Koszty replikacji opcji niezależnych od trajektorii z uwzględnieniem widełek kupna-sprzedaży

Daniel Biernat

6 kwietnia 2024

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt = \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x f'(t) - f'(a)dt$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt = \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x f'(t) - f'(a)dt$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt = \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x f'(t) - f'(a)dt$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_a^t f''(u)du dt$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt = \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x f'(t) - f'(a)dt$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_a^t f''(u)dudt$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt = \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x f'(t) - f'(a)dt$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_a^t f''(u)du dt$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt = \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x f'(t) - f'(a)dt$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_a^t f''(u)dudt = (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_u^x f''(u)dtdu$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x)-f(a)=\int\limits_a^x f'(t)dt=\int\limits_a^x f'(t)+f'(a)-f'(a)dt=\int\limits_a^x f'(a)dt+\int\limits_a^x f'(t)-f'(a)dt$$

$$=(x-a)f'(a)+\int\limits_a^x\int\limits_a^t f''(u)dudt=(x-a)f'(a)+\int\limits_a^x\int\limits_u^x f''(u)dtdu$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt = \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x f'(t) - f'(a)dt$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_a^t f''(u)dudt = (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_u^x f''(u)dtdu$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt = \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x f'(t) - f'(a)dt$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_a^t f''(u)dudt = (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_u^x f''(u)dtdu$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)du$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt = \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x f'(t) - f'(a)dt$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_a^t f''(u)dudt = (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_u^x f''(u)dtdu$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)du$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt = \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x f'(t) - f'(a)dt$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_a^t f''(u)dudt = (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_u^x f''(u)dtdu$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)du$$

f - funkcja dwukrotnie różniczkowalna

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t) + f'(a) - f'(a)dt = \int_a^x f'(a)dt + \int_a^x f'(t) - f'(a)dt$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_a^t f''(u)dudt = (x-a)f'(a) + \int_a^x \int_u^x f''(u)dtdu$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)du$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x\leqslant a\}}du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}du$$

$f(x) - f(a)$

$$f(x) - f(a)$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x > a\}}du$$

$$f(x) - f(a)$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u) f''(u) \mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}} du + \int_a^x (x-u) f''(u) \mathbb{1}_{\{x > a\}} du$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x) f''(u) \mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}} du + \int_a^x (x-u) f''(u) \mathbb{1}_{\{x > a\}} du$$

$$f(x) - f(a)$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}du$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x)f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}du$$

$$f(x) - f(a)$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x\leqslant a\}}du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}du$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x)f''(u)\mathbb{1}_{\{x\leqslant a\}}du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}du$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x\leqslant a\}}du + \int_a^x (x-u)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}du$$

$$f(x) - f(a)$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}du$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x)f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}du$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}du + \int_a^x (x-u)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}du$$

$$
\begin{aligned}
&f(x) - f(a) \\
&= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x\leqslant a\}}\,du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}\,du \\
&= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x)f''(u)\mathbb{1}_{\{x\leqslant a\}}\,du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}\,du \\
&= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x\leqslant a\}}\,du + \int_a^x (x-u)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}\,du \\
&= (x-a)f'(a) + \int_{-\infty}^a (u-x)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x\leqslant a\}}\,du + \int_a^\infty (x-u)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}\,du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(a) \\
&= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}\,du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x > a\}}\,du \\
&= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x)f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}\,du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x > a\}}\,du \\
&= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}\,du + \int_a^x (x-u)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x > a\}}\,du \\
&= (x-a)f'(a) + \int_{-\infty}^a (u-x)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}\,du + \int_a^\infty (x-u)^+f''(u)\mathbb{1}_{\{x > a\}}\,du
\end{aligned}
$$

$$f(x) - f(a)$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}\,du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}\,du$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x)f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}\,du + \int_a^x (x-u)f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}\,du$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_x^a (u-x)^+ f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}\,du + \int_a^x (x-u)^+ f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}\,du$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_{-\infty}^a (u-x)^+ f''(u)\mathbb{1}_{\{x \leqslant a\}}\,du + \int_a^\infty (x-u)^+ f''(u)\mathbb{1}_{\{x>a\}}\,du$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_{-\infty}^a (u-x)^+ f''(u)\,du + \int_a^\infty (x-u)^+ f''(u)\,du$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int\limits_{-\infty}^{a} (u-x)^+ f''(u)du + \int\limits_{a}^{\infty} (x-u)^+ f''(u)du$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_{-\infty}^{a} (u-x)^+ f''(u)du + \int_{a}^{\infty} (x-u)^+ f''(u)du$$

$x \longrightarrow S_T$
$a \longrightarrow F$
$u \longrightarrow K$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_{-\infty}^{a} (u-x)^+ f''(u)du + \int_{a}^{\infty} (x-u)^+ f''(u)du$$

$x \longrightarrow S_T$
$a \longrightarrow F$
$u \longrightarrow K$

$$f(S_T) = \quad 1 \cdot f(F) \quad + \ (S_T - F)f'(F) \ + \int_{-\infty}^{F} (K - S_T)^+ f''(K)\, dK + \int_{F}^{\infty} (S_T - K)^+ f''(K)\, dK$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_{-\infty}^{a} (u-x)^+ f''(u)du + \int_{a}^{\infty} (x-u)^+ f''(u)du$$

$x \longrightarrow S_T$
$a \longrightarrow F$
$u \longrightarrow K$

$$f(S_T) = \underbrace{1 \cdot f(F)}_{\text{rachunek bankowy}} + \underbrace{(S_T - F)f'(F)}_{\text{kontrakt terminowy}} + \int_{-\infty}^{F} \underbrace{(K - S_T)^+ f''(K)}_{\text{opcja put}} dK + \int_{F}^{\infty} \underbrace{(S_T - K)^+ f''(K)}_{\text{opcja call}} dK$$

Założenia modelu

Założenia modelu

(a) Rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

Założenia modelu

(a) Rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

Założenia modelu

(a) Rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

(b) π jest pół-liniowy $\pi\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right) = \lambda_1 \pi\left(f\right) + \lambda_2 \pi\left(g\right)$, dla $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

Założenia modelu

(a) Rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

(b) π jest pół-liniowy $\pi\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right) = \lambda_1 \pi\left(f\right) + \lambda_2 \pi\left(g\right)$, dla $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

(c) funkcjonał π jest ciągły. $\int \left(f_n(x) - f(x)\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pi\left(f_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\left(f\right)$

Założenia modelu

(a) Rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

(b) π jest pół-liniowy $\pi\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right) = \lambda_1 \pi\left(f\right) + \lambda_2 \pi\left(g\right)$, dla $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

(c) funkcjonał π jest ciągły. $\int \left(f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pi\left(f_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\left(f\right)$

$$f\left(S_T\right) = 1 \cdot f\left(F\right) + \left(S_T - F\right) f'\left(F\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{F} \left(K - S_T\right)^+ f''\left(K\right) dK$$

$$+ \int_{F}^{\infty} \left(S_T - K\right)^+ f''\left(K\right) dK$$

Założenia modelu

(a) Rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

(b) π jest pół-liniowy $\pi\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right) = \lambda_1 \pi\left(f\right) + \lambda_2 \pi\left(g\right)$, dla $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

(c) funkcjonał π jest ciągły. $\int \left(f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pi\left(f_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\left(f\right)$

$$\pi\left(f\left(S_T\right)\right) = \pi\Bigg(1 \cdot f\left(F\right) + \left(S_T - F\right) f'\left(F\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{F} \left(K - S_T\right)^+ f''\left(K\right) dK$$

$$+ \int_{F}^{\infty} \left(S_T - K\right)^+ f''\left(K\right) dK\Bigg)$$

Założenia modelu

(a) Rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

(b) π jest pół-liniowy $\pi\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right) = \lambda_1 \pi\left(f\right) + \lambda_2 \pi\left(g\right)$, dla $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

(c) funkcjonał π jest ciągły. $\int \left(f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pi\left(f_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\left(f\right)$

$$\pi\left(f\left(S_T\right)\right) = \pi\Bigg(1 \cdot f\left(F\right) + \left(S_T - F\right) f'\left(F\right) + \int_{-\infty}^{F} \left(K - S_T\right)^+ f''\left(K\right) dK + \int_{F}^{\infty} \left(S_T - K\right)^+ f''\left(K\right) dK\Bigg)$$

Założenia modelu

(a) Rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

(b) π jest pół-liniowy $\pi\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right) = \lambda_1 \pi\left(f\right) + \lambda_2 \pi\left(g\right)$, dla $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

(c) funkcjonał π jest ciągły. $\int \left(f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pi\left(f_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\left(f\right)$

$$\pi\left(f\left(S_T\right)\right) = \pi\left(1 \cdot f\left(F\right)\right) + \pi\left(\left(S_T - F\right) f'\left(F\right)\right)$$

$$+ \pi\left(\int_{-\infty}^{F} \left(K - S_T\right)^+ f''\left(K\right) dK\right)$$

$$+ \pi\left(\int_{F}^{\infty} \left(S_T - K\right)^+ f''\left(K\right) dK\right)$$

Założenia modelu

(a) Rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

(b) π jest pół-liniowy $\pi\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right) = \lambda_1 \pi\left(f\right) + \lambda_2 \pi\left(g\right)$, dla $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

(c) funkcjonał π jest ciągły. $\int \left(f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pi\left(f_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\left(f\right)$

$$\pi\left(f\left(S_T\right)\right) = \pi\left(1 \cdot f\left(F\right)\right) + \pi\left(\left(S_T - F\right) f'\left(F\right)\right)$$

$$+ \pi\left(\int_{-\infty}^{F} \left(K - S_T\right)^+ f''\left(K\right) dK\right)$$

$$+ \pi\left(\int_{F}^{\infty} \left(S_T - K\right)^+ f''\left(K\right) dK\right)$$

Założenia modelu

(a) rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

(b) π jest pół-liniowy $\pi\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right) = \lambda_1 \pi\left(f\right) + \lambda_2 \pi\left(g\right)$, dla $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

(c) funkcjonał π jest ciągły. $\int \left(f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pi\left(f_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\left(f\right)$

$$\pi\left(f\left(S_T\right)\right) = \pi\left(1 \cdot f\left(F\right)\right) + \pi\left(\left(S_T - F\right) f'\left(F\right)\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{F} \pi\left(\left(K - S_T\right)^+ f''\left(K\right)\right) dK$$

$$+ \int_{F}^{\infty} \pi\left(\left(S_T - K\right)^+ f''\left(K\right)\right) dK$$

Założenia modelu

(a) rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

(b) π jest pół-liniowy $\pi\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right) = \lambda_1 \pi\left(f\right) + \lambda_2 \pi\left(g\right)$, dla $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

(c) funkcjonał π jest ciągły. $\int \left(f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pi\left(f_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\left(f\right)$

$$\pi\left(f\left(S_T\right)\right) = \pi\left(1 \cdot f\left(F\right)\right) + \pi\left(\left(S_T - F\right) f'\left(F\right)\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{F} \pi\left(\left(K - S_T\right)^+ f''\left(K\right)\right) dK$$

$$+ \int_{F}^{\infty} \pi\left(\left(S_T - K\right)^+ f''\left(K\right)\right) dK$$

Założenia modelu

(a) rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

(b) π jest pół-liniowy $\pi\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right) = \lambda_1 \pi\left(f\right) + \lambda_2 \pi\left(g\right)$, dla $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

(c) funkcjonał π jest ciągły. $\int \left(f_n(x) - f(x)\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pi\left(f_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\left(f\right)$

$$\pi\left(f\left(S_T\right)\right) = \left|f\left(F\right)\right| \pi\left(\operatorname{sgn}\left(f\left(F\right)\right)\right) + \left|f'\left(F\right)\right| \pi\left(\operatorname{sgn}\left(f'\left(F\right)\right)\left(S_T - F\right)\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{F} \left|f''\left(K\right)\right| \pi\left(\operatorname{sgn}\left(f''\left(K\right)\right)\left(K - S_T\right)^+\right) dK$$

$$+ \int_{F}^{\infty} \left|f''\left(K\right)\right| \pi\left(\operatorname{sgn}\left(f''\left(K\right)\right)\left(S_T - K\right)^+\right) dK$$

Założenia modelu

(a) rynek składa się z rachunku bankowego oraz opcji call i put na instrument bazowy S o zapadalności T i dowolnych kursach $K \leqslant F$ dla opcji put oraz $K \geqslant F$ dla opcji call. Instrumenty na rynku są nieskończenie podzielne i doskonale płynne. Na rynku nie ma arbitrażu.

π - funkcjonał kosztu replikacji

(b) π jest pół-liniowy $\pi\left(\lambda_1 f + \lambda_2 g\right) = \lambda_1 \pi\left(f\right) + \lambda_2 \pi\left(g\right)$, dla $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$

(c) funkcjonał π jest ciągły. $\int \left(f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pi\left(f_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\left(f\right)$

$$\pi\left(f\left(S_T\right)\right) = \left|f\left(F\right)\right| \pi\left(\operatorname{sgn}\left(f\left(F\right)\right)\right) + \left|f'\left(F\right)\right| \pi\left(\operatorname{sgn}\left(f'\left(F\right)\right)\left(S_T - F\right)\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{F} \left|f''\left(K\right)\right| \pi\left(\operatorname{sgn}\left(f''\left(K\right)\right)\left(K - S_T\right)^+\right) dK$$

$$+ \int_{F}^{\infty} \left|f''\left(K\right)\right| \pi\left(\operatorname{sgn}\left(f''\left(K\right)\right)\left(S_T - K\right)^+\right) dK$$

(a) Strategia replikująca nie wymaga zakupu aktywa bazowego - brak założenia o dynamice dywidend

(a) Strategia replikująca nie wymaga zakupu aktywa bazowego - brak założenia o dynamice dywidend

(b) metoda wyceny nie zakłada dynamiki aktywa bazowego i stopy procentowej

(a) Strategia replikująca nie wymaga zakupu aktywa bazowego - brak założenia o dynamice dywidend

(b) metoda wyceny nie zakłada dynamiki aktywa bazowego i stopy procentowej

(c) replikacja polega na zakupie opcji put poniżej ceny forward oraz zakupie opcji call powyżej ceny forward

(a) Strategia replikująca nie wymaga zakupu aktywa bazowego - brak założenia o dynamice dywidend

(b) metoda wyceny nie zakłada dynamiki aktywa bazowego i stopy procentowej

(c) replikacja polega na zakupie opcji put poniżej ceny forward oraz zakupie opcji call powyżej ceny forward

(d) dla rynku bez widełek kupna-sprzedaży można wyznaczyć cenę wolną od arbitrażu.

(a) Strategia replikująca nie wymaga zakupu aktywa bazowego - brak założenia o dynamice dywidend

(b) metoda wyceny nie zakłada dynamiki aktywa bazowego i stopy procentowej

(c) replikacja polega na zakupie opcji put poniżej ceny forward oraz zakupie opcji call powyżej ceny forward

(d) dla rynku bez widełek kupna-sprzedaży można wyznaczyć cenę wolną od arbitrażu.

(e) dla rynku o skończonej liczbie możliwych kursów wykonania, na potrzeby wyceny można zastosować inter/ekstrapolację krzywej zmienności.

(a) Strategia replikująca nie wymaga zakupu aktywa bazowego - brak założenia o dynamice dywidend

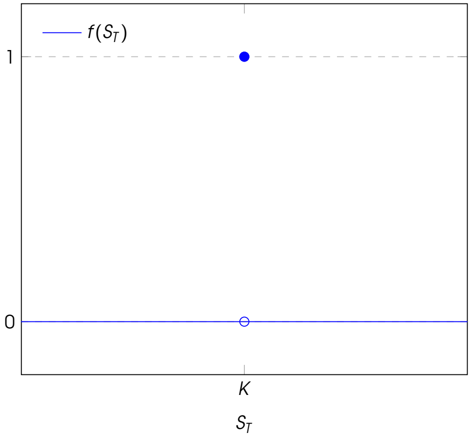
(b) metoda wyceny nie zakłada dynamiki aktywa bazowego i stopy procentowej

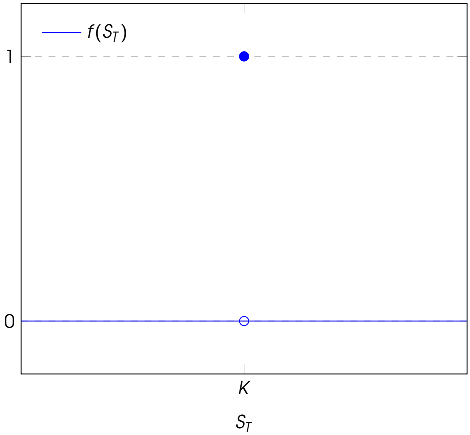
(c) replikacja polega na zakupie opcji put poniżej ceny forward oraz zakupie opcji call powyżej ceny forward

(d) dla rynku bez widełek kupna-sprzedaży można wyznaczyć cenę wolną od arbitrażu.

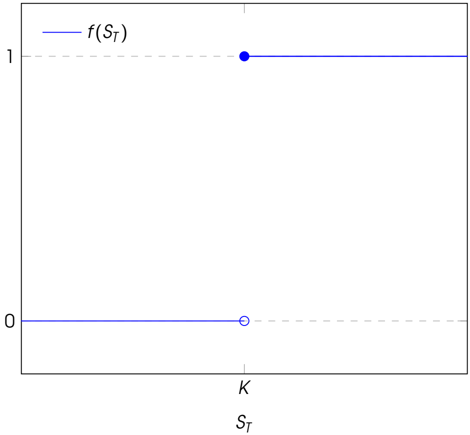
(e) dla rynku o skończonej liczbie możliwych kursów wykonania, na potrzeby wyceny można zastosować inter/ekstrapolację krzywej zmienności.

(f) metoda zakłada, że funkcja wypłaty jest dwukrotnie różniczkowalna.

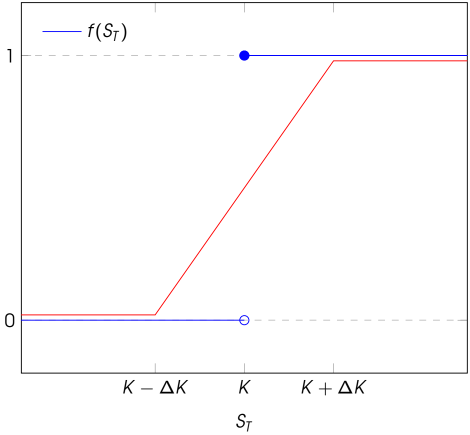

$f(S_T)$
1
0
K
S_T



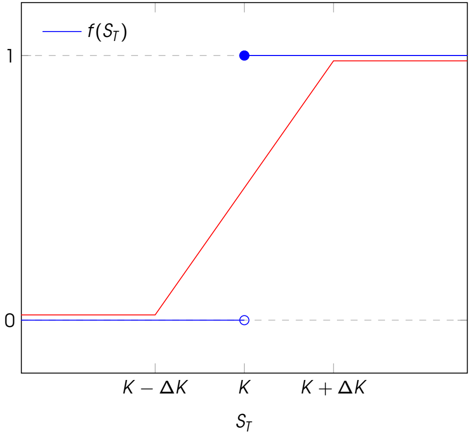
Funkcjonał π jest ciągły. $\int \left(f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pi\left(f_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\left(f\right)$



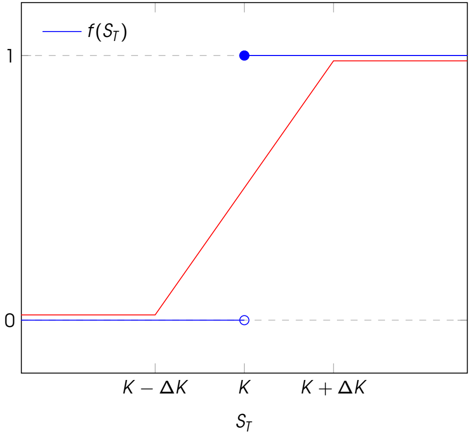
$f(S_T)$
1
0
K
S_T



$f(S_T)$
1
0
$K-\Delta K$
K
$K+\Delta K$
S_T

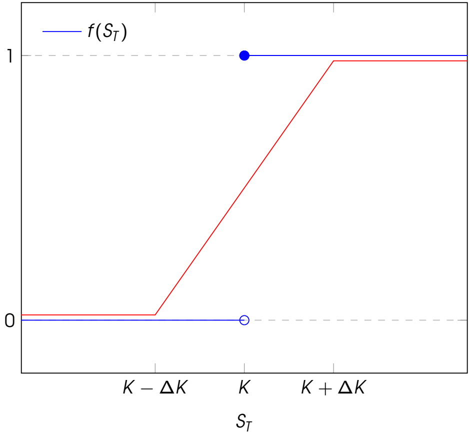


Załóżmy dodatkowo, że cena opcji jest różniczkowalną funkcją kursu wykonania



Załóżmy dodatkowo, że cena opcji jest różniczkowalną funkcją kursu wykonania

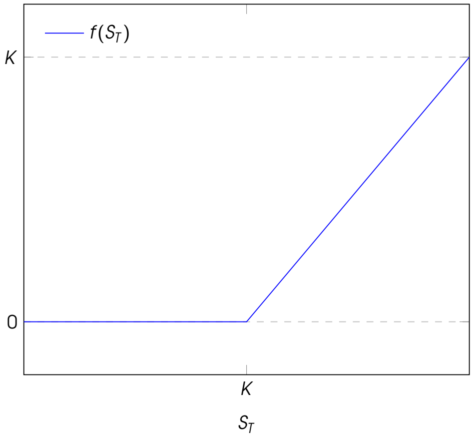
$$\mathbb{1}_{\{S_T \geqslant K\}} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{2\Delta K} \left(\Big(S_T - \big(K - \Delta K\big)\Big)^+ - \Big(S_T - \big(K + \Delta K\big)\Big)^+ \right) \tag{3}$$



Załóżmy dodatkowo, że cena opcji jest różniczkowalną funkcją kursu wykonania

$$\mathbb{1}_{\{S_T \geqslant K\}} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{2\Delta K} \left(\Big(S_T - \big(K - \Delta K\big)\Big)^+ - \Big(S_T - \big(K + \Delta K\big)\Big)^+ \right) \tag{3}$$

$$\pi\left(\mathbb{1}_{\{S_T \geqslant K\}}\right) = \frac{\partial}{\partial K} \pi\left(\left(S_T - K\right)^+\right) \tag{4}$$



$f(S_T)$
K
0
K
S_T

(a) Jeśli funkcja nie jest dwukrotnie różniczkowalna ze względu na brak drugiej pochodnej w punkcie, możemy nie określić funkcji podcałkowej w punkcie

(a) Jeśli funkcja nie jest dwukrotnie różniczkowalna ze względu na brak drugiej pochodnej w punkcie, możemy nie określić funkcji podcałkowej w punkcie
(b) Jeśli zachodzą wcześniej wymienione przypadki, możemy zdekomponować funkcję wypłaty

(a) Jeśli funkcja nie jest dwukrotnie różniczkowalna ze względu na brak drugiej pochodnej w punkcie, możemy nie określić funkcji podcałkowej w punkcie
(b) Jeśli zachodzą wcześniej wymienione przypadki, możemy zdekomponować funkcję wypłaty
(c) W przypadku obliczeń numerycznych otrzymujemy zbieżność dla wymienionych przypadków.

(a) Jeśli funkcja nie jest dwukrotnie różniczkowalna ze względu na brak drugiej pochodnej w punkcie, możemy nie określić funkcji podcałkowej w punkcie

(b) Jeśli zachodzą wcześniej wymienione przypadki, możemy zdekomponować funkcję wypłaty

(c) W przypadku obliczeń numerycznych otrzymujemy zbieżność dla wymienionych przypadków.

(d) Jeśli obserwujemy krzywą zmienności, koszty replikacji są wyznaczone przez ceny opcji call oraz put

Dziękuję za uwagę i zachęcam do zadawania pytań

Literatura

1. Bossu Sébastien, Peter Carr and Andrew Papanicolaou *A functional analysis approach to the static replication of European options* , Quantitative Finance (2021)
2. Peter Carr, Andrew Chou *Hedging complex barrier options* (1997)
3. Carr, Peter, Dilip Madan *Towards a theory of volatility trading. Option Pricing* (2001)

Dostęp do prezentacji

https://github.com/danielbiernat

Kontakt

daniel.biernat@student.uj.edu.pl