- Métodos computacionales I.
- Manuel Alejandro Segura D.

Contents

List of Figures

1 $D^2 f$ operator - Solutions

Recordemos el operador primera derivada central:

$$Df(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1}$$

De manera que podemos calcular la segunda derivada de esta expresión:

$$D^2 f(x_i) = \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2}$$

Usando nuevamente la definición de derivada central, tenemos:

$$D^2 f(x_i) = \frac{\frac{f(x_{i+2})-f(x_i)}{2h} + \frac{f(x_{i-2})-f(x_i)}{2h}}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \tag{3}$$

$$D^2 f(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_i) + f(x_{i-2})}{4h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{4}$$

$$D^2 f(x_i) \cong \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_i) + f(x_{i-2})}{4h^2}. \qquad \blacksquare \tag{5}$$

Notar que la aproximación es de orden $\mathcal{O}(h^2)$.

2 $D^4 f$ operator - Solutions

Podemos escribir la cuarta derivada como:

$$D^4 f(x_j) = \frac{f''(x_{j+1}) - 2f''(x_j) + f''(x_{j-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{6}$$

Ahora escribimos explícitamente cada término:

$$\begin{aligned} f''(x_{j+1}) &= \frac{f(x_{j+2}) - 2f(x_{j+1}) + f(x_j)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \\ f''(x_j) &= \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \\ f''(x_{j-1}) &= \frac{f(x_j) - 2f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \tag{7}$$

Reemplazando en la Ecuación (6) tenemos:

$$D^4 f(x_j) = \frac{\frac{f(x_{j+2})-2f(x_{j+1})+f(x_j)}{h^2} - 2(\frac{f(x_{j+1})-2f(x_j)+f(x_{j-1})}{h^2}) + \frac{f(x_j)-2f(x_{j-1})+f(x_{j-2})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{8}$$

Finalmente.

$$
\begin{aligned}
D^4 f(x_j) &= \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4} + \mathcal{O}(h^2) \\
D^4 f(x_j) &\cong \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4} \qquad \blacksquare \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Notar que la aproximación es de orden $\mathcal{O}(h^2)$.