace **séparé**.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est normal.
2. Pour tous a et b réels tels que $a < b$,tout fermé A de X et toute $f : A \longrightarrow [a;b]$ continue, il existe $g : X \longrightarrow [a;b]$ continue qui prolonge f.
3. Pour tout fermé A de X et toute $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui prolonge f.

3.3 Espaces métriques

Proposition 22 (Propriétés topologiques d'un espace métrique)

Soit $(X; d)$ un espace métrique.

1. $(X; d)$ est séparé.
2. $(X; d)$ vérifie le premier axiome de dénombrabilité, c'est-à-dire que tout $x \in X$ admet une base au plus dénombrable de voisinages.
3. Soient $(Y; d')$ un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$. Alors f est continue si et seulement si pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu > 0$ tel que $f^{\rightarrow}\Big(\mathcal{B}\,(x; \mu)\Big) \subseteq \mathcal{B}\,(f(x); \varepsilon)$.

4 Intérêt des espaces séparés

4.1 Egalité de deux applications continues sur une partie dense

Proposition 23 (Applications continues dans un espace séparé)

Soit X un espace topologique. Soit Y un espace **séparé**. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X \longrightarrow Y$ deux applications **continues**.

1. L'ensemble $F := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X.
2. S'il existe une partie D dense dans X telle que $\forall x \in D, f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

4.2 Unicité des limites

Proposition 24 (Limite d'une fonction à valeurs dans un espace séparé)

Soit X un espace topologique. Soit Y un espace **séparé**. Soient $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$.

1. Si ℓ est une limite de f en a, alors ℓ est la seule valeur d'adhérence de f en a.
2. f admet au plus une limite de f en a.
3. Si $a \in A$ et si f admet une limite en a, alors cette limite est $f(a)$.

Proposition 25 (Limite pointée, épointée et continuité)

Soient X un espace topologique, Y un espace **séparé**, $A \subseteq X$, $a \in A$ et $f : A \longrightarrow Y$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.
3. f est continue en a.

Dans ce cas, on a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

Proposition 26 (Limites, valeurs d'adhérence, suites et sous-suites)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace topologique X, et $\ell \in X$.

1. Si ℓ est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si X est séparé et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique limite qui est aussi l'unique valeur d'adhérence.
3. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors toute sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.
4. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.
5. Si ℓ est une valeur d'adhérence d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Si ℓ est une limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Réciproquement, si ℓ admet une base dénombrable de voisinages dans X et si ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ.

Remarque :
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace topologique X, $\ell \in X$ et $B := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Si X est séparé, alors les points d'accumulations de B sont tous **des** valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais la réciproque n'est pas vraie à moins que les termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient distincts deux à deux. Ainsi, comme B' a été défini comme l'ensemble des points d'accumulations de B, et qu'on a montré lors que $\overline{B} = B \cup B'$, on en déduit que $\overline{B}$ est la réunion (non forcément disjointe) de B avec les valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 27 (Limites et valeurs d'adhérence d'un filet)

Soient $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un filet d'un espace topologique X et $\ell \in X$.

1. Si ℓ est une limite de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
   Si de plus X est séparé, alors c'est la seule valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
2. Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers ℓ, alors tout sous-filet de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge aussi vers ℓ.
3. Si ℓ est une valeur d'adhérence d'un sous-filet de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, alors ℓ est aussi une valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
4. ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si et seulement s'il existe un sous-filet de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ qui converge vers ℓ.

4.3 Usage pour la caractérisation séquentielle des limites de fonction

Proposition 28 (Caractérisation séquentielle des limites de fonctions)

Soient X et Y deux espaces topologiques, avec Y **séparé**. Soient $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$.
On suppose de plus que a admet une base dénombrable de voisinages dans X.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f admet une limite en a.
2. Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Dans ce cas-là, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.