Eulerjevi Γ in B funkciji

Daniel B.

October 7, 2024

Eulerjeva Γ-funkcija

Oglejmo si

$$F(n) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t\,,\ n \in \mathbb{N}$$

(če te zanima iz kje smo "potegnili" to funkcijo si poglej ta ful dobr videooo `https://www.youtube.com/watch?v=v_HeaeUUOnc`)
Uporabimo "per partes" z izbiro:

$$\begin{aligned} u &= t^n, & \mathrm{d}u &= nt^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ dv &= e^{-t}\,\mathrm{d}t\,, & v &= -e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(n) &= \lim_{A\to\infty}\Big(-t^n e^{-t}\Big|_0^A + \int_0^A e^{-t} n t^{n-1}\,\mathrm{d}t\Big) \\ &= \lim_{A\to\infty}\Big(-A^n e^{-A} + \int_0^A e^{-t} n t^{n-1}\,\mathrm{d}t\Big) \\ &= n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= nF(n-1) \end{aligned}$$

Dobili smo formulo $F(n) = nF(n-1)$. Izračunajmo $F(0)$

$$F(0) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

Iz tega indukcijsko sledi $F(n) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$
Definirajmo sedaj

$$F(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t\,,\ x \in \mathbb{R}$$

Da bi ugotovili definicijsko območje $F(x)$ moramo ugotoviti kje ta integral konvergira, zato integral razdelimo na $\int_0^1 + \int_1^\infty$ in izračunamo konvergenco za vsakega posebej

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^x e{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. $\int_0^1 t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$

   funkcija e^{-t} je na intervalu $t \in [0,1]$ padajoča njen maksimum pa je 1, ki je v 0. Lahko ocenimo $e^{-t} \leq 1$:

   $$\int_0^1 t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t^{-x}}\,\mathrm{d}t$$

   Ne pozabimo, da je v tej oceni x fiksen. Po p-testu $\left(\int_0^a \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{konvergira} & p < 1 \\ \text{divergira} & p \geq 1 \end{cases}\right)$ zaključimo, da prvi integral konvergira za $-x < 1$ oz. $x > -1$. Vmes smo uporabili še primerjalni kriterji.

2. $\int_1^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$

   Poznamo limito $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ - *eksponent je večji od vsakega polinoma* (večkratna uporaba L'Hôpitalovega pravila). V našem primeru lahko s tem ocenimo integral npr. $t^x e^{-t} \leq e^{\frac{-t}{2}}$:

   $$\int_1^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = -2e^{-\frac{t}{2}}\Big|_1^\infty = -2e^{-\frac{1}{2}}$$

   Po primerjalnem kriteriju integral konvergira za vsak x

Skupno integral konvergira za $x > -1$ in tako dobimo dobro definirano funkcijo:

$$F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$$

Od prej vemo še $F(x) = xF(x-1)$ za vsak $x > 0$ oz. $F(x+1) = (x+1)F(x)$ za vsak $x > -1$

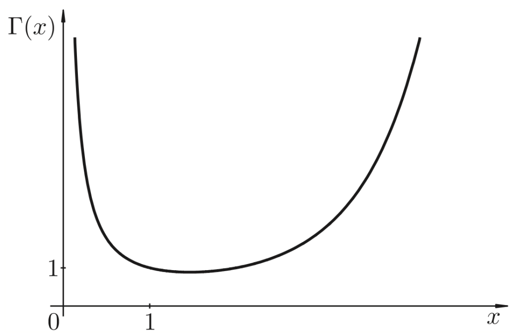
$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = F(x-1), \text{ za } x > 0$$

tako definirano funkcijo imenujemo **Eulerjeva Γ-funkcija**. Zanjo veljajo še 3 lastnosti, ki pa jih ne bom dokazoval:

- $\Gamma \in C^\infty$ in $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty t^x \log^k(t) e^{-t}\,\mathrm{d}t$

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ za vsak $x > 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \infty$

Graf:



Funkcijo lahko tudi razširimo na $(-\infty, 0)\backslash\mathbb{Z}$

Eulerjeva B-funkcija

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,,\ \text{za } x,y > 0$$

tako definirano funkcijo imenujemo Eulerjeva B-funkcija. Želimo pokazati zvezo med Γ in B funkcijo. Ideja je, da popravimo meje iz $\int_0^1$ na $\int_0^\infty$. Da to naredimo potrebujemo pametno substitucijo. Izberimo:

$$s = \frac{t}{1-t},\ t \to 0 \sim s \to 0 \text{ in } t \to 1 \sim s \to \infty$$
$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{(1+s)^2}, t = \frac{s}{1+s}, (1-t) = \frac{1}{1+s}$$

Če vstavim v definicijo dobim:

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\,\mathrm{d}s$$

S pomočjo te enakosti (in dvema vmesnima substitucijama, ki sta precej naravni in jih je lahko opaziti) lahko izpeljemo

$$B(x,y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$$