Økonometri I

Aalborg University Business School
Kasper Kann og Daniel Behr
Student ID: 20134818 og 20195227
juni 2021

Contents

1 Eksamensopgave 1

Eksamensopgave 1: OLS og Heteroskedasticitet

Betragt følgende model for bankansattes løn:

$$log(salary) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 log(salbegin) + \beta_3 male + \beta_4 minority + u$$

hvor salary er årsløn (i 1000 US dollars), educ er uddannelse målt i antal år, salbegin er startlønnen (i 1000 US dollars) for personens første stilling i samme bank, male er en dummy-variabel for køn, minority er en dummy-variabel der angiver om man tilhører en minoritet.

Datasættet data1, som er tilgængelig på Moodle, indeholder disse variable målt for 400 bankansatte.

Nedenfor er der en række opgaver der skal løses. I forbindelse med de enkelte opgaver forventes det at der redegøres for den relevante teori. Det er altså ikke tilstrække-ligt blot at præsentere et "facit" for hver opgave.

Opgaver

- 1. Estimer modellen vha. OLS. Kommenter på outputtet og fortolk resultaterne.
- 2. Udfør grafisk modelkontrol.
- 3. Test for heteroskedasticitet vha. Breusch-Pagan-testet og specialudgaven af White-testet.
- 4. Beregn robuste standardfejl for modellen og sammenlign med resultaterne i spørgsmål 1.
- 5. Test hypotesen $H_0 : \beta_2 = 1$ mod alternativet $H_1 : \beta_2 \neq 1$.
- 6. Test hypotesen $H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$.
- 7. Estimer modellen vha. FGLS og kommenter på resultaterne.
- 8. Har FGLS estimationen taget højde for al heteroskedasticiteten?

1.1 Estimer modellen vha. OLS. Kommenter på outputtet og fortolk resultaterne.

Opstiller modellen vha OLS., som vi har udledt i Appendix 1 - OLS:

$$log(salary) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 log(salbeginn) + \beta_3 male + \beta_4 minority$$

Opstiller model i R og udfører summary for at få estimater.

```
data1 <- read_csv("C:/Users/Kann/Dropbox/Uni/Okonometri/data1.csv")
model <- lm(lsalary ~ educ + lsalbeginn + male + minority, data = data1)
reg_1 <- summary(model)
reg_1
##
## Call:
## lm(formula = lsalary ~ educ + lsalbeginn + male + minority, data = data1)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.42452 -0.11908 -0.01378  0.10599  0.90025
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.856040   0.083361  10.269  < 2e-16 ***
## educ         0.022264   0.004152   5.363  1.4e-07 ***
## lsalbeginn   0.820838   0.039915  20.565  < 2e-16 ***
## male         0.028855   0.021762   1.326    0.186
## minority    -0.030720   0.021712  -1.415    0.158
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.1741 on 396 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7953, Adjusted R-squared:  0.7932
## F-statistic: 384.7 on 4 and 396 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Intercept:
Vi kan se at interceptet er 0.85, og da vi har to dummy variable (male og minority), så er det intercept for referencegruppen. I vores model er referencegruppen kvinder, som ikke er en del af minoriteten.

Education:
Vi kan fra vores model se at dataen for uddannelse er på level form, hvorimod løn er på log form. Det betyder at vi skal gange β_1 med 100, og så får vi 2.2%. Det betyder at lønnen stiger med 2.2% ved et extra års uddannelse. Dette er kun et estimat, og vi kan beregne den rette procentvise effekt med formlen:

$$\%\Delta\hat{y} = 100 * (exp(\hat{\beta}_2) - 1)$$

udregnes i R:

```
100*(exp(reg_1$coefficients[2,1])-1)
## [1] 2.25135
```

Her kan vi se, at der er en lille forskel fra regressionsestimatet til vores udregning. Det drejer sig om tredje decimal, som er steget med 0.03. Dette er ikke en nævneværdig forskel i denne sammenhæng.

Log sal beginn:
Dette er en variabel, der viser den logaritmiske værdi af startlønnen. Vi kan se, at både wage(lønnen) og log sal beginn er i log form, og det betyder at en 1% stigning i startlønnen vil få den samlede løn til at stige med 0.82%.

Male:
Dette er en dummy variabel, der viser 1 hvis der er tale om en mand, og 0 hvis der ikke er tale om en mand. Vi har igen en log-level situation, og det betyder vi skal gange β_3 med 100, så får vi at mænd får 2.8% højere lønninger end kvinder. Vi beregner igen den rigtige procentmæssige effekt med formlen fra tidligere:

```
100*(exp(reg_1$coefficients[4,1])-1)
## [1] 2.92751
```

Her ser vi igen en 0.03 stigning fra estimatet til vores udregning. Der begynder at opstå en tendens.

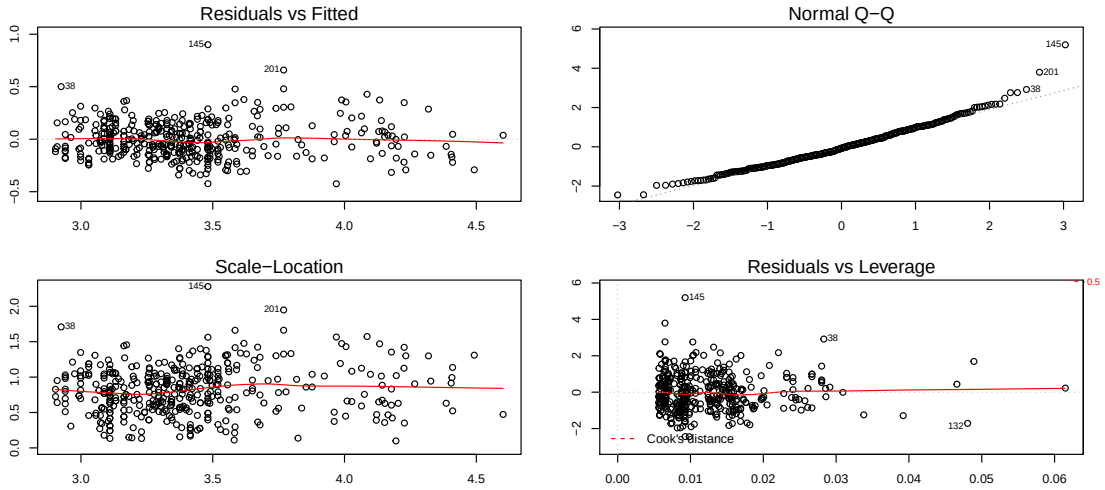
Minority:
Dette er en dummy variable som tager værdien 1, hvis der er tale om en fra en minoritetsgruppe, og tager værdien 0, hvis der er tale om som ikke er den del af en minoritetsgruppe.
Vi kan igen se at vi har med en log-level situation at gøre, og det betyder vi skal gange vores β_4 med 100, og så får vi, at lønnen for minoriteter er 3.0% lavere end ikke-minioriteter. Vi kan på samme måde som tidligere finde den rigtige procentmæssige effekt:

```
100*(exp(reg_1$coefficients[5,1])-1)
## [1] -3.02531
```

Her er den den procentmæssige effekt steget med 0.045, som heller ikke er specielt nævneværdig i denne kontekst.
Forskellen i estimaterne og vores procentmæssige udregninger er ikke specielt store, og konklussionen af forskellige analyser ville formentlig ikke blive påvirket, hvis man bare antog, at estimaterne var de rigtige procentmæssige ændringer.

1.2 Udfør grafisk modelkontrol.

```
par(mfrow=c(2,2),mar=c(2,3,3,2),cex=0.7)
plot(model)
```



*** Residuals vs Fitted:**

Dette plot viser om residualerne har non-lineær mønstre. Hvis residualerne er indenfor den samme spredning som den horisontale linje, så er det et tegn på, at der ikke er non-lineær forhold i modellen.

Vi kan på vores figur se, at residualerne er spredt omkring den horisontale linje. Det tyder altså på, at der ikke er non-lineær tendenser i modellen. Havde vores røde linje haft form som en parabel, ville det tyde på der var non-lineær forhold i modellen.

*** Normal Q-Q:**

Dette plot viser os om residualerne er normalfordelte. Hvis residualerne er normalfordelte, vil residualerne følge den prikkede streg.

Vi kan se i vores figur at alle residualerne ligger tæt på den prikkede linje, som tyder på at vores residualer er normalfordelte.

*** Scale-Location:**

Dette plot bruger vi til at checke vores antagelse om lige stor varians for vores residualer (homoskedasticitet). Hvis de standarliserede residualer er spredt lige omkring vores predictors(estimator), så opfylder modellen antagelsen om homoskedasticitet.

Vi kan i vores figur se, at residualernes spredning er tæt på den samme op til omkring 3.5, hvor det ser ud som om der sker en ændring i variansen for vores residualer. Dette kan indikere, at der er en grad af heteroskedacitet i vores model.

*** Residuals vs Leverage:**

Vi bruger dette plot til at se om vores model har signifikante outliers. Nogengange kan outliers have en stor effekt på resultatet, der kommer ud af regressionen. Vi bruger "Cooks distance" til at afgøre om vores residualer har signifikante outlisers. Det kan ses øverst til højre/right at "Cooks distance" starter der for værdien 0.5.

Vi kan i vores figur se at vores residualer ikke har outliers, der har en signifikant påvirkning på vores resultat. Det kan vi se fordi alle residualerne er indenfor "Cooks distance".

1.3 Test for heteroskedasticitet vha. Breusch-Pagan-testen og specialudgaven af White-testet.

Det vi vil i denne opgave er at teste MLR5, altså om homoskedasticitet er opfyldt i modellen. Dette er yderligere beskrevet i: Appendix 2 - SLR og MLR antagelser.

Hvis vi har heteroskedasticity i vores model, vil det påvirke variansen for vores estimator og dermed gøre vores estimator bias. Det betyder at vores OLS ikke længere kan beskrives som værende Best Linear Unbiased Estimate(BLUE) fordi MLR 5 ikke er opfyldt..

Det vi gør, er at teste for, om en af de uafhænige variable har en effekt for variansen af fejlleddet. Vores varians burde være konstant, og burde derfor ikke være afhængige af vores uafhængige variable. Det kan vi opskrive på hypoteseform:

$$H_0 : Var[u|x_1, ..., x_k] = \sigma^2$$

Omskrives:

$$H_0 : [u^2|x_1, ..., x_k] = \sigma^2$$

Dette kan vi fordi:

$$Var(u) = E[u - E(u)]^2 \text{ og antagelsen om } E(u) = 0$$

Vi er nu i stand til at teste for heteroskedasticity ved at bruge u^2, fordi den forventede værdi af u^2 burde give os variansen af fejlleddet. Da vi ikke kender u^2 for hele vores population, må vi istedet bruge den estimerede u^2.
Breusch-Pagan-testen udføres:

```
bptest(model) # DF = 4 er vores højreside variable af modellen
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  model
## BP = 12.105, df = 4, p-value = 0.01659
```

Der kan også laves en manuel test:

```
u <- residuals(model)
u2 <- u^2
umodel <- lm(u2 ~ educ + lsalbeginn + male + minority, data = data1)
summary(umodel)
##
## Call:
## lm(formula = u2 ~ educ + lsalbeginn + male + minority, data = data1)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
```

```
## -0.04943 -0.02453 -0.01263  0.00845  0.76913
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.009579   0.027300   0.351   0.7259
## educ         0.002966   0.001360   2.182   0.0297 *
## lsalbeginn  -0.008181   0.013072  -0.626   0.5318
## male         0.009813   0.007127   1.377   0.1693
## minority    -0.008087   0.007111  -1.137   0.2561
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.05702 on 396 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.03019,    Adjusted R-squared:  0.02039
## F-statistic: 3.082 on 4 and 396 DF,  p-value: 0.01614
```

Her kan vi i begge tilfælde se, at p-værdien < 0.05, og vi kan derfor forkaste nulhypotesen om, at der er homoskedacitet. Det vil altså sige, at der er heteroskedacitet, og derfor har fejlleddet(u) en sammenhæng med de forklarende variable på højresiden af vores model.

White-testen

White testen er en statistisk test, som tester om variansen af fejledene for regressionen. Det er altså en test, der tester for heteroskedasitet.

```
bptest(model, ~ fitted(model) + I(fitted(model)^2))
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  model
## BP = 8.1481, df = 2, p-value = 0.01701
```

Vi kan også med brug af White-testen afvise H_0 på et 5% signifikansnivau, da vores p-værdi er 0.017. Det betyder altså at vores model har heteroskedasticitet i sig.

1.4 Beregn robuste standardfejl for modellen og sammenlign med resultaterne i spørgsmål 1.

Normalt er vi i stand til at udregne variansen for $\beta_{\hat{j}}$ ved at bruge formlen:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 Var(u_i)}{(SST_x)^2}$$

Normalt ville vi bruge antagelsen om, at variansen for fejlleddet er konstant, og derfor at $var(u_i) = \sigma^2$. Det betyder, at variansen ikke ændrer sig, når man går fra én observation til den næste observation for en enkelt variabel. Så hvis vi ser på indkomst som en variabel, så ændrer variansen sig ikke, om vi ser på Anders' indkomst eller Pouls indkomst. Det betyder også at variansen ikke ændrer sig, når vi går fra en variabel(x_1) til en anden variabel(x_2). Altså, at variansen ikke ændrer sig fra fx indkomst(x_1) til formue(x_2).

Problemet opstår dog fordi den første parantes i ligningen nedenfor, korrelerer med variansen til u_i(fejlleddet):

$$corr((x_i - \bar{x})|var(u_i)) \neq 0$$

fejlleddet korrelerer enten fra observation til observation, eller fra variabel til variabel. Det betyder, at der er heteroskedasitet.

Vi gør istedet brug af robust standardfejl, da disse ikke korrellerer med fejlleddet. Man kan altså få estimationer, selvom der er hetereoskedasicitet.

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{r}_{ij}^2\hat{u}_i^2}{(SSR_j)^2}}$$

hvor $\hat{r}_{ij}^2$ er noteringen for den i'ene residual fra regressionen (x_j) på alle andre uafhængige variable

For at være i stand til at bruge den ligning ovenfor, så er vi nødt til at være afhængige af law of large numbers og central limit theorem.

```
robustmodel <- coeftest(model, vcov = vcovHC(model, type = "HC0"))
summodel <- summary(model)
std.error <- data.frame(Std.error = summodel$coefficients[,2])
Robust.std.error <- data.frame(Robust.Std.Error = robustmodel[,2])
cbind(std.error, Robust.std.error)
##               Std.error Robust.Std.Error
## (Intercept) 0.083361423      0.088866810
## educ        0.004151627      0.003820617
## lsalbeginn  0.039915108      0.042538198
## male        0.021761780      0.022393761
## minority    0.021712349      0.019441016
```

Her kan vi se, at der er forskel fra std. error fra opgave 1 og de robuste std. errors.

1.5 Test hypotesen $H_0 : \beta_2 = 1$ mod alternativet $H_1 : \beta_2 \neq 1$.

Her vil vi gerne finde T-statistikken ud fra følgende formel:

$$t = (\hat{\beta}_j - 1)/se(\hat{\beta}_j)$$

Finder de nødvendige værdier til at finde T-statistikken og finder derefter T-statistikken

```
reg=summodel$coefficients
beta_2= reg[3,1]
se_beta_2 = reg[3,2]
#T-statistikken
(beta_2-1)/se_beta_2
## [1] -4.488569
```

Finder de kritiske værdier for de forskellige siknifikansniveauer:

```
alpha <- c(0.1,0.05,0.01)
qt(1-alpha, df = 396)
## [1] 1.283693 1.648711 2.335801
```

Vores aboslutte værdi er 4.488, og vi kan derfor afvise vores H_0 hypotese om at $\beta_2 = 1$ på et 1% siknifikans niveau, fordi vores absolutte t-værdi er større end den kritiske værdi på 2.335, og β_2 må derfor være forskellige fra 1.

1.6 Test hypotesen $H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$.

Dette er en joint nul hypotese

Vi har tidligere i opgave 1.3 vist, at der er heteroskedacitet i modellen, og vi vil derfor kun teste hypotesen på en måde, hvor der er heteroskedacitet i modellen.

Vi vil bruge wald-testen for at teste om vores β_3 og β_4 er lig 0. Vi bruger wald-test fordi den tester om variablerne er signifikante. Der bliver lavet to modeller, i den første ingår alle variablene i modellen. I den anden, er de to dummy variabler ikke med.

```
waldtest(model, vcov=vcovHC(model, type = "HC0"), terms=(3:4))
## Wald test
##
## Model 1: lsalary ~ educ + lsalbeginn + male + minority
## Model 2: lsalary ~ educ + lsalbeginn
##   Res.Df Df      F Pr(>F)
## 1    396
## 2    398 -2 1.7072 0.1827
```

Vi kan ikke på et 5% siknifikansniveau afvise, at disse to dummy variable er siknifikante for modellen, da p værdien er større end 0.05. Her kunne vi også have brugt Linearhypothesis i R til at udregne det.
Hvis modellen havde været med homoskedacitet istedet for heteroskedacitet skulle vi have lavet en regression uden β_3 og β_4 og kunne derefter have fundet p-værdien ved hjælp af F-værdien.

1.7 Estimer modellen vha. FGLS og kommenter på resultaterne.

Vi vil i denne opgave lave Feasible GLS(FGLS), fordi vi som udgangspunkt har en funktion $h(x)$, som vi ikke kender, men vil prøve at opstille og estimere. Dette gøres, da vi gerne vil fjerne heteroskedasitet i modellen. Til det vil vi bruge en formel hvor variansen for fejlleddet ikke er konstant. Det betyder at felledet bliver påvirket af vores x, og det kan vi opskrives på formen:

$$var(u|x) = \sigma^2 exp(\delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + ...\delta_k x_k)$$

Da vi ikke ved hvordan x påvirker variansen på fejlleddet kan vi bruge delen, der omhandler heteroskedasicitet til at estimere $\widehat{h_i}$. Grunden til dette er, fordi vi ved at hetereoskedasicitet påvirker variansen

$$var(u|x) = \sigma^2 h(x)$$

og det derfor er funktionen for $h(x)$ vi ønsker at kende.

Vi kender ikke vore deltaværdier, så de estimeres fra vores stikprøvedata, og vi kan derefter fjerne hetereoskedasicitet. Vi finder deltaerne ved:

$$u^2 = \sigma^2 exp(\delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + ...\delta_k x_k)v$$

Log tages på begge sider

$$log(u^2) = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + ...\delta_k x_k + e$$

Vi vil nu i R finde vores fitted værdier, som noteres $\widehat{g}_i$, da $\widehat{h_i} = exp(\widehat{g_i})$, altså et estimat af h. og lave FGLS modellen

```
logu2 <- log(resid(model)^2) # Finder logged residualer i anden.
varreg<- lm(logu2~educ + lsalbeginn + male + minority, data=data1) # Regressionsvariansen
w <- exp(fitted(varreg)) # Her finder vi vægten som vi skal bruge i vores FGLSmodel
FGLSmodel <- lm(lsalary ~ educ + lsalbeginn + male + minority, data=data1, weight = 1/w)
FGLSmodel_sum <- summary(FGLSmodel)
screenreg(list(OLS = model, FGLS = FGLSmodel_sum), digits = 4)
##
## ======================================
##              OLS           FGLS
## --------------------------------------
## (Intercept)    0.8560 ***    0.8609 ***
##               (0.0834)      (0.0851)
## educ           0.0223 ***    0.0203 ***
##               (0.0042)      (0.0039)
## lsalbeginn     0.8208 ***    0.8274 ***
##               (0.0399)      (0.0397)
## male           0.0289        0.0331
##               (0.0218)      (0.0212)
## minority      -0.0307       -0.0275
##               (0.0217)      (0.0196)
## --------------------------------------
## R^2            0.7953        0.7863
## Adj. R^2       0.7932        0.7842
## Num. obs.    401           401
## RMSE                         1.8276
## ======================================
## *** p < 0.001; ** p < 0.01; * p < 0.05
```

Her ses det, at estimaterne er stort set uændret, men standard errors(paranteserne) er forskellige fra den originale. Dette betyder, at vi ikke har været i stand til at fjerne al hetereoskedasiciteten i modellen.

1.8 Har FGLS estimationen taget højde for al heteroskedasticiteten?

Hvis vi ikke er sikre på at FGLS estimationen har været i stand til identificere al heteroskedasiteten, kan vi finde de robuste standard fejl efter FGLS.

```
FGLS_Robust <- coeftest(FGLSmodel, vcov = vcovHC(FGLSmodel, type = "HC0"))

screenreg(list(FGLS = FGLSmodel_sum, Robust_FGLS = FGLS_Robust), digits = 4)
##
## ====================================
##               FGLS          Robust_FGLS
## ------------------------------------
## (Intercept)    0.8609 ***   0.8609 ***
##               (0.0851)     (0.0910)
## educ           0.0203 ***   0.0203 ***
##               (0.0039)     (0.0038)
## lsalbeginn     0.8274 ***   0.8274 ***
##               (0.0397)     (0.0433)
## male           0.0331       0.0331
##               (0.0212)     (0.0220)
## minority      -0.0275      -0.0275
##               (0.0196)     (0.0188)
## ------------------------------------
## R^2            0.7863
## Adj. R^2       0.7842
## Num. obs.    401
## RMSE           1.8276
## ====================================
## *** p < 0.001; ** p < 0.01; * p < 0.05
```

Vi kan se at modellen ikke var i stand til at fjerne al heteroskedasticiteten, fordi at standardafvigelserne har ændret sig. Ses i paranteserne.

2 Eksamensopgave 2

Økonometri

Eksamensopgave 2: OLS og Misspecifikation

Betragt følgende to modeller for bankansattes løn:

$$salary = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 salbegin + \beta_3 male + \beta_4 minority + u \quad (1)$$

og

$$\log(salary) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 \log(salbegin) + \beta_3 male + \beta_4 minority + u \quad (2)$$

hvor $salary$ er årsløn (i 1000 US dollars), $educ$ er uddannelse målt i antal år, $salbegin$ er startlønnen (i 1000 US dollars) for personens første stilling i samme bank, $male$ er en dummy-variabel for køn og $minority$ er en dummy-variabel der angiver om man tilhører en minoritet.

Datasættet `data2`, som er tilgængelig på Moodle, indeholder disse variable målt for 450 bankansatte.

Nedenfor er der en række opgaver der skal løses. I forbindelse med de enkelte opgaver forventes det at der redegøres for den relevante teori. Det er altså ikke tilstrækkeligt blot at præsentere et "facit" for hver opgave.

Opgaver

1. Estimer de to modeller vha. OLS. Kommenter på outputtet, sammenlign og fortolk resultaterne.
2. Udfør grafisk modelkontrol af de to modeller. Hvilken model vil du foretrække?
3. Undersøg om de to modeller er misspecificerede vha. RESET-testet.
4. Forklar hvorfor det kunne være relevant at medtage $educ^2$ som forklarende variabel i de to modeller. Estimer de to modeller igen hvor $educ^2$ inkluderes (med tilhørende koefficient β_5), kommenter kort på outputtet og udfør RESET-testet igen.
5. Test hypotesen $H_0 : \beta_1 = \beta_5 = 0$ i begge modeller (fra spørgsmål 4).
6. Kunne der være problemer med målefejl i de to modeller? I hvilke tilfælde vil det udgøre et problem?

2.1 Estimer de to modeller vha. OLS. Kommenter på outputtet, sammenlign og fortolk resultaterne.

Opstiller modellen vha OLS., som vi har udledt i Appendix 1 - OLS:

$$salary = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 salbegin + \beta_3 male + \beta_4 minority \tag{1}$$

$$log(salary) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 log(salbegin) + \beta_3 male + \beta_4 minority + u \tag{2}$$

Her tager vi også udgangspunkt i de 5 MLR antagelser beskrevet i Appendix 2 - SLR og MLR antagelser.

Estimeres ved hjælp af R:

Vi opstiller først **model 1**, som er en level-level model. Det er det fordi, at der ikke er taget log af noget, og man bruger det rene data.

```
model1 <- lm(salary ~ educ + salbegin + male + minority)
summary(model1)
##
## Call:
## lm(formula = salary ~ educ + salbegin + male + minority)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -28.470  -4.128  -0.705   2.888  48.718
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -6.93228    1.85539  -3.736 0.000211 ***
## educ         0.99327    0.16674   5.957 5.22e-09 ***
## salbegin     1.60816    0.06408  25.097  < 2e-16 ***
## male         1.83088    0.85713   2.136 0.033220 *
## minority    -1.72539    0.92056  -1.874 0.061547 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 7.875 on 445 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7962, Adjusted R-squared:  0.7944
## F-statistic: 434.7 on 4 and 445 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Educ(uddannelse)

Her kan vi se på estimatet at vi har en positiv sammenhæng mellem uddannelse og salary(årsløn). Resultatet er statistisk signifikant da vi kan se vi har en meget lav p-værdi, og en meget høj t-værdi. Det betyder at en øgning i uddannelse på 1 vil øge årslønne med 0.99.

Salbegin(startløn)
Vi kan se på estimatet at der en positiv sammenhæng mellem startlønne og salary(årsløn). Resultater er også signifikant fordi vi har en meget lav p-værdi, og en meget høj t-værdi. Det vil sige at hvis vi øger startlønnen med 1(målt i 1000 US dollars), så vil årslønne stige med 1.6(mål i 1000 US dollars).

Male(mand)
Dette er en dummy variable som tager værdien 1 hvis der er tale om en mand, og tager værdien 0 hvis der ikke er tale om en mand. Vi kan se at der er en positiv sammenhæng, men dette resultat er ikke lige så signifikant som uddannelse og startløn.

Minority(minoritet)
Dette er en dummy variable som tager værdien 1 hvis der er tale om en fra en minoritetsgruppe, og værdien 0 der ikke er tale om en der tilhøjrer en minoritet. Vi kan se der er en negativ sammenhæng mellem at tilhøjrer en minoritetsgruppe, og så hvilken årsløn man får. Vi kan se at resultatet ikke er signifikant på et 5% signifikansniveau.

Generelt om model 1
For at beskrive styrken i modellen kan vi kigge på $AdjR^2$. I dette tilfælde er den 0.79. Dette er højt for økonomisk data, og betyder at højre siden af regressionen kan forklare venstre-siden relativt godt. Det betyder dog ikke at der nødvendigvis er en kausalitet.

Model2 er en log-log model. Her er kravet at venstresiden er log og minimum én variabel på højre side også er log.

```
model2 <- lm(lsalary ~ educ + lsalbegin + male + minority)
summary(model2)
##
## Call:
## lm(formula = lsalary ~ educ + lsalbegin + male + minority)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.45488 -0.11663 -0.00496  0.11201  0.87115
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.849130   0.077094  11.014  < 2e-16 ***
## educ         0.023578   0.003993   5.905 7.01e-09 ***
## lsalbegin    0.820725   0.037051  22.151  < 2e-16 ***
## male         0.045474   0.020774   2.189   0.0291 *
## minority    -0.041856   0.021057  -1.988   0.0474 *
## ---
```

```
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.1786 on 445 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8051, Adjusted R-squared:  0.8034
## F-statistic: 459.6 on 4 and 445 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Educ(uddannelse)
Vi kan se der er tale om en positiv sammenhæng mellem uddannelse og log-salary. Dette er et statistisk signifikant resultat, og det kan vi se fordi vi har en meget lav p-værdi og meget høj t-værdi. Det betyder at hvis uddannelse stiger med 1 år, så vil årslønnen stige med 2.3%.

Lsalbegin(logaritmen til startslønnen)
Vi kan se at der er tale om en positiv sammenhæng mellem logaritmen til startslønnen, og logartimen til årslønnen. Det er et signifikant resultat, og det kan vi fordi vi har en lav p-værdi og en høj t-værdi.

Male(mand)
Dette er en dummy variable som tager værdien 1 hvis der er tale om en mand, og tager værdien 0 hvis der ikke er tale om en mand. Vi kan se at der er en positiv sammenhæng, men dette resultat er ikke lige så signifikant som uddannelse og startløn.

Minority(minoritet)
Dette er en dummy variable som tager værdien 1 hvis der er tale om en fra en minoritetsgruppe, og værdien 0 der ikke er tale om en der tilhøjrer en minoritet. Vi kan se der er en negativ sammenhæng mellem at tilhøjrer en minoritetsgruppe, og så hvilken årsløn man får.

Generelt om model 2
Vi kan på model 2 se at der er en stærk forklaringsgrad mellem højre-side variablerne og venstre-side variablerne, og det kan vi se på $AdjR^2$.

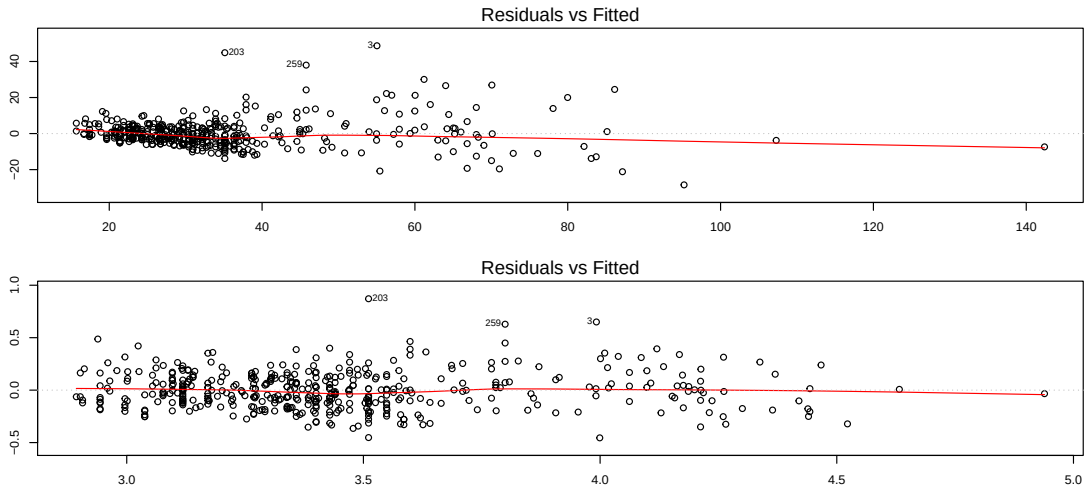
Sammenligning af modeller:
Forskellen på disse modeller er måden de bliver opstillet på. Den ene bliver opstillet som en level-level model, og den anden bliver opstillet som en log-log model. Måden man tolker dem på er forskellige, fordi når man tolker på noget, der er logget, så kigger man på procentvise ændringer. Hvor hvis de ikke er logget, kigger man på de tilhøjrende værdier. Grunden til, at man gerne vil logge nogle variable er fordi, man gerne vil prøve at skabe en mere linæer sammenhæng mellem variablene ved at fjerne de ikke-linæere elementer blandt variablerne. Det sker ved hjælp af, at når man logger noget, så bliver værdierne automatisk mindre, og man kommer derfor tættere på den linæere trend, og spredningen bliver derfor mindre. Begge modeller er stærke ifølge deres $AdjR^2$,

Hvornår giver det mening at tage log til en variabel?
Hvis vi har en variable der enten er meget left-skewed, eller right-skewed, så vil det at tage den naturlige logaritme gøre variablen mere normalfordelt. Det skyldes, at vi ved at log til en variable i en regression gør, at vi i stedet ser på procentvise ændringer. Det gælder både for log-level, level-log og log-log modeller.

2.2 Udfør grafisk modelkontrol af de to modeller. Hvilken model vil du foretrække?

Residuals vs Fitted:
Dette plot viser om residualerne har non-lineær mønstre. Hvis residualerne er indenfor den samme spredning som den horisontale linje, så er det et tegn på, at der ikke er non-lineær forhold i modellen.

```
par(mfrow=c(2,1),mar=c(2,3,3,2),cex=0.7)
plot(model1, which = c(1,1))
plot(model2, which = c(1,1))
```

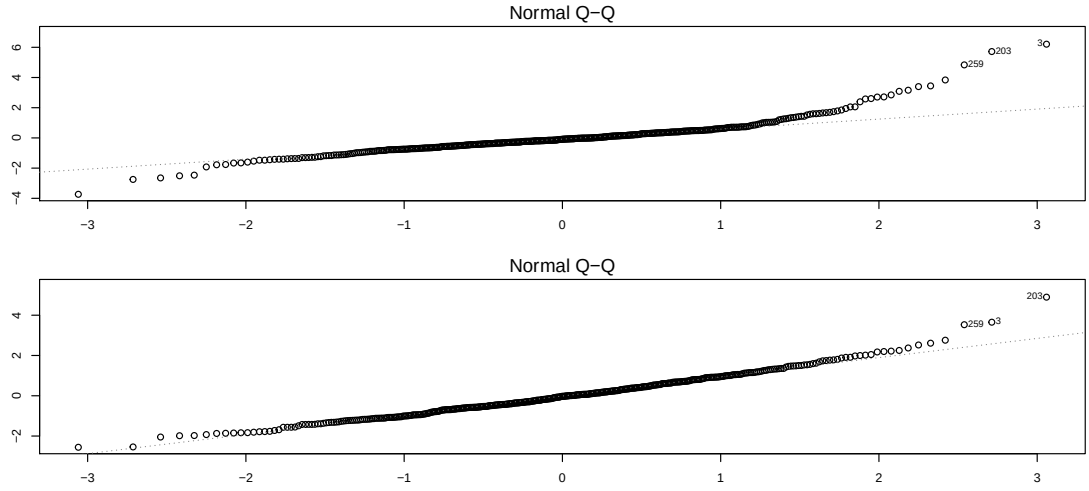


I model 1(den øverste) kan vi se, at residualernes spredning er lige stor omkring den vandrette linje. Dette kunne tyde på, at sammenhængen er linæer. Vi kan dog også se, at den i slutningen er en smule faldende, men dette skyldes formentlig er der ikke er særlig mange residualer.
I model 2(den nederste) kan vi se stort set det samme. Spredningen er dog lidt større på residualerne, men der er stadig en linæer trend.

Normal Q-Q

Dette plot viser os om residualerne er normalfordelte. Hvis residualerne er normalfordelte, vil residualerne følge den prikkede streg.

```
par(mfrow=c(2,1),mar=c(2,3,3,2),cex=0.7)
plot(model1, which = c(2,2))
plot(model2, which = c(2,2))
```

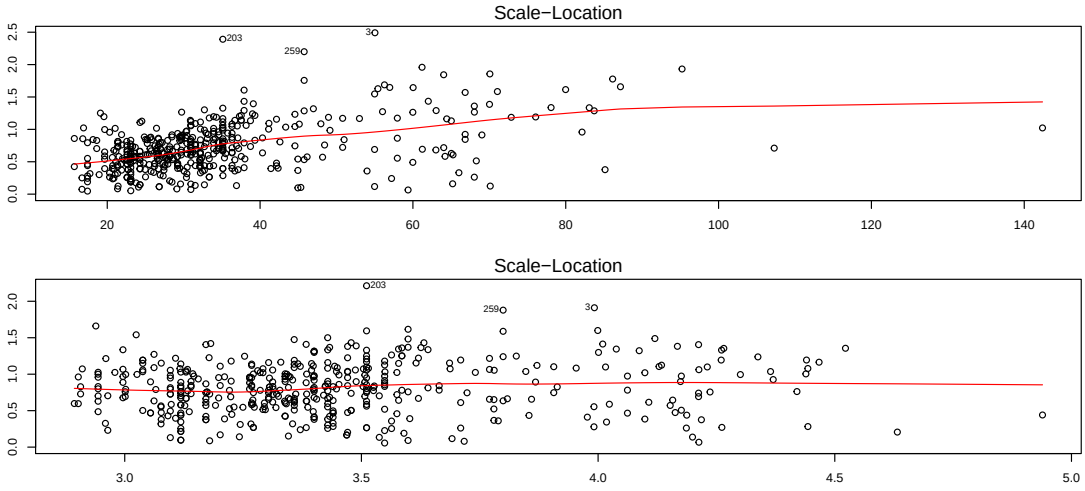


I begge tilfølde kan vi se, at de er normalfordelte. Dette er de fordi de bevæger sig langs den stiblede linje med få outliers.

Scale-location

Dette plot bruger vi til at checke vores antagelse om lige stor varians for vores residualer (homoskedasticitet). Hvis de standarliserede residualer er spredt lige omkring vores predictors(estimator), så opfylder modellen antagelsen om homoskedasticitet.

```
par(mfrow=c(2,1),mar=c(2,3,3,2),cex=0.7)
plot(model1, which = c(3,3))
plot(model2, which = c(3,3))
```

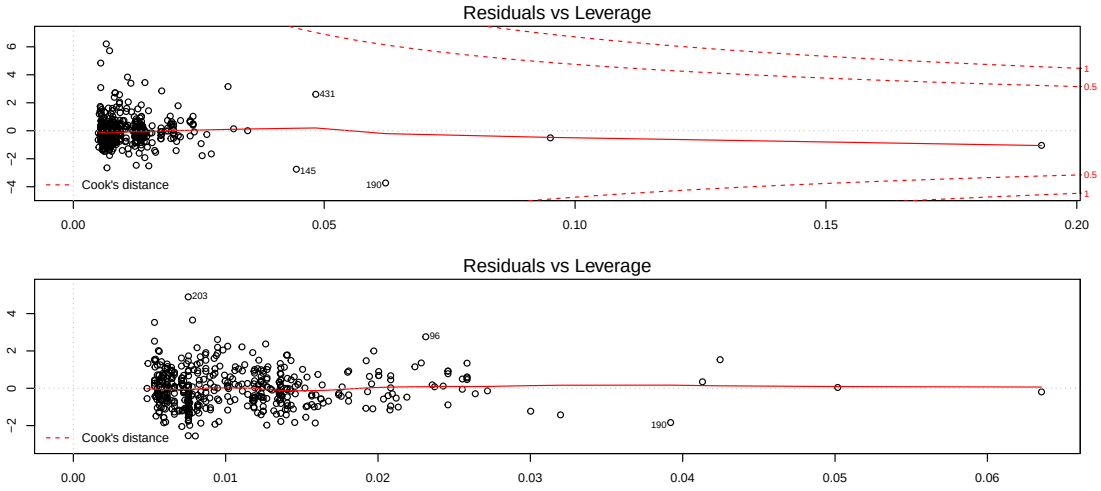


I model 1(Den øverste) kan vi se, at residualerne er mere samlede end i model 2(den nederste). Derudover så kan vi også se, at hældningen på den røde linje ændrer sig. Dette kunne antyde heteroskedacitet.
I model 2(Den nederste) ændrer hældningen sig ikke. Dette tyder på homoskedacitet.
- Der kunne også anvendes lmtest eller white-test for at undersøge dette. Dette gør vi dog ikke.

Residuals vs leverage

Vi bruger dette plot til at se om vores model har signifikante outliers. Nogengange kan outliers have en stor effekt på resultatet, der kommer ud af regressionen. Vi bruger "Cooks distance" til at afgøre om vores residualer har signifikante outlisers.

```
par(mfrow=c(2,1),mar=c(2,3,3,2),cex=0.7)
plot(model1, which = c(5,5))
plot(model2, which = c(5,5))
```



I model 1(Den øverste) kan vi se, at vi, at der er nogle observationer, der er tæt på at komme udenfor "Cooks distance". Dette betyder, at det er outliers, der kan have en stor påvirkning på vores datasæt og estimator. Man kan derfor overveje at fjerne dem. Det gør vi dog ikke, fordi de ikke er helt udenfor distancen.

I model 2(Den nederste) er der ikke særlig mange outliers, og dem der er, er ikke store nok til at have indflydelse på vores estimator.

Hvilken model vil vi foretrække?

Hvis vi tager udgangspunkt i vores grafer, så kan vi se en tendens for model 2, der gør den mere favorabel end model 1.

Model 2 har mere linære linjer i Residuals vs Fitted og Scale-location. Dette tyder på en mere normalfordelt model med få outliers.

Derudover kan vi også se i Residuals vs leverage, at model 2 er længere væk fra "Cook's distance", hvilket betyder, at der ikke er nogle siknifikante outliers. Heller ikke nogle der er tæt på, at være siknifikante. I normal Q-Q kan vi se, at model 2 er mere normalfordelt.

2.3 Undersøg om de to modeller er misspecificerede vha. RESET-testet.

Reset testen bruges til at undersøge om der er nogle non-linæere sammenhænge i en linæer model. Dette gøres ved hjælp af en F-test på en Joint nulhypotese, hvor nulhypotesen er:

$$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

Det at have misspecifikation i sin regressionsmodel, er et alvorligt problem. Hvis vi har misspecifikation betyder det, at vi har en fejl i vores model. Helt konkret så betyder det, at vores regressionsmodel ikke har taget højde for alting(det er umuligt at tage højde for alting). Hvis vi er ude for misspecifikation, så kan vores estimator og fejlled være biased.
Der er tre former for model misspecifikation:

- Den første er hvis vi udelader relevante variabler, og dett kan skabe model misspecifikation.
- Den anden er hvis vi medtager irrelevante variabler i regressionensligningen.
- Den tredje er hvis vi ikke opskriver regressionsmodellen på den rette funktionelle form, som kunne være ikke at have sat en variable i anden eller lignende.

Den form for model misspecifikation vi vil teste for er den 3 variant, som omhandler funktionel form.

Først tester vi for **model1:**

```
resettest(model1)
##
##  RESET test
##
## data:  model1
## RESET = 2.5756, df1 = 2, df2 = 443, p-value = 0.07725
```

Vi får en p-værdi på 0.07 og vi kan derfor på et 10% signifikansnivau afvise H_0. Det betyder at der er misspecifikation i vores regression.
Så tester vi for **model2:**

```
resettest(model2)
##
##  RESET test
##
## data:  model2
## RESET = 2.6338, df1 = 2, df2 = 443, p-value = 0.07293
```

Vi får i vores model en p-værdi på 0.07, og vi kan derfor på et 10% signifikansnivau afvise H_0. Det betyder at der er misspecifikantion i vores regression.

2.4 Forklar hvorfor det kunne være relevant at medtage $educ^2$ som forklarende variabel i de to modeller. Estimer de to modeller igen hvor $educ^2$ inkluderes (med tilhøjrende koefficient β_5), kommenter kort på outputtet og udfør RESET-testet igen.

vi har i tidligere opgave fundet misspecifikation i modellen, hvor en af problemerne kan være, at den står på den forkerte funktionelle form, og derfor kunne det være interessant at prøve at tage $educ^2$ med for at ændre den funktionelle form.
Hvis vi medtager $educ^2$ får vi en ny regressionsmodel:

$$salary = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 salbegin + \beta_3 male + \beta_4 minority + \beta_5 educ^2 + u \tag{1}$$

$$log(salary) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 log(salbegin) + \beta_3 male + \beta_4 minority + \beta_5 educ^2 + u \tag{2}$$

Relevansen for at medtage $educ^2$ er hvis vi mistænker at forholdet mellem educ og vores afhængige variabel y, ikke er lineært.
Argumentet for dette kunne være aftagende marginalprodukt på uddannelse, så at første år har en positiv effekt på den årlige indkomst. Det samme har de efterfølgende år op til et vist punkt, hvorefter effekten bliver negativ.

$educ^2$ estimeres og reset-testen udføres igen

```
model1.4 <- lm(salary ~ educ + salbegin + male +
                      minority + educ2)

model2.4 <- lm(lsalary ~ educ +  lsalbegin + male +
                 minority + educ2)

summary(model1.4)
##
## Call:
## lm(formula = salary ~ educ + salbegin + male + minority + educ2)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -24.264  -4.042  -0.870   2.891  49.720
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 14.60237    6.78940   2.151  0.03203 *
## educ        -2.30474    1.01458  -2.272  0.02359 *
## salbegin     1.47994    0.07438  19.897  < 2e-16 ***
## male         1.78553    0.84791   2.106  0.03578 *
## minority    -1.61496    0.91115  -1.772  0.07701 .
## educ2        0.13205    0.04008   3.294  0.00107 **
```

```
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 7.79 on 444 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8011, Adjusted R-squared:  0.7989
## F-statistic: 357.7 on 5 and 444 DF,  p-value: < 2.2e-16
summary(model2.4)
##
## Call:
## lm(formula = lsalary ~ educ + lsalbegin + male + minority + educ2)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.44932 -0.11908 -0.00702  0.11246  0.87400
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.1754018  0.2073494   5.669 2.59e-08 ***
## educ        -0.0147950  0.0229937  -0.643   0.5203
## lsalbegin    0.7825191  0.0433061  18.069  < 2e-16 ***
## male         0.0483029  0.0207975   2.323   0.0207 *
## minority    -0.0416353  0.0210129  -1.981   0.0482 *
## educ2        0.0015510  0.0009153   1.694   0.0909 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.1782 on 444 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8064, Adjusted R-squared:  0.8042
## F-statistic: 369.8 on 5 and 444 DF,  p-value: < 2.2e-16
resettest(model1.4)
##
##  RESET test
##
## data:  model1.4
## RESET = 1.8771, df1 = 2, df2 = 442, p-value = 0.1543
resettest(model2.4)
##
##  RESET test
##
## data:  model2.4
## RESET = 1.8884, df1 = 2, df2 = 442, p-value = 0.1525
```

Hvis vi kigger på de to modeller kan vi nu se, at siknifikansniveauerne ikke er de samme som tidligere. P-

værdien er blevet større, og vi kan derfor ikke forkaste H_0 fra tidligere opgave. Det vil altså nu sige, at der ikke er misspecifikation i modellen. $educ^2$ har altså styrket vores model
Derudover kan vi se, at fordi vi har brugt $educ^2$ som β_5, så har estimatoren ændret sig til positivt fortegn. Dette indikerer, at der er et minimumspunkt i education, hvilket er naturligt, fordi vi får en parabel, når vi sætter ting i anden.

2.5 Test hypotesen $H_0 : \beta_1 = \beta_5 = 0$ i begge modeller (fra spørgsmål 4).

Her vil vi gerne teste for om $\beta_1 educ$ og $\beta_5 educ^2$ er siknifikante for modellen, altså en "Joint null hypothesis". Til dette kan vi bruge F-testen, hvis man vil gøre det manuelt
Først opstilles en nulhypotese:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_5 = 0$$

F-testen opstilles:

$$F = \frac{R^2_{ur} - R^2_r}{1 - R^2_{ur}} * \frac{n - k - 1}{q}, \ hvor \ q = df_r - df_{ur}$$

Hvis man ikke vil anvende F-testen manuelt, kan man istedet gøre det direkte i R ved hjælp af Linearhypothesis kommandoen.
Model 1

```
h0_a = c("educ=0","educ2=0")
linearHypothesis(model1.4, h0_a)
## Linear hypothesis test
##
## Hypothesis:
## educ = 0
## educ2 = 0
##
## Model 1: restricted model
## Model 2: salary ~ educ + salbegin + male + minority + educ2
##
##   Res.Df   RSS Df Sum of Sq      F   Pr(>F)
## 1    446 29801
## 2    444 26941  2    2859.5 23.563 1.88e-10 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Ved en P-værdi under 0.01 kan vi forkaste på et 1% siknifikans niveau, og vi kan derfor afvise nulhypotesen. Dette betyder at uddannelse er siknifikant i modellen. Så vi kan ikke undlade uddannelse uden det ville påvirke modellen.
Model 2

```
h0_b = c("educ=0","educ2=0")
linearHypothesis(model2.4, h0_b)
## Linear hypothesis test
```

```
##
## Hypothesis:
## educ = 0
## educ2 = 0
##
## Model 1: restricted model
## Model 2: lsalary ~ educ + lsalbegin + male + minority + educ2
##
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
## 1    446 15.306
## 2    444 14.102  2    1.2033 18.942 1.275e-08 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Ved en P-værdi under 0.01 kan vi forkaste på et 1% siknifikans niveau, og vi kan derfor afvise nulhypotesen. Dette betyder at uddannelse er siknifikant i modellen. Så vi kan ikke undlade uddannelse uden det ville påvirke modellen.

2.6 Kunne der være problemer med målefejl i de to modeller? I hvilke tilfælde vil det udgøre et problem?

I en regression vil der altid være chance for målefejl. Det skyldes, at vi er begrænset af hvor mange uafhængige variable, vi kan tage med i modellen, og der derfor selvfølgelig være variable, der bliver udeladt.

Teoretisk kan målefejl forklares både for den afhængige variabel og den uafhængige:
Afhængig variabel(y)
Målefejlen bliver noteret e_0, hvor der er nogle antagelser specifikt for den afhængige variabel:

$$E(u) = E(e_o) = 0$$

$$Cov(u, e_0) = 0$$

$$Cov(e_o, x) = 0$$

Hvis disse antagelser er overholdt, vil OLS estimaterne være unbiased og konsistente. Hvis de bliver brudt vil estimaterne for intercept være biased, dog er hældningen på regressionen uændret. Er der målefejl i modellen vil variansen for OLS estimaterne også blive større. Dette kan løses ved at løse målefejlen, men det kan være rigtig svært at løse, udover at indhente bedre data.

Et eksempel på en målefejl i den afhængige variabel: Årlig opsparing i familien:
Her kan der opstå en målefejl, fordi familier har en tendens til at indrappotere deres opsparing forkert. Dette giver os en større varians i fejlleddet

Uafhængig variabel(x)

Hvis målefejlen er forbundet med en uafhængige variable, så er problemet af en anden karakter. Vi vil forklare dette ved, at opstille en teoretisk model, hvor målefejlen er forbundet med x_1, som vi noterer x_1^*. SLR1 til SLR4 antages at være overholdt. Dette betyder, at ved estimation af modellen fåes unbiased og konsistente estimatorer. Problemet opstår, fordi vi ikke kender x_1^* og bliver derfor nødt til at bruge x_1 til estimere. Et eksempel for x_1^* kunne være den faktiske indkomst, hvor x_1 er den rapporterede indkomst. Så der er altså forskel mellem disse to. Det kunne fx. være "sorte penge".
Modellen opstilles:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1^* + u$$

Vi skal bruge et nyt fejlled, fordi der er en forskel mellem vores x variabler, der ikke indgår i modellen, og derfor antages at være en del af fejlleddet. Dette nye fejlled er et fejlled for populationen:

$$e_1 = x_1 - x_1^*$$

isolerer x_1^*

$$x_1^* = x_1 - e_1$$

og indsætte denne i den oprindelige model:

$$y = \beta_0 + \beta_1(x_1 - e_1) + u$$

Ganger ind i parantesen:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 - \beta_1 e_1 + u$$

Omskriver:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u - \beta_1 e_1$$

$$hvor\ E(u) = E(e) = 0$$

Nu er der to scenarier:

Scenarie 1:

Hvis e_1 er ukorreleret med x_1 gælder det at:

$$Cov(x_1, e_1) = 0$$

og det gælder derfor

$$Cov(x_1^*, e_1) \neq 0$$

Dette vil skabe en større varians, men estimatorne vil stadigvæk være unbiased og konsistente. Så dette er ikke et problem for modellen, fordi vi har x_1 med i modellen, og denne korrelerer ikke med fejlleddet.

Scenarie 2:

Hvis det omvendte gør sig gældende så vil det gælde at:

$$Cov(x_1^*, e_1) = 0$$

og det må derfor gælde at

$$Cov(x_1, e_1) \neq 0$$

Nu er der opstået et problem. Nu korrelerer vores x_1 med fejlleddet i modellen. Dette skaber altså bias i vores estimatorer.

3 Eksamensopgave 3

Økonometri

Eksamensopgave 3: Instrumentvariable

Betragt følgende model:

$$\log(earnings) = \beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 wexp + \beta_3 male + \beta_4 ethblack + \beta_5 ethhisp + u \quad (1)$$

hvor $earnings$ er timeløn i US dollars, s er uddannelse målt i antal års skolegang, $wexp$ er erhvervserfaring målt i antal år, $male$ er en dummy for køn, $ethblack$ og $ethhisp$ er racedummier for hhv. afroamerikanere og hispanics.

Vi har desuden tre instrumenter, moderens uddannelse målt i år (sm), faderens uddannelse målt i år (sf) og antal søskende ($siblings$).

Datasættet `data3`, som er tilgængelig på Moodle, indeholder disse variable målt for 520 amerikanere.

Nedenfor er der en række opgaver der skal løses. I forbindelse med de enkelte opgaver forventes det at der redegøres for den relevante teori. Det er altså ikke tilstrækkeligt blot at præsentere et "facit" for hver opgave.

Opgaver

1. Estimer modellen vha. OLS og kommenter på resultaterne.
2. Hvorfor kunne vi være bekymrede for at uddannelse er endogen?
3. Er $siblings$, sm og sf brugbare som instrumenter?
4. Test om uddannelse er endogen.
5. Estimer modellen vha. 2SLS hvor du gør brug af de tre beskrevne instrumenter. Sammenlign med resultaterne i spørgsmål 1.
6. Udfør overidentifikationstestet. Hvad konkluderer du?
7. Udfør hele analysen igen hvor du kun bruger sm og sf som instrumenter. Ændrer det på dine konklusioner?

3.1 Estimer modellen vha. OLS og kommenter på resultaterne.

Her skal vi estimere en model ved hjælp af OLS. OLS er udledt i Appendix 1 - OLS Modellen opstilles:

$$log(earnings)\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 wexp + \beta_3 male + \beta_4 ethblack + \beta_5 ethhisp + u$$

Modellen opstilles i R:

```
model_3_opg_1 <- lm(log(data3$earnings) ~ data3$s + data3$wexp +
                      data3$male + data3$ethblack + data3$ethhisp)
summary(model_3_opg_1)
##
## Call:
## lm(formula = log(data3$earnings) ~ data3$s + data3$wexp + data3$male +
##     data3$ethblack + data3$ethhisp)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.07585 -0.28006 -0.00145  0.30775  1.98441
##
## Coefficients:
##                 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)     0.396226   0.173508   2.284  0.02280 *
## data3$s         0.124220   0.009451  13.143  < 2e-16 ***
## data3$wexp      0.033882   0.005046   6.715 4.99e-11 ***
## data3$male      0.293449   0.045803   6.407 3.36e-10 ***
## data3$ethblack -0.195670   0.071255  -2.746  0.00624 **
## data3$ethhisp  -0.097406   0.100342  -0.971  0.33213
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.5103 on 514 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.3539, Adjusted R-squared:  0.3476
## F-statistic: 56.32 on 5 and 514 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Her kigger vi på en log-level model. Før vi kan tolke på resultaterne, skal vi lave nogle antagelser:
- Vi antager Gaus markov antagelserne holder. - Disse er beskrevet i Appendix 2 - SLR og MLR antagelser.
- Vi antager også at vores resultater er statistisk signifikante med undtagelse af hispanic etniciteten.

Nu kan vi kommentere på vores resultater og her skal vi tolke på, hvad der sker med, hvis vi ændrer højre-variablen med 1. Så lad os sige, at uddannelse(s) stiger med 1 år, så kan vi se på vores estimater, at lønnen stiger med 12,4%. Hvis erhvervserfaring(exp) stiger med 1 år, så stiger lønnen med 3,3%. vi kan også se, at hvis man er mand så stiger lønnen med 29,3%. Lønnen falder med -19,5% hvis man er sort. Lønnen skulle falde med 9,7%, hvis man er hispanic. Dette resultat er dog ikke statistik signifikant.

3.2 Hvorfor kunne vi være bekymrede for at uddannelse er endogen?

Vi kan være bekymret for om variablen for uddannelse(s) er endogen, og derfor at den vil korrelere med fejlleddet

$$cov(x_1, u) \neq 0$$

Vi ved at der kan være flere forskellige grunde til at uddannelse kan være korreleret til fejlleddet. Den første kan være på grund af vi ikke har medtaget alle signifikante variable i vores regression (omitted variables). Den anden kan være målefejl i den uafhængige variable(x). Den tredje kan være hvis den afhængige variable(y), har en effekt på den uafhængige variable(x) (two way correlation).

Vi kan fra ovenstående konkludere, at det er mest sandsynligt at der er tale om, at vi lider af ikke at have taget alle relevante variable med(omitted variables). Det kunne være fordi vi ikke har medtaget en variabel, der siger noget om evnerne(abilities). Grunden til vi ikke har denne med kunne være, fordi det er svært at finde en proxy variable for evner.
Det kan beskrives ud fra følgende formler:
Den sande model:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \tag{1}$$

x_2 udlades

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u \tag{2}$$

Det betyder, at hvis vi havde at:

$$cov(x_1, x_2) \neq 0$$

Så ville vores estimat være biased.
Når vi undlader x_2 fra vores model, vil effekten bliver absorberet i fejlleddet. Det betyder, at vi kan have at x_1 er korreleret med fejlleddet.

$$cov(x_1, u) \neq 0$$

Dette ville være en overtrædelse af MLR 4 og betyder, at modellen er biased.

3.3 Er siblings, sm og sf brugbare som instrumenter?

Variablerne ovenfor kan være brugbare, hvis de korrelerer med personens uddannelse. Dette kan vi teste ved at lave tre regressioner, hvor vi sætter uddannelse, som den afhængige variabel. Instrumentvariablerne som er siblings, sm og sf sætter vi som uafhængige variabler og resten af regressionsmodellen forbliver uændret.

```
sib_reg <- lm(data3$s~data3$wexp+data3$male+data3$ethblack+data3$ethhisp+data3$siblings)
sm_reg <- lm(data3$s~data3$wexp+data3$male+data3$ethblack+data3$ethhisp+data3$sm)
sf_reg <- lm(data3$s~data3$wexp+data3$male+data3$ethblack+data3$ethhisp+data3$sf)
screenreg(list(SibReg = sib_reg, smReg = sm_reg, sfReg = sf_reg ), digits = 5)
##
## ============================================================
##                  SibReg          smReg           sfReg
## ------------------------------------------------------------
## (Intercept)      16.74267 ***   11.04228 ***    12.53157 ***
```

```
##                  (0.42146)      (0.59852)      (0.51517)
## data3$wexp       -0.13046 ***   -0.11495 ***   -0.12304 ***
##                  (0.02238)      (0.02082)      (0.02106)
## data3$male        0.02298        0.02571        0.07743
##                  (0.21010)      (0.19445)      (0.19694)
## data3$ethblack   -1.05002 **    -0.87737 **    -0.80045 **
##                  (0.32614)      (0.30074)      (0.30657)
## data3$ethhisp    -0.69045        0.50380        0.04364
##                  (0.46086)      (0.44711)      (0.44257)
## data3$siblings   -0.22961 ***
##                  (0.04963)
## data3$sm                         0.39919 ***
##                                  (0.03846)
## data3$sf                                        0.27757 ***
##                                                 (0.02904)
## ------------------------------------------------------------
## R^2               0.12052        0.24265        0.22214
## Adj. R^2          0.11196        0.23528        0.21457
## Num. obs.       520            520            520
## ============================================================
## *** p < 0.001; ** p < 0.01; * p < 0.05
```

Her kan vi se, at alle tre variable har en korrelation til uddannelse, som også er statistisk siknifikant. Det må altså forventes, at disse variable er brugbare som instrumenter. Dog er det stadigvæk vigtigt at påpege, at disse ikke må korrelere med fejlleddet(ability), da de i så fald vil have en kovarrians forskellig fra nul og ikke længere er uafhængige variable. Dette kan dog ikke testes og må derfor tages i en diskussion:

Siblings:
Det kan ikke umiddelbart antages, at evner og søskende skulle have en covarians. De må derfor være uafhængige og brugbare som instrumenter.

Moderens uddannelse(sm) og faderens uddannelse(sf)
Disse kunne godt være faktorer, der gik ind og havde en påvirkning på evner, da de i forskellige studier er vist, at folk der kommer fra veluddannede hjem, som udgangspunkt er bedre stillet end det modsatte.
Da dette er tilfældet, er det ikke nødvendigvis uafhængige variabler, og kan gå ind og korrelerer med evner og bør ikke bruges som instrumenter. Gør man dette, vil det have stor effekt på resultaterne

3.4 Test om uddannelse er endogen.

Endogenitet kan opstår i en model, hvis vi har en uafhængig variabel i modellen, der er korreleret med fejlleddet. Dette kunne være på grund af, at man mangler en variabel "omitted variable" eller målefejl
Vi antager en regressionsmodel på følgende formel:

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 y_2 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 + u$$

Her mistænker vi y_2 for at være endogen, hvor vi har vores instrumenter(siblings, sm og sf) og vil derfor teste for dette.
Er y_2 endogen vil der være en kovarians med u, hvilket betyder, at de er afhængige af hinanden. Dette er ikke optimalt da det skaber bias i modellen.
For at teste dette, skal vi lave en OLS(som vi har fra tidligere opgaver) og en 2SLS, som vi gør nu:
Vores model opstilles på den reducerede form for y_2 for at kunne lave en regressionstest senere:

$$y_2 = \pi_0 + \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 z_1 + \pi_4 z_2 + \pi_5 z_3 + v$$

Hvor z-værdierne er vores instrumentvariable fra tidligere.

Inden testen antager vi først, at vores instrumentvariable ikke korrelerer med u, altså

$$corr(Z, u) = 0 \text{ hvor } Z = (z_1, z_2, z_3)$$

Dette betyder også, at y_2 ikke korrelerer med u, hvis vores fejlled v ikke korrelerer med u.
Det vi ønsker at teste er altså at v og u ikke korrelerer med hinanden. Dog kender vi ikke v, og derfor skal denne estimeres. Det gøres ved hjælp af vores reducerede ligning ovenfor, hvor vi bruger estimatet derfra. $\hat{v}$ indsættes nu i den originale model:

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 y_2 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 + \delta_1 \hat{v} + e$$

δ_1 er hentet fra udtrykket for u: $u = \delta_1 v + e$, hvor e er ukorreleret med v_2. Vi kan derfor se, at u og v kun er ukorreleret, hvis $\delta_1 = 0$.
Ud fra dette kan nulhypotesen opstilles og vi kan udføre vores test:

$$H_0 : \delta_1 = 0$$

Hvis vi kan afvise H_0, kan vi konkludere at v og u korrelerer med hinanden og y_2 er endogen.
Laves i R:

```
stage1 <- lm(data3$s ~ data3$wexp + data3$male + data3$ethblack + data3$ethhisp
             + data3$siblings + data3$sf + data3$sm) # Reduceret form for y2.

res = resid(stage1) # Residualer

# modellen med y1 med v(hat)
stage2 <- lm(log(data3$earnings) ~ data3$s + data3$wexp + data3$male
```

```
            + data3$ethblack + data3$ethhisp + res, data = data3)
#Koefficienter
coeftest(stage2)
##
## t test of coefficients:
##
##                 Estimate Std. Error t value  Pr(>|t|)
## (Intercept)    -0.064700   0.339003 -0.1909   0.84871
## data3$s         0.153036   0.020516  7.4593 3.742e-13 ***
## data3$wexp      0.037628   0.005567  6.7591 3.784e-11 ***
## data3$male      0.290479   0.045775  6.3458 4.869e-10 ***
## data3$ethblack -0.157544   0.075122 -2.0972   0.03647 *
## data3$ethhisp  -0.069476   0.101739 -0.6829   0.49499
## res            -0.036550   0.023106 -1.5818   0.11430
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Man kan også bruge wu-hausman testen, som gør det hele automatisk. Resultatet skulle være det samme:

```
test <- ivreg(log(data3$earnings) ~ data3$s + data3$wexp + data3$male
              + data3$ethblack + data3$ethhisp |
                data3$wexp + data3$male + data3$ethblack + data3$ethhisp
              + data3$siblings + data3$sf + data3$sm)
summary(test, diagnostics = TRUE)
##
## Call:
## ivreg(formula = log(data3$earnings) ~ data3$s + data3$wexp +
##     data3$male + data3$ethblack + data3$ethhisp | data3$wexp +
##     data3$male + data3$ethblack + data3$ethhisp + data3$siblings +
##     data3$sf + data3$sm)
##
## Residuals:
##       Min        1Q    Median        3Q       Max
## -2.092741 -0.289079  0.004544  0.312570  2.028717
##
## Coefficients:
##                 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    -0.064700   0.342554  -0.189   0.8503
## data3$s         0.153036   0.020731   7.382 6.32e-13 ***
## data3$wexp      0.037628   0.005625   6.689 5.88e-11 ***
## data3$male      0.290479   0.046254   6.280 7.21e-10 ***
## data3$ethblack -0.157544   0.075909  -2.075   0.0384 *
## data3$ethhisp  -0.069476   0.102805  -0.676   0.4995
##
```

```
## Diagnostic tests:
##                  df1 df2 statistic p-value
## Weak instruments   3 512    45.809  <2e-16 ***
## Wu-Hausman         1 513     2.502  0.1143
## Sargan             2  NA     8.459  0.0146 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.5148 on 514 degrees of freedom
## Multiple R-Squared: 0.3422,  Adjusted R-squared: 0.3358
## Wald test: 32.28 on 5 and 514 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Når vi tester, så tester vi for at uddannelse ikke er endogen.
Ud fra dette resultat med en p-værdi på 0.11 kan vi konkludere, at vores testen ikke er statisk signifikant. Vi kan derfor ikke afvise, at der skulle være endogenitet i uddannelse. MLR 4 overholdes derfor ikke, og den oprindelige OLS model er derfor biased.

```
screenreg(list(OLS = model_3_opg_1, Two_SLS=test), digits = 4)
##
## ========================================
##                  OLS           Two_SLS
## ----------------------------------------
## (Intercept)       0.3962 *     -0.0647
##                  (0.1735)      (0.3426)
## data3$s           0.1242 ***    0.1530 ***
##                  (0.0095)      (0.0207)
## data3$wexp        0.0339 ***    0.0376 ***
##                  (0.0050)      (0.0056)
## data3$male        0.2934 ***    0.2905 ***
##                  (0.0458)      (0.0463)
## data3$ethblack   -0.1957 **    -0.1575 *
##                  (0.0713)      (0.0759)
## data3$ethhisp    -0.0974       -0.0695
##                  (0.1003)      (0.1028)
## ----------------------------------------
## R^2               0.3539        0.3422
## Adj. R^2          0.3476        0.3358
## Num. obs.       520           520
## ========================================
## *** p < 0.001; ** p < 0.01; * p < 0.05
# Sammenligning af de to OLS modeller.
```

Ud fra denne sammenligning kan vi se, at estimatorne og standard errors ændrer sig. Dette tyder på, at der er endogenintet i modellen

3.5 Estimer modellen vha. 2SLS hvor du gør brug af de tre beskrevne instrumenter. Sammenlign med resultaterne i spørgsmål 1.

Da vi skal gøre brug af mere end en instrumentetvariabel på vores endogene variabel, så bruger vi 2SLS. Vi gør brug af instrument variablene siblings, sf, og sm. Vi starter ud med at antage regressionsmodellen:

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 y_2 + \beta_2 x_1 + u$$

Hvor y_2 er den endogene variabel. Vi vil bruge tre instrument variabler, z_1, z_2, z_3. Vi antager, at alle tre intrument variable korrelerer med y_2, men ikke med fejlleddet u. Vi opstiller nu en "reduced form equation":

$$y_2 = \underbrace{\hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 x_1 + \hat{\pi}_2 x_2 + \hat{\pi}_3 z_1 + \hat{\pi}_4 z_2 + \hat{\pi}_5 z_3}_{\hat{y_2}} + v$$

Antagelser:

$$E(v) = 0, Cov(x_1, v) = 0, Cov(z_1, v) = 0, Cov(z_1, v) = 0, Cov(z_2, v) = 0, Cov(z_3, v) = 0$$

Er disse antagelser ikke opfyldt vil det gøre vores "redced form equation" endogen.
Da vi allerede tidligere i 3.3 har konkluderet, at vores instrumentvariable er brugbare, vil vi ikke teste for dette igen, og opstiller derfor ikke en nulhypotese.
Instrument variablerne skal også estimeres. Dette gøres ved hjælp af Method of moments, hvor vi løser 3 ligninger med 3 ubekendte. Vi husker, at det er givet, at $E(u) = 0$. De tre ubekendte er $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ og ligningerne opstilles: Først opstilles for β_0:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_1 - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 y_{i_2} - \hat{\beta}_2 x_{i_1}) = 0$$

Da $Cov(\hat{y}_2, u) = 0$ er givet, kan det opstilles for β_1

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_{i_2} (y_1 - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 y_{i_2} - \hat{\beta}_2 x_{i_1}) = 0$$

Til sidst kan vi opstille for β_2, hvis $Cov(x_1, u) = 0$ er givet.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i_1} (y_1 - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 y_{i_2} - \hat{\beta}_2 x_{i_1}) = 0$$

Nu kan $\hat{y_2}$ bruges som instrumentvariabel, som betyder, at vi kan skrive det som:

$$y_2 = \hat{y_2} + v$$

Nu substituerer vi ind i regressionsmodellen:

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 y_2 + u$$

$$= \beta_0 + \beta_1 (\hat{y_2} + v) + u$$

Ganger ind i parantesen:

$$= \beta_0 + \beta_1 \hat{y_2} + \beta_1 v + u$$

Dette er den teoretiske metode, som er svær at udregne i hånden. Vi laver det automatisk ved hjælp af R, hvor vi sammenligner OLS med 2SLS modellen.

```
ols <- lm(log(data3$earnings) ~ data3$s + data3$wexp + data3$male +
            data3$ethblack + data3$ethhisp)
twosls <- ivreg(log(data3$earnings) ~ data3$s + data3$wexp + data3$male +
              data3$ethblack + data3$ethhisp | data3$wexp + data3$male +
               data3$ethblack + data3$ethhisp + data3$siblings + data3$sf + data3$sm)
screenreg(list(OLS = ols, Two_SLS = twosls), digits = 4)
##
## ========================================
##                   OLS           Two_SLS
## ----------------------------------------
## (Intercept)        0.3962 *      -0.0647
##                   (0.1735)       (0.3426)
## data3$s            0.1242 ***     0.1530 ***
##                   (0.0095)       (0.0207)
## data3$wexp         0.0339 ***     0.0376 ***
##                   (0.0050)       (0.0056)
## data3$male         0.2934 ***     0.2905 ***
##                   (0.0458)       (0.0463)
## data3$ethblack    -0.1957 **     -0.1575 *
##                   (0.0713)       (0.0759)
## data3$ethhisp     -0.0974        -0.0695
##                   (0.1003)       (0.1028)
## ----------------------------------------
## R^2                0.3539         0.3422
## Adj. R^2           0.3476         0.3358
## Num. obs.        520            520
## ========================================
## *** p < 0.001; ** p < 0.01; * p < 0.05
```

Her kan vi se, at 2SLS ændrer på resultaterne for regressionerne i forhold til opgave 1.
- Et års ekstra uddannelse øger nu lønnen fra 12,4% til 15,3%.
- et års ekstra erhvervserfaring øger nu lønnen fra 3,3% til 3,7%
- At være mand er ændret en smule, men ikke meget.
- At være sort har fået en mindre betydning, det samme har det at være hispanic.

3.6 Udfør overidentifikationstestet. Hvad konkluderer du?

Vi vil i denne opgave gøre brug af en overidentifikationstest, den bruges hvis der er usikkerhed omkring mængden af instrumenter i modellen.
I den 2SLS vi lavede tidligere brugte vi 3 instrumtvariabler, og for hver af instrumentvariablerne, kan vi finde et estimat for uddannelse. Vi vil teste, om der er en signifikant forskel i de tre estimatorer for β_1. Ved at gøre brug af z_1 fåes $\hat{\beta}_1$. Ved z_2 fåes $\tilde{\beta}_1$, ved z_3 fåes $\breve{\beta}_1$

Hvis alle instrumenter er delvist korreleret med uddannelse(educ) så er både $\hat{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_1$ og $\breve{\beta}_1$ konsistente estimator for β_1. Er de det, kan vi teste om der er en siknifikant forskel(Hausman test).

Hvis vores estimator er forskellige fra hinanden, kan vi konkludere at en, to eller alle instrument variabler ikke består vores eksogenitetskrav. Det kan ikke konkluderes, at variablerne korrelation er nul.

Det skal dog bemærkes at selv, hvis vi konkluderer, at estimatorne er statistisk ens, så betyder det ikke, at vi kan bekræfte, at de er eksogene, da de kan være ens og alle ikke kunne bestå vores eksogenitetskrav.

Før vi kan lave en Hausman test, skal vi finde 2SLS residulaerne $\hat{u}$
Dog opstiller vi en nulhypotese først:

$$H_0 : corr(Z, u) = 0 \text{ hvor } Z = (z_1, z_2, z_3)$$

Bruger 2SLS fra tidligere og finder residualer samt p-værdi:

```
resSLS <- resid(twosls) # Residualer(uhat)
res_aux <- lm(resSLS ~ data3$wexp + data3$male + data3$ethblack + data3$ethhisp
              + data3$siblings + data3$sf + data3$sm) # Regressionsmodel
r2 <- summary(res_aux)$r.squared
n <- nobs(res_aux) # Antal observationer
teststat <- n*r2 #t-stat
1-pchisq(teststat,1) #p-værdi
## [1] 0.003632015
```

Vi får en P-værdi på 0.0036 og kan derfor afvise vores nulhypotese, som siger, at der ikke skal være overindentifikation i modellen. Det vil altså sige, at det kunne tyde på, at der ifølge denne test, er overindentifikation i modellen. Det betyder, at der minimum er en af instrumentvariablerne, der er endogene. 2SLS modellen er derfor biased, da MLR 4 stadigvæk er brudt.

3.7 Udfør hele analysen igen hvor du kun bruger sm og sf som instrumenter. Ændrer det på dine konklusioner?

Vi tager udgangspunkt i opgave 5 og 6 og undlader siblings,så nu bruger vi z_2 og z_3.
OLS7 og TWO_SLS7 er regressioner uden siblings. OLS5 og Two_SLS5 er regressionerne fra tidligere, hvor siblings var med.

```
#Laver 2SLS uden siblings
sls7 <- ivreg(log(data3$earnings) ~ data3$s + data3$wexp + data3$male +
                data3$ethblack + data3$ethhisp |
               data3$wexp + data3$male + data3$ethblack + data3$ethhisp +
                data3$sf + data3$sm)

screenreg(list(OLS = ols, Two_SLS7 = sls7, Two_SLS5 = twosls), digits = 4)
##
## ============================================================
##                    OLS            Two_SLS7       Two_SLS5
## ------------------------------------------------------------
## (Intercept)         0.3962 *       -0.1658         -0.0647
##                    (0.1735)       (0.3498)        (0.3426)
## data3$s             0.1242 ***     0.1594 ***      0.1530 ***
##                    (0.0095)       (0.0212)        (0.0207)
## data3$wexp          0.0339 ***     0.0384 ***      0.0376 ***
##                    (0.0050)       (0.0057)        (0.0056)
## data3$male          0.2934 ***     0.2898 ***      0.2905 ***
##                    (0.0458)       (0.0465)        (0.0463)
## data3$ethblack     -0.1957 **     -0.1492         -0.1575 *
##                    (0.0713)       (0.0764)        (0.0759)
## data3$ethhisp      -0.0974        -0.0634         -0.0695
##                    (0.1003)       (0.1033)        (0.1028)
## ------------------------------------------------------------
## R^2                 0.3539         0.3366          0.3422
## Adj. R^2            0.3476         0.3301          0.3358
## Num. obs.         520            520             520
## ============================================================
## *** p < 0.001; ** p < 0.01; * p < 0.05
```

Der er stadigvæk endogenitet i modellen, som vi bekræfter med p-værdien nedenfor:
Her tager vi udgangspunkt i opgave 6.

```
resSLS7 <- resid(sls7)
res_aux7 <- lm(resSLS7 ~ data3$wexp + data3$male + data3$ethblack
               + data3$ethhisp  + data3$sf + data3$sm)
r27 <- summary(res_aux7)$r.squared
n7 <- nobs(res_aux7)
```

```
teststat7 <- n7*r27
1-pchisq(teststat7,1)
## [1] 0.01593513
```

P-værdien er stadigvæk under 0.05, og vi kan derfor stadigvæk forkaste nulhypotesen på et 5% siknifikansniveau, selvom siblings er undlagt. Enten må sf eller sm derfor være endogene, og det har ikke ændret på konklussionen fra tidligere.

4 Eksamensopgave 4

Økonometri

Eksamensopgave 4: Modeller for Binære Variable

I denne opgave undersøger vi hvilke faktorer der påvirker hvorvidt kvinder i Schweiz indgår i arbejdsstyrken.

Den afhængige variabel er $participation$, en binær variabel der måler hvorvidt personen indgår i arbejdsstyrken. Derudover har vi syv forklarende variable: indkomst der ikke er arbejdsrelateret målt i 1000 CHF ($income$), alder (age), alder^2 ($agesq$), uddannelse målt i antal år ($educ$), antal børn under under 7 år ($youngkids$), antal børn over 7 år ($oldkids$), samt en dummy-variabel der angiver om personer er udlænding ($foreign$).

Datasættet `data4`, som er tilgængelig på Moodle, indeholder disse variable målt for 872 schweiziske kvinder.

Nedenfor er der en række opgaver der skal løses. I forbindelse med de enkelte opgaver forventes det at der redegøres for den relevante teori. Det er altså ikke tilstrækkeligt blot at præsentere et "facit" for hver opgave.

Opgaver

1. Opstil en lineær regressionsmodel for $participation$ hvor du bruger de beskrevne forklarende variable.
   (a) Estimer modellen vha. OLS og kommenter på resultaterne.
   (b) Test om den partielle effekt af uddannelse er forskellig fra nul.
   (c) Test om den partielle effekt af alder er forskellig fra nul.
2. Opstil både en logit- og en probit-model for $participation$ hvor du bruger de beskrevne forklarende variable.
   (a) Estimer modellerne.
   (b) Test om den partielle effekt af uddannelse er forskellig fra nul.
   (c) Test om den partielle effekt af alder er forskellig fra nul vha. et likelihood-ratio-test.
3. Vi vil gerne sammenligne den partielle effekt af $income$ på tværs af modellerne. Beregn *average partial effect* (APE) og kommenter på resultaterne.
4. Vi vil gerne sammenligne den partielle effekt af $foreign$ på tværs af modellerne. Beregn APE og kommenter på resultaterne.
5. Hvorfor er APE at foretrække frem for *partial effect at the average* (PEA)?
6. Sammenlign modellernes evne til at prædiktere ved at beregne *percent correctly predicted* for hver model.

4.1 Opstil en lineær regressionsmodel for participation hvor du bruger de beskrevne forklarende variable.

Her skal vi estimere en model ved hjælp af OLS. OLS er udledt i Appendix 1 - OLS Modellen opstilles:

$$participiation = \beta_0 + \beta_1 income + \beta_2 age + \beta_3 agesq + \beta_4 educ + \beta_5 youngkids + \beta_6 oldkids + \beta_7 foreign$$

4.1.1 Estimer modellen vha. OLS og kommenter på resultaterne.

Vi skal nu estimere modellen, men i denne regressionsmodel der er den afhængige variable(y) binær. Dette betyder, at den kan tage værdien 1 eller 0, hvor 1 er, at kvinderne deltager i arbejdsstyrken, og ved 0 gør de ikke. Ved denne regressionsmodel, skal vi bruge en linæer model, som vi opstiller på generel form:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_j x_j + u$$

Da y er binær i vores model, gælder det at:

$$E(y|x) = P(y = 1|x)$$

Y viser os den sandsynlighed, der er for success, og det gør vi kan skrive modellen som:

$$P(y = 1|x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_j x_j + u$$

Vores Betaværdier viser os sandsynligheden for succes, når x ændres, mens alt andet holdes fast. Helt konkret så viser (β_j) den ændring, der er i forhold til at få succes når (x_j) ændrer sig. Det kan vi skrive som:

$$\Delta P(y = 1|x) = \beta_j \Delta x_j$$

En af de fordele, der er ved en Linær sandsynlighedsmodel(LPM) er, at de resultater/estimator, der kommer fra modellen er nemme at fortolke. En af de problemer der er ved en LMP model er, at LMP modeller altid vil være heteroskedastiske, og vi er derfor altid nød til at benytte robuste standard afvigelser.

Estimering af model i R

```
model_4_opg_1_a <- lm(participation ~ income + age + agesq + educ + youngkids
                      + oldkids +foreign)
summary(model_4_opg_1_a)
##
## Call:
## lm(formula = participation ~ income + age + agesq + educ + youngkids +
##     oldkids + foreign)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.84324 -0.39866 -0.08992  0.42048  1.01049
```

```
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -0.3685651  0.2529630  -1.457  0.14548
## income      -0.0035163  0.0007098  -4.954 8.75e-07 ***
## age          0.0633852  0.0128603   4.929 9.92e-07 ***
## agesq       -0.0009029  0.0001566  -5.767 1.12e-08 ***
## educ         0.0067725  0.0059615   1.136  0.25626
## youngkids   -0.2390033  0.0313780  -7.617 6.82e-14 ***
## oldkids     -0.0474930  0.0171593  -2.768  0.00576 **
## foreign      0.2572106  0.0401252   6.410 2.39e-10 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.4506 on 864 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.1901, Adjusted R-squared:  0.1836
## F-statistic: 28.98 on 7 and 864 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Her kan vi se, at alle resultaterne er statistisk siknifikante med deres respektive estimat med untagelse af uddannelse. Dette er interessant, fordi dette er positivt, og derfor vil have en positiv effekt på beskæftigelsen, men signifikansen kan ikke bekræftes.
Her kan vi også se, at $alder^2$ har negativ effekt på deltagensen på arbejdsmarkedet efter et vist punkt, da den vil begynde at dominere alders positive effekt.

4.1.2 Test om den partielle effekt af uddannelse er forskellig fra nul.

Her vil vi teste for om den partielle effekt af β_4 (som er uddannelse), er forskellige fra nul. Vi starter med at opstille en nul hypotese:

$$H_0 : \beta_4 = 0$$

Vi vil teste denne hypotese ved at finde t-værdien, og bagefter vil vi finde p-værdien for at styrke vores besvarelse.
Vi finder vores β_4 estimat i vores regressionsmodel, og vi finder også standardafvigelsen for β_4 i vores regressionsmodel. Vi benytter følgende formel for beregning af t-værdien

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - a_{ij}}{se(\hat{\beta}_j)}$$

Vi tester for at $\beta_4 = 0$ og at $a_{ij} = 0$. hvor a_{ij} er vores hypotese værdi for β_4.
Vi indsætter vores værdier og beregner først med R:

```
beta_4 <- 0.0067725
se_beta_4 <- 0.0059615
t_value_opg_1_a <- (beta_4 - 0)/se_beta_4
t_value_opg_1_a
## [1] 1.13604
```

Det kan også gøres ved at bruge formlen:

$$t = \frac{(0.0067725 - 0)}{0.0059615} = 1.13603959 \approx 1.14$$

Her får vi en T-værdi på 1.14, som altså falder inden for konfidensintervallet -1.96 til 1.96. derfor kan vi ikke forkaste vores nulhypotse og accepterer vores H_1 hypotese. Det betyder, at vi ikke kan sige, om den partielle effekt på uddannelse har en effekt på modellen.
Dette bekræftes yderligere i P-værdien nedenfor:

```
n <- 872 # Antal observationer
2*(1-pt(t_value_opg_1_a, df = n-1)) # p værdi
## [1] 0.2562525
```

Her ses en høj P-værdi, som betyder, at vi ikke på et 5% siknifikans niveau kan forkaste H_0. Den skulle have været under 0.05 for at gøre dette. Dette betyder, at uddannelse godt kan være nul, og derfor ikke nødvendigvis har en betydning i modellen.

4.1.3 Test om den partielle effekt af alder er forskellig fra nul.

Da alder indgår i 2 uafhængige variable, har vi en joint null hypothesis. Derfor vil vi bruge wald-testen(som korrigerer for hetereoskedasicitet) og kommentere på resultatet Først opstilles nulhypotesen:

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$$

Wald-testen udføres.

```
waldtest(model_4_opg_1_a, vcov=vcovHC(model_4_opg_1_a, type ="HC0"), terms=2:3)
## Wald test
##
## Model 1: participation ~ income + age + agesq + educ + youngkids + oldkids +
##     foreign
## Model 2: participation ~ income + educ + youngkids + oldkids + foreign
##   Res.Df Df      F    Pr(>F)
## 1    864
## 2    866 -2 37.745 < 2.2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Efter at have korrigeret for heteroskedasicitet i wald-testen får vi en P-værdi < 0.05 og vi kan derfor forkaste H_0 og acceptere H_1. Dette betyder at alders partielle effekt er forskellig fra 0, og derfor er relevant for modellen.

4.2 Opstil både en logit- og en probit-model for participation hvor du bruger de beskrevne forklarende variable.

Vi skal estimere en binær model, hvor udfaldene kan være at $y = 1$ eller at $y = 0$. Vi har tidligere brugt LPM metoden, og vil i dette afsnit gøre brug af Logit- og probit-modeller. Disse er relevante at anvende, da vi har en binær model.
Hele målet ved at have en binær model er, at vi vil have at modeller som er i intervallet [0,1]. Det gør vi ved at bruge en generel funktion $G(z)$, som tager værdien 0 eller 1.

$$P(y = 1|x) = \underbrace{G(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k)}_{G(z)}$$

Vi vælger $G(z)$ til at være en kommulativ fordelingsfunktion med en sandsynlighedsfunktion $g(z)$ for at vores resultater bliver nemmere at fortolke, da det sikrer, at $G(z)$ kun kan stige.

Vi opstiller en generel model ift. vores variabler.:

$$P(participation = 1|x) = \underbrace{G(\beta_0 + \beta_1 income + \beta_2 age + \beta_3 agesq + \beta_4 educ + \beta_5 youngkids + \beta_6 oldkids + \beta_7 foreign)}_{G(z)}$$

Hvor $G(z)$ indeholder alle vores afhængige variabler + interceptet. Vi kan nu opstille de to modeller:
Opstiller en Logit-model:

$$G(z) = \tau(z) = \frac{exp(z)}{[1 + exp(z)]}$$

Her er exp den eksponentielle funktion.
Opstiller Probit-model:

$$G(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \Phi(v)dv$$

Hvor

$$\Phi(z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} exp(\frac{-z^2}{2})$$

4.2.1 Estimer modellerne.

Vi vil starte ud med at lave en logit-model, og derefter en probit-model. Vi vil derefter lave en tabel der viser de to modeller ved siden af hinanden, for bedst mulig at kunne sammenligne resultaterne.

```
#Logit-modellen:
reg_l <- glm(participation~income+age+agesq+educ+youngkids+oldkids+foreign,
             family =binomial(link ="logit"))
#Probit-modellen:
reg_p <- glm(participation~income+age+agesq+educ+youngkids+oldkids+foreign,
             family =binomial(link ="probit"))
screenreg(list( Logit =reg_l, Probit =reg_p))
##
## ========================================
##                  Logit        Probit
## ----------------------------------------
## (Intercept)       -4.39 ***    -2.67 ***
##                   (1.30)       (0.78)
## income            -0.02 ***    -0.01 ***
##                   (0.00)       (0.00)
## age                0.33 ***     0.20 ***
##                   (0.07)       (0.04)
## agesq             -0.00 ***    -0.00 ***
##                   (0.00)       (0.00)
## educ               0.04         0.02
##                   (0.03)       (0.02)
## youngkids         -1.18 ***    -0.71 ***
##                   (0.17)       (0.10)
## oldkids           -0.24 **     -0.14 **
##                   (0.08)       (0.05)
## foreign            1.19 ***     0.73 ***
##                   (0.20)       (0.12)
## ----------------------------------------
## AIC              1032.15      1031.65
## BIC              1070.32      1069.82
## Log Likelihood  -508.08      -507.83
## Deviance         1016.15      1015.65
## Num. obs.         872          872
## ========================================
## *** p < 0.001; ** p < 0.01; * p < 0.05
```

Indkomst(income):
Her kan vi se, at indkomst har en negativ effekt på beskæftigelsen, Probit-modellen er dog 0.01 større end logit-modellen. Dette resultat på et 0.1% siknifikansniveau.

Alder(age):
Her kan vi se, at alder har en positiv effekt på beskæftigelsen, Logit-modellen er dog 0.13 større end probit-modellen. Dette resultat er siknifikant på et 0.1% siknifikansniveau.

Alder^2(agesq):
Her kan vi se, at der ikke skulle være en effekt på beskæftigelsen. Hverken for logit eller probit-modellen. Dette resultat er også siknifikant på et 0.1% siknifikansniveau.

Uddannelse(educ):
Her er der en positiv effekt, hvor logit-modellen er højere end probit-modellen. Dette resultat er dog ikke statistisk siknifikant, og kan derfor ikke bekræftes med sikkerhed.

Unge børn(youngkids):
Her kan vi se, at unge børn har en negativ effekt på beskæftigelsen, Probit-modellen er mindre negativ end logit-modellen. Dette resultat på et 0.1% siknifikansniveau.

Gamle børn(oldkids):
Her kan vi se, at gamle børn har en negativ effekt på beskæftigelsen, Probit-modellen er mindre negativ end logit-modellen. Dette resultat på et 0.1% siknifikansniveau.

Udlændinge(foreign):
Her kan vi se, at udlændinge har en positiv effekt på beskæftigelsen, Probit-modellen er mindre end logit-modellen. Dette resultat på et 0.1% siknifikansniveau.

4.2.2 Test om den partielle effekt af uddannelse er forskellig fra nul

Vi ønsker i denne opgave at teste for om udannelses partielle effekt er forskellige fra 0. Det vil sige om β_4 er forskellige fra nul. Vi vil i denne opgave først se vores logit model, og derefter vores probit model. Vi opstiller en nul hypotese:

$$H_0 : \beta_4 = 0$$

```
#Logit
summary(reg_l)
##
## Call:
## glm(formula = participation ~ income + age + agesq + educ + youngkids +
##     oldkids + foreign, family = binomial(link = "logit"))
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.9232  -0.9613  -0.4758   1.0074   2.3233
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -4.3863731  1.3037180  -3.365 0.000767 ***
## income      -0.0231073  0.0047864  -4.828 1.38e-06 ***
## age          0.3294733  0.0679098   4.852 1.22e-06 ***
## agesq       -0.0046600  0.0008394  -5.551 2.83e-08 ***
## educ         0.0386174  0.0301890   1.279 0.200830
## youngkids   -1.1777215  0.1718480  -6.853 7.22e-12 ***
## oldkids     -0.2354032  0.0845794  -2.783 0.005382 **
## foreign      1.1908144  0.2042059   5.831 5.50e-09 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 1203.2  on 871  degrees of freedom
## Residual deviance: 1016.2  on 864  degrees of freedom
## AIC: 1032.2
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
#Probit
summary(reg_p)
##
## Call:
## glm(formula = participation ~ income + age + agesq + educ + youngkids +
##     oldkids + foreign, family = binomial(link = "probit"))
```

```
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.9386  -0.9707  -0.4614   1.0125   2.3989
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -2.6697779  0.7755558  -3.442 0.000577 ***
## income      -0.0138013  0.0027868  -4.952 7.33e-07 ***
## age          0.1999828  0.0401738   4.978 6.43e-07 ***
## agesq       -0.0028268  0.0004942  -5.720 1.06e-08 ***
## educ         0.0230920  0.0180629   1.278 0.201100
## youngkids   -0.7103044  0.1004594  -7.071 1.54e-12 ***
## oldkids     -0.1439033  0.0510315  -2.820 0.004804 **
## foreign      0.7286122  0.1214254   6.000 1.97e-09 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 1203.2  on 871  degrees of freedom
## Residual deviance: 1015.7  on 864  degrees of freedom
## AIC: 1031.7
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

Her kan vi ved begge modeller se, at p-værdien på educ er 0.2, og vi kan derfor ikke forkaste nulhypotesen. Vi accepterer derfor H_0 hypotesen, som betyder, at vi ikke på et 5% siknifikans niveau kan sige, at uddannelse er forskellige fra nul. Uddannelse kan i princippet derfor godt være nul og ikke have en indflydelse på modellen.

4.2.3 Test om den partielle effekt af alder er forskellig fra nul vha. et likelihoodratio-test.

Vi vil i denne omgange teste om den partielle effekt af alder er forskellige fra 0, ved brug af likelihoodratio-test. Lilelihoodratio-test er en del af Maximum likelihood estimation, som anvendes her, fordi vi har at gøre med en binær model, som har hetereoskedasicitet i sig. Dermed vil anvendelsen af OLS ikke være BLUE længere.
Vi opstiller en nul hypotese hvor vi medtager både age og age^2:

$$H_0 : \beta_{age} = \beta_{age}^2 = 0$$

Da likelihood ratio statistikken er to gange forskellen i log-likelihoods, så er formlen:

$$LR = 2(L_{ur} - L_r)$$

hvor L_{ur} er loglikelihood værdien for den ubegrænsede model, og L_r er loglikelihood værdien for den begrænsede model
Nu laver vi testen i R. Her bruges likelihood testen på probit modellen:

```
ubegrænset_p <- glm(participation~income+age+agesq+educ+youngkids+oldkids+foreign,
                    family =binomial(link ="probit"))
begrænset_p <- glm(participation~income+educ+youngkids+oldkids+foreign,
                   family =binomial(link ="probit"))
#Udregner log-likelihood
lh_p <- 2*(logLik(ubegrænset_p)-logLik(begrænset_p))
#Den siger vi har en DF på 8, men det er reelt kun på 2

#Så kan vi udregne p-værdien:
pchisq(lh_p, df =2, lower.tail =F)
## 'log Lik.' 1.960861e-14 (df=8)
```

Vores p-værdi under 0.05, og der kan derfor forkastes på et 5% siknifikansniveau, men faktisk også et 1% siknifikansniveau. Vi kan altså afvise H_0 og acceptere H_1 og konkludere, at alder er relevant for modellen.
Gør det samme for logit modellen:

```
ubegrænset_l <- glm(participation~income+age+agesq+educ+youngkids+oldkids+foreign,
                    family =binomial(link ="logit"))
begrænset_l <- glm(participation~income+educ+youngkids+oldkids+foreign,
                   family =binomial(link ="logit"))
#Udregner log-likelihood
lh_l <- 2*(logLik(ubegrænset_l)-logLik(begrænset_l))
#Den siger vi har en DF på 8, men det er reelt kun på 2.

#Så kan vi udregne p-værdien:
pchisq(lh_l, df =2, lower.tail =F)
## 'log Lik.' 2.455753e-14 (df=8)
```

Her er vores nulhypotese under 0.05, og der kan derfor forkastes på et 5% siknifikansniveau, men faktisk også et 1% siknifikansniveau. Vi kan altså afvise H_0 og acceptere H_1 og konkludere at alder er relevant for modellen.

4.3 Vi vil gerne sammenligne den partielle effekt af income på tværs af modellerne. Beregn average partial effect (APE) og kommenter på resultaterne.

Average partial effect(APE) bruger vi til at udregne de partielle effekter for alle vores observationer, og derefter tager vi gennemsnittet af det. Vi bruger følgende formel:

$$\hat{APE}j = \hat{\beta}_j \left[n^{-1} \sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{x_i}\hat{\beta}) \right], \; hvor \; \mathbf{x_i} = (x_1, x_2, ..., x_i) \; og \; \hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ...\beta_i)$$

Her er det selvfølgelig afgørende om vores variable er diskret eller kontinuær, samt hvilken værdi de andre variable tager. Da indkomst er en kontinuær variable, så bruger vi følgende formel:

$$\Delta\hat{P}(y = 1|x) \approx [g(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}\mathbf{x})\hat{\beta}_j]\Delta x_j$$

$\hat{\beta}_j$ angiver retningen for den partielle effekt (positiv eller negativ), hvorimod selve størrelsen på den partielle effekt afhænger af skalafaktoren $g(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}\mathbf{x})$.

Da indkomst er en kontinuær variabel kan vi bruge pakken "mfx" til at finde den gennemsnitlige partielle effekt.

```
ape_l <-logitmfx(reg_l,data =data4, atmean =F)
ape_p <-probitmfx(reg_p, data =data4, atmean =F)
screenreg(list(Logit_APE =ape_l, Probit_APE =ape_p), digits =4)
##
## ==========================================
##                  Logit_APE      Probit_APE
## ------------------------------------------
## income            -0.0046 ***    -0.0046 ***
##                   (0.0010)       (0.0009)
## age                0.0657 ***     0.0662 ***
##                   (0.0144)       (0.0127)
## agesq             -0.0009 ***    -0.0009 ***
##                   (0.0002)       (0.0002)
## educ               0.0077         0.0076
##                   (0.0061)       (0.0060)
## youngkids         -0.2350 ***    -0.2350 ***
##                   (0.0387)       (0.0304)
## oldkids           -0.0470 **     -0.0476 **
##                   (0.0173)       (0.0167)
## foreign            0.2466 ***     0.2494 ***
##                   (0.0403)       (0.0400)
## ------------------------------------------
```

```
## Num. obs.         872            872
## Log Likelihood  -508.0766      -507.8263
## Deviance        1016.1533      1015.6526
## AIC             1032.1533      1031.6526
## BIC             1070.3196      1069.8189
## ============================================
## *** p < 0.001; ** p < 0.01; * p < 0.05
```

Den partielle effekt på de to modeller er begge -0.0046 på indkomst. Dette betyder, at hvis man øger indkomsten med 1, så vil det mindske sandsynligheden for arbejde med -0.0046%. Så hvis man øger indkomsten med 1000, så vil det mindske sandsynligheden for at være i arbejdsstyrken med ca 5%.

4.4 Vi vil gerne sammenligne den partielle effekt af foreign på tværs af modellerne. Beregn APE og kommenter på resultaterne.

Vi skal i denne opgave arbejde med en dummy variable, foreign. Så skal vi arbejde med foreign variablen ved brug af metoden for diskrete variable. Vi skal i opgaven gøre det samme, som det vi gjorde i opgave 4.3 bare hvor vi i opgave 4.3 arbejdede med en kontinurt variable, indkomst. Vi vil bruge formlen for diskrete variable:

$$\underbrace{G(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k)}_{foreign} - \underbrace{G(\beta_0 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_{k-1} x_{k-1})}_{ikke\ foreign}$$

Først laves en matrice med relevant data:

```
cdata <-cbind(1, as.matrix(data4[, c("income", "age", "agesq", "educ","youngkids",
                                     "oldkids", "foreign")]))
```

Laver resten af udregningerne:

```
#Vi sorterer om de er foreign eller ej.
#Ved 1 er de foreign
cdata1 <-cdata
cdata1[, 8] <-1
#Ved 0 er de ikke foreign.
cdata2 <-cdata
cdata2[, 8] <-0
#Finder koefficienterne
pcoef <- reg_p$coefficients
#Finder gennemsnit
mean(pnorm(cdata1 %*%pcoef) -pnorm(cdata2 %*%pcoef))
## [1] 0.2493686
```

Her kan vi se, at resultatet er tæt på resultatet fra den kontinuære test, så vi antager stadigvæk, at der ikke er stor forskel på den gennemsnitlige partielle effekt.

4.5 Hvorfor er APE at foretrække frem for partial effect at the average (PEA)?

Vi vil til dette spørgsmål først gøre rede for hvad PEA er, og derefter hvad APE er. Afslutningsvist vil vi sammenligne de to metoder, og diskutere hvad der er bedst at bruge.

Partial effect at the average(PEA):
Ved PEA udregner vi den partielle effekt af den gennemsnitlige variable. Formlen for PEA er følgende:

$$P\hat{E}A_j = g(\bar{x}\hat{\beta})\hat{\beta}_j, \ hvor \ \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_i) \ og \ \hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ...\beta_i)$$

Der er også problemer forbundet med at bruge PEA. Den første er, at hvis en eller flere af de forklarende variable er diskrete, så vil gennemsnittet ikke repræsentere nogen af dem i stikprøven. Et eksempel kunne være hvis x_1 angiver en dummy variable for kvinder, og 47.5% er kvinder i stikprøven, så vil det ikke give meget mening at sætte $\bar{x}$=0.475 in i formlen for det siger ikke noget om den gennemsnitlige person. Det andet problem er, at hvis der er kontinuerte forklarende variable viser sig at være af nonlinear funktion, det kunne fx være, at variablen er sat i anden. Et eksempel kunne være vi har x_1 til at angive indkomst, men at x_2 angiver $indkomst^2$, hvilken en skal vi så bruge til vores model?

Average partial effect(APE) kaldes også for Average marginal effect(AME):
APE tager effekten af hver enkelt obseration og finder den gennemsnitlige effekt på tværs af disse. Det udregnes ud fra formlen:

$$A\hat{P}Ej = \hat{\beta}_j \left[n^{-1} \sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{x_i}\hat{\beta}) \right], \ hvor \ \mathbf{x_i} = (x_1, x_2, ..., x_i) \ og \ \hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ...\beta_i)$$

Sammenligning af PEA og APE
Hvor PEA udregner den gennemsnitlige observation, så kan der være problemer hvis vi ser på en dummy variable, da det kan være besværligt at udregne gennemsnittet. APE har ikke samme problem, da vi ved APE udregner effekten af hver enkelt individuel observation og derefter tager gennemsnittet af effekten. Det er grunden til vi vil foretrække APE fremfor PEA.

4.6 Sammenlign modellernes evne til at prædiktere(forudsige) ved at beregne percent correctly predicted for hver model.

Percemt correctly predicted(PCP) er at foretrække i binære modeller. Det er fordi vi finder de forudsagte fitted værdier fra OLS modellen, også skrevet som $\hat{y}_i$, og derefter sammenligner med de faktiske værdier. Da vores fitted værdier kan tage værdien mellem 0 og 1, så kan vi opskrive dette på ligningsformen:

$$\tilde{y}_i = \begin{Bmatrix} 1 & if & \hat{y}_i \geq c \\ 0 & if & \hat{y}_i < c \end{Bmatrix}$$

Da c er sandsynlighedsgrænsen, og den ofte sættes til at være 0.5, så kan vi også skrive det på formen:

$$\tilde{y}_i = 1 - if - \hat{y}_i > 0.5$$

og

$$\tilde{y}_i = 0 - if - \hat{y}_i < 0.5$$

Vi vil nu bruge R til at beregne vores PCP værdier for vores modeller.

```
y <-data4["participation"]
#Værdierne fra den oprindelige OLS model.
lpmpred <-100*mean((model_4_opg_1_a$fitted >0.5) ==y)
#Værdierne fra logit-modellen
logitpred <-100*mean((reg_l$fitted >0.5) ==y)
#Værdierne fra probit-modellen
probitpred <-100*mean((reg_p$fitted >0.5) ==y)
print(c(lpmpred, logitpred, probitpred))
## [1] 67.43119 68.11927 68.11927
```

Her kan vi se, at modellerne har en PCP på 67-68% på "fitted" værdier, som er værdier mellem 0 og 1. Det vil altså sige, at modellerne forudsiger korrekt 67-68% af gangene ift. de rigtige observationer

5 Appendix 1 - OLS

For at udlede OLS skal vi først have en regressionsmodel og to antagelser. Vi har en regressionsmodel

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

Antagelse 1:

$$E(u) = 0 \tag{Antagelse 1}$$

Antagelse 2:

$$cov(u, x) = E(ux) = 0 \tag{Antagelse 2}$$

Dette kan udledes ud fra følgende:

$$cov(x, u) = E[(x - E(x))(u - E(u))] \tag{2a}$$

For nemhedens skyld skriver vi: $E(x) = \mu_x$ og $E(u) = \mu_u$

$$cov(x, u) = E[(x - \mu_x)(u - \mu_u)] \tag{2b}$$

Ophæver paranteser:

$$cov(x, u) = E[xu - x\mu_u - \mu_x u + \mu_x \mu_u] \tag{2c}$$

Ganger E ind på alle led:

$$cov(x, u = E[xu] - E[x\mu_u] - E[\mu_x u] + E[\mu_x \mu_u]) \tag{2d}$$

Omskriver:

$$cov(x, u) = E[xu] - \mu_u E[x] - \mu_x E[u] + \mu_x \mu_u \tag{2e}$$

Da $E[x\mu_u] = \mu_u E[x]$ eller $E[xE(u)] = E[u]E[x] = \mu_u \mu_x$ kan vi omskrive:

$$cov(x, u) = E[xu] - \mu_u \mu_x - \mu_x \mu_u + \mu_x \mu_u \tag{2f}$$

Udregner og fjerner to led:

$$cov(x, u) = E[xu] - \mu_u \mu_x \tag{2g}$$

$$cov(x, u) = E[xu] = 0 \tag{2h}$$

Dette kan vi fordi $E(u) = \mu_u = 0$
Antagelserne for OLS er nu udledt, og vi kan forsætte med at udlede OLS.

Udledning af $\hat{\beta}_0$:
Vi starter med at udlede $\hat{\beta}_0$ da vi skal bruge denne senere, og her bruger vi Antagelse 1: $E(u) = 0$

$$E(u) = E(y - \beta_0 - \beta_1 x) = 0$$

Ganger E ind på alle led for at ophæve parantes:

$$E(y) - E(\beta_0) - E(\beta_1 x) = 0$$

Her går vi fra populationsbetingelser til stikprøve betingelser:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Udregner summeringer:

$$\bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 0$$

Omskriver:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Udledning af $\hat{\beta}_1$:
Vi mangler nu at udlede $\hat{\beta}_1$. Dette kan gøres med med antagelse 2, som vi udledte til:

$$cov(x, u) = E[xu] = 0$$

$$E(xu) = 0$$

Indsætter regressionsligning:

$$E[x(y - \beta_0 - \beta_1 x)] = 0$$

Ganger $E[x]$ ind i parantesen:

$$E(xy) - E(\beta_0)x - E(\beta_1 x^2) = 0$$

Går fra populationsbetingelse til stikprøve betingelse

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \hat{\beta}_0 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Bruger nu $\hat{\beta}_0$ fra tidligere og indsætter:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Vi kan undlade $\frac{1}{n}$ fra ligningen:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) \sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Omskriver så vi får fjernet parantesen:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \hat{\beta}_1 \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Nu kan vi løse modellen for $\hat{\beta}_1$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \hat{\beta}_1 \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Reducerer og hiver $\hat{\beta}_1$ uden for parantes:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i) = 0$$

Vi kan nu isolere $\hat{\beta}_1$ på venstre side af lighedstegnet og forkorte ved reduktion af vores summeringstegn og sætte x_i uden for parantes:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i} .... \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \bar{x})}$$

Da vi kender følgende regneregler:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} = (x_i - \bar{x})^2 \tag{b}$$

Så kan $\hat{\beta}_1$ blive skrevet på følgende måde:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Vi har nu udledt OLS, hvor $\hat{\beta}_1$ er lig stikprøve kovariansen mellem x og y, divideret med stikprøve variansen for x.

6 Appendix 2 - SLR og MLR antagelser

SLR. Antagelse 1: Linæer i parametrer
I populations modellen, er forholdet mellem den afhængige variabel y, den uafhængige variabel x og fejlleddet u givet ved:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

Dette er en populations ligning og er linæer i dens parametrere.

SLR. Antagelse 2: Random sampling
Vi antager at have en tilfældig stikprøve af størrelsen $n, \{(x_i, y_i) : i = 1, 2, ..., n\}$, som følger populationsmodellen fra antagelse 1.

SLR. Antagelse 3: No Percet Collinearity
Stikprøve udfaldende på x, specifikt $\{x_i, i = 1, ..., n\}$ har ikke samme værdi.

SLR. Antagelse 4: Zero Conditional Mean
fejlleddet u har en forventet værdi på nul givet alle værdier af den forklarende variabel

$$E(u|x) = 0$$

MLR. Antagelse 1-4
De første 4 antagelser i MLR, er de samme som i SLR og skrives derfor ikke her. Vi tager udgangspunkt i de to nye antagelser, **MLR 5: Homoskedasticity** og **MLR 6: Normality**

MLR 5. Antagelse 5: Homoskedasticity
Fejleddet u har den samme varians givet alle værdier af den forklarende variable x. Skrevet matematisk:

$$Var(u|x_1, ..., x_k) = \sigma^2$$

MLR.6. Antagelse 6: Normality
Populationsfejleddet er uafhængig af den forklarende variable $x_1, x_2, ..., x_k$, og normalfordelt med middelværdien 0 og variansen σ^2. Matematisk kan det skrives:

$$u \sim Normal(0, \sigma^2)$$

7 Appendix 3 - Opstilling og notation af multilineær regressions model

Tidligere har vi opstillet en regressionsmodel med to uafhængige variable. I dette appendix vil vi forklare notationen.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

Variablernes definitioner:

y	er den afhængige variabel
x_1 *og* x_2	er de uafhængige variabler
u	er fejlleddet og indeholder ikke obseverede faktorer, som påvirker den afhængige variabel
β_0	er skæringen med y-aksen (en kostant)
$\beta_1, \beta_2,$	er parameterer for hver uafhængig variabel(x_1, x_2), hvor alle andre faktorer holdes fast

Regressioner kan opstilles med flere uafhængige variabler, men ser nogenlunde ens ud:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k + u$$

Variablernes definitioner går nu til …k, men er ellers uændret:

$(x_1, x_2, ..x_k)$	er de uafhængige variabler
$\beta_1, \beta_2, \beta_k$	er parameterer for hver uafhængig variabel$(x_1, x_2....x_k)$, som man estimerer

8 Appendix 4 - Begreber og metoder

Homoskedasticitet
Her tager vi udgangspunkt i MLR5. OLS-estimaterne skal have samme varians, hvis de ikke har det, er der Heteroskedasticitet, som medfører inefficiens og gør OLS til en dårlig estimator. Det vil bla. give forkert estimerede standard erros.

Heteroskedacitet
Heteroskedasticitet er det modsatte af homoskedasticitet og betyder altså, at der ikke er ens varians. Det vil altså kræve, at man håndterer denne hetereoskedasticitet. Det kan man fx. gøre ved at bruge whites robuste standardfejl, som korrigerer standardfejlene, således de kan anvendes, selvom MLR5 ikke er opfyldt.

Best Linear Unbiased Estimator(BLUE)
Den bedste linære unbiased estimator betyder, at selvom der er mange metoder til at udregne sammenhænge mellem to eller flere variabler på, så er OLS ligeså god som de andre. - Dette kræver dog, at MLR 1-5 er opfyldt, ellers kan vi ikke sige, at OLS er BLUE.

Fitted values
De tilpassede værdier er dem, som modellen forudsiger for den afhængige variabel ift. hvilke uafhængige værdier, der bliver brugt i modellen.

Godness of fit
Godness of fit testen viser hvorvidt ens stikprøvedata er det samme, som man ville forvente at finde i en population. Vi kan altså se, om det er normalfordelt eller har en anden fordeling.

Breush-Pagan test
En test man kan bruge til at teste for heteroskedacitet, hvor "squared OLS residuals" er anvendt(regressed) på de forklarende variable i modellen.

Law of large numbers
Law of large numers er et theorem, der siger, at når man har en stor nok stikprøve, så får man populations-gennemsnittet.

Central limit theorem
Central limit theoremet siger, når man standardiserer summen af uafhængige eller svagt afhængige variable, ved hjælp af standardafvigelsen. Så vil det ligne standardnormalfordelingen, jo større stikprøven er.

Logit-model

Det er en regression, hvor den afhængige variable(y), er binær, altså hvor y kun kan tage to værdier. Det samme gør sig gældende for de uafhængige variable(x). Hvor en diskret variable tager værdien "1" ved succes, og "0" ved fail. Det kunne være at gå på universitet(1) eller ikke at gå på universtitet(0). En kontinuert variable vil kun kunne tage værdier mellem 1 og 0. Det kunne være indkomst hvor den rigeste har værdien 1, og den fattigeste har værdien 0.

Probit-model

Det er en regression, hvor den afhængige variable(y) kun kan tage to værdier. Det kan være at gå på universitet(1), eller at man ikke går på universitet(0). Vi bruger probit-modellen til at estimere sandsynligheden for, at en observation vil falde indenfor den ene eller den anden gruppe.

9 Teoretiske udledninger til eksamen

Theoretical questions

Derivations

- 1. Given the following conditions:

$$E(u) = 0$$
$$Cov(x, u) = E(xu) = 0$$
$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

  Derive OLS estimator ($\hat{\beta}_1$) in a simple linear regression using Method of Moments?

- 2. Derive OLS intercept $\hat{\beta}_0$ for a simple linear regression?

- 3. Given $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - \bar{x})}{SST_x}$, derive the variance of OLS estimator (simple bivariate case)?

- 4. Given $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - \bar{x})}{SST_x}$, show that OLS estimator is unbiased when SLR1 to SLR4. hold.

- 5. Under asymptotic properties, we say the estimator is **consistent**, when MLR1 to MLR4 are fulfilled. Show the theorem that estimator is consistent (Theorem 5.1)?

- 6. Show that omitted variable bias can lead to inconsistent estimator (**asymptotic case**).

- 7. Assume $u \sim N(0, \sigma^2)$. How can we derive a **log-likelihood** estimator for regression, given:

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\left\{\frac{1}{2}\frac{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{\sigma^2}\right\}}$$

- 8. Assume a regression equation:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u$$

  Derive an IV estimator using an instrument z.

9.0.1 1. Derive OLS estimator ($\hat{\beta}_1$) in a simple linear regression using Method of Moments?

Vi får givet følgende betingelser:

$$E(u) = 0$$

$$Cov(x, u) = E(xu) = 0$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta_1}\bar{x}$$

Udledning af $\hat{\beta}_1$:
Indsætter vores u værdi:

$$E[x(y - \beta_0 - \beta_1 x)] = 0$$

$$\text{Da } u = y - \beta_0 - \beta_1 x <=> y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

Ganger $E[x]$ ind i parantesen:

$$E(xy) - E(\beta_0)x - E(\beta_1 x^2) = 0$$

Går fra populationsbetingelse til stikprøve betingelse

$$\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \hat{\beta}_0 \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Bruger nu $\hat{\beta}_0$ fra betingelserne og indsætter:

$$\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x})\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Vi kan undlade $\frac{1}{n}$ fra ligningen:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x})\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Ophæver paranteserne:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \hat{\beta}_1\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Nu kan vi løse modellen for $\hat{\beta}_1$ ved at isolere for $\hat{\beta}_1$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \hat{\beta}_1\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Reducerer og hiver $\hat{\beta}_1$ uden for parantes:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i) = 0$$

Vi kan nu isolere $\hat{\beta}_1$ på venstre side af lighedstegnet og forkorte ved reduktion af vores summeringstegn og

sætte x_i uden for parantes:

$$\hat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i} .... \hat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \bar{x})}$$

Da vi kender følgende regneregler:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} = (x_i - \bar{x})^2 \tag{b}$$

Så kan $\hat{\beta_1}$ blive skrevet på følgende måde:

$$\hat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Vi har nu udledt OLS, hvor $\hat{\beta_1}$ er lig stikprøve kovariansen mellem x og y, divideret med stikprøve variansen for x.

9.0.2 2. Derive OLS intercept $\hat{\beta}_0$ for a simple linear regression?

Vi har følgende betingelser:

$$E(u) = 0$$

$$Cov(x, u) = E(xu) = 0$$

Vi starter med at sætte u ind i $E(u)$:

$$E[x(y - \beta_0 - \beta_1 x)] = 0$$

$$\text{Da } u = y - \beta_0 - \beta_1 x <=> y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

Ganger $E[x]$ ind i parantesen:

$$E(xy) - E(\beta_0)x - E(\beta_1 x^2) = 0$$

Nu går vi fra en populationsbetingelse til en stikprøve betingelse.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Vi kender vi følgende:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

og kan derfor omskrive til:

$$\bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 0$$

Kan nu isolere for $\hat{\beta}_0$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Nu har vi udledt $\hat{\beta}_0$, som er vores intercept i regressionensmodellen, og som også bruges i udlednigen af $\hat{\beta}_1$

9.0.3 3. Derive the variance of OLS estimator (simple bivariate case)?

Vi får givet følgende:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i(x_1 - \bar{x})}{SST_x}$$

Så tager vi udgangspunkt i en standard regressions model:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

og indsætter denne i udgangspunktet

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{SST_x}$$

Vi ophæver højre brøk i tælleren.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\beta_0 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\beta_1 x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})u_i}{SST_x}$$

Vi isolerer betaerne på venstre side af summeringstegnet

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\beta_0 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) + \beta_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})u_i}{SST_x}$$

Nu kender vi nogle udtryk:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

$$\text{Da } \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x}n = \bar{x}n - \bar{x}n = 0$$

og vi kender

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = SST_x$$

$$\text{Da } \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = SST_x$$

Nu kan vi sætte vores udtryk ind i den oprindelige ligning:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\beta_1 SST_X + \sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})u_i}{SST_X}$$

Lader SST_x gå ud med hinanden:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})u_i}{SST_X}$$

Dette kan omskries til

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{1}{SST_x}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})u_i$$

Nu tager vi variansen og bruger reglerne $Var(a) = 0$, og $Var(aX) = a^2Var(X)$. Da vi ved, at $\frac{1}{SST_x}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$ er faste værdier, kan vi bruge ovenstående regler:

$$Var(\hat{\beta}_1) = 0 + \left(\frac{1}{SST_x}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 Var(u_i)$$

Vi ved at: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = SST_x$, så vi ganger ind i parantesen:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{SST_x}Var(u_i)$$

Nu ved vi at $Var(u_i|x_i) = \sigma^2$, så vi kan skrive:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{SST_x}\sigma^2$$

9.0.4 4. Show the OLS estimator is unbiased when SLR1 to SLR4. hold.

Vi får givet følgende:

$$\hat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i(x_1 - \bar{x})}{SST_x}$$

Så tager vi udgangspunkt i en standard regressions model:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

og indsætter denne i udgangspunktet

$$\hat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{SST_x}$$

Vi ophæver højre brøk i tælleren.

$$\hat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})\beta_0 + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})\beta_1 x_i + \sum_{i=1}^{n} (x_1 - \bar{x})u_i}{SST_x}$$

Vi isolerer betaerne på venstre side af summeringstegnet

$$\hat{\beta_1} = \frac{\beta_0 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})x_i + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})u_i}{SST_x}$$

Nu kender vi nogle udtryk:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

$$\text{Da } \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x}n = \bar{x}n - \bar{x}n = 0$$

og vi kender

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = SST_x$$

$$\text{Da } \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = SST_x$$

Nu kan vi sætte vores udtryk ind i den oprindelige ligning:

$$\hat{\beta_1} = \frac{\beta_1 SST_X + \sum_{i=1}^{n} (x_1 - \bar{x})u_i}{SST_X}$$

Lader SST_x gå ud med hinanden:

$$\hat{\beta_1} = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_1 - \bar{x})u_i}{SST_X}$$

Dette kan omskrives til:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \left(\frac{1}{SST_x}\right)\sum_{i=1}^{n} d_i u_i$$

$$\text{Hvor } d_i = (x_i - \bar{x})$$

Nu kan vi anvende SLR4. $E(u_i|x_i) = 0$

$$E(\hat{\beta}_1) = E(\beta_1) = E\left[(\frac{1}{SST_x})\sum_{i=1}^{n} d_i u_i\right]$$

Da vi ved, at $E[u_i] = 0$ så:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + 0$$

9.0.5 5. Under asymptotic properties, we say the estimator is consistent, when MLR1 to MLR4 are fulfilled. Show the theorem that estimator is consistent (Theorem 5.1)?

Box 9.1: Theorem 5.1

Teoremet siger, at under antagelserne MLR1 til MLR4 er OLS estimatoren $\hat{\beta}_j$ konsistent for β_j, for alle $j = 0, 1, ..., k$.

Vi viser Theorem 5.1, som er givet vores $\hat{\beta}_1$ på forhånd:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x})^2}$$

Vi indsætter vores regressionsmodel $y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + u_i$

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x})u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x})^2}$$

Når man dividerer både tæller og nævner med n^{-1} giver det os ikke en forskel, men vi kan istedet bruge Law of large numbers.
Så konvergerer hhv. nævneren og tælleren mod sandsynlighederne for populationsmængderne. Så:

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x})u_i \text{ mod } Cov(x_1, u)$$

og

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x})^2 \text{ mod } Var(x_1)$$

i MLR3 er det givet at $Var(x_1) \neq 0$, og vi kan derfor bruge sandsynlighedsgrænser for at få følgende:

$$plim\ \beta_1 = \beta_1 + \frac{Cov(x_1, u)}{Var(x_1)} = \beta_1 \text{ da } Cov(x_1, u) = 0$$

x_1 og u har ingen kovarians. Dette er antaget i MLR4.

9.0.6 6. Show that omitted variable bias can lead to inconsistent estimator (asymptotic case).

Her har vi givet følgende:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

Her antager vi, at vi har glemt en variabel x_2 i vores regression.

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + u$$

Derfor kan det vises at:

$$\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \delta_1 \beta_2$$

og vi får derfor følgende:

$$\delta_1 = \frac{Cov(x_1, x_2)}{Var(x_1)}$$

Det vil altså sige, at hvis $\delta \neq 0$ så har det at udelade x_2 for vores model skabt bias i modellen. Det betyder, at vi får inkonsistente estimatorer.

9.0.7 7. How can we derive a log-likelihood estimator for regression.

Vi antager, at vi har en normalfordeling:

$$u \sim N(0, \sigma^2)$$

Hvor det er givet:

$$L(\beta_0, \beta_1 \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\left\{\frac{1}{2}\frac{(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2}{\sigma^2}\right\}}$$

Nu tager vi log på begge sider af:

$$logL(\beta_0, \beta_1 \sigma^2) = log\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\left\{\frac{1}{2}\frac{(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2}{\sigma^2}\right\}}\right]$$

Når man tager log af et produkt($\prod$), så bliver det til et sum tegn, plus vores e forsvinder, og vi rykker minustegnet ud foran sumtegnet:

$$logL(\beta_0, \beta_1 \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2}\right)^n - \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}\frac{(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2}{\sigma^2}\right\}$$

Trækker n ud foran første led og $\frac{1}{2}$ ud foran sumtegnet.

$$logL(\beta_0, \beta_1 \sigma^2) = -\frac{n}{2}log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2}{\sigma^2}$$

Nu lader vi σ^2 være givet, så vi kan maksimere i henhold til β_0 og β_1

$$logL(\beta_0, \beta_1 \sigma^2) = -\frac{n}{2}log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2$$

Nu har vi den udledte funktion og kan så tage første ordens betingelsen i henhold til β_0: Så først ganger vi igennem med (-1) og så tager vi FOC til β_0

$$logL(\beta_0, \beta_1 \sigma^2) = \frac{n}{2}log(2\pi\sigma^2)\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2$$

Vi ved at $\frac{n}{2}log(2\pi\sigma^2)$ er en konstant så ved partiel differention fås:

$$\frac{\partial logL(\beta_0, \beta_2, \sigma^2)}{\partial\hat{\beta_0}} = \frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)$$

$\frac{2}{2\sigma^2}$ fjernes:

$$\frac{\partial logL(\beta_0, \beta_2, \sigma^2)}{\partial\hat{\beta_0}} = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)$$

Nu kan vi tage FOC til β_1

$$\frac{\partial logL(\beta_0, \beta_2, \sigma^2)}{\partial\hat{\beta_0}} = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)$$

vi bruger intercept(β_0) ligningen:

$$\hat{\beta_0} = \bar{y} - \hat{\beta_1}\bar{x}$$

Indsættes i ligningen fra før:

$$\frac{\partial logL(\beta_0, \beta_2, \sigma^2)}{\partial \hat{\beta_0}} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (\bar{y} - \hat{\beta_1}\bar{x}) - \beta_1 x_i) = 0$$

Vi omskriver:

$$\frac{\partial logL(\beta_0, \beta_2, \sigma^2)}{\partial \hat{\beta_0}} = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y}) - \sum_{i=1}^{n} x_i(-\hat{\beta_1}\bar{x} + \hat{\beta_1}x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(-\hat{\beta_1}\bar{x} + \hat{\beta_1}x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y})$$

Bruger reglen:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Faktoriserer $\hat{\beta_1}$ ud:

$$\hat{\beta_1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x})\right) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Bruger reglen:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\hat{\beta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Kan nu isolere for $\hat{\beta_1}$

$$\hat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Vi har nu både udledt Maximum Likelihood funktionen og dens estimaterer β_0 og β_1

9.0.8 8. Derive an IV estimator using an instrument z.

Vi har en regressionsfunktion:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u$$

Her antages det, at der mangler en vigtig variabel, hvilket betyder:

$$Cov(x, u) \neq 0$$

Nu vil vi anvende z som instrument og antager derfor:

$$Cov(z, u) = 0$$

$$Cov(z, x) \neq 0$$

Hvor z er instrumentvariabel for x.
Vi tager Cov i forhold til z på begge sider og antager at $Cov(\beta_0, z) = 0$, samt bruger reglen: $Cov(aX, Y) = aCov(x, y)$

$$Cov(y, z) = 0 + \beta_1 Cov(x, z) + Cov(u, z)$$

Da $Cov(z, u) = 0$ får vi:

$$Cov(y, z) = \beta_1 Cov(x, z) + 0$$

Nu kan vi isolere for β_1

$$\beta_1 = \frac{Cov(y, z)}{Cov(x, z)}$$

Her er det vigtigt, at $Cov(x, z) \neq 0$ da vi ellers ville dividere med 0.
Vi estimerer β_1 ved at indskrive formlerne for Kovarianserne:

$$\hat{\beta_1} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}$$

$\frac{1}{n}$ kan nu fjernes fra både tæller og nævner:

$$\hat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}$$

Her kan vi også se, at hvis $z = x$, så havde det været det samme som udledningen for OLS.

10 Teori og formularer til eksamen

Formulae and other theory

- 9. What is the formula of the total sum of square (SST) of a variable y? What is the formula of the estimated sum of square (SSE) of a variable y? What is the formula of the residual sum of squares (SSR)?

- 10. What is the difference between adjusted R^2 and R^2?

- 11. Can you describe the Gauss-Markov assumptions? Which assumptions are required to show that OLS is unbiased/consistent? Which assumptions are required to show OLS is BLUE?

- 12. How does OLS estimate the estimators OR what is the objective function solved by OLS?

- 13. What are the consequences of including irrelevant variables in a regression?

- 14. What are the consequences of omitting a relevant variable in a regression?

- 15. The variance of the error term is represented by σ^2, what is the formula of computing σ^2?

- 16. What is the formula of t statistics or t ratio?

- 17. What is right tailed, left tailed, and two-sided test?

- 18. What are the (desirable) properties of error term in OLS?

- 19. What are the conditions that instrumental IV should satisfy?

- 20. What is a reduced form equation in the context of IV regressions?

- 21. What is the difference between 'just identified' and 'over identified model' in the context of IV regression?

- 22. What is the difference between the equations of OLS and IV estimators (write the two equations)?

- 23. What are logit and probit regressions? What are average partial effects (APE) and partial effects at average (PEA)?

NOTE: You might be asked other relevant questions not included in this list

10.0.1 9. What is the formula of the total sum of square (SST) of a variable y? What is the formula of the estimated sum of square (SSE) of a variable y? What is the formula of the residual sum of squares (SSR)?

$$SST = \sum_{n=i}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$SSE = \sum_{n=i}^{n} (\bar{y_i} - \bar{y})^2$$

$$SSR = \sum_{n=i}^{n} \hat{u}_i^2$$

10.0.2 10. What is the difference between adjusted R^2 and R^2 ?

Adjusted R^2 straffer variabler, der ikke er forklarende for modellen. Dette gør $adjR^2$ lavere end den normale R^2. R^2 viser hvor meget højre-side variablerne(de uafhængige) forklarer den afhængige variabel.

10.0.3 11. Can you describe the Gauss-Markov assumptions? Which assumptions are required to show that OLS is unbiased/consistent? Which assumptions are required to show OLS is BLUE

SLR 1-4 bruges til at konstatere om de estimerede værdier er biased eller unbiased.
SLR 1-5 skal overholdes for at OLS er BLUE.

10.0.4 12. How does OLS estimate the estimators OR what is the objective function solved by OLS?

OLS estimerer parameterne i en multiple linæer regression ved at minimere summen af "squared" residuals. Dette betyder, at regressionen sørger for at residualerne(fejlledene) bliver så små som muligt og så tæt på "OLS-regresisions-linjen" som muligt. Det er altså et minimeringsproblem.

10.0.5 13. What are the consequences of including irrelevant variables in a regression?

Det vil ikke påvirke unbiassedness for modellen, men det kan gå ind og have negative følger for bla. varianserne på OLS estimaterne.

10.0.6 14. What are the consequences of omitting a relevant variable in a regression?

Der kan opstå bias i modellen, såkaldt "omitted variable bias". Dette behøver ikke nødvendigvis være et problem afhængig af størrelsen af dette.

10.0.7 15. The variance of the error term is represented by σ^2 , what is the formula of computing σ^2

Variansen af u er ukendt, men kan blive repræsenteret på følgende formel:

$$\sigma^2 \frac{\sum_{n=i}^{n} (\hat{u}_i)^2}{n-(k+1)} = \frac{SSR}{n-(k+1)}$$

Hvor $(k+1)$ referer til hvor mange β værdier vi har, så:

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$$

og $n-(k+1)$ referer til antallet af frihedsgrader.

10.0.8 16. What is the formula of t statistics or t ratio?

Metoden vi bruger til at teste nulhypotesen mod den alternative hypotese kaldes T-statistik eller t-ratio og opskrives:

$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)}$$

Her er værdien $se(\hat{\beta}_j)$ altid positiv, mens β_j kan være begge dele. T-statistikkens fortegn afhænger altså af dette.

10.0.9 17. What is right tailed, left tailed, and two-sided test?

Right-tailed test:
En right-tailed test er hvor nulhypotesen kunne være:

$$H_0 : \beta_j \leq 0$$

Og den alternative hypotese er:

$$H_1 : \beta_j > 0$$

left-tailed test:
En left-tailed test er hvor nulhypotesen kunne være:

$$H_0 : \beta_j \geq 0$$

Og den alternative hypotese er:

$$H_1 : \beta_j < 0$$

Two-sided test:
En two-sided test kunne have en nulhypotese på:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

Og den alternative hypotese er:

$$H_0 : \beta_j \neq 0$$

10.0.10 18. What are the (desirable) properties of error term in OLS?

Den eneste måde at få troværdige estimator på, er hvis fejlleddet(u) ikke er relateret til x. Derfor er der to følgende antagelser:

$$E(u) = 0$$

$$E(u|x) = E(u) = 0$$

Hvor den sidste antagelse siger, at middelværdien af fejlleddet(u) er uafhængig af x.

10.0.11 19. What are the conditions that instrumental IV should satisfy?

Instrumentvariablen kaldes ofte for z og er en instrumentvariabel for x. Den skal opfylde disse betingelser:

$$Cov(z, u) = 0$$

Hvis z er korreleret med x, får vi:

$$Cov(z, x) \neq 0$$

hvilket ville skabe "instrument eksogenitet".

10.0.12 20. What is a reduced form equation in the context of IV regressions?

Vi antager en strukturel model for IV-estimation:

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 y_2 + \beta_2 z_1 + u_1$$

Vi mistænker nu, at u korrelerer med y_2 og kan skrive en reduced form equation:

$$y_2 = \pi_0 + \pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + v_2$$

10.0.13 21. What is the difference between 'just identified' and 'over identified model' in the context of IV regression?

"Over indetified model":
Overidentifikationstesten kan bruges, når vi har flere instrumenter end vi behøver. Dette kan vi fordi modellen er "over identified".
"Just indentifed":
I denne model har vi lige akurat nok instrumenter, og det siges, at den er "just identified". Her kan vi ikke bruge overidentifikationstesten.

10.0.14 22. What is the difference between the equations of OLS and IV estimators (write the two equations)?

OLS estimators:

$$\hat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$\hat{\beta_1}$ er lig stikprøve kovariansen mellem x og y, divideret med stikprøve variansen for x.

IV estimators:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}$$

Her kan vi se, at $\hat{\beta_1}$ er lig stikprøve kovariansen mellem z og y, divideret med stikprøve kovariansen mellem z og x, også noteret:

$$\beta_1 = \frac{Cov(x, y)}{Cov(x, z)}$$

Dog kan vi se, at hvis $z = x$, så havde IV-estimatoren været det samme som OLS estimatoren.

10.0.15 23. What are logit and probit regressions? What are average partial effects (APE) and partial effects at average (PEA)?

Logit-model Det er en regression, hvor den afhængige variable(y), er binær, altså hvor y kun kan tage to værdier. Det samme gør sig gældende for de uafhængige variable(x). Hvor en diskret variable tager værdien "1" ved succes, og "0" ved fail. Det kunne være at gå på universitet(1) eller ikke at gå på universtitet(0). En kontinuert variable vil kun kunne tage værdier mellem 1 og 0. Det kunne være indkomst hvor den rigeste har værdien 1, og den fattigeste har værdien 0.

Probit-model Det er en regression, hvor den afhængige variable(y) kun kan tage to værdier. Det kan være at gå på universitet(1), eller at man ikke går på universitet(0). Vi bruger probit-modellen til at estimere sandsynligheden for, at en observation vil falde indenfor den ene eller den anden gruppe.

Partial effect at the average(PEA):
Ved PEA udregner vi den partielle effekt af den gennemsnitlige variable. Formlen for PEA er følgende:

$$P\hat{E}A_j = g(\bar{x}\hat{\beta})\hat{\beta}_j, \ hvor \ \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_i) \ og \ \hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ...\beta_i)$$

Der er også problemer forbundet med at bruge PEA. Den første er, at hvis en eller flere af de forklarende variable er diskrete, så vil gennemsnittet ikke repræsentere nogen af dem i stikprøven. Et eksempel kunne være hvis x_1 angiver en dummy variable for kvinder, og 47.5% er kvinder i stikprøven, så vil det ikke give meget mening at sætte $\bar{x}$=0.475 in i formlen for det siger ikke noget om den gennemsnitlige person. Det

andet problem er, at hvis der er kontinuerte forklarende variable viser sig at være af nonlinear funktion, det kunne fx være, at variablen er sat i anden. Et eksempel kunne være vi har x_1 til at angive indkomst, men at x_2 angiver $indkomst^2$, hvilken en skal vi så bruge til vores model?

Average partial effect(APE) kaldes også for Average marginal effect(AME):
APE tager effekten af hver enkelt obseration og finder den gennemsnitlige effekt på tværs af disse. Det udregnes ud fra formlen:

$$\hat{APEj} = \hat{\beta}_j \left[n^{-1} \sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{x_i}\hat{\beta}) \right], \ hvor \ \mathbf{x_i} = (x_1, x_2, ..., x_i) \ og \ \hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ...\beta_i)$$

Sammenligning af PEA og APE
Hvor PEA udregner den gennemsnitlige observation, så kan der være problemer hvis vi ser på en dummy variable, da det kan være besværligt at udregne gennemsnittet. APE har ikke samme problem, da vi ved APE udregner effekten af hver enkelt individuel observation og derefter tager gennemsnittet af effekten. Det er grunden til vi vil foretrække APE fremfor PEA.