Révisions de topologie

Daniel B. Williams

Octobre 2021

Table des matières

Chapitre 1

Espaces topologiques

1 Espaces topologiques

1.1 Ouverts et fermés

Définition 1 (Espace topologique)

Une topologie sur un espace X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X telles que les conditions suivantes sont vérifiées :

(O1) $\varnothing \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$

(O2) $\forall U, V \in \mathcal{T}, U \cap V \in \mathcal{T}$

(O3) Pour toute famille quelconque $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$

On dira que les éléments de $\mathcal{T}$ sont les **ouverts** de $(X;\mathcal{T})$.

Exemple :

- Pour tout ensemble X, $\mathscr{P}(X)$ est une topologie appelée **topologie discrète**. Un ensemble munit de cette topologie est appelé **espace discret**.
- $\{\varnothing; X\}$ est aussi une topologie sur X, appelée **topologie grossière**, ou **triviale**.
- $\mathcal{T}_{\text{cf}} := \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid X\backslash A \text{ est fini}\}$ est une topologie sur X appelée **topologie cofinie**.
  Si X est infini, alors deux ouverts quelconques dans $(X;\mathcal{T}_{\text{cf}})$ ont toujours une intersection non vide.

Définition 2 (Fermés)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$.
On dit que A est un **fermé** de $(X;\mathcal{T})$ si et seulement si $X\backslash A$ est un ouvert de $(X;\mathcal{T})$.

Proposition 1 (Unique topologie associée aux fermés)

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de $(X;\mathcal{T})$. Alors $\mathcal{F}$ vérifie les trois conditions suivantes :

(F1) $\varnothing \in \mathcal{F}$ et $X \in \mathcal{F}$

(F2) Pour tout $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, on a $A \cup B \in \mathcal{F}$.

(F3) Pour toute famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, $I \neq \varnothing$, $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$.

Réciproquement, étant donné un ensemble X quelconque, si un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de X vérifie **(F1)**, **(F2)** et **(F3)**, alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X dont $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés. Ils s'agit tout simplement de $\mathcal{T} := \{U \subseteq X \mid X\backslash U \in \mathcal{F}\}$.

Démonstration

(F1) On a $X \in \mathcal{T}$ donc $\varnothing = X\backslash X \in \mathcal{F}$, et $\varnothing \in \mathcal{T}$ donc $X = X\backslash\varnothing \in \mathcal{F}$, d'après **(O1)**.

(F2) Soient A et B dans $\mathcal{F}$. On a donc $X\backslash A$ et $X\backslash B$ dans $\mathcal{T}$, donc $(X\backslash A)\cap(X\backslash B) \in \mathcal{T}$ d'après **(O2)**, donc $X\backslash(A \cup B) \in \mathcal{T}$ et donc $A \cup B \in \mathcal{F}$.

(F3) Soit une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, $I \neq \varnothing$. Donc pour tout $i \in I$, $X\backslash A_i \in \mathcal{T}$ donc $\bigcup_{i\in I} X\backslash A_i \in \mathcal{T}$ d'après **(O3)** donc $X\backslash \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$ et donc $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$.
CQFD.

1.2 Bases d'ouverts

Définition 3 (Base d'ouverts)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{T}$.
On dit que $\mathcal{B}$ est une **base d'ouverts** de $(X;\mathcal{T})$ si et seulement si tout ouvert de $(X;\mathcal{T})$ est une réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple :
Si X est un espace discret, alors $\mathcal{B} := \{\{x\} \mid x \in X\}$ est une base d'ouverts de X.

Proposition 2 (Caractérisation d'une base d'ouverts)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, et $\mathcal{B} \subseteq T$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{B}$ est une base topologique de $(X;\mathcal{T})$.
2. $\forall U \in \mathcal{T}, \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq U$.

Démonstration

1 $\implies$ 2

Soient $U \in \mathcal{T}$ et $x \in U$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $(X;\mathcal{T})$, il existe I et $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{B}^I$ tels que $U = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$.

Comme $x \in U$, on $x \in \bigcup\limits_{i\in I} B_i$ et donc il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} B_i = U$.

2 $\implies$ 1

Soit U un ouvert de X.

Par hypothèse, pour tout $x \in U$, il existe un $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subseteq U$.

Alors $U = \bigcup\limits_{x\in U} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x\in U} B_x \subseteq U$ donc $U = \bigcup\limits_{x\in U} B_x$.

CQFD.

Remarque :

En faisant le même raisonnement, on peut montrer que pour $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X, et U une partie de X, alors A est un ouvert de X si et seulement si pour tout $x \in A$, il existe un $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq A$.

Proposition 3 (Unique topologie issue d'une base d'ouverts)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X.

Alors $\mathcal{B}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

(B1) Pour tout $x \in X$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U$.

(B2) Pour tous U_1 et U_2 dans $\mathcal{B}$, et tout $x \in U_1 \cap U_2$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Réciproquement, si X est un ensemble, et si $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ vérifie (B1) et (B2), alors il existe une unique topologique $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts.

Il s'agit de $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X \mid U \text{ est une réunion d'éléments de } \mathcal{B}\}$.

Démonstration

(B1) Soit $x \in X$.
Comme X est un ouvert de X et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X, il existe $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{B}^I$ telle que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.
Comme $x \in X$, il existe donc un $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$.

(B2) Soient U_1 et U_2 dans $\mathcal{B}$ et $x \in U_1 \cap U_2$.
Comme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, U_1 et U_2 sont des ouverts de X, donc $U_1 \cap U_2$ est aussi un ouvert de X.
Comme $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X, il existe $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{B}^I$ telle que $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{i\in I} B_i$, et donc il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in B_{i_0}$ d'où le résultat.

Montrons la réciproque : soit $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ vérifiant (B1) et (B2).
Posons $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X \mid U$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}\}$ et montrons que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.

(O1)

- On a $\varnothing \in \mathcal{T}$ par définition de $\mathcal{T}$.
- Pour tout $x \in X$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x$.

  On a donc $X = \bigcup_{x\in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x\in X} B_x \subseteq X$.

  Donc $X = \bigcup_{x\in X} B_x \in \mathcal{T}$.

(O2) Soient U et V dans $\mathcal{T}$.
Il existe donc $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{B}^I$ et $(V_j)_{j\in J} \in \mathcal{B}^J$ telles que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ et $V = \bigcup_{j\in J} V_j$.
Alors $U \cap V = \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} V_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (U_i \cap V_j)$.
D'après (B2), pour tout $(i; j) \in I \times J$, et tout $x \in U_i \cap V_j$, il existe un $W_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in W_x \subseteq U_i \cap V_j$.
Donc $U \cap V = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (U_i \cap V_j) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \bigcup_{x\in U_i\cap V_j} W_x \subseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (U_i \cap V_j) = U \cap V$.
Donc $U \cap V = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \bigcup_{x\in U_i\cap V_j} W_x$ donc $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(O3) Soit $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$.
Pour tout $i \in I$, il existe $(B_{(i;j)})_{j\in J_i} \in \mathcal{B}^{J_i}$ tel que $U_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{(i;j)}$.
Alors $\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} B_{(i;j)} \in \mathcal{T}$.
CQFD.

Exemple :
Soit $(X; \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intervalles ouverts et semi-ouverts de X, ainsi que X.
Alors $\mathcal{B}$ vérifie (B1) et (B2), et sa topologie engendrée sur X est appelée **topologie de l'ordre** de $(X; \leq)$.

1.3 Prébase

Proposition 4 (Intersection de topologies)

Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{X}$ un ensemble **non vide** de topologies sur X.

Alors $\bigcap\limits_{\mathcal{T}\in\mathcal{X}} \mathcal{T}$ est une topologie sur X.

Démonstration

(O1) Pour tout $\mathcal{T} \in \mathcal{X}$, on a $\varnothing \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$ donc $\varnothing \in \bigcap\limits_{\mathcal{T}\in\mathcal{X}} \mathcal{T}$ et $X \in \bigcap\limits_{\mathcal{T}\in\mathcal{X}} \mathcal{T}$.

(O2) Soient U et V dans $\bigcap\limits_{\mathcal{T}\in\mathcal{X}} \mathcal{T}$.
Alors pour tout $\mathcal{T} \in \mathcal{X}$, on a $U \in \mathcal{T}$ et $V \in \mathcal{T}$ donc $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Donc $U \cap V \in \bigcap\limits_{\mathcal{T}\in\mathcal{X}} \mathcal{T}$.

(O3) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\bigcap\limits_{\mathcal{T}\in\mathcal{X}} \mathcal{T}$. Donc pour tout $\mathcal{T} \in \mathcal{X}$, $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$ donc $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$, donc $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \bigcap\limits_{\mathcal{T}\in\mathcal{X}} \mathcal{T}$.
CQFD.

Définition 4 (Topologie engendrée et prébase)

Soit X un ensemble.

1. Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X)$. On appelle **topologie engendrée** par $\mathcal{P}$ sur X la plus petite topologie (au sens de l'inclusion) $\mathcal{T}$ sur X telle que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$. Son existence est assurée par le fait que c'est $\bigcap\limits_{\mathcal{T}\in\mathcal{X}} \mathcal{T}$ où $\mathcal{X} = \{\mathcal{T} \subseteq \mathscr{P}(X) \mid \mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \text{ et } \mathcal{T} \text{ est une topologie sur } X\}$ qui est non vide puisque $\mathscr{P}(X) \in \mathcal{X}$.
2. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur X. On appelle **prébase** de $\mathcal{T}$ tout $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X)$ telle que $\mathcal{T}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{P}$ sur X.

Proposition 5 (Une base d'ouverts est une prébase)

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de $\mathcal{T}$.

Alors $\mathcal{B}$ est une prébase de $\mathcal{T}$.

Autrement dit, $\mathcal{T}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

Par définition, on a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ donc $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}$ par minimalité de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Réciproquement, tout élément de $\mathcal{T}$ est réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{B}$ puisque c'en est une base d'ouverts. Or, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ étant une topologie, est stable par union quelconque de ses éléments donc en particulier d'éléments de $\mathcal{B}$, donc tous les éléments de $\mathcal{T}$ sont des éléments de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, d'où $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

CQFD.

Proposition 6 (Caractérisation de la topologie engendrée)

Soit X un ensemble. Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X)$ non vide.

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{P}$, auquel on ajoute X.

Alors $\mathcal{B}$ vérifie les axiomes **(B1)** et **(B2)**, et l'unique topologie sur X associée à $\mathcal{B}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{P}$.

Démonstration

Montrons tout d'abord que $\mathcal{B}$ vérifie les axiomes **(B1)** et **(B2)**.

(B1) Soit $x \in X$. Par définition, on a $X \in \mathcal{B}$ d'où le résultat.

(B2) Soient U et V dans $\mathcal{B}$. Si $U = X$ ou $V = X$, alors $U \cap V \in \{U; V\}$ donc $U \cap V \in \mathcal{B}$. Supposons à présent que $U \neq X$ et $V \neq X$: ce sont donc tous les deux des intersections finies d'éléments de $\mathcal{P}$. $U \cap V$ l'est alors tout autant, et donc $U \cap V \in \mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ l'unique topologie associée à $\mathcal{B}$, et $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ la topologie engendrée par $\mathcal{P}$.

$\boxed{\subseteq}$ Remarquons que par définition, on a $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$. Or par définition on a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, donc $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ donc $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ par minimalité de $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

$\boxed{\supseteq}$ $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ étant une topologie, elle est stable par intersection finie de ses éléments. Or $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ par définition, donc $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ est stable par intersection finie des éléments de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire $\mathcal{B} \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Mais $\mathcal{B}$ étant une base d'ouverts de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, on sait que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$, si bien que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ par minimalité de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

CQFD.

1.4 Voisinages

Définition 5 (Voisinage)

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique.

- Soit $x \in X$. On appelle **voisinage** de x toute partie $V \subseteq X$ tel qu'il existe un ouvert U tel que $x \in U \subseteq V$.
- Soit $A \subseteq X$. On appelle voisinage de A toute partie $V \subseteq X$ tel qu'il existe un ouvert U tel que $A \subseteq U \subseteq V$.

Proposition 7 (Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points)

Pour qu'une partie d'un espace topologique X soit un ouvert, il faut et il suffit qu'elle soit un voisinage de chacun de ses points.
En particulier, une topologie est entièrement caractérisée par ses voisinages.

Démonstration

L'implication directe est immédiate par définition d'un voisinage.
Réciproquement, soit A une partie qui est un voisinage de chacun de ses points.
Donc pour tout $x \in A$, il existe un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subseteq A$.
Alors $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \subseteq A$ donc $A = \bigcup_{x \in A} U_x$ donc A est un ouvert.
CQFD.

Proposition 8 (Unique topologie issue des voisinages)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique.
Pour tout $x \in X$, soit $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.
Soit $x \in X$. On a alors :

(V1) $\mathcal{V}(x)$ est non vide, et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $x \in V$

(V2) Toute partie de X qui contient un élément de $\mathcal{V}(x)$ est aussi un élément de $\mathcal{V}(x)$.

(V3) L'intersection de deux éléments de $\mathcal{V}(x)$ est un élément de $\mathcal{V}(x)$.

(V4) Pour tout $y \in X$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(y)$, il existe $W \in \mathcal{V}(y)$ tel que pour tout $z \in W$, on a $V \in \mathcal{V}(z)$.

Réciproquement, pour X un ensemble quelconque et pour tout $x \in X$ un ensemble $\mathcal{V}(x)$ vérifiant **(V1)**, **(V2)**, **(V3)** et **(V4)**, alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X vérifiant que pour tout $x \in X$,

$\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de x.
Il s'agit tout simplement de $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X \mid \forall x \in U, U \subseteq \mathcal{V}(x)\}$.

Démonstration

(V1) X est lui-même un voisinage de x, donc $X \in \mathcal{V}(x)$ donc $\mathcal{V}(x) \neq \varnothing$.
Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe un ouvert U tel que $x \in U \subseteq V$ et donc $x \in V$.

(V2) Soit A une partie de X telle qu'il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ telle que $V \subseteq A$.
Il existe donc un ouvert U tel que $x \in U \subseteq V \subseteq A$ donc $x \in U \subseteq A$ et donc $A \in \mathcal{V}(x)$.

(V3) Soient V et V' dans $\mathcal{V}(x)$.
Il existe donc U et U' deux ouverts tels que $x \in U \subseteq V$ et $x \in U' \subseteq V'$.
On a donc $x \in U \cap U' \subseteq V \cap V'$, et $U \cap U'$ est un ouvert, donc $V \cap V' \in \mathcal{V}(x)$.

(V4) Soit $y \in X$. Soit $V \in \mathcal{V}(y)$. Il existe donc un ouvert W tel que $y \in W \subseteq V$.
En particulier, on a $y \in W \subseteq W$ donc $W \in \mathcal{V}(y)$.
De plus, pour tout $z \in W$, on a $z \in W \subseteq V$ donc $V \in \mathcal{V}(z)$.

Montrons à présent le « *réciproquement* ». Soit X un ensemble quelconque, et pour tout $x \in X$, un ensemble $\mathcal{V}(x)$ vérifiant **(V1)**, **(V2)**, **(V3)** et **(V4)**.
Posons $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X \mid \forall x \in U, U \in \mathcal{V}(x)\}$, et montrons que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.

(O1) Par définition de $\mathcal{T}$, on a bien $\varnothing \in \mathcal{T}$.
Pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ n'est pas vide d'après **(V1)**. Soit donc $V \in \mathcal{V}(x)$. Alors $V \subseteq X$ par définition, et donc $X \in \mathcal{V}(x)$ d'après **(V2)**, d'où $X \in \mathcal{T}$.

(O2) Soient U et V dans $\mathcal{T}$. Soit $x \in U \cap V$. Comme $x \in U$ et $U \in \mathcal{T}$, on a $U \in \mathcal{V}(x)$. De même, comme $x \in V$ et $V \in \mathcal{T}$, on a $V \in \mathcal{V}(x)$, et donc $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$ d'après **(V3)**, et donc $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(O3) Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$. Si $I = \varnothing$, alors $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = \varnothing \in \mathcal{T}$.
Supposons à présent $I \neq \varnothing$. Soit $x \in \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, il existe donc $j \in I$ tel que $x \in U_j$. Mais comme $U_j \in \mathcal{T}$, on a $U_j \in \mathcal{V}(x)$. Or $U_j \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, donc $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{V}(x)$ d'après **(V2)**, si bien que $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.
CQFD.

1.5 Base de voisinages

Définition 6 (Base de voisinages)

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle **base de voisinages** de $(X;\mathcal{T})$ toute famille $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ où pour tout $x\in X$, $\mathcal{B}(x)$ est un ensemble de voisinages de x tels que pour tout voisinage V de x, il existe $W\in\mathcal{B}(x)$ tel que $W\subseteq V$.

Remarque :

Si $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ est une base de voisinages de $(X;\mathcal{T})$, alors pour tout $x\in X$ on a
$\mathcal{V}(x)=\{V\subseteq X \mid \exists W\in\mathcal{B}(x), W\subseteq V\}$.

Exemple :

- Pour tout espace topologique $(X;\mathcal{T})$, la famille $(\mathcal{V}(x))_{x\in X}$ est une base de voisinages.
- Si pour tout $x\in X$, $\mathcal{B}(x)$ est l'ensemble des ouverts contenant x, alors $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ est une base de voisinages.
- Si X est discret, alors $\big(\{x\}\big)_{x\in X}$ est une base de voisinages de X.
- Dans $\mathbb{R}$, si pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(x):=\left\{]x-\frac{1}{n};x+\frac{1}{n}[\;\middle|\; n\in\mathbb{N}^*\right\}$, et si $\mathcal{B}'(x):=\left\{[x-\frac{1}{n};x+\frac{1}{n}]\;\middle|\; n\in\mathbb{N}^*\right\}$, alors $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ et $(\mathcal{B}'(x))_{x\in X}$ sont des bases de voisinages de X.
- Dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\{[-\infty;n[\mid n\in\mathbb{N}\}$ est une base de voisinages associés à $-\infty$. De même, l'ensemble $\{]n;+\infty]\mid n\in\mathbb{N}\}$ est une base de voisinages associés à $+\infty$.

Proposition 9 (Base d'ouverts et base de voisinages)

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.

(ii) $\Big(\{B\in\mathcal{B}\mid x\in B\}\Big)_{x\in X}$ est une base de voisinages de X.

Démonstration

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Supposons que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.
Soit $x\in X$. Soit V un voisinage de x : il existe donc un ouvert U tel que $x\in U\subseteq V$. Comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, il existe une famille $(B_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ tels que $U=\bigcup\limits_{i\in I}B_i$. Or, $x\in U$ donc il existe $j\in I$ tel que $x\in B_j$. On a alors $x\in B_j\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}B_i=U\subseteq V$, donc $\{B\in\mathcal{B}\mid x\in B\}$ est une

base de voisinages associée à x, d'où le résultat.

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ Supposons que $\Big(\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}\Big)_{x \in X}$ est une base de voisinages de X.
Soit U un ouvert : il est donc un voisinage de chacun de ses points. Par hypothèse, pour tout $x \in U$, il existe donc $B_x \in \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ tel que $x \in B_x \subseteq U$. On a alors $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} B_x \subseteq U$ et donc $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, d'où le résultat.
CQFD.

Proposition 10 (Base de voisinages ouverts et axiomes de Hausdorff)

Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ une base de voisinages, constituée uniquement d'ouverts. Alors $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ vérifie les assertions suivantes, appelées **axiomes de Hausdorff** :

(H1) Pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \varnothing$ et pour tout $U \in \mathcal{B}(x)$, on a $x \in U$.

(H2) Pour tout $x \in X$ et tout U_1 et U_2 dans $\mathcal{B}(x)$, il existe $U_3 \in \mathcal{B}(x)$ tel que $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

(H3) Pour tout $x \in X$, tout $U \in \mathcal{B}(x)$ et tout $y \in U$, il existe $W \in \mathcal{B}(y)$ tel que $W \subseteq U$.

Réciproquement, pour un ensemble X quelconque, si $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ est une famille d'ensemble de parties de X vérifiant **(H1)**, **(H2)** et **(H3)**, alors il existe une unique topologique $\mathcal{T}$ sur X telle que $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ est une base de voisinages, constitués uniquement d'ouverts. Il s'agit de la topologie associé à la base d'ouverts $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$.

Démonstration

(H1) Soit $x \in X$. On sait que X est un voisinage de x, donc il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subseteq X$, et donc $\mathcal{B}(x) \neq \varnothing$.
Soit $U \in \mathcal{B}(x)$: U est alors un voisinage de x, et donc $x \in U$ d'après **(V1)**.

(H2) Soient $x \in X$, U_1 et U_2 dans $\mathcal{B}(x)$: ce sont donc des voisinages de x, et donc $U_1 \cap U_2$ est aussi un voisinage de x d'après **(V3)**. Donc comme $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x, il existe $U_3 \in \mathcal{B}(x)$ tel que $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

(H3) Soient $x \in X$ et $U \in \mathcal{B}(x)$. Soit $y \in U$. Par définition, U est un ouvert, donc est un voisinage de chacun de ses points, dont y. Il existe donc $W \in \mathcal{B}(y)$ tel que $W \subseteq U$.

Montrons le « *réciproquement* ». Soit X un ensemble quelconque, et $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ est une famille d'ensemble de parties de X vérifiant **(H1)**, **(H2)** et **(H3)**. Posons $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ et montrons que $\mathcal{B}$ vérifie

(B1) et **(B2)**.

(B1) Soit $x \in X$. D'après **(H1)**, il existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tel que $x \in U$, et comme $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}$ par définition, on a $U \in \mathcal{B}$.

(B2) Soient U_1 et U_2 dans $\mathcal{B}$, et $x \in U_1 \cap U_2$.
Comme $U_1 \in \mathcal{B}$, il existe $y \in X$ tel que $U_1 \in \mathcal{B}(y)$, et comme $x \in U_1$, il existe $W_1 \in \mathcal{B}(x)$ tel que $x \in W_1 \subseteq U_1$ d'après **(H3)**. De même, comme $U_2 \in \mathcal{B}$, il existe $z \in X$ tel que $U_2 \in \mathcal{B}(z)$, et comme $x \in U_2$, il existe $W_2 \in \mathcal{B}(x)$ tel que $x \in W_2 \subseteq U_2$ d'après **(H3)**. Ainsi, on a $x \in W_1 \cap W_2$ avec $W_1 \in \mathcal{B}(x)$ et $W_2 \in \mathcal{B}(x)$. Il existe donc $W_3 \in \mathcal{B}(x)$ tel que $x \in W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$ d'après **(H2)**. Comme $W_3 \in \mathcal{B}(x)$, on a $W_3 \in \mathcal{B}$ et ainsi $x \in W_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.
CQFD.

2 Intérieur et adhérence

2.1 Intérieur et adhérence

Définition 7 (Intérieur, adhérence, frontière, point d'acc. et isolé)

Soient X un espace topologique, $x \in X$ et $A \subseteq X$.

1. On dit que x est **intérieur** à A si et seulement si A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle son **intérieur**, et est noté $\overset{\circ}{A}$.
2. On dit que x est **adhérent** à A si et seulement si pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \varnothing$. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle son **adhérence**, et est noté $\overline{A}$.
3. On dit que x est un **point frontière** de A si et seulement si x est adhérent à la fois à A et à $X \backslash A$. L'ensemble des points frontière de A est noté $\mathrm{Fr}(A)$, qui est donc $\overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$.
4. On dit que x est un **point d'accumulation** de A si et seulement si pour tout voisinage V de x, il existe $y \in V \cap A$ avec $y \neq x$. L'ensemble des points d'accumulation de A s'appelle **l'ensemble dérivé** de A, et est noté A'.
5. On dit que x est un **point isolé** de A si et seulement s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$.

Proposition 11

Soient $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique, $x \in X$ et $A \subseteq X$. On a alors :

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ et $A \subseteq \overline{A}$.
2. $x \in \overset{\circ}{A} \iff$ il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subseteq A$
3. $x \in A' \iff$ pour tout voisinage V de x, on a $(V \backslash \{x\}) \cap A \neq \varnothing$
4. $\overline{A} \backslash A \subseteq A' \subseteq \overline{A}$ et $\overline{A} = A \cup A'$
5. $x \in A' \iff x \in \overline{A \backslash \{x\}}$
6. x est isolé dans X si et seulement si $\{x\}$ est un ouvert de X
7. Si X est discret, alors $A' = \varnothing$: ainsi il est faux en toute généralité de dire $A \subseteq A'$.

Démonstration

(1) Soit $y \in \overset{\circ}{A}$. Cela veut dire que A est un voisinage de y. Donc $y \in A$ d'après **(V1)**, d'où $\boxed{\overset{\circ}{A} \subseteq A}$.

Soit $y \in A$. Soit V un voisinage de y : on a $y \in V$ d'après **(V1)**, donc $y \in A \cap V$ et donc $A \cap V \neq \varnothing$, d'où $y \in \overline{A}$, et d'où $\boxed{A \subseteq \overline{A}}$.

2 $x \in \overset{\circ}{A} \iff A$ est un voisinage de $x \iff$ il existe un ouvert U tel que $x \in U \subseteq A$.

3 C'est la définition d'être un élément de A'.

4 Soit $y \in \overline{A} \backslash A$. Soit V un voisinage de y : comme $y \in \overline{A}$, il existe $z \in V \cap A$, et comme $y \notin A$, on a $z \neq y$, d'où $y \in A'$, d'où $\boxed{\overline{A} \backslash A \subseteq A'}$.

La définition de A' est une condition plus forte que celle de $\overline{A}$, d'où l'inclusion $\boxed{A' \subseteq \overline{A}}$.

On a $A \subseteq \overline{A}$ et $A' \subseteq \overline{A}$, et comme on a dit que $\overline{A} \backslash A \subseteq A'$, on a $\boxed{\overline{A} = A \cup A'}$.

5 $x \in A' \underset{3}{\iff}$ pour tout voisinage V de x, on a $(V \backslash \{x\}) \cap A \neq \varnothing \iff$ pour tout voisinage V de x, on a $V \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing \iff x \in \overline{A \backslash \{x\}}$.

6

$$
\begin{aligned}
& x \text{ est isolé dans } X \\
\iff & \text{ il existe un voisinage } V \text{ de } x \text{ tel que } V \cap X = \{x\} \\
\iff & \text{ il existe un voisinage } V \text{ de } x \text{ tel que } V = \{x\} \\
\iff & \{x\} \text{ est un voisinage de } x \\
\iff & \text{ il existe un ouvert } U \text{ tel que } x \in U \subseteq \{x\} \\
\iff & \text{ il existe un ouvert } U \text{ tel que } \{x\} \subseteq U \subseteq \{x\} \\
\iff & \{x\} \text{ est un ouvert}
\end{aligned}
$$

7 Supposons que X est discret. Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in A'$. L'ensemble $\{y\}$ est un ouvert car X est discret, donc $\{y\}$ est un voisinage de y, donc $\{y\} \backslash \{y\} \cap A' \neq \varnothing$ d'après 3, donc $\varnothing \cap A' \neq \varnothing$, ce qui est absurde.

CQFD.

Proposition 12 (Intérieur, adhérence et base de voisinages)

Soient $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique, $x \in X$, $A \subseteq X$ et $\mathcal{B}(x)$ une base de voisinages de x. On a alors :

1. $x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists V \in \mathcal{B}(x), V \subseteq A$

2. $x \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathcal{B}(x), V \cap A \neq \varnothing$

Démonstration

1 $x \in \overset{\circ}{A} \iff A$ est un voisinage de $x \iff \exists V \in \mathcal{B}(x), V \subseteq A$ par définition d'une base de voisinages.

2 $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $x \in \overline{A}$. Donc pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \varnothing$. En particulier, comme $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x, on a $\forall V \in \mathcal{B}(x), V \cap A \neq \varnothing$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons que $\forall V \in \mathcal{B}(x), V \cap A \neq \varnothing$. Soit W un voisinage de x. Comme $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x, il existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tel que $V \subseteq W$, et comme $V \cap A \neq \varnothing$ par hypothèse, on a $W \cap A \neq \varnothing$, si bien que $x \in \overline{A}$.
CQFD.

Proposition 13 (Propriétés des adhérences et des intérieurs)

Soient A et B des parties d'un espace topologique $(X; \mathcal{T})$.

1. Si $A \subseteq B$, alors $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
2. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, et c'est le plus grand des ouverts contenus dans A.
   On a donc $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ ouvert}}} U$.
3. $\overline{A}$ est un fermé, et c'est le plus petit des fermés contenant A.
   On a donc $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ fermé}}} F$.
4. A est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$. En particulier $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$
5. A est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$. En particulier $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Démonstration

1 Supposons que $A \subseteq B$.
• Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. Il existe donc un ouvert U tel que $x \in U \subseteq A$, donc $x \in U \subseteq B$ puisque $A \subseteq B$, donc $x \in \overset{\circ}{B}$, d'où $\boxed{\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}}$.
• Soit $x \in \overline{A}$. Donc tout voisinage V de x vérifie $V \cap A \neq \varnothing$. Donc comme $A \subseteq B$, tout voisinage V de x vérifie $V \cap B \neq \varnothing$, donc $x \in \overline{B}$. On en conclut que $\boxed{\overline{A} \subseteq \overline{B}}$.

2 • Soit U un ouvert inclus dans A.
Soit $y \in U$: comme U est ouvert et $y \in U \subseteq A$, A est un voisinage de y si bien que $y \in \overset{\circ}{A}$ par définition de $\overset{\circ}{A}$, d'où $\boxed{U \subseteq \overset{\circ}{A}}$.

• Montrons que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.
Soit $x \in \overset{\circ}{A}$: par définition A est donc un voisinage de x. Il existe donc un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subseteq A$. Ainsi, $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{x \in \overset{\circ}{A}} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in \overset{\circ}{A}} U_x \subseteq \overset{\circ}{A}$, d'où $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{x \in \overset{\circ}{A}} U_x$ qui est une réunion d'ouverts, qui est donc ouvert.

3 • Montrons que $\overline{A}$ est fermé en montrant que $X \backslash \overline{A}$ est ouvert.
Soit $x \in X \backslash \overline{A}$: il existe un voisinage V_x de x tel que $V_x \cap A = \varnothing$, et comme V_x est un voisinage de x, il existe un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subseteq V_x$, si bien que $U_x \cap A = \varnothing$. Comme U_x est ouvert, pour tout $y \in U_x$, U_x est un voisinage de y, et donc comme $U_x \cap A = \varnothing$, on a $y \in X \backslash \overline{A}$, si bien que $U_x \subseteq X \backslash \overline{A}$. Ainsi, pour tout $x \in X \backslash \overline{A}$ on a trouvé un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subseteq X \backslash \overline{A}$, donc $X \backslash \overline{A}$ est un ouvert.
• Soit F un fermé tel que $A \subseteq F$: montrons que $\overline{A} \subseteq F$ en montrant que $X \backslash F \subseteq X \backslash \overline{A}$.
Soit $x \in X \backslash F$. Comme F est fermé, $X \backslash F$ est ouvert donc c'est un voisinage de x. Comme $A \subseteq F$, on a $X \backslash F \cap A = \varnothing$: c'est un voisinage de x disjoint de A, donc $x \in X \backslash \overline{A}$, et donc $(X \backslash F) \subseteq X \backslash \overline{A}$.

4 Si $A = \overset{\circ}{A}$, alors A est un ouvert d'après 2. Réciproquement, si A est un ouvert, alors A est un ouvert contenant A donc $A \subseteq \overset{\circ}{A}$ d'après 2, mais on a aussi $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ d'après 1, d'où l'égalité.

5 Si $A = \overline{A}$, alors A est un fermé d'après 3. Réciproquement, si A est un fermé, alors A est un fermé contenant A donc $\overline{A} \subseteq A$ d'après 3, mais on a aussi $A \subseteq \overline{A}$ d'après 1, d'où l'égalité.
CQFD.

Proposition 14 (Complémentaire de l'adhérence et de l'intérieur)

Soient $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique, et $A \subseteq X$.
On a alors :

1. $\overset{\circ}{\overbrace{X \backslash A}} = X \backslash \overline{A}$
2. $\overline{X \backslash A} = X \backslash \overset{\circ}{A}$

Démonstration

1 On a $A \subseteq \overline{A}$ donc $X \backslash \overline{A} \subseteq X \backslash A$. Or, $\overline{A}$ est fermé donc $X \backslash \overline{A}$ est un ouvert contenu dans $X \backslash A$, donc $X \backslash \overline{A} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{X \backslash A}}$. Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{\overbrace{X \backslash A}}$: il existe un ouvert U tel que $x \in U \subseteq X \backslash A$. Comme U est un ouvert, il est voisinage de chacun de ses points donc de x : c'est donc un voisinage de

x qui est disjoint de A, et donc $x \notin \overline{A}$, donc $x \in X\backslash\overline{A}$. Ainsi, $\overset{\circ}{\overbrace{X\backslash A}} \subseteq X\backslash\overline{A}$, d'où l'égalité.

(2) On déduit de (1) que $X\backslash(\overline{X\backslash A}) = \overset{\circ}{\overbrace{X\backslash(X\backslash A)}} = \overset{\circ}{A}$ par involution du complémentaire, et donc $X\backslash\overset{\circ}{A} = X\backslash\Big(X\backslash(\overline{X\backslash A})\Big) = \overline{X\backslash A}$ par involution du complémentaire.
CQFD.

2.2 Famille localement finie

Définition 8 (Famille de parties localement finie)

Soient X un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est **localement finie** si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x tel que pour tout $i \in I$ (sauf éventuellement en un nombre fini de i), on a $V \cap A_i = \varnothing$.

Proposition 15 (Localement finie, adhérence et union)

Soient X un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille localement finie de parties de X.

1. La famille $\left(\overline{A_i}\right)_{i\in I}$ est aussi localement finie.
2. On a $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$. Par conséquent, la réunion quelconque d'une famille localement finie de parties fermées est elle aussi fermée.

Démonstration

1. Soit $x \in X$. Comme $(A_i)_{i\in I}$ est une famille localement finie, il existe un voisinage ouvert U de x, et une partie finie J de I tels que $\forall i \in I\backslash J, U \cap A_i = \varnothing$.

Soit $y \in U$, alors U est un voisinage de y tel que $\forall i \in I\backslash J, U \cap A_i = \varnothing$, donc $\forall i \in I\backslash J, y \notin \overline{A_i}$. Donc $\forall i \in I\backslash J, U \cap \overline{A_i} = \varnothing$: pour tout $x \in X$, on a trouvé un voisinage (ouvert) U de x tel que $U \cap \overline{A_i} = \varnothing$ pour tout i sauf éventuellement un nombre fini de i, donc $\boxed{\left(\overline{A_i}\right)_{i\in I} \text{ est aussi localement finie}}$.

2. Pour tout $j \in I$, on a $A_j \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ donc $\overline{A_j} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}$ donc $\bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}$.
Réciproquement, soit $x \in X$. Montrons que si $x \notin \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$, alors $x \notin \overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}$.
Comme $(A_i)_{i\in I}$ est localement finie, il existe un voisinage V de x et un ensemble fini $J \subseteq I$ tel que $\forall i \in I\backslash J, V \cap A_i = \varnothing$.
Supposons donc que $x \notin \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$: on a $\forall i \in I, x \notin \overline{A_i}$, et donc en particulier $\forall j \in J, x \notin \overline{A_j}$ donc pour

tout $j \in J$, il existe un voisinage V_j de x tel que $V_j \cap A_j = \varnothing$. Posons $W := V \cap \bigcap_{j \in J} V_j$ qui est aussi un voisinage de x, qui est donc tel que $\forall i \in I, W \cap A_i = \varnothing$, donc $W \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \varnothing$: on a donc trouvé un voisinage de x qui est disjoint de $\bigcup_{i \in I} A_i$, si bien que $x \notin \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$.
CQFD.

2.3 Parties denses et espaces séparables

Définition 9 (Partie dense et espace séparable)

Soient $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique, et $A \subseteq X$.

1. On dit que A est **dense** dans X si et seulement si $\overline{A} = X$.
2. On dit que X est **séparable** si et seulement s'il existe une partie de X dense dans X qui est au plus dénombrable.

Exemple :
Dans $\mathbb{R}$ munit de sa topologie habituelle, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}$ est séparable.

Proposition 16 (Densité, complémentaire et intérieur)

Soient X un espace topologique, et $A \subseteq X$.

1. A est dense dans X si et seulement si $\overbrace{X \backslash A}^{\circ} = \varnothing$.
2. $\overset{\circ}{A} = \varnothing$ si et seulement si $X \backslash A$ est dense dans X.

Démonstration

1. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & A \text{ est dense dans } X \\ \iff\ & \overline{A} = X \\ \iff\ & X \backslash \overline{A} = \varnothing \\ \iff\ & \overbrace{X \backslash A}^{\circ} = \varnothing \end{aligned}$$

2. On a les équivalences suivantes :

$$\overset{\circ}{A} = \varnothing \iff \overbrace{X \backslash (X \backslash A)}^{\circ} = \varnothing \iff X \backslash A \text{ est dense dans } X.$$

CQFD.

Proposition 17 (Partie dense et base d'ouverts)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X et $A \subseteq X$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est dense dans X
2. Pour tout ouvert non vide U de X, on a $U \cap A \neq \varnothing$.
3. Pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \varnothing$, on a $B \cap A \neq \varnothing$.

Démonstration

$\boxed{1. \Longrightarrow 2.}$ Supposons que A est dense dans X. On a donc $\overline{A} = X$. Donc pour tout $x \in X$, on a $x \in \overline{A}$ donc pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A = \varnothing$.
Soit U un ouvert non vide : il existe $x \in U$ et donc U est un voisinage de x, si bien que $U \cap A = \varnothing$ d'après ce qu'on a dit.

$\boxed{2. \Longrightarrow 3.}$ Immédiat.

$\boxed{3. \Longrightarrow 1.}$ Supposons que pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \varnothing$, on a $B \cap A \neq \varnothing$. Supposons alors par l'absurde que $\overline{A} \neq X$: donc $X \backslash \overline{A}$ est un ouvert non vide : il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \varnothing$ et $B \in X \backslash \overline{A}$, mais comme $(X \backslash \overline{A}) \cap A = \varnothing$, on a $B \cap A = \varnothing$, ce qui est absurde par hypothèse.
CQFD.

Proposition 18 (Espace séparable et famille d'ouverts 2 à 2 disjoints)

Soit X un espace topologique. Si X est séparable, alors pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts deux à deux disjoints, I est au plus dénombrable.

Démonstration

Supposons que X est séparable : il existe une partie au plus dénombrable $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de X telle que $\overline{D} = X$.
Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints. D'après la proposition précédente, pour tout $i \in I$, $U_i \cap D \neq \varnothing$ donc pour tout $i \in I$, il existe au moins un $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U_i$. Posons alors pour tout $i \in I$, $n_i := \min\Big(\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_i\}\Big)$. Comme les termes de $(U_i)_{i \in I}$ sont disjoints deux à

deux, $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & D \\ i & \longmapsto & n_i \end{array}$ est injective, et donc $\boxed{I \text{ est au plus dénombrable}}$.

CQFD.

Définition 10 (Axiomes de dénombrabilité)

Soit X un espace topologique.

1. On dit que X vérifie le **1^er axiome de dénombrabilité** si et seulement si tout $x \in X$ admet une base au plus dénombrable de voisinages.
2. On dit que X vérifie le **2^ème axiome de dénombrabilité** si et seulement si X admet une base au plus dénombrable d'ouverts.

Proposition 19 (Lien entre les axiomes de dénombrabilité)

Soit X un espace topologique. Si X vérifie le 2^ème axiome de dénombrabilité, alors X vérifie le 1^er axiome de dénombrabilité.

Démonstration

Supposons que X vérifie le 2^ème axiome de dénombrabilité. X admet donc $\mathcal{B}$ une base au plus dénombrable d'ouverts.

Soit $x \in X$. Posons $\mathcal{V}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ et montrons que $\mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages de x. Remarquons tout d'abord que $\mathcal{V}(x)$ est bien constitué de voisinages de x, car ce sont des ouverts contenant x.

Soit V un voisinage de x : il existe donc un ouvert U tel que $x \in U \subseteq V$. Or, $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, donc il existe $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Comme $x \in U$, il existe $j \in I$ tel que $x \in B_j$, et donc on a $x \in B_j \subseteq U \subseteq V$. Or, B_j est un ouvert, donc un voisinage de chacun de ses points dont x en particulier, et donc $x \in B_j$. De plus, comme $B_j \in \mathcal{B}$ et $x \in B_j$, on a $B_j \in \mathcal{V}(x)$.

En résumé, $B_j \in \mathcal{V}(x)$ est un voisinage de x tel que $B_j \subseteq V$.

Donc pour tout voisinage V de x, il existe un voisinage de x, $B \in \mathcal{V}(x)$, tel que $B \subseteq V$: $\mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages de x, et comme c'est une partie de $\mathcal{B}$ qui est au plus dénombrable, $\mathcal{V}(x)$ est aussi au plus dénombrable.

Donc pour tout $x \in X$, x admet une base de voisinages au plus dénombrables,
et donc $\boxed{X \text{ vérifie le } 1^{\text{er}} \text{axiome de dénombrabilité}}$.

CQFD.

Remarque :

La réciproque est fausse : en effet en considérant X infini indénombrable, muni de la topologie discrète, alors pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x) := \{\{x\}\}$ est une base de voisinages de x qui est bien au plus dénombrable, mais X n'admet pas de base d'ouverts qui est au plus dénombrable, puisqu'elle devrait contenir en particulier l'ensemble $\{\{x\} \mid x \in X\}$ qui est indénombrable.

Exemple :

L'espace $\mathbb{R}$ munit de la topologie usuelle admet une base dénombrable d'ouverts. En effet, il suffit de considérer $\mathcal{B} := \{]a;b[\mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q} \text{ et } a < b\}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathcal{B}$ l'est aussi. Il reste donc à montrer que c'est une base d'ouverts : cela revient, d'après la prop. 9 p. 13, à montrer que pour tout $x \in X$, $\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ est une base de voisinages de x. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe p_n et q_n dans $\mathbb{Q}$ tels que $x - \frac{1}{n} < p_n < x < q_n < x + \frac{1}{n}$. Alors $\{]p_n; q_n[\mid n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathcal{B}$ est une base de voisinages de x.

De même, dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathcal{B} \cup \{[-\infty; n[\mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{]n; +\infty] \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base dénombrable d'ouverts.

Théorème 1 (Base dénombrable d'ouverts et séparabilité)

Soit $(X; \mathcal{T})$ un espace topologique.

Si X admet une base dénombrable d'ouverts, alors X est séparable.

Démonstration

Supposons que X admet une base dénombrable d'ouverts, que l'on va noter $\mathcal{B} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \neq \varnothing$, et donc considérer $x_n \in U_n$. Enfin, posons $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et montrons que A est dense dans X. Pour cela, montrons que A rencontre tout ouvert, ce qui est équivalent d'après la prop. 17 p. 22

Soit U un ouvert non vide. Puisque $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts non vides, il existe une partie non vide $J \subseteq \mathbb{N}$ telle que $U = \bigcup_{n \in J} U_n$.

Donc $\forall n \in J, x_n \in U$, donc comme J est non vide, on a $A \cap U \neq \varnothing$.

Donc pour tout ouvert U, on a $A \cap U \neq \varnothing$, si bien que A est une partie dense et dénombrable de X, et donc $\boxed{X \text{ est séparable}}$.

CQFD.

Remarque :

La réciproque de ce théorème est vraie si l'espace est métrique, mais est fausse en toute généralité. En effet, soit X un ensemble infini, munis de la topologie cofinie, c'est-à-dire $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid X \backslash A \text{ est finie}\}$.

• Commençons par montrer que toute partie infinie A de X est dense dans X. En effet, pour tout ouvert U on a par définition que $X \backslash U$ est finie, si bien que $A \nsubseteq X \backslash U$ et donc $A \cap U \neq \varnothing$. Cela équivaut à dire que A

est dense d'après la prop. 17 p. 22. En particulier, toute partie infinie dénombrable de X est dense, si bien que X est séparable.

• Cependant, en supposant que X est non dénombrable, montrons que X n'admet pas de base dénombrable d'ouverts. Pour cela, supposons par l'absurde que ça soit le cas. Il existe donc une suite de parties finies $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que $\{X\backslash A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base dénombrable d'ouverts. Comme X est infini indénombrable, il existe $x \in X\backslash \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. Posons alors $U = X\backslash\{x\}$, qui est cofini donc ouvert. Comme $\{X\backslash A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base d'ouverts, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X\backslash A_n \subseteq U$. Mais $A_n \subseteq U$ puisque $x \notin A_n$, si bien que $X \subseteq U$ et donc $X = U$, ce qui est absurde puisque $x \in X$.

3 Applications continues

3.1 Applications continues

Définition 11 (Applications continues en un point)

Soient X et Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $f : X \to Y$.
On dit que f est **continue** en x_0 si et seulement si elle vérifie l'une des deux assertions suivantes, qui sont équivalentes :

1. Pour tout voisinage W de $f(x_0)$, $f^{\leftarrow}(W)$ est un voisinage de x_0.
2. Pour tout voisinage W de $f(x_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f^{\rightarrow}(V) \subseteq W$.

Intuitivement, cela veut dire que si x est voisin de x_0 (donc si $x \in f^{\leftarrow}(W)$), alors $f(x)$ est voisin de $f(x_0)$ (car $f(x) \in W$).

Démonstration

Montrons l'équivalence entre 1. et 2.
$\boxed{1. \implies 2.}$ Supposons que pour tout voisinage W de $f(x_0)$, $f^{\leftarrow}(W)$ est un voisinage de x_0.
Soit W un voisinage de $f(x_0)$. Par hypothèse, $f^{\leftarrow}(W)$ est un voisinage de x_0. Posons $V := f^{\leftarrow}(W)$.
On a alors $f^{\rightarrow}(V) = f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(W)\big) = W$ donc $f^{\rightarrow}(V) \subseteq W$.
$\boxed{2. \implies 1}$ Supposons que pour tout voisinage W de $f(x_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f^{\rightarrow}(V) \subseteq W$.
Soit W un voisinage de $f(x_0)$. Par hypothèse, il existe donc un voisinage V de x_0 tel que $f^{\rightarrow}(V) \subseteq W$.
Donc $V \subseteq f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(V)\big) \subseteq f^{\leftarrow}(W)$, donc $f^{\leftarrow}(W)$ contient un voisinage de x_0, donc $f^{\leftarrow}(W)$ est un voisinage de x_0.
CQFD.

Définition 12 (Applications continues et homéomorphismes)

Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$.

1. On dit que f est **continue** si et seulement si f est continue en tout point de x.
2. On dit que f est un **homéomorphisme** de X dans Y si et seulement si f est bijective, et que f et f^{-1} sont continues.
3. On dit que X et Y sont **homéomorphes** si et seulement s'il existe un homéomorphisme de X dans Y.

Les propriétés qui se conservent par homéomorphisme sont appelées **propriétés topologiques**.

Exemple :

1. Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique. Alors $\mathrm{id}_X : (X;\mathcal{T}) \to (X;\mathcal{T})$ est continue. En effet, pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage W de $\mathrm{id}_X(x_0) = x_0$, on a $\mathrm{id}_X{}^{\leftarrow}(W) = W$ qui est donc un voisinage de x_0.

2. Soient $(X;\mathcal{T})$ et $(Y;\mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Soit $c \in Y$ et soit $f : X \to Y$ l'application constante égale à c : alors f est continue de $(X;\mathcal{T})$ dans $(Y;\mathcal{T}')$. En effet, pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage W de $f(x_0) = c$, on a $c \in W$ donc $\{c\} \subseteq W$ donc $f^{\leftarrow}(W) = X$, qui est bien un voisinage de x_0.

3. Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$. L'application $1_A : X \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si A est à la fois ouvert et fermé dans X :

en effet, pour toute partie B de $\mathbb{R}$, on a $1_A{}^{\leftarrow}(B) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \notin B \\ A & \text{si } 1 \in B \text{ et } 0 \notin B \\ X \backslash A & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \notin B \\ X & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \in B \end{cases}$

Remarque :

Soient $(X;\mathcal{T}_X)$ et $(Y;\mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques.

1. Si Y est muni de la topologie grossière (c'est-à-dire $\mathcal{T}_Y = \{\varnothing; Y\}$), alors toute application de X dans Y est continue.
2. Si X est muni de la topologie discrète (c'est-à-dire $\mathcal{T}_X = \mathscr{P}(X)$), alors toute application de X dans Y est continue.
3. Si X est muni de la topologie grossière, alors une application de X dans Y est continue si et seulement si elle est constante.

Remarque :

Une application continue et bijective n'est pas nécessairement un homéomorphisme. En effet, prenons $X = Y = \mathbb{R}$ et $\mathcal{T}_X = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ la topologie discrète sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{T}_Y$ la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, alors l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : (X;\mathcal{T}_X) \to (Y;\mathcal{T}_Y)$ est continue bijective mais $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : (Y;\mathcal{T}_Y) \to (X;\mathcal{T}_X)$ n'est pas continue.

Proposition 20 (Composée d'applications continues)

Soient X, Y et Z trois espaces topologiques. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$.

1. Si f est continue en un point $x_0 \in X$, et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.
2. Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Démonstration

1. Supposons que f est continue en un point $x_0 \in X$, et que g est continue en $f(x_0)$.

Soit W un voisinage de $(g \circ f)(x_0) = g\big(f(x_0)\big)$.

Comme g est continue en $f(x_0)$ par hypothèse, $g^{\leftarrow}(W)$ est un voisinage de $f(x_0)$.

Comme f est continue en x_0 par hypothèse, $f^{\leftarrow}\big(g^{\leftarrow}(W)\big)$ est un voisinage de x_0.

Or, $f^{\leftarrow}\big(g^{\leftarrow}(W)\big) = (g \circ f)^{\leftarrow}(W)$, donc $(g \circ f)^{\leftarrow}(W)$ est un voisinage de x_0.

Donc pour tout voisinage W de $(g \circ f)(x_0)$, $(g \circ f)^{\leftarrow}(W)$ est un voisinage de x_0, si bien que $\boxed{g \circ f \text{ est continue en } x_0}$.

2. Immédiat d'après 1.

CQFD.

Théorème 2 (Caractérisation des applications continues)

Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue.
2. Pour tout ouvert U de Y, $f^{\leftarrow}(U)$ est un ouvert de X.
3. Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de Y, alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{\leftarrow}(U)$ est un ouvert de X.
4. Pour toute partie B de Y, $f^{\leftarrow}\left(\overset{\circ}{B}\right) \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{f^{\leftarrow}(B)}}$.
5. Pour tout fermé F de Y, $f^{\leftarrow}(F)$ est un fermé de X.
6. Pour toute partie A de X, $f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f^{\rightarrow}(A)}$.
7. Pour toute partie B de Y, $\overline{f^{\leftarrow}(B)} \subseteq f^{\leftarrow}\left(\overline{B}\right)$.

Démonstration

Montrons 1. $\Longleftrightarrow$ 2 $\Longrightarrow$ 3 $\Longrightarrow$ 4 $\Longrightarrow$ 5 $\Longrightarrow$ 6 $\Longrightarrow$ 7 $\Longrightarrow$ 2.

$\boxed{1. \Longrightarrow 2.}$ Supposons que f est continue. Soit U un ouvert de Y.

Soit $x \in f^{\leftarrow}(U)$. On a donc $f(x) \in U$, et comme U est ouvert, c'est un voisinage de chacun de ses points donc de $f(x)$ en particulier. Or, f est continue par hypothèse, donc est continue en x en particulier, donc $f^{\leftarrow}(U)$ est un voisinage de x.

Donc $f^{\leftarrow}(U)$ est un voisinage de chacun de ses points : c'est donc un ouvert.

$\boxed{2. \Longrightarrow 1.}$ Supposons que pour tout ouvert U de Y, $f^{\leftarrow}(U)$ est un ouvert de X.

Soit $x \in X$, et soit W un voisinage de $f(x)$.
Il existe donc un ouvert U de Y tel que $f(x) \in U \subseteq W$, et donc $x \in f^{\leftarrow}(U) \subseteq f^{\leftarrow}(W)$. Comme U est un ouvert de Y, $f^{\leftarrow}(U)$ est un ouvert de X par hypothèse, si bien que $f^{\leftarrow}(U)$ est un ouvert contenant x et contenu dans $f^{\leftarrow}(W)$, ce qui prouve que $f^{\leftarrow}(W)$ est un voisinage de x.

Donc pour tout $x \in X$ et tout voisinage W de $f(x)$, on a bien $f^{\leftarrow}(W)$ voisinage de x.
Cela montre que $\boxed{f \text{ est continue en tout point de } X}$.

$\boxed{2. \Longrightarrow 3.}$ C'est immédiat car $\mathcal{B}$ est un ensemble d'ouverts par définition.

$\boxed{3. \Longrightarrow 4.}$ Supposons que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de Y telle que pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{\leftarrow}(U)$ est un ouvert de X.
Soit B une partie de Y : alors $\overset{\circ}{B}$ est un ouvert, et comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, il existe $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{B}$ tels que $\overset{\circ}{B} = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. On a donc $f^{\leftarrow}\left(\overset{\circ}{B}\right) = f^{\leftarrow}\left(\bigcup\limits_{i\in I} U_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{\leftarrow}(U_i)$. Or pour tout $i \in I$, $f^{\leftarrow}(U_i)$ est un ouvert par hypothèse donc $f^{\leftarrow}\left(\overset{\circ}{B}\right)$ est un ouvert car réunion quelconque d'ouverts. Or, $\overset{\circ}{B} \subseteq B$ donc $f^{\leftarrow}\left(\overset{\circ}{B}\right) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$, si bien que $f^{\leftarrow}\left(\overset{\circ}{B}\right)$ est un ouvert inclus dans $f^{\leftarrow}(B)$,

ce qui nous donne bien $\boxed{f^{\leftarrow}\left(\overset{\circ}{B}\right) \subseteq \overbrace{f^{\leftarrow}(B)}^{\circ}}$.

$\boxed{4. \Longrightarrow 5.}$ Supposons que pour toute partie B de Y, on a $f^{\leftarrow}\left(\overset{\circ}{B}\right) \subseteq \overbrace{f^{\leftarrow}(B)}^{\circ}$.

Soit F une partie fermée de Y : par définition $Y\backslash F$ est un ouvert de Y, donc $\overbrace{Y\backslash F}^{\circ} = Y\backslash F$.
Or, $f^{\leftarrow}\left(\overbrace{Y\backslash F}^{\circ}\right) \subseteq \overbrace{f^{\leftarrow}(Y\backslash F)}^{\circ}$ par hypothèse, donc $f^{\leftarrow}(Y\backslash F) \subseteq \overbrace{f^{\leftarrow}(Y\backslash F)}^{\circ}$. Mais on a toujours $\overbrace{f^{\leftarrow}(Y\backslash F)}^{\circ} \subseteq f^{\leftarrow}(Y\backslash F)$, si bien que $f^{\leftarrow}(Y\backslash F) = \overbrace{f^{\leftarrow}(Y\backslash F)}^{\circ}$ et donc $f^{\leftarrow}(Y\backslash F)$ est un ouvert. Or, $f^{\leftarrow}(Y\backslash F) = X\backslash f^{\leftarrow}(F)$ donc $X\backslash f^{\leftarrow}(F)$ est un ouvert, donc $\boxed{f^{\leftarrow}(F) \text{ est un fermé}}$.

$\boxed{5. \Longrightarrow 6.}$ Supposons que pour tout fermé F de Y, $f^{\leftarrow}(F)$ est un fermé de X.
Soit A une partie de X : on a alors $f^{\rightarrow}(A) \subseteq \overline{f^{\rightarrow}(A)}$. Donc $f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A)\right) \subseteq f^{\leftarrow}\left(\overline{f^{\rightarrow}(A)}\right)$, et comme $A \subseteq f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$, on a $A \subseteq f^{\leftarrow}\left(\overline{f^{\rightarrow}(A)}\right)$. Or, $\overline{f^{\rightarrow}(A)}$ est un fermé de Y, donc $f^{\leftarrow}\left(\overline{f^{\rightarrow}(A)}\right)$ est un fermé de X par hypothèse, qui contient A, si bien que $\overline{A} \subseteq f^{\leftarrow}\left(\overline{f^{\rightarrow}(A)}\right)$,
et donc $f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) \subseteq f^{\rightarrow}\left(f^{\leftarrow}\left(\overline{f^{\rightarrow}(A)}\right)\right)$. Comme $f^{\rightarrow}\left(f^{\leftarrow}\left(\overline{f^{\rightarrow}(A)}\right)\right) = \overline{f^{\rightarrow}(A)}$, on a bien $\boxed{f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f^{\rightarrow}(A)}}$.

$\boxed{6. \Longrightarrow 7.}$ Supposons que pour toute partie A de X, on a $f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f^{\rightarrow}(A)}$.
Soit B une partie de Y : on a alors $f^{\rightarrow}\left(\overline{f^{\leftarrow}(B)}\right) \subseteq \overline{f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)}$ par hypothèse.

Or, $f^{\rightarrow}\left(f^{\leftarrow}(B)\right) = B$, si bien que $f^{\rightarrow}\left(\overline{f^{\leftarrow}(B)}\right) \subseteq \overline{B}$ et donc $f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}\left(\overline{f^{\leftarrow}(B)}\right)\right) \subseteq f^{\leftarrow}\left(\overline{B}\right)$.

Or, $\overline{f^{\leftarrow}(B)} \subseteq f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}\left(\overline{f^{\leftarrow}(B)}\right)\right)$, ce qui nous donne $\boxed{\overline{f^{\leftarrow}(B)} \subseteq f^{\leftarrow}\left(\overline{B}\right)}$.

$\boxed{7. \implies 2}$ Supposons que pour toute partie B de Y, on a $\overline{f^{\leftarrow}(B)} \subseteq f^{\leftarrow}(\overline{B})$.
Soit U un ouvert de Y : on a donc $Y\backslash U$ est un fermé de Y et donc $\overline{Y\backslash U} = Y\backslash U$.
Or, $\overline{f^{\leftarrow}(Y\backslash U)} \subseteq f^{\leftarrow}(\overline{Y\backslash U})$ par hypothèse, donc $\overline{f^{\leftarrow}(Y\backslash U)} \subseteq f^{\leftarrow}(Y\backslash U)$. Mais on a toujours $\overline{f^{\leftarrow}(Y\backslash U)} \supseteq f^{\leftarrow}(Y\backslash U)$, si bien que $\overline{f^{\leftarrow}(Y\backslash U)} = f^{\leftarrow}(Y\backslash U)$ et donc $f^{\leftarrow}(Y\backslash U)$ est un fermé de X.
Or, $f^{\leftarrow}(Y\backslash U) = X\backslash f^{\leftarrow}(U)$ donc $X\backslash f^{\leftarrow}(U)$ est un fermé de X, et donc $\boxed{f^{\leftarrow}(U) \text{ est un ouvert de } X}$.
CQFD.

Remarque :
L'image directe d'un ouvert (respectivement d'un fermé) par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (respectivement un fermé). Par exemple avec $f = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{pmatrix}$,
on a $f^{\rightarrow}(\mathbb{R}) = [0; +\infty[$ qui n'est ni ouvert ni fermé.

3.2 Applications ouvertes et applications fermées

Définition 13 (Applications ouverts et fermées)

Soient X et Y deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$.

1. On dit que f est **ouverte** si et seulement si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y.
2. On dit que f est **fermée** si et seulement si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

Proposition 21 (Caractérisation des applications ouvertes)

Soient X et Y deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est une application ouverte.
2. Pour toute partie A de X, on a $f^{\rightarrow}\left(\mathring{A}\right) \subseteq \overbrace{f^{\rightarrow}(A)}^{\circ}$.
3. Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert de Y.
4. Pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x, $f^{\rightarrow}(V)$ est un voisinage de $f(x)$.
5. Pour tout $B \subseteq Y$ et tout fermé F de X tels que $f^{\leftarrow}(B) \subseteq F$, il existe un fermé D de Y tel que $B \subseteq D$ et $f^{\leftarrow}(D) \subseteq F$.

Démonstration

On va montrer 1 $\iff$ 2 puis 1 $\iff$ 3 ensuite 1 $\iff$ 4 et enfin 1 $\iff$ 5.

$\boxed{1 \implies 2}$ Supposons que f est ouverte. Soit A une partie de X.
On a alors $\mathring{A} \subseteq A$ donc $f^{\rightarrow}\left(\mathring{A}\right) \subseteq f^{\rightarrow}(A)$. Or, $\mathring{A}$ est un ouvert de X, donc $f^{\rightarrow}\left(\mathring{A}\right)$ est un ouvert de Y puisque f est ouverte par hypothèse. Ainsi, $f^{\rightarrow}\left(\mathring{A}\right)$ est un ouvert de Y contenu dans $f^{\rightarrow}(A)$, si bien que $\boxed{f^{\rightarrow}\left(\mathring{A}\right) \subseteq \overbrace{f^{\rightarrow}(A)}^{\circ}}$.

$\boxed{2 \implies 1}$ Supposons que pour toute partie A de X, on a $f^{\rightarrow}\left(\mathring{A}\right) \subseteq \overbrace{f^{\rightarrow}(A)}^{\circ}$.
Soit U un ouvert de X : on a alors $\mathring{U} = U$.
Or, $f^{\rightarrow}\left(\mathring{U}\right) \subseteq \overbrace{f^{\rightarrow}(U)}^{\circ}$ par hypothèse.
Donc $f^{\rightarrow}(U) \subseteq \overbrace{f^{\rightarrow}(U)}^{\circ}$.
Mais on a toujours $f^{\rightarrow}(U) \supseteq \overbrace{f^{\rightarrow}(U)}^{\circ}$.
On a donc $f^{\rightarrow}(U) = \overbrace{f^{\rightarrow}(U)}^{\circ}$.
Autrement dit, $f^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert, et donc $\boxed{f \text{ est ouverte}}$.

$\boxed{1 \implies 3}$ C'est immédiat puisque $\mathcal{B}$ est un ensemble d'ouverts de X par définition.

$\boxed{3 \implies 1}$ Supposons qu'il existe une base d'ouverts $\mathcal{B}$ de X telle que $\forall U \in \mathcal{B}$, $f^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert de Y.
Soit U un ouvert de X : comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, il existe une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$.
Alors $f^{\rightarrow}(U) = f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(U_i)$.
Or, $\forall i \in I, U_i \in \mathcal{B}$ donc $\forall i \in I$, $f^{\rightarrow}(U_i)$ est un ouvert par hypothèse.
Donc $f^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert comme réunion quelconque d'ouverts, si bien que $\boxed{f \text{ est ouverte}}$.

$\boxed{1 \implies 4}$ Supposons que f est ouverte.
Soient $x \in X$ et V un voisinage de x : il existe donc U un ouvert tel que $x \in U \subseteq V$.
On a alors $f(x) \in f^{\rightarrow}(U) \subseteq f^{\rightarrow}(V)$.
Or, U est ouvert donc $f^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert puisque f est ouverte par hypothèse.
Donc $f^{\rightarrow}(V)$ contient un ouvert qui contient $f(x)$, donc $\boxed{f^{\rightarrow}(V) \text{ est un voisinage de } f(x)}$.

$\boxed{4 \implies 1}$ Supposons que pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x, $f^{\rightarrow}(V)$ est un voisinage de $f(x)$.
Soit U un ouvert de X.

Soit $y \in f^{\rightarrow}(U)$: il existe $x \in U$ tel que $y = f(x)$.

Comme U est un ouvert, c'est un voisinage de chacun de ses points donc de x en particulier.

Donc $f^{\rightarrow}(U)$ est un voisinage de $f(x) = y$.

Donc $f^{\rightarrow}(U)$ est un voisinage de chacun de ses points : c'est donc un ouvert.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est une application ouverte}}$.

$\boxed{1 \implies 5}$ Supposons que f est ouverte.
Soient B une partie de Y et F un fermé de X tels que $f^{\leftarrow}(B) \subseteq F$.
On a donc $X \backslash F \subseteq X \backslash f^{\leftarrow}(B)$ donc $X \backslash F \subseteq f^{\leftarrow}(Y \backslash B)$ donc $f^{\rightarrow}(X \backslash F) \subseteq f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(Y \backslash B)\big) = Y \backslash B$.
Or, F est un fermé de X donc $X \backslash F$ est un ouvert de X donc $f^{\rightarrow}(X \backslash F)$ est un ouvert de Y car f est ouverte par hypothèse.

Ainsi, $f^{\rightarrow}(X \backslash F)$ est un ouvert de Y contenu dans $Y \backslash B$, d'où $f^{\rightarrow}(X \backslash F) \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{Y \backslash B}}$.
Donc $f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(X \backslash F)\big) \subseteq f^{\leftarrow}\left(\overset{\circ}{\overbrace{Y \backslash B}}\right)$. Or on a $X \backslash F \subseteq f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(X \backslash F)\big)$.
On a donc $X \backslash F \subseteq f^{\leftarrow}\left(\overset{\circ}{\overbrace{Y \backslash B}}\right)$. Donc $X \backslash f^{\leftarrow}\left(\overset{\circ}{\overbrace{Y \backslash B}}\right) \subseteq F$. Donc $f^{\leftarrow}\left(Y \backslash \overset{\circ}{\overbrace{Y \backslash B}}\right) \subseteq F$.
Donc $f^{\leftarrow}\left(\overline{Y \backslash (Y \backslash B)}\right) \subseteq F$. Donc $f^{\leftarrow}\left(\overline{B}\right) \subseteq F$. Il suffit alors de prendre $D := \overline{B}$ pour conclure.

$\boxed{5 \implies 1}$ Supposons que pour tout $B \subseteq Y$ et tout fermé F de X tels que $f^{\leftarrow}(B) \subseteq F$, il existe un fermé D de Y tel que $B \subseteq D$ et $f^{\leftarrow}(D) \subseteq F$.
Soit U un ouvert de X : posons $F := X \backslash U$ qui est un fermé de X.
Posons ensuite $B := Y \backslash f^{\rightarrow}(U)$.
Comme $U \subseteq f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(U)\big)$, on a $X \backslash f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(U)\big) \subseteq X \backslash U$.
Or, $X \backslash f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(U)\big) = f^{\leftarrow}\Big(Y \backslash f^{\rightarrow}(U)\Big) = f^{\leftarrow}(B)$.
On a donc $f^{\leftarrow}(B) \subseteq X \backslash U$, et comme $X \backslash U = F$, on a $f^{\leftarrow}(B) \subseteq F$.
Par hypothèse, il existe donc D un fermé de Y tel que $B \subseteq D$ et $f^{\leftarrow}(D) \subseteq F$.
Autrement dit, on a $Y \backslash f^{\rightarrow}(U) \subseteq D$ et $f^{\leftarrow}(D) \subseteq X \backslash U$.
Comme $f^{\leftarrow}(D) \subseteq X \backslash U$, on a $U \subseteq X \backslash f^{\leftarrow}(D)$ donc $U \subseteq f^{\leftarrow}(Y \backslash D)$,
donc $f^{\rightarrow}(U) \subseteq f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(Y \backslash D)\big) = Y \backslash D$ donc $D \subseteq Y \backslash f^{\rightarrow}(U)$. Et comme on a dit que $Y \backslash f^{\rightarrow}(U) \subseteq D$, on obtient $Y \backslash f^{\rightarrow}(U) = D$, si bien que $Y \backslash f^{\rightarrow}(U)$ est un fermé de Y, et donc $f^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert de Y. Ainsi $\boxed{f \text{ est ouverte}}$.
CQFD.

Proposition 22 (Caractérisation des applications fermées)

Soient X et Y deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est fermée.
2. Pour toute partie A de X, on a $\overline{f^{\to}(A)} \subseteq f^{\to}\left(\overline{A}\right)$.
3. Pour tout $B \subseteq Y$ et tout ouvert U de X tels que $f^{\leftarrow}(B) \subseteq U$, il existe un ouvert W de Y tel que $B \subseteq W$ et $f^{\leftarrow}(W) \subseteq U$.
4. Pour tout $y \in Y$ et tout ouvert U de X tels que $f^{\leftarrow}\left(\{y\}\right) \subseteq U$, il existe un voisinage V de y tel que $f^{\leftarrow}(V) \subseteq U$.

Démonstration

Montrons $1 \iff 2$ puis $1 \iff 3$ et enfin $3 \iff 4$.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Supposons que f est fermée.
Soit A une partie de X : alors $\overline{A}$ est un fermé de X, donc $f^{\to}\left(\overline{A}\right)$ est un fermé de Y car f est fermée par hypothèse. Or, $A \subseteq \overline{A}$ donc $f^{\to}(A) \subseteq f^{\to}\left(\overline{A}\right)$ donc $f^{\to}\left(\overline{A}\right)$ est un fermé contenant $f^{\to}(A)$, et donc $\boxed{\overline{f^{\to}(A)} \subseteq f^{\to}\left(\overline{A}\right)}$.

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Supposons que toute partie A de X, on a $\overline{f^{\to}(A)} \subseteq f^{\to}\left(\overline{A}\right)$.
Soit F un fermé de X : on a donc $\overline{F} = F$. Or, $\overline{f^{\to}(F)} \subseteq f^{\to}\left(\overline{F}\right)$ par hypothèse.
Donc $\overline{f^{\to}(F)} \subseteq f^{\to}(F)$. Mais on a toujours $\overline{f^{\to}(F)} \supseteq f^{\to}(F)$.
Donc $\overline{f^{\to}(F)} = f^{\to}(F)$, et donc $f^{\to}(F)$ est un fermé de Y.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est fermée}}$.

$\boxed{1 \Longrightarrow 3}$ Supposons que f est fermée.
Soient B une partie de Y et U un ouvert de X tels que $f^{\leftarrow}(B) \subseteq U$.
On a donc $X \backslash U \subseteq X \backslash f^{\leftarrow}(B) = f^{\leftarrow}(Y \backslash B)$ donc $f^{\to}(X \backslash U) \subseteq f^{\to}\left(f^{\leftarrow}(Y \backslash B)\right) = Y \backslash B$,
donc $B \subseteq Y \backslash f^{\to}(X \backslash U)$. Posons alors $W := Y \backslash f^{\to}(X \backslash U)$. Comme U est un ouvert de X, $X \backslash U$ est un fermé de X donc $f^{\to}(X \backslash U)$ est un fermé de Y puisque f est fermée par hypothèse, donc W est un ouvert de Y, qui contient B.
On a alors $f^{\leftarrow}(W) = f^{\leftarrow}\left(Y \backslash f^{\to}(X \backslash U)\right) = X \backslash f^{\leftarrow}\left(f^{\to}(X \backslash U)\right) \subseteq_{\star} X \backslash (X \backslash U) = U$,
($\star$ car $X \backslash U \subseteq f^{\leftarrow}\left(f^{\to}(X \backslash U)\right)$). On a donc bien $\boxed{W \text{ un ouvert de } Y \text{ tel que } B \subseteq W \text{ et } f^{\leftarrow}(W) \subseteq U}$.

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Supposons que pour tout $B \subseteq Y$ et tout ouvert U de X tels que $f^{\leftarrow}(B) \subseteq U$, il existe un

ouvert W de Y tel que $B \subseteq W$ et $f^{\leftarrow}(W) \subseteq U$.
Soit F un fermé de X. Posons $U := X \backslash F$ qui est donc un ouvert de X, et $B := Y \backslash f^{\rightarrow}(F)$.
Comme $F \subseteq f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(F)\big)$, on a $X \backslash f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(F)\big) \subseteq X \backslash F = U$.
Or, $X \backslash f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(F)\big) = f^{\leftarrow}\Big(Y \backslash f^{\rightarrow}(F)\Big) = f^{\leftarrow}(B)$.
Ainsi, on a $f^{\leftarrow}(B) \subseteq U$, avec U ouvert de X : il existe donc un ouvert W de Y tel que $B \subseteq W$ et $f^{\leftarrow}(W) \subseteq U$ par hypothèse.
Autrement dit, on a $Y \backslash f^{\rightarrow}(F) \subseteq W$ et $f^{\leftarrow}(W) \subseteq X \backslash F$.
Comme $f^{\leftarrow}(W) \subseteq X \backslash F$, on a $F \subseteq X \backslash f^{\leftarrow}(W) = f^{\leftarrow}(Y \backslash W)$.
Donc $f^{\rightarrow}(F) \subseteq f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(Y \backslash W)\big) = Y \backslash W$ donc $W \subseteq Y \backslash f^{\rightarrow}(F)$.
On a donc $Y \backslash f^{\rightarrow}(F) \subseteq W$ et $W \subseteq Y \backslash f^{\rightarrow}(F)$, si bien que $Y \backslash f^{\rightarrow}(F) = W$ qui est ouvert, donc $f^{\rightarrow}(F)$ est un fermé. Ainsi donc $\boxed{f \text{ est fermée}}$.

$\boxed{3 \Longrightarrow 4}$ Supposons que pour tout $B \subseteq Y$ et tout ouvert U de X tels que $f^{\leftarrow}(B) \subseteq U$, il existe un ouvert W de Y tel que $B \subseteq W$ et $f^{\leftarrow}(W) \subseteq U$.
Soient $y \in Y$ et U un ouvert de X tel que $f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big) \subseteq U$. Par hypothèse, il existe un ouvert W de Y tel que $y \in W$ et $f^{\leftarrow}(W) \subseteq U$. Il suffit alors de se rappeler que W étant un ouvert, c'est un voisinage de chacun de ses points donc en particulier de y.

$\boxed{4 \Longrightarrow 3}$ Supposons que pour tout $y \in Y$ et tout ouvert U de X tels que $f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big) \subseteq U$, il existe un voisinage V de y tel que $f^{\leftarrow}(V) \subseteq U$.
Soient B une partie de Y et U un ouvert de X tels que $f^{\leftarrow}(B) \subseteq U$.
En particulier, pour tout $y \in B$, on a $\{y\} \subseteq B$ donc $f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big) \subseteq f^{\leftarrow}(B) \subseteq U$.
Par hypothèse, pour tout $y \in B$ il existe donc un voisinage V_y de y tel que $f^{\leftarrow}(V_y) \subseteq U$.
Posons alors $V := \bigcup\limits_{y \in B} V_y$: on a alors $f^{\leftarrow}(V) = f^{\leftarrow}\left(\bigcup\limits_{y \in B} V_y\right) = \bigcup\limits_{y \in B} f^{\leftarrow}(V_y) \subseteq U$.
Comme pour tout $y \in B$, V_y est un voisinage de y, et $V_y \subseteq V$, V est aussi un voisinage de y.
Donc pour tout $y \in B$, $y \in \overset{\circ}{V}$ si bien que $\overset{\circ}{V}$ est un ouvert contenant B.
Or, $\overset{\circ}{V} \subseteq V$ donc $f^{\leftarrow}\Big(\overset{\circ}{V}\Big) \subseteq f^{\leftarrow}(V) \subseteq U$.
Il suffit alors de poser $W := \overset{\circ}{V}$ pour conclure.
CQFD.

Proposition 23 (Caractérisation des applications continues fermées)

Soient X et Y deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$.
Alors f est continue et fermée si et seulement si pour tout $A \subseteq X$, on a $f^{\rightarrow}\Big(\overline{A}\Big) = \overline{f^{\rightarrow}(A)}$.

Démonstration

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & f \text{ est continue et } f \text{ est fermée} \\ \iff & \forall A \subseteq X, f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f^{\rightarrow}(A)} \text{ et } f \text{ est fermée d'après le théorème 2} \\ \iff & \forall A \subseteq X, f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f^{\rightarrow}(A)} \text{ et } \forall A \subseteq X, f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) \supseteq \overline{f^{\rightarrow}(A)} \text{ d'après la proposition précédente} \\ \iff & \forall A \subseteq X, f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{\rightarrow}(A)} \end{aligned}$$

CQFD.

3.3 Continuité, ouverture, fermeture et bijectivité

Proposition 24 (Applications bijectives, continues, ouvertes et fermées)

Soient X et Y deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$ **bijective**.

On a alors :

1. f est ouverte si et seulement si f est fermée.
2. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est continue.
   (b) f^{-1} est ouverte.
   (c) f^{-1} est fermée.

Démonstration

1. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & f \text{ est ouverte} \\ \iff & \text{Pour tout ouvert } U \text{ de } X, f^{\rightarrow}(U) \text{ est un ouvert de } Y \\ \iff & \text{Pour tout fermé } F \text{ de } X, f^{\rightarrow}(X \backslash F) \text{ est un ouvert de } Y \\ \iff & \text{Pour tout fermé } F \text{ de } X, Y \backslash f^{\rightarrow}(X \backslash F) \text{ est un fermé de } Y \\ \iff & \text{Pour tout fermé } F \text{ de } X, Y \backslash \left(Y \backslash f^{\rightarrow}(F)\right) \text{ est un fermé de } Y \text{ car } f \text{ est bijective} \\ \iff & \text{Pour tout fermé } F \text{ de } X, f^{\rightarrow}(F) \text{ est un fermé de } Y \\ \iff & f \text{ est fermée} \end{aligned}$$

2. On sait déjà que f^{-1} ouverte $\iff$ f^{-1} fermée d'après 1.

Montrons que (a) $\iff$ (b). On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & f \text{ est continue} \\ \iff & \text{Pour tout ouvert } U \text{ de } Y,\, f^{\leftarrow}(U) \text{ est un ouvert de } X \text{ d'après le théorème 2} \\ \iff & \text{Pour tout ouvert } U \text{ de } Y,\, \left(f^{-1}\right)^{\rightarrow}(U) \text{ est un ouvert de } X \\ \iff & f^{-1} \text{ est ouverte} \end{aligned}$$

CQFD.

Théorème 3 (Caractérisation des homéomorphismes)

Soient X et Y deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$ **bijective**.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est un homéomorphisme.
2. f est continue et ouverte.
3. f est continue et fermée.
4. f et f^{-1} sont ouvertes.
5. f et f^{-1} sont fermées.
6. Pour toute partie A de X, on a $f^{\rightarrow}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{\rightarrow}(A)}$.

4 Quelques constructions topologiques

Définition 14 (Topologies plus fines, moins fines et comparables)

Soient X un ensemble, et $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X.

- On dit que $\mathcal{T}_1$ est **moins fine** que $\mathcal{T}_2$ si et seulement si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, donc que tout ouvert pour $\mathcal{T}_1$ est aussi un ouvert pour $\mathcal{T}_2$. On dira aussi que $\mathcal{T}_2$ est **plus fine** que $\mathcal{T}_1$.
- On dit que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont comparables si et seulement si l'une des deux est plus fine que l'autre.

Exemple :
De toutes les topologies sur un ensemble X, la topologie grossière $\{\varnothing; X\}$ est la moins fine, et la topologie discrète $\mathscr{P}(X)$ est la plus fine.

Proposition 25 (Caractérisation d'être moins fine que)

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$.
2. Tout ouvert pour $\mathcal{T}_1$ est un ouvert pour $\mathcal{T}_2$.
3. Tout fermé pour $\mathcal{T}_1$ est un fermé pour $\mathcal{T}_2$.
4. Pour tout $x \in X$, tout voisinage de x pour $\mathcal{T}_1$ est un voisinage de x pour $\mathcal{T}_2$.
5. Pour toute partie A de X, $\mathring{A}_{\mathcal{T}_1} \subseteq \mathring{A}_{\mathcal{T}_2}$.
6. Pour toute partie A de X, $\overline{A}_{\mathcal{T}_1} \supseteq \overline{A}_{\mathcal{T}_2}$.
7. L'application $\mathrm{id}_X : (X; \mathcal{T}_2) \to (X; \mathcal{T}_1)$ est continue.
8. L'application $\mathrm{id}_X : (X; \mathcal{T}_1) \to (X; \mathcal{T}_2)$ est ouverte.
9. L'application $\mathrm{id}_X : (X; \mathcal{T}_1) \to (X; \mathcal{T}_2)$ est fermée.

4.1 Topologie initiale

Proposition 26 (Justification de la topologie initiale)

Soit X un ensemble. Soient $(Y_i; \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.
Soit pour tout $i \in I$, $f_i : X \to Y_i$.
Posons $\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ fini non vide, et } \forall i \in J, U_i \in \mathcal{T}_i \right\}$.

Alors $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ vérifie **(B1)** et **(B2)**, à savoir :

(B1) Pour tout $x \in X$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U$.

(B2) Pour tout W et W' dans $\mathcal{B}$, il existe $W'' \in \mathcal{B}$ tel que $U'' \subseteq U \cap U'$.

Autrement dit, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $(X; \mathcal{T})$. C'est $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X \mid U \text{ est une réunion d'éléments de } \mathcal{B}\}$.

Démonstration

(B1) Soit $x \in X$. Soit $i \in I$. Alors $f_i(x) \in Y_i$ donc $x \in f_i^{\leftarrow}(Y_i) \in \mathcal{B}$.

(B2) Soient W et W' dans $\mathcal{B}$: il existe donc J et J' des parties finies non vides de I, et $(U_i)_{i \in J}$ ainsi que $(V_i)_{i \in J'}$ telles que $\forall i \in J, U_i \in \mathcal{T}_i$ et $\forall i \in I', V_i \in \mathcal{T}_i$ et $W = \bigcap\limits_{i \in J} f_i^{\leftarrow}(U_i)$ et $W' = \bigcap\limits_{i \in J'} f_i^{\leftarrow}(V_i)$.

On a donc $W \cap W' = \left(\bigcap\limits_{i \in J} f_i^{\leftarrow}(U_i)\right) \cap \left(\bigcap\limits_{i \in J'} f_i^{\leftarrow}(V_i)\right)$.

Considérons $J'' := J \cup J'$ et pour tout $i \in J''$, posons $W_i := \begin{cases} U_i & \text{si } i \in J \backslash J' \\ V_i & \text{si } i \in J' \backslash J \\ U_i \cap V_i & \text{si } i \in J \cap J' \end{cases}$.

Alors $W \cap W' = \bigcap\limits_{i \in J''} f_i^{\leftarrow}(W_i) \in \mathcal{B}$, d'où le résultat en prenant $W'' := W \cap W'$.

CQFD.

Définition 15 (Topologie initiale)

Soit X un ensemble. Soient $(Y_i; \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques.

Soit pour tout $i \in I$, $f_i : X \to Y_i$.

Soit $\mathcal{B} := \left\{ \bigcap\limits_{i \in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ fini non vide, et } \forall i \in J, U_i \in \mathcal{T}_i \right\}$.

L'ensemble $\mathcal{T} := \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X \mid U \text{ est une réunion d'éléments de } \mathcal{B}\}$ est, d'après la proposition précédente, une topologie sur X dont $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts.

On l'appellera **topologie initiale** sur X associée à la famille $(f_i)_{i \in I}$.

Exemple :

Pour X un ensemble, Y un espace topologique et $f : X \to Y$, la topologie initiale associée à f est alors $\{f^{\leftarrow}(U) \mid U \text{ est un ouvert de } Y\} = \left(f^{\leftarrow}\right)^{\rightarrow}(\mathcal{T})$.

On dira que c'est l'image réciproque par f de la topologie sur Y.

Proposition 27 (Topologie initiale associée à une bijection)

Soit X un ensemble. Soit Y un espace topologique. Soit $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ une bijection.
Si l'on munit X de la topologie initiale associée à f, alors f est un homéomorphisme.

Démonstration

On sait déjà que f est bijective, et f est rendue continue puisque la topologie initiale sur X rend continue f. Il reste donc à montrer que $g := f^{-1} : Y \to X$ est continue.

Soit U un ouvert de X : par définition de la topologie sur X, il existe un ouvert U' de Y tel que $U = f^{\leftarrow}(U')$. Alors $g^{\leftarrow}(U) = g^{\leftarrow}\big(f^{\leftarrow}(U')\big) = f^{-1\leftarrow}\big(f^{\leftarrow}(U')\big) = f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(U')\big) = U'$ donc $g^{\leftarrow}(U)$ est un ouvert de Y.

Donc pour tout ouvert U de X, $g^{\leftarrow}(U)$ est un ouvert de Y donc g est continue et donc $\boxed{f \text{ est un homéomorphisme}}$.
CQFD.

Lemme 1 (Base d'ouverts et de voisinages de la topologie initiale)

Soient X un ensemble, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques,pour tout $i \in I$, $f_i : X \to Y_i$ et $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur X associée à $(f_i)_{i\in I}$.

1. Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\left\{ \bigcap\limits_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ fini non vide}, \forall i \in J, f_i(x) \in U_i \text{ ouvert de } Y_i \right\}$ est une base de voisinages ouverts de x dans $\mathcal{T}$.
2. Si pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de Y_i, alors $\left\{ \bigcap\limits_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ fini non vide}, \forall i \in J, U_i \in \mathcal{B}_i \right\}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}$.

Démonstration

1. Soit $x \in X$, et considérons $\mathcal{B}(x) := \left\{ \bigcap\limits_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ fini non vide}, \forall i \in J, f_i(x) \in U_i \text{ ouvert de } Y_i \right\}$.
Montrons que $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages ouverts de x dans $\mathcal{T}$, c'est-à-dire que :

(a) Pour tout $B \in \mathcal{B}(x)$, B est un ouvert de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire $B \in \mathcal{T}$.

(b) Pour tout $B \in \mathcal{B}(x)$, $x \in B$. Alors B étant un ouvert, c'est un voisinage de chacun de ses points donc de x.

(c) Pour tout voisinage V de x dans $\mathcal{T}$, il existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tel que $B \subseteq V$.

(a) Soit $B \in \mathcal{B}(x)$: il existe donc J une partie finie non vide de I et une famille $(U_i)_{i\in J}$ telle que $\forall i \in J$, $f_i(x) \in U_i$ avec U_i ouvert de Y_i et $B = \bigcap\limits_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i)$. Alors en particulier, $B \in \mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est la base d'ouverts "de référence" pour la topologie initiale $\mathcal{T}$, donc B est un ouvert de $\mathcal{T}$.

(b) Soit $B \in \mathcal{B}(x)$: il existe donc J une partie finie non vide de I et une famille $(U_i)_{i\in J}$ telle que $\forall i \in J, f_i(x) \in U_i$ avec U_i ouvert de Y_i et $B = \bigcap_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i)$. Comme pour tout $i \in J$, on a $f_i(x) \in U_i$, on a $x \in f_i^{\leftarrow}(U_i)$ donc $x \in \bigcap_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) = B$.

(c) Soit V un voisinage de x dans $\mathcal{T}$: il existe un ouvert U de $\mathcal{T}$ tel que $x \in U \subseteq V$. Or par définition $\mathcal{B}$, la base d'ouverts "de référence" pour la topologie initiale $\mathcal{T}$, est une base d'ouverts de $\mathcal{T}$. Il existe donc $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq U$ et donc $x \in B \subseteq V$. Comme $B \in \mathcal{B}$, il existe une $J \subseteq I$ finie non vide et $(U_i)_{i\in J}$ tels que $B = \bigcap_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i)$ et $\forall i \in J, U_i$ est un ouvert de Y_i. Mais comme $x \in B$, on a $\forall i \in J, x \in f_i^{\leftarrow}(U_i)$ donc $\forall i \in J, f_i(x) \in U_i$, si bien que $B \in \mathcal{B}(x)$.
Finalement, pour tout voisinage V de x dans $\mathcal{T}$, il existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tel que $x \in B \subseteq V$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{B}(x) \text{ est une base de voisinages ouverts de } x \text{ dans } \mathcal{T}}$.

2. Soit pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ une base d'ouverts de Y_i.
Considérons $\mathcal{B}' := \left\{ \bigcap_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ fini non vide}, \forall i \in J, U_i \in \mathcal{B}_i \right\}$ et montrons que c'est une base d'ouverts de $\mathcal{T}$.
Soient U un ouvert de $\mathcal{T}$ et $x \in U$. Comme $\mathcal{B}$ est la base d'ouverts "de référence" de $\mathcal{T}$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq U$. Par définition de $\mathcal{B}$, il existe donc $J \subseteq I$ fini non vide et $(U_i)_{i\in J}$ tels que $B = \bigcap_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i)$ avec $\forall i \in J, U_i$ ouvert de Y_i. En particulier comme $x \in B$, on a $\forall i \in J, f_i(x) \in U_i$. Or, pour tout $i \in J$, $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de Y_i donc il existe $W_i \in \mathcal{B}_i$ tel que $f_i(x) \in W_i \subseteq U_i$. En posant $B' := \bigcap_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(W_i)$, on a $B' \in \mathcal{B}'$ et $x \in B' \subseteq B$ et donc $x \in B' \subseteq U$. Au final, $\mathcal{B}'$ est bien une base d'ouverts de $\mathcal{T}$.
CQFD.

Proposition 28 (Caractérisation de la topologie initiale)

Soient X un ensemble, $(Y_i; \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, pour tout $i \in I$, $f_i : X \to Y_i$, et $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur X associée à $(f_i)_{i\in I}$.

1. La topologie $\mathcal{T}$ est la moins fine (la plus petite pour l'inclusion) sur X telle que pour tout $i \in I$, f_i est continue.
2. On munit X de la topologie $\mathcal{T}$. Alors pour tout espace topologique E et $g : E \to X$, g est continue en $a \in E$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g : E \to Y_i$ est continue en a.
3. La topologie $\mathcal{T}$ est l'unique topologie sur X ayant la propriété **universelle** suivante : pour tout espace topologique E, une application $g : E \to (X; \mathcal{T})$ est en continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g : E \to Y_i$ est continue.

Démonstration

Soit $\mathcal{B}$ la base d'ouverts de référence de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire les intersections finies des $f_i^{\leftarrow}(U_i)$ où U_i est ouvert de Y_i.

1. Pour tout $i \in I$ et tout ouvert U_i de Y_i, on a $f_i^{\leftarrow}(U_i) \in \mathcal{T}$ donc f_i est continue. Ainsi, $\mathcal{T}$ rend bien les f_i continues.
Soit $\mathcal{T}'$ est une topologie sur X qui rend les f_i continues.

Soit $U \in \mathcal{T}$: comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}$, il existe $(B_k)_{k\in K}$ une famille d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $U = \bigcup\limits_{k\in K} B_k$.

Soit $k \in K$. Comme $B_k \in \mathcal{B}$, il existe $J \subseteq I$ fini non vide et $(U_i)_{i\in J}$ tels que $B_k = \bigcap\limits_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i)$ et $\forall i \in J, U_i$ est un ouvert de Y_i. Alors pour tout $i \in J$, comme $\mathcal{T}'$ rend f_i continue, on a $f_i^{\leftarrow}(U_i) \in \mathcal{T}'$. Donc $B_k \in \mathcal{T}'$ comme intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}'$.

Donc $\forall k \in K, B_k \in \mathcal{T}'$, et donc $U \in \mathcal{T}'$ comme réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{T}'$.

Donc $\forall U \in \mathcal{T}, U \in \mathcal{T}'$ si bien que $\boxed{\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'}$.

2. Soient donc E un espace topologie, $g : E \to X$ et $a \in E$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que g est continue en a. Comme les f_i sont continues, $f_i \circ g$ est continue en a.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons que tous les $f_i \circ g$ sont continues en a.

Soit V un voisinage de $g(a)$. D'après le lemme, on sait que
$\mathcal{B}\big(g(a)\big) := \left\{ \bigcap\limits_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i) \;\middle|\; J \subseteq I \text{ fini non vide}, \forall i \in J, f_i\big(g(a)\big) \in U_i \text{ ouvert de } Y_i \right\}$ est une base de voisinages ouverts de $g(a)$. Il existe donc $W \in \mathcal{B}\big(g(a)\big)$ tel que $W \subseteq V$. Par définition, il existe $J \subseteq I$ finie non vide et $(U_i)_{i\in J}$ tels que $W = \bigcap\limits_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i)$
et $\forall i \in J, f_i\big(g(a)\big) \in U_i$ ouvert de Y_i. On a donc $g^{\leftarrow}\left(\bigcap\limits_{i\in J} f_i^{\leftarrow}(U_i)\right) \subseteq g^{\leftarrow}(V)$,
donc $\bigcap\limits_{i\in J} g^{\leftarrow}\big(f_i^{\leftarrow}(U_i)\big) \subseteq g^{\leftarrow}(V)$ et donc $\bigcap\limits_{i\in J} (f_i \circ g)^{\leftarrow}(U_i) \subseteq g^{\leftarrow}(V)$. Or pour tout $i \in I$, on a $f_i\big(g(a)\big) \in U_i$ donc $a \in (f_i \circ g)^{\leftarrow}(U_i)$. De plus U_i est un ouvert de Y_i, donc un voisinage de $f_i\big(g(a)\big)$ et donc par continuité de $f_i \circ g$ en a, $(f_i \circ g)^{\leftarrow}(U_i)$ est un voisinage de a. Ainsi, W est un voisinage de a comme intersection finie de voisinages de a : $g^{\leftarrow}(V)$ contient un voisinage de a donc est un voisinage de a.

Donc pour tout voisinage V de $g(a)$, $g^{\leftarrow}(V)$ est un voisinage de a, donc $\boxed{g \text{ est continue en } a}$.

3. L'assertion 2. nous permet de conclure $\mathcal{T}$ vérifie bien le fait que pour tout espace topologie E et toute application $g : E \to X$, g est continue de E dans $(X; \mathcal{T})$ si et seulement si $\forall i \in I, f_i \circ g$ est continue. Montrons que $\mathcal{T}$ est la seule topologie sur X vérifiant cela. Soit donc $\mathcal{T}'$ une topologie sur X vérifiant cela.
$\boxed{\supseteq}$ On sait d'après 1. que $\mathcal{T}$ rend continues toutes les $f_i : (X; \mathcal{T}) \to Y_i$ donc toutes les $f_i \circ \mathrm{id}_X$:

$(X;\mathcal{T}) \to Y_i$. Donc comme $\mathcal{T}'$ vérifie la propriété universelle par définition, $\mathrm{id}_X : (X;\mathcal{T}) \to (X;\mathcal{T}')$ est continue (en considérant $E = (X;\mathcal{T})$ et $g = \mathrm{id}_X$). Donc tout ouvert de $\mathcal{T}'$ est aussi un ouvert de $\mathcal{T}$, si bien que $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$.

$\boxed{\subseteq}$Comme $\mathrm{id}_X : (X;\mathcal{T}') \to (X;\mathcal{T}')$ est continue, en appliquant la propriété universelle de $\mathcal{T}'$ mais cette fois avec $E = (X;\mathcal{T}')$ lui-même, toutes les $f_i \circ \mathrm{id}_X : (X;\mathcal{T}') \to Y_i$ sont continues donc $\mathcal{T}'$ rend toutes les f_i continues. Donc $\mathcal{T}$ est moins finie que $\mathcal{T}'$ d'après 1., et donc $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, ce qui donne bien $\boxed{\mathcal{T} = \mathcal{T}'}$.

CQFD.

Proposition 29 (Prébase de la topologie initiale)

Soit X un ensemble. Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soit pour tout $i \in I$, $f_i : X \to Y_i$. On munit X de la topologie initiale associée à $(f_i)_{i\in I}$.

Alors $\{f_i^{\leftarrow}(U_i) \mid i \in I \text{ et } U_i \text{ ouvert de } Y_i\}$ est une prébase de X.

Démonstration

Notons $\mathcal{P}$ cet ensemble. On peut alors considérer considérer $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{P}$: par définition la topologie initiale sur X est la topologie associée à $\mathcal{B}$, et donc $\mathcal{P}$ en est une prébase.

CQFD.

4.2 Topologie induite

Définition 16 (Topologie induite)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, et A une partie de X.
On appelle **topologie induite** par $(X;\mathcal{T})$ sur A la topologie initiale sur A associée à l'injection canonique $\iota : A \hookrightarrow X$, donc comme on a pu le voir dans l'exemple de topologie initiale, c'est la topologie dont une base d'ouverts est $\{\iota^{\leftarrow}(U) \mid U \in \mathcal{T}\}$ (c'est en fait la topologie elle-même dans ce cas précis car on a qu'un seul f_i). On dit alors que A est un **sous-espace topologique**.

Proposition 30 (Ouverts, fermés et voisinages de la topologie induite)

Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, et A une partie de X. On munit A de la topologie induite $\mathcal{T}_A$.

1. Les ouverts de A sont les ensembles de la forme $A \cap U$ où U est un ouvert de X.
   Autrement dit, $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$.

2. Les fermés de A sont les ensembles de la forme $A \cap F$ où F est un fermé de X.
3. Pour tout $a \in A$, les voisinages de a dans A sont les ensembles de la forme $A \cap V$ où V est un voisinage de a dans X.

Démonstration

1. Par définition, on a $\mathcal{T}_A = \{\iota^{\leftarrow}(U) \mid U \in \mathcal{T}\} = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$.

2. Soit H un fermé de A : $A \backslash H$ est donc un ouvert de A donc d'après 1 il existe U un ouvert de X tel que $A \backslash H = A \cap U$ donc $H = A \backslash (A \cap U) = A \backslash A \cup A \backslash U = \varnothing \cup A \backslash U = A \backslash U = A \cap X \backslash U$.
Réciproquement, soit F un fermé de X. Posons $H = A \cap F$ et montrons que H est un fermé de A, en montrant que $A \backslash H$ est un ouvert de A. On a $A \backslash H = A \backslash A \cap F = A \backslash F = A \cap X \backslash F$.

3. Soit $a \in A$. Soit W un voisinage de a dans A : il existe donc un ouvert G de A tel que $a \in G \subseteq W$. D'après 1, il existe un ouvert U de X tel que $G = A \cap U$. Posons $V := W \cup U$. Comme $a \in A \cap U$, on a $a \in U$ qui est un ouvert de X, et $U \subseteq V$ si bien que V est un voisinage de a dans X. On a alors $A \cap V = A \cap (U \cup W) = (A \cap U) \cup (A \cap W) = (A \cap U) \cup W = W$ car $A \cap U \subseteq W \subseteq A$.
Ainsi, $W = A \cap V$ est l'intersection de A avec un voisinage de a dans X.
Réciproquement, soit V un voisinage de a dans X : considérons $W := A \cap V$ et montrons que W est un voisinage de a dans A. Comme V est un voisinage de a dans X, il existe un ouvert U de X tel que $a \in U \subseteq V$. Alors $a \in A \cap U \subseteq A \cap V$ donc $a \in A \cap U \subseteq W$. Or, $A \cap U$ est un ouvert de A d'après 1, si bien que W est un voisinage de a dans A.
CQFD.

Remarque :
Soient X un espace topologique et A un sous-espace topologique de X.

1. Pour toute partie B de A, la topologie induite par A sur B est égale à la topologie induite par X sur B puisque pour tout ouvert U de X, on a $B \cap U = (B \cap A) \cap U = B \cap (A \cap U)$.
2. Un ouvert de A (respectivement un fermé) n'est pas nécessairement un ouvert (respectivement un fermé) de X : par exemple si $X = \mathbb{R}$ et $A = [0; 1[$, alors $[0; \frac{1}{2}[$ est un ouvert de A mais pas de X.

Proposition 31 (Topologie induite sur un ouvert ou un fermé)

Soient X un espace topologique et A un sous-espace topologique de X.

1. Si A est un ouvert de X, alors les ouverts de A sont les ouverts de X inclus dans A.
2. A est un ouvert de X si et seulement si $\iota : A \hookrightarrow X$ est ouverte.
3. Si A est un fermé de X, alors les fermés de A sont les fermés de X inclus dans A.

4. A est un fermé de X si et seulement si $\iota : A \hookrightarrow X$ est fermée.

Démonstration

1 et 3 sont immédiats d'après la proposition précédente et le fait que l'intersection de deux ouverts est un ouverts, et que l'intersection de deux fermés est un fermé.

2. Supposons que A est un ouvert de X. Soit W un ouvert de A : c'est donc aussi un ouvert de X d'après 1. Or, $\iota^{\rightarrow}(W) = W$ par définition de ι, si bien que $\iota^{\rightarrow}(W)$ est un ouvert de X, et donc ι est ouverte. Réciproquement, supposons que ι est ouverte : A étant un ouvert de A, $\iota^{\rightarrow}(A) = A$ est un ouvert de X.

4. Même raisonnement que pour 2.

CQFD.

Proposition 32 (Continuité et restriction)

Soient X et Y des espaces topologiques, A une partie de X et $f : X \to Y$. On munit A de la topologie induite par X sur A.

1. Pour tout $a \in A$, si f est continue en a alors $f_{|A}$ est continue en a.
2. Si f est continue, alors $f_{|A}$ est continue.
3. Pour tout $a \in A$, si A est un voisinage de a dans X et si $f_{|A}$ est continue en a, alors f est continue en a.
4. Si A est un ouvert de X et si $f_{|A}$ est continue, alors f est continue en tout point de A.

Démonstration

1. L'application $\iota : A \hookrightarrow X$ est continue par définition de la topologie induite, et $f_{|A} = f \circ \iota$, d'où le résultat par composition d'applications continues.

2. Même raisonnement que pour 1.

3. Soit $a \in A$: supposons que A est un voisinage de a dans X et que $f_{|A}$ est continue en a.

Soit W un voisinage de $f(a)$ dans Y. Par continuité de $f_{|A}$, on a $f_{|A}{}^{\leftarrow}(W)$ est un voisinage de a dans A. Il existe donc un voisinage V de a dans X tel que $f_{|A}{}^{\leftarrow}(W) = A \cap V$. Mais alors $A \cap V = f_{|A}{}^{\leftarrow}(W) = A \cap f^{\leftarrow}(W) \subseteq f^{\leftarrow}(W)$. Or A et V sont des voisinages de a dans X, donc $A \cap V$ aussi, et donc $f^{\leftarrow}(W)$ aussi par inclusion.

Donc pour tout voisinage W de $f(a)$ dans Y, $f^{\leftarrow}(W)$ est un voisinage de a dans X, d'où la continuité de f en a.

4. Il suffit alors de se rappeler qu'un ouvert est un voisinage de chacun de ses points, puis d'appliquer 3.
CQFD.

Proposition 33 (Restriction et recouvrements)

Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$.

1. On suppose que $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ est une réunion quelconque d'ouverts.
   Si pour tout $i \in I$, $f_{|U_i}$ est continue, alors f est continue.
2. On suppose que $X = \bigcup\limits_{i\in I} F_i$ est une réunion quelconque de fermés, et que $(F_i)_{i\in I}$ est localement finie. Si pour tout $i \in I$, $f_{|F_i}$ est continue, alors f est continue.
3. On suppose que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ est une réunion finie de fermés.
   Si pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $f_{|F_i}$ est continue, alors f est continue.

Démonstration

1. Cela résulte de la proposition précédente puisqu'alors f est continue en tout point de chaque U_i donc de X tout entier. Voici une autre preuve :

Soit W un ouvert de Y. Pour tout $i \in I$, on a ${f_{|U_i}}^{\leftarrow}(W) = U_i \cap f^{\leftarrow}(W)$ donc $f^{\leftarrow}(W) = X \cap f^{\leftarrow}(W) \cap X = \left(\bigcup\limits_{i\in I} U_i\right) \cap f^{\leftarrow}(W) = \bigcup\limits_{i\in I}\left(U_i \cap f^{\leftarrow}(W)\right) = \bigcup\limits_{i\in I} {f_{|U_i}}^{\leftarrow}(W)$. Or, pour tout $i \in I$, ${f_{|U_i}}^{\leftarrow}$ est continue donc ${f_{|U_i}}^{\leftarrow}(W)$ est un ouvert de U_i, qui est aussi un ouvert de X car U_i est ouvert de X. Ainsi, $f^{\leftarrow}(W)$ est un ouvert de X comme réunion quelconque d'ouverts de X.

Donc pour tout ouvert W de Y, $f^{\leftarrow}(W)$ est un ouvert de X : $\boxed{f \text{ est continue}}$.

2. Soit H un fermé de Y : pour tout $i \in I$ on a ${f_{|F_i}}^{\leftarrow}(H) = F_i \cap f^{\leftarrow}(H)$. Donc $f^{\leftarrow}(H) = \bigcup\limits_{i\in I} {f_{|F_i}}^{\leftarrow}(H)$. Comme pour tout $i \in I$, $f_{|F_i}$ est continue et que F_i est un fermé de X, il résulte que ${f_{|F_i}}^{\leftarrow}(H)$ est un fermé de F_i donc de X. On sait que $(F_i)_{i\in I}$ est localement finie. Or $\forall i \in I$, ${f_{|F_i}}^{\leftarrow}(H) \subseteq F_i$ donc $\left({f_{|F_i}}^{\leftarrow}(H)\right)_{i\in I}$ est aussi localement finie : c'est donc une famille localement finie de fermés, donc sa réunion est aussi un fermé, c'est-à-dire $f^{\leftarrow}(H)$. $\boxed{f \text{ est ainsi continue}}$.

3. C'est un cas particulier de 2 puisque une famille finie est a fortiori localement finie.
CQFD.

Proposition 34 (Applications qui coïncident sur un ouvert)

Soient X et Y deux espaces topologiques. Soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$.
Supposons qu'il existe un ouvert U de X tel que $\forall x \in U, f(x) = g(x)$.

Si f est continue en un point a de U, alors g est continue en a.

Démonstration

Supposons que f est continue en a.

Soit V un voisinage de $g(a)$. Comme f et g coïncident sur U et que $a \in U$, on a $f(a) = g(a)$. Donc V est un voisinage de $f(a)$. Or, f est continue en a par hypothèse, donc $f^{\leftarrow}(V)$ est un voisinage de a. Il existe donc un ouvert U' tel que $a \in U' \subseteq f^{\leftarrow}(V)$. Alors $U \cap U'$ est un ouvert comme intersection d'ouverts, et contient a. Remarquons que pour tout $x \in U \cap U'$, on a $x \in U$ donc $g(x) = f(x)$ et donc $g^{\rightarrow}(U \cap U') = f^{\rightarrow}(U \cap U') \subseteq f^{\rightarrow}(U') \subseteq f^{\rightarrow}\Big(f^{\leftarrow}(V)\Big) = V$ donc $g^{\rightarrow}(U \cap U') \subseteq V$ donc $U \cap U' \subseteq g^{\leftarrow}\Big(g^{\rightarrow}(U \cap U')\Big) \subseteq g^{\leftarrow}(V)$ donc $g^{\leftarrow}(V)$ contient un ouvert qui contient a, donc $g^{\leftarrow}(V)$ est un voisinage de a.

Donc pour tout voisinage V de $g(a)$, $g^{\leftarrow}(V)$ est un voisinage de a, si bien que $\boxed{g \text{ est continue en } a}$.
CQFD.

Proposition 35 (Caractérisation de la topologie induite)

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$.

1. Soit A une partie de X. Soit $\iota : A \hookrightarrow X$ l'injection canonique.
   Alors la topologie induite par X sur A est l'unique topologie sur A ayant la propriété disant que pour tout espace topologique E et toute application $g : E \to A$, alors g est continue si et seulement si $\iota \circ g = E \to Y$ est continue.
2. Soit B une partie de Y telle que $\mathrm{im}(f) \subseteq B$. On munit B de la topologie induite par Y. Notons alors $\mathcal{T}_Y$ la topologie sur Y et $\mathcal{T}_B$ la topologie sur B. Alors $f : X \to (Y; \mathcal{T}_Y)$ est continue si et seulement si $f : X \to (B; \mathcal{T}_B)$ est continue.

Démonstration

1. Il s'agit simplement de la caractérisation de la topologie initiale associé à ι.

2. Il suffit de remarquer que $f = \iota_B \circ f$ où $\iota_B : (B; \mathcal{T}_B) \hookrightarrow (Y; \mathcal{T}_Y)$ est l'injection canonique de B

dans Y. On applique alors le résultat 1.
CQFD.

Proposition 36 (Applications fermées, ouvertes et restrictions)

Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$.
Pour toute partie A de X, on notera $\mathcal{T}_A$ la topologie induite par X sur A.
Pour toute partie B de Y, on notera $\mathcal{T}'_B$ la topologie induite par Y sur B.

1. Si f est ouverte, alors pour tout $B \subseteq Y$, $f_{|f^{\leftarrow}(B)} : (f^{\leftarrow}(B); \mathcal{T}_{f^{\leftarrow}(B)}) \to (B; \mathcal{T}'_B)$ est ouverte.
2. Si f est fermée, alors pour tout $B \subseteq Y$, $f_{|f^{\leftarrow}(B)}(f^{\leftarrow}(B); \mathcal{T}_{f^{\leftarrow}(B)}) \to (B; \mathcal{T}'_B)$ est fermée.
3. Si f est ouverte et si $A \subseteq X$ est un ouvert, alors $f_{|A} : (A; \mathcal{T}_A) \to Y$ est ouverte.
4. Si f est fermée et si $A \subseteq X$ est un fermé, alors $f_{|A} : (A; \mathcal{T}_A) \to Y$ est fermée.

Démonstration

1. Supposons que $f : X \to Y$ est ouverte. Soit $B \subseteq Y$.

Soit U un ouvert de $f^{\leftarrow}(B)$: il existe un ouvert U' de X tel que $U = f^{\leftarrow}(B) \cap U'$. Alors $f^{\rightarrow}(U) = f^{\rightarrow}\Big(f^{\leftarrow}(B) \cap U'\Big) \subseteq f^{\rightarrow}\Big(f^{\leftarrow}(B)\Big) \cap f^{\rightarrow}(U') = B \cap f^{\rightarrow}(U')$.

Soit $y \in B \cap f^{\rightarrow}(U')$. Comme $y \in f^{\rightarrow}(U')$, il existe $x \in U'$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in B$, on a $x \in f^{\leftarrow}(B)$, si bien que $x \in f^{\leftarrow}(B) \cap U' = U$, donc $y \in f^{\rightarrow}(U)$.

Ainsi, $f^{\rightarrow}(U) \supseteq B \cap f^{\rightarrow}(U')$, si bien que $f^{\rightarrow}(U) = B \cap f^{\rightarrow}(U')$. Or, $f : X \to Y$ est ouverte par hypothèse, et U' est un ouvert de X, donc $f^{\rightarrow}(U')$ est un ouvert de Y, donc $f^{\rightarrow}(U) = B \cap f^{\rightarrow}(U')$ est un ouvert de B.

Donc pour tout ouvert U de $f^{\leftarrow}(B)$, $f^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert de B, et donc ${f_{|f^{\leftarrow}(B)}}^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert de B. Donc $\boxed{f_{|f^{\leftarrow}(B)} : f^{\leftarrow}(B) \to B \text{ est ouverte}}$.

2. Même raisonnement que pour 1.

3. Supposons que f est ouverte et que A est un ouvert de X.

Soit U un ouvert de A : il existe un ouvert U' de X tel que $U = A \cap U'$. U est donc un ouvert de X comme intersection de deux ouverts de X. On a alors ${f_{|A}}^{\rightarrow}(U) = f^{\rightarrow}(U)$ qui est un ouvert de Y puisque $f : X \to Y$ est ouverte par hypothèse.

Ainsi pour tout ouvert U de A, ${f_{|A}}^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert de Y. Donc $f_{|A} : A \to Y$ est ouverte.

4. Même raisonnement que pour 3.

CQFD.

4.3 Topologie produit

Définition 17 (Topologie produit)

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soit $X := \prod_{i\in I} X_i$. Soit pour tout $i \in I$, $p_i : X \twoheadrightarrow X_i$ la projection canonique. On appelle **topologie produit** sur X la topologie initiale associée à $(p_i)_{i\in I}$.

Pour tout $i \in I$ et pour tout ouvert U_i de X_i, on a $p_i^{\leftarrow}(U_i) = \prod_{j\in I} U_j$ où $U_j = X_j$ si $j \neq i$. On appellera **ouvert élémentaire** de X pour la topologie produit tout ensemble de la forme $\bigcap_{i\in J} p_i^{\leftarrow}(U_i)$ où $J \subseteq I$ est fini et U_i est un ouvert de X_i. C'est donc un ensemble de la forme $\prod_{i\in I} U_i$ où l'ensemble $\{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$ est fini.

Remarque :

• D'après le lemme 1 page 39, si pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de X_i, alors l'ensemble des ouverts élémentaires $\prod_{i\in I} U_i$ où si $U_i \neq X_i$, alors $U_i \in \mathcal{B}_i$ forme une base d'ouverts de X pour la topologie produit.

• Dans le cas où I est fini, un ouvert de $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ est alors simplement un produit $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ où U_i est un ouvert de X_i.

• Dans le cas où pour tout $i \in I$, $X_i = Y$ un espace topologique, on a alors $X = Y^I$ et la topologie produit sur Y^I est aussi appelée **topologie de la convergence simple**.

• La topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$ sera la topologie produit. La topologie usuelle sur $\mathbb{C}$ associée à l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x+iy & \longmapsto & (x;y) \end{array}$ où $\mathbb{R}^2$ est munit de la topologie usuelle, ce qui fait de cette application un homéomorphisme.

Proposition 37

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques où I est infini.

1. Si pour tout $i \in I$, $U_i \notin \{X_i; \varnothing\}$, alors $\prod_{i\in I} U_i$ n'est pas un ouvert de $\prod_{i\in I} X_i$ munit de la topologie produit. Mieux, il faut même qu'il n'y ait qu'un nombre fini de $i \in I$ tel que $U_i \neq X_i$.
2. Si pour tout $i \in I$, X_i est discret et possède au moins deux éléments, alors $\prod_{i\in I} X_i$ n'est pas discret pour la topologie produit.

Démonstration

1. Soit $U = \prod_{i\in I} U_i$ un ouvert non vide de $\prod_{i\in I} X_i$. Comme l'ensemble des ouverts élémentaires de $\prod_{i\in I} X_i$ pour la topologie produit forme une base d'ouverts de $\prod_{i\in I} X_i$, il existe un ouvert élémentaire $W = \prod_{i\in I} W_i$ non vide tel que $W \subseteq U$. Comme W est un ouvert élémentaire, il existe donc $J \subseteq I$ finie telle $\forall i \in I\backslash J, W_i = X_i$. Comme W est non vide, on a $\forall i \in I, W_i \neq \varnothing$, et donc comme $W \subseteq U$, c'est-à-dire $\prod_{i\in I} W_i \subseteq \prod_{i\in I} U_i$, on a $\forall i \in I, W_i \subseteq U_i$. En particulier, $\forall i \in I\backslash J, X_i \subseteq U_i$, c'est-à-dire $\forall i \in I\backslash J, U_i = X_i$.
2. Supposons que pour tout $i \in I$, X_i est discret et possède au moins deux éléments. Soit $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$. On a $\left\{ (x_i)_{i\in I} \right\} = \prod_{i\in I} \{x_i\}$. Si jamais cet ensemble était un ouvert, il existerait donc un ouvert élémentaire $\prod_{i\in I} W_i$ inclus dedans, avec un ensemble fini $J \subseteq I$ tel que $\forall i \in I\backslash J, W_i = X_i$, ce qui conduirait par le même raisonnement que 1 à l'absurdité $\forall i \in I\backslash J, X_i = \{x_i\}$, ce qui est impossible puisque X_i possède au moins deux éléments.

CQFD.

Proposition 38 (Topologie produit à l'arrivée et applications composantes

Soit X un espace topologique. Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.
On munit $\prod_{i\in I} Y_i$ de sa topologie produit. Pour tout $i \in I$, on considère $f_i : X \to Y_i$ puis l'application

$$f := \left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \prod_{i\in I} Y_i \\ x & \longmapsto & \big(f_i(x)\big)_{i\in I} \end{array} \right).$$

Alors la topologie initiale sur X associée à f est égale à la topologie initiale sur X associée à $(f_i)_{i\in I}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{T}_I$ la topologie initiale sur X associée à $(f_i)_{i\in I}$. Soit $\mathcal{T}_f$ la topologie initiale sur X associée à f.

Soit $\mathcal{P}_I := \{f_i^{\leftarrow}(U_i) \mid i \in I$ et U_i ouvert de $Y_i\}$. $\mathcal{T}_I$ est défini comme la topologie dont une base d'ouverts est l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{P}_I$. Cela fait de $\mathcal{P}_I$ une prébase de $\mathcal{T}_I$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des ouverts élémentaires de $\prod_{i\in I} Y_i$: il s'agit des $\prod_{i\in I} U_i$ où pour tout $i \in I$, U_i est un ouvert de Y_i et où l'ensemble $\{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$ est fini, auquel on ajoute $\varnothing$. Par définition de la topologie produit, $\mathcal{E}$ est une base d'ouverts de $\prod_{i\in I} Y_i$, si bien que $\mathcal{B}_f := \{f^{\leftarrow}(W) \mid W \in \mathcal{E}\}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}_f$.

Montrons que $\mathcal{P}_I \subseteq \mathcal{B}_f$ pour en déduire que $\mathcal{T}_I \subseteq \mathcal{T}_f$.

Soit $P \in \mathcal{P}_I$: il existe $i_0 \in I$ et U_{i_0} un ouvert de Y_{i_0} tel que $P = {f_{i_0}}^{\leftarrow}(U_{i_0})$. Posons pour tout $i \in I$, $i \neq i_0$, $U_i = Y_i$ puis $\Pi_{i_0} := \prod_{i \in I} U_i \in \mathcal{E}$, et montrons que $P = f^{\leftarrow}(\Pi_{i_0})$, de sorte que $P \in \mathcal{B}_f$.

Soit $x \in X$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & x \in P \\ \iff & f_{i_0}(x) \in U_{i_0} \\ \iff & \forall i \in I, f_i(x) \in U_i \\ \iff & f(x) \in \Pi_{i_0} \\ \iff & x \in f^{\leftarrow}(\Pi_{i_0}) \end{aligned}$$

Donc $x \in P \iff x \in f^{\leftarrow}(\Pi_{i_0})$.

Ainsi, $P = f^{\leftarrow}(\Pi_{i_0})$, et donc $P \in \mathcal{B}_f$.

Donc $\mathcal{P}_I \subseteq \mathcal{B}_f$. Or $\mathcal{B}_f \subseteq \mathcal{T}_f$ puisque c'en est une base d'ouverts, donc $\mathcal{P}_I \subseteq \mathcal{T}_f$, et donc $\boxed{\mathcal{T}_I \subseteq \mathcal{T}_f}$ par minimalité de $\mathcal{T}_I$.

Montrons que $\mathcal{B}_f \subseteq \mathcal{T}_I$ pour en déduire que $\mathcal{T}_f \subseteq \mathcal{T}_I$.

Soit $B \in \mathcal{B}_f$: si $B = \varnothing$ alors $B \in \mathcal{T}_I$ puisque c'est une topologie. Supposons que $B \neq \varnothing$: il existe donc un ouvert élémentaire $W = \prod_{i \in I} U_i$ de $\prod_{i \in I} Y_i$ tel que $B = f^{\leftarrow}(W)$. Notons $J = \{i \in I \mid U_i \neq Y_i\}$ qui est donc fini. Montrons que $B = \bigcap_{i \in J} {f_i}^{\leftarrow}(U_i)$, ce qui fera de B une intersection fini d'éléments de $\mathcal{P}_I$, et donc $B \in \mathcal{T}_I$.

Soit $x \in X$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & x \in B \\ \iff & f(x) \in \prod_{i \in I} U_i \\ \iff & \forall i \in J, f_i(x) \in U_i \\ \iff & x \in \bigcap_{i \in J} {f_i}^{\leftarrow}(U_i) \end{aligned}$$

Donc $x \in B \iff x \in \bigcap_{i \in J} {f_i}^{\leftarrow}(U_i)$.

Donc $B = \bigcap_{i \in J} {f_i}^{\leftarrow}(U_i)$ et donc $B \in \mathcal{T}_I$.

Donc $\mathcal{B}_f \subseteq \mathcal{T}_I$. Or $\mathcal{B}_f$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}_f$ donc en est une prébase, et donc $\boxed{\mathcal{T}_f \subseteq \mathcal{T}_I}$ par minimalité de $\mathcal{T}_f$.

Finalement, on a bien $\boxed{\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_I}$.
CQFD.

Proposition 39 (Propriété universelle de la topologie produit)

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soit $X := \prod_{i\in I} X_i$ munit de la topologie produit.

1. Pour tout $i \in I$, l'application $p_i : X \to X_i$ est ouverte.
2. Pour tout $i \in I$, l'application $p_i : X \to X_i$ est continue.
3. Pour tout espace topologique E et toute application $f : E \to X$, f est continue en un point $a \in E$ si et seulement si pour tout $i \in I, p_i \circ f : E \to X_i$ est continue en a.
4. La topologie produit sur X est l'unique topologie sur X vérifiant la proposition 3.

Démonstration

1. Soit $i_0 \in I$. Il suffit de montrer qu'étant donné une base d'ouverts de X, tout élément U de cette base vérifie que ${p_{i_0}}^{\rightarrow}(U)$ est un ouvert de X_{i_0}. Nous allons choisir la base constituée des ouverts élémentaires de X. Soit donc $U = \prod_{i\in I} U_i$ un ouvert élémentaire de X. Alors pour tout $i \in I, {p_i}^{\rightarrow}(U) = U_i$ qui est un ouvert de X_i, ce qui est en particulier pour i_0, ce qui prouve que p_{i_0} est ouverte.

2. Provient de la définition de la topologie initiale associée à $(p_i)_{i\in I}$, puisqu'elle est la plus petite qui rend continue chacune des p_i.

3. et 4. désignent simplement la propriété universelle de la topologie initiale associée à $(p_i)_{i\in I}$.
CQFD.

Remarque :
Les projections ne sont en général pas fermées : par exemple pour $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ mais la projection selon x donne $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Proposition 40 (Produit d'une suite d'espaces séparables)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces séparables. Alors l'espace produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est séparable.

Démonstration

C'est immédiat si au moins un des $X_n = \varnothing$. Supposons-les donc tous non vides.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est séparable. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $D_n \subseteq X_n$ au plus dénombrable et dense dans X_n. Considérons une suite quelconque $(a_n)_{n\in N}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in D_n$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $B_N := \left\{ (x_n)_{n\in N} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \;\middle|\; \forall n \leq N, x_n \in D_n \text{ et } \forall n > N, x_n = a_n \right\}$.

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$, B_N est équipotent à $\prod_{n=0}^{N} D_n$ qui est un produit fini d'espaces dénombrable donc est dénombrable, si bien que B_N est dénombrable. Donc $B := \bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N$ est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. Il reste donc à montrer que B est dense dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Pour cela, on peut montrer que tout ouvert de $\prod_{n\in N} X_n$ rencontre B : mieux on peut montrer que cela est vrai simplement pour une base d'ouverts de $\prod_{n\in N} X_n$, et nous allons choisir les ouverts élémentaires.

Soit $\prod_{n\in N} U_n$ un ouvert élémentaire non vide. Soit $J = \{j \in \mathbb{N} \mid U_j \neq X_i\}$. On sait que J est fini (et non vide).

Soit $j \in J$. Par définition U_j est un ouvert non vide de X_j. Or D_j est dense dans X_j donc $D_j \cap U_j \neq \varnothing$. Soit donc $d_j \in D_j \cap U_j$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = a_n \in U_n = X_n$ si $n \notin J$ et $b_n = d_n \in U_n$ si $n \in J$. Alors pour $N = \max(J)$, on a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_N$ donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in N} U_n$ par définition, donc

$$B \cap \left(\prod_{n\in N} U_n \right) \neq \varnothing.$$

Donc B est dénombrable et rencontre tout ouvert élémentaire de $\prod_{n\in N} X_n$. Donc $\boxed{\prod_{n\in N} X_n \text{ est séparable}}$.

CQFD.

Définition 18 (Application partielle)

Soit $(X_1; X_2; \cdots; X_n)$ une famille **finie** d'espaces topologiques. Soit Y un espace topologique. Soit $f : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y$. Soit $a = (a_1; a_2; \cdots; a_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Pour tout $j \in \{1; \cdots; n\}$, on appelle **$j^{\text{ème}}$ application partielle de f au point a** l'application

$$\begin{array}{ccc} X_j & \longrightarrow & Y \\ x_j & \longmapsto & f(a_1; \cdots; a_{j-1}; x_j; a_{j+1}; \cdots; a_n) \end{array}.$$

Proposition 41 (Continuité de l'application partielle)

Soit $(X_1; X_2; \cdots; X_n)$ une famille **finie** d'espaces topologiques. Soit Y un espace topologique. Soit $f : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y$. Soit $a = (a_1; a_2; \cdots; a_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

1. Pour tout $j \in \{1;\cdots;n\}$, l'application $\begin{array}{ccc} X_j & \longrightarrow & X_1 \times \cdots \times X_n \\ x_j & \longmapsto & (a_1;\cdots;a_{j-1};x_j;a_{j+1};\cdots;a_n) \end{array}$ est continue.
2. Si f est continue, alors pour tout $j \in \{1;\cdots;n\}$ la $j^{\text{ème}}$ application partielle de f est continue.

Démonstration

1. Soit $j \in \{1;\cdots;n\}$. Notons g_j l'application en question. On peut raisonner sur les ouverts élémentaires de $X_1 \times \cdots \times X_n$. Soit donc un ouvert élémentaire $U = U_1 \times \cdots \times U_j \times \cdots U_n$. Alors ${g_j}^{\leftarrow}(U) = U_j$ qui est un ouvert de X_j par définition d'un ouvert élémentaire.

2. Il suffit de composer $f \circ g_j$ et d'utiliser le fait que la composée d'applications continues est continue.
CQFD.

Remarque :
La réciproque de 2. est fausse : on peut avoir une fonction dont les applications partielles sont continues sans que la fonction en elle-même le soit. Par exemple $f := \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases} \end{array} \right)$ puisque ses applications partielles sont continues sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas continue puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x;x) = \frac{1}{2}$ et $f(0;0) = 0$.

Cependant le résultat 2 se généralise pour n'importe quelle famille d'espaces topologiques car l'application décrite en 1. est tout autant continue (l'argument reste le même : seul l'espace qui nous intéresse est en soi concerné parmi toute la famille).

4.4 Topologie finale

4.5 Topologie quotient

5 Espaces topologiques séparés

6 Limites et valeurs d'adhérences

7 Suites dans les espaces topologiques

8 Familles filtrantes dans les espaces topologiques

9 Espaces réguliers et espaces normaux

Chapitre 2

Espaces métriques