KOMB - Vaje 1

Daniel Bartolič

October 8, 2024

1. **Koliko je različnih nizov dolžine 3, ki jih sestavljamo iz znakov A,B,C,D,E in F, če**

   (a) **ponavljanje ni dovoljeno?**
   Imamo 6 črk. Sestavljamo niz iz 3 črk. Prvo črko izbiramo izmed šestih, drugo izmed petih, tretjo izmed štirih črk. Odgovor je torej $6 \cdot 5 \cdot 4$

   (b) **ponavljanje je dovoljeno?**
   Tokrat vedno izbiramo izmed šestih črk saj dovoljujemo ponavljanje. 6^3

   (c) **ponavljanje ni dovoljeno in besede vsebujejo črko A?**
   Delim na 3 primere, odvisno od tega kje je A. Lahko imamo samo en A. Pri vsakem primeru imamo za drugi dve prosti mesti na voljo $5 \cdot 4$ možnosti. Odgovor je $5 \cdot 4 \cdot 3$

   (d) **ponavljanje je dovoljeno in besede vsebujejo črko A?**
   Tokrat moram deliti na primere odvisno koliko A-jev imam.
   1 A: $3 \cdot 5^2$
   2 A: $3 \cdot 5$
   3 A: 1

2. **Naj bo**

   $$A = \{(i,j); i,j \in \mathbb{N}, 20 \leq i,j \leq 40\} \textbf{ in } B = \{(i,j) \in A; i+j \textbf{ je sodo število}\}$$

   Koliko elementov ima množica B?

   Množica A ima $21^2 = 441$ elementov. Množica B vsebuje tiste elemente iz A za katere sta i in j hkrati soda ali pa liha.

   Soda sta v 11^2 primerih in liha sta v 10^2 primerih. Odgovor je torej $11^2 + 10^2 = 221$

3. **Koliko deliteljev ima število 360?**

   $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Vsak delitelj števila 360 lahko sestavimo z neko kombinacijo prafaktorjev. Izbiramo lahko koliko $2, 3$ in 5 bomo uporabili. Število imamo "na voljo" od 0-krat do potence, ki nastopa v razčlenitvi. Odgovor je torej $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

4. (a) **Koliko različnih štirimestnih števil ima same različne števke?**
   Imamo 4 mesta. Na prvo lahko postavimo 9 števk (vse razen 0 saj potem ne bi bilo štirimestno). Na drugo lahko spet postavimo 9 (vse razen prejšnjega). Na tretje 8 in četrto 7. Odgovor je $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

   (b) **Koliko števil med 1 in 1000 ima same različne števke?**
   Delim na primere: 1 števka: 9
   2 števki: $9 \cdot 9 = 81$
   3 števke: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$
   4 števke: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

   Odgovor je 5274

(c) **Koliko je lihih štirimestnih števil s samimi različnimi števkami?**
Najprej izberimo zadnjo števko, imamo 5 možnosti. Potem izberimo prvo števko, imamo 8 možnosti (vse razen prve lihe izbire in razen 0). Potem izbiramo še drugo in tretjo za katere imamo $8 \cdot 7$ možnosti. Odgovor je $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2240$

(d) **Koliko je sodih štirimestnih števil s samimi različnimi števkami?**
$(a) - (c) = 4536 - 2240 = 2296$

5. **Koliko je različnih 0/1 matrik z m vrsticami in n stolpci? Kaj pa, če so vse vrstice različne?**

   V vsakem polju imamo 2 izbiri (0 ali 1). Vseh takšnih matrik je $2^{m \cdot n}$. Če želimo, da je vsaka vrstica različna imamo za prvo vrstico 2^n možnosti, za naslednjo pa $2^n - 1$ (saj nočemo enako kot prejšnjo). Tretja vrstica bi potem bila $2^n - 2$. Odgovor je torej $\prod_{k=0}^{m-1}(2^n - k)$

6. **Na koliko načinov lahko izplačamo m EUR z bankovci za 5,10,20 EUR?**

   Če imamo število m, ki ni deljivo s 5 potem ne moremo izplačati.

   Če imamo število deljivo s 5, $n = \frac{5}{m}$ potem lahko problem reduciramo na "kovance" $1, 2, 4$. Poskusimo rešiti lažji problem in postopoma priti do rešitve:

   (a) samo kovanci za 1 EUR: samo en način

   (b) kovanci za 1 in 2 EUR: Odločimo se koliko kovancev za 2 EUR uporabimo. Lahko uporabimo največ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, najmanj pa 0. Imamo torej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ možnosti

   (c) kovanci za 1,2,4 EUR: Odločiti se moramo koliko kovancev po 4 izberemo, ostalo pa s kovanci za 1 in 2.
   0 kovancev za 4EUR: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$
   1 kovanec za 4EUR: $\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor + 1$
   2 kovanca za 4EUR: $\lfloor \frac{n-2\cdot 4}{2} \rfloor + 1$
   ...
   i kovancev za 4EUR: $\lfloor \frac{n-i\cdot 4}{2} \rfloor + 1$
   $i \in \{0, 1, 2, \ldots \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$
   Število načinov je torej:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \frac{n - i \cdot 4}{2} + 1$$

   Enačbo se da lepše napisati če uporabimo $n = 4k + \{1, 2, 3\}$, dobimo namreč:

$$\# = \begin{cases} (k+1)^2; & n = 4k, n = 4k + 1 \\ (k+1)(k+2); & n = 4k + 2, n = 4k + 3 \end{cases}$$

7. **V kvadratu s stranico 2 izberemo 5 točk. Pokažite, da sta vsaj dve med njimi oddaljeni med seboj za največ $\sqrt{2}$**

   Razdelimo kvadrat na 4 manjše kvadrate tako da ga razpolovimo po dolžini in širini. Če izberemo 5 točk sta po Dirichletovem načelu v vsaj enem manjšem kvadratu vsaj dve točki. Diagonala manjšega kvadrata je $\sqrt{2}$ to pa je tudi največja možna razdalja dveh točk v tem kvadratu.

8. **V tabelo velikosti 5×5 vstavljamo številke $-1, 0$ in 1. Pokažite, da sta vsaj dve izmed vsot po vrsticah, stolpcih in obeh glavnih diagonalah enaki, ne glede na to, kako napolnimo tabelo**

   Največja možna vsota je 5. Najmanjša možna vsota je -5. Lahko dobimo tudi vse cele vsote med -5 in 5. Skupaj imamo torej 11 možnih vsot. Po drugi strani pa imamo 5 vrstic, 5 stolpcev in 2 diagonali, torej 12 "mest" za vsote. Po dirichletovem načelu imata vsaj 2 "mesti" (torej dve izmed vrstic,stolpcev in diagonal) enako vsoto.

9. **Naj bo n naravno število in $A \subseteq \mathbb{Z}$ moči $n+1$. Pokažite, da A vsebuje par števil, katerih razlika je deljiva z n**

   Imamo n+1 števil in le n ostankov pri deljenju z številom n ($\{0, 1, \ldots n-1\}$). Po Dirichletovem načelu obstajata dve števili z istim ostankom pri deljenju z n (recimo, da je to k).

   $a = nc_a + k$ in $b = nc_b + k$

   Njuna razlika $a - b = nc_a + k - nc_b - k = n(c_a - c_b)$ je deljiva z n.

10. **Naj bo n liho naravno število in $A \subseteq \mathbb{Z}$ moči $\frac{n+3}{2}$. Pokažite, da A vsebuje tak par števil, da je ali njuna vsota ali njuna razlika deljiva z n**

    Liho število razdelim na pare možnih ostankov ki se seštejejo v n in število 0 (ki predstavlja, da je število že deljivo z n). Za lih n imam torej:

    $\{0\}, \{1, n-1\}, \{2, n-2\}, \{3, n-3\}, \ldots \{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\}$

    Če bi dve števili iz množice A imele ostanek pri deljenju z n v istem paru "škatli" bi potem njuna vsota (če sta to različna elementa v paru) ali pa razlika (če sta to enaka elementa v paru) bila deljiva z n. Ker imamo $\frac{n+3}{2} = \frac{n+1}{2} + 1$ števil v A in le $\frac{n+1}{2}$ škatel je po Dirichletovem načelu trditev dokazana.

11. **V nekem podjetju je zaposlenih 37 oseb. Pokažite, da obstaja mesec, v katerem imajo vsaj štirje zaposleni rojstni dan.**

    Uporabimo posplošeno Dirichletovo načelo: Imamo 12 ($k > 0$)mesecev (škatle) in 37 (N) oseb (kroglice). Po posplošenem dirichletovem načelu bo vsaj en mesec (ena škatla)vsebovala $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ kroglic oz. v našem primeru $\lceil \frac{37}{12} \rceil = 4$ oseb.

12. **V sobi pravokotne oblike dolžine $3m$, širine $4m$ in višine $3m$ leta 110 muh. Pokažite, da v vsakem trenutku obstajajo 4 muhe, ki se nahajajo znotraj krogle s polmerom $90cm$.**

    Razdelimo sobo na manjše kockaste prostore velikost $1m^3$. Takšnih kock je v naši sobi natanko 36. Po posplošenem dirichletovem načelu morajo biti v vsaj eni kocki vsaj $\lceil \frac{110}{36} \rceil = 4$ muhe. Pokazati moramo še, da je kocka $1m^3$ vsebovana v krogli polmera $90cm$. Največja razdalja od centra kocke je $\frac{\sqrt{3}}{2}m \approx 0,866m < 0,9m$.

13. **Na šahovnico velikosti 8×8 postavimo 17 trdnjav.**

    (a) **Pokažite, da so vsaj v eni vrstici vsaj tri trdnjave.**

    Spet uporabimo posplošeno Dirichletovo načelo. Imamo 8 vrstic in 17 trdnjav. V vsaj eni vrstici morajo biti vsaj $\lceil \frac{17}{8} \rceil = 3$ trdnjave

    (b) **Pokažite, da obstajajo vsaj tri trdnjave, ki se med seboj paroma ne napadajo.**

    Iz (a) opazimo, da obstaja stolpec IN vrstica v katerem sta vsaj dve trdnjavi.

    Če si vrstica in stolpec ne delita nobene trdnjave, kamorkoli postavimo naslednjo trdnjavo bodo že obstajale 3 trdnjave, ki se med seboj ne napadajo.

    Če si vrstica in stolpec delita eno trdnjavo moramo postaviti kamorkoli vsaj še dve trdnjavi in bomo spet imeli 3 trdnjave, ki se med seboj ne napadajo.

14. **V paketu običajnih igralnih kart je 52 kart. Vsaka karta je določena z barvo in vrednostjo. Barve so štiri: srce, kara, križ, pik. Vrednosti pa so števila od 2 do 10 in figure fant, dama, kralj, as; vsaka barva ima torej 13 vrednosti. Imamo paket običajnih kart. Koliko najmanj kart moramo izvleči, da zagotovo dobimo**

    (a) **vsaj tri karte iste barve?**

    V najslabšem primeru izvlečemo vsakič 1 različno barvo. $2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9$

(b) **vsaj tri križe?**

V najslabšem primeru izvlečemo vse ostale barve prej, torej $13 + 13 + 13 + 3 = 42$

(c) **vsaj tri križe in tri srca?**

V najslabšem primeru najprej izvlečemo vse karo in vse pike, potem pa še vse križe ali srca na koncu pa še zadnje 3, ki morajo biti ali 3 srca ali 3 križi. Spet 42

(d) **vsaj po dve karti vsake barve?**

V najslabšem primeru izvlečemo vse karte razen karte ene barve. Ostanejo še karte zadnje barve in takoj ko vlečemo 2 imamo željeno roko. 41

Domača naloga

1. **Andrej in Bojan imata 6 bankovcev po 50 EUR in 4 bankovce po 100EUR. Na koliko načinov si jih lahko razdelita tako, da**

   (a) **vsaki dobi enako število bankovcev?**

   Vseh bankovcev je 10. To pomeni, da vsak dobi 5 bankovcev. Če pogledamo možnosti le za npr. Andreja bomo takoj vedeli kaj nam ostane za Bojana in bo to že predstavljalo vse možnosti. Možnosti za Andreja (in tako tudi vseh) je 5 saj odločamo koliko bankovcev za 100EUR ima, nič, enega, dva, tri ali štiri.

   (b) **vsak dobi enak znesek?**

   Celotna vsota je 700EUR. To pomeni, da vsak dobi 350EUR. Podobno kot prej je dovolj pogledati le za npr. Andreja. 350EUR ne moremo sestaviti le z 6 bankovci za 50EUR, torej moramo nujno uporabiti vsaj en bankovec za 100EUR. Možnosti imamo torej 3.

   (c) **vsak dobi vsaj en bankovec?**

   Spet je dovolj če pogledamo le za npr. Andreja. Poglejmo koliko možnosti ima za vsako število bankovcev (spet je vse odvisno od tega koliko bankovcev za 100EUR lahko izberemo):

   1 bankovec: 2, 2 bankovca: 3, 3 bankovci: 4
   4 bankovci: 5, 5 bankovcev: 5, 6 bankovcev: 5
   7 bankovcev: 4, 8 bankovcev: 3, 9 bankovcev: 2

   Skupaj imamo torej $2 + 3 + 4 + 5 + 5 + 5 + 4 + 3 + 2 = 33$ možnosti.

2. **Koliko je štirimestnih števil, pri katerih je vsota števk sodo število**

   Vsota števk štirimestnega števila je sodo število v treh primerih:

   (a) vse števke lihe

   Teh je 5^4

   (b) vse števke sode

   Teh je $4 \cdot 5^3$ saj prva ni 0

   (c) 2 števki sodi in 2 lihi Preveriti moramo vse možne pozicije za soda števila, tako tudi hkrati štejemo vse pozicije za 2 liha:

   s s l l: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
   s l s l: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
   s l l s: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
   l s s l : $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
   l s l s: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
   l l s s: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

   Odgovor je $5^4 + 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^4 + 3 \cdot 4 \cdot 5^3 = 4500$

3. **Koliko je različnih besed dolžine 3, sestavljenih iz črk A, B, C, D, E in F , če**
   (a) **ponavljanje ni dovoljeno in besede vsebujejo vsaj eno od črk E in F?**
   (b) **ponavljanje je dovoljeno in besede vsebujejo vsaj eno od črk E in F?**
   (c) **ponavljanje ni dovoljeno in besede vsebujejo črko E in črko F?**
   (d) **ponavljanje je dovoljeno in besede vsebujejo črko E in črko F?**

4. **Naj bo A množica z n elementi**

   Relacijo na množici $A = [n]$ predstavimo z 0/1 matriko dimenzije $n \times n$. Kadar sta elementa a, b v relaciji (aRb) v matriki na mesto (a, b) vstavimo 1. Če nista potem je tam 0. Na vsakem mestu imamo torej 2 možnosti ali je ali ni v relaciji.

   (a) **Koliko je vseh binarnih relacij na množici A?**
   Štejemo vse možne relacije torej 2^{n^2}
   (b) **Koliko je vseh refleksivnih relacij na množici A?**
   refleksivna relacija je takrat ko je aRa za vsak a. To pomeni, da je diagonala že izbrana. Ostanem nam še $n^2 - n$ mest. Vseh relaciji je torej 2^{n^2-n}
   (c) **Koliko je vseh simetričnih relacij na množici A?**
   Za simetrično relacijo velja $aRb \Rightarrow bRa$. Potrebno je torej izpolniti le eno polovico naše matrike (+ diagonalo posebej). Vseh ne diagonalnih elemntov na eni polovici je $\frac{n^2-n}{2}$ in elementov na diagonali n. Relaciji je $2^n \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}}$
   (d) **Koliko je vseh refleksivnih in hkrati simetričnih relacij na množici A?**
   Podobno kot prejšnji primer le, da imamo diagonalo že izpolnjeno: $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

5. **Ob železniški progi je k postaj. Koliko različnih vozovnic je treba pripraviti, da jih bodo imeli na razpolago za vse relacije (v obe smeri)? Kaj pa, če se mora vsak potnik peljati vsaj dve postaji?**

   Na prvi postaji lahko kupimo $(k-1)$ različnih vozovnic. Na drugi postaji lahko spet kupimo $(k - 1)$ različnih vozovnic (eno za nazaj na prvo postajo in k-2 za vse postaje naprej). Podobno za vse k postaje. Imamo torej $k(k - 1)$ vozovnic.

   Če se mora peljati vsaj za dve postaji potem ima na prvi postaji $(k - 2)$ možnosti (saj se ne sme peljati le do druge postaje) na drugi postaji pa $(k - 3)$ možnosti. Podobno je $(k - 3)$ za vse ostale postaje do k-te, pri kateri imamo spet $(k - 2)$ možnosti. Odgovor je $(k - 2)(k - 3) + 2(k - 2) = (k - 2)(k - 1)$

6. **Naj bo $n \geq 3$. Koliko ciklov dolžine $2n$ vsebuje graf $K_{n,n}$?**

   Če je dolžine $2n$ mora vsebovati vse točke. Ideja je da se izmenjujemo iz ene množice v drugo in gledamo koliko možnosti imamo:

   Najprej imamo n za izibiro prve točke v prvi množici. Potem spet n za izbirno polubne točke v drugi množici. Potem pa $(n - 1)$ za izbirno naslednje v prvi množici... Dobimo $n^2(n - 1)^2 \ldots 2^2 1^2$ oz. $\prod_{k=1}^{n} k^2$

7. **Koliko je permutacij števk $0, 1, \ldots, 9$, pri katerih** Imamo 10 števk.

   (a) **je na prvem mestu soda števka, na zadnjem mestu pa ena od 1, 2, 3, 4, 5?**
   Zanima nas le prva in zadnja števka, vsekakor pa bo vmesnih 8 permutiaranih z 8!. Lahko gledamo disjunktne primere kjer izibiramo za zadnjo števko:
   1 zadnja: $5 \cdot 8!$, 2 zadnja: $4 \cdot 8!$
   3 zadnja: $5 \cdot 8!$, 4 zadnja: $4 \cdot 8!$
   5 zadnja: $5 \cdot 8!$

   Odgovor je $23 \cdot 8! = 927360$

(b) **0 ni na prvem mestu in 9 ni na zadnjem mestu?**

Na prvem mestu imamo 9 možnosti. Na zadnjem imamo spet 9 možnosti. Sredina je spet 8!. Odgovor je $9^2 \cdot 8! = 32650920$

8. **V ravnini imamo 5 točk s celoštevilskimi koordinatami. Pokažite, da ima vsaj eno razpoloviščee daljice, ki ima krajiščii v tej množici, celoštevilske koordinate.**

Če si izberemo dve točki na koordinatnem sistemu (a,b) in (c,d) je potem razpolovišče te daljice $(a+\frac{c-a}{2}, b+\frac{d-b}{2})$. Da ima ta točka celoštevilčne koordinate mora biti $c-a$ in $d-b$ sodo število. To pa je v primeru ko sta obe lihi ali pa obe sodi. Pravzaprav želimo, da imata naši točki na istih koordinatah sodo in liho število. Možnosti je seveda 4, lahko imamo $(l,s),(s,l),(s,s)$ ali (l,l). Ker pa imamo 5 točk imata po Dirichletovem načelu vsaj dve točki isto "strukturo".