Wycena opcji barierowych

Daniel Biernat

15 kwietnia 2023

Cel prezentacji

Cel prezentacji

Celem prezentacji będzie wycena instrumentów pochodnych o wypłacie postaci:

$f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ (up and out)

$f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} > B\}}$ (up and in)

$f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\underline{S_T} \leqslant B\}}$ (down and in)

$f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\underline{S_T} > B\}}$ (down and out)

gdzie:

$B > 0$ - bariera

$T > 0$ - termin wykonania opcji

S_T - cena instrumentu bazowego w chwili T

$\overline{S_T} := \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t$

$\underline{S_T} := \min\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t$

Parytet in-out

Parytet in-out

$$f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}} + f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} > B\}} = f(S_T)$$
$$f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\underline{S_T} \leqslant B\}} + f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\underline{S_T} > B\}} = f(S_T)$$

Parytet in-out

$$f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}} + f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} > B\}} = f(S_T)$$
$$f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\underline{S_T} \leqslant B\}} + f(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\underline{S_T} > B\}} = f(S_T)$$

Ze względu na parytet in-out wystarczy wycenić opcje out

Zasada odbicia

Zasada odbicia

Oznaczenia

$p := 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$

Zasada odbicia

Oznaczenia

$p := 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$ $\hat{f}(S_T) := \left(\frac{S_T}{B}\right)^p \cdot f\left(\frac{B^2}{S_T}\right)$

Zasada odbicia

Oznaczenia

$p := 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$ $\quad$ $\hat{f}(S_T) := \left(\frac{S_T}{B}\right)^p \cdot f\left(\frac{B^2}{S_T}\right)$

$h(S_t, t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)|\mathcal{F}_t]$

Zasada odbicia

Oznaczenia

$p := 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$ $\qquad \hat{f}(S_T) := (\frac{S_T}{B})^p \cdot f(\frac{B^2}{S_T})$

$h(S_t, t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)|\mathcal{F}_t]$

Lemat: Wycena wypłaty $\hat{f}(S_T)$

$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_t] =$

Zasada odbicia

Oznaczenia

$p := 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$

$h(S_t, t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)|\mathcal{F}_t]$

$\hat{f}(S_T) := (\frac{S_T}{B})^p \cdot f(\frac{B^2}{S_T})$

Lemat: Wycena wypłaty $\hat{f}(S_T)$

$$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \cdot (\frac{S_t}{B})^p \cdot h(\frac{B^2}{S_t}, t)$$

Zasada odbicia

Oznaczenia

$p := 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$

$h(S_t, t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)|\mathcal{F}_t]$

$\hat{f}(S_T) := (\frac{S_T}{B})^p \cdot f(\frac{B^2}{S_T})$

Lemat: Wycena wypłaty $\hat{f}(S_T)$

$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \cdot (\frac{S_t}{B})^p \cdot h(\frac{B^2}{S_t}, t)$

Wniosek z lematu

Rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$

Zasada odbicia

Oznaczenia

$p := 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$ $\qquad$ $\hat{f}(S_T) := (\frac{S_T}{B})^p \cdot f(\frac{B^2}{S_T})$

$h(S_t, t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)|\mathcal{F}_t]$

Lemat: Wycena wypłaty $\hat{f}(S_T)$

$$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \cdot (\frac{S_t}{B})^p \cdot h(\frac{B^2}{S_t}, t)$$

Wniosek z lematu

Rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$

Jeśli istnienie $\tau_B \in [0, T]$ takie, że $S_{\tau_B} = B$, wtedy:

Zasada odbicia

Oznaczenia

$p := 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$ $\qquad \hat{f}(S_T) := (\frac{S_T}{B})^p \cdot f(\frac{B^2}{S_T})$

$h(S_t, t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)|\mathcal{F}_t]$

Lemat: Wycena wypłaty $\hat{f}(S_T)$

$$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \cdot (\frac{S_t}{B})^p \cdot h(\frac{B^2}{S_t}, t)$$

Wniosek z lematu

Rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$

Jeśli istnienie $\tau_B \in [0, T]$ takie, że $S_{\tau_B} = B$, wtedy:

$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T) - \hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_{\tau_B}]$

Zasada odbicia

Oznaczenia

$p := 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$ $\quad\quad \hat{f}(S_T) := (\frac{S_T}{B})^p \cdot f(\frac{B^2}{S_T})$

$h(S_t, t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)|\mathcal{F}_t]$

Lemat: Wycena wypłaty $\hat{f}(S_T)$

$$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \cdot (\frac{S_t}{B})^p \cdot h(\frac{B^2}{S_t}, t)$$

Wniosek z lematu

Rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$

Jeśli istnienie $\tau_B \in [0, T]$ takie, że $S_{\tau_B} = B$, wtedy:

$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T) - \hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_{\tau_B}] =$

$e^{-r(T-t)} \cdot (h(B, \tau_B) - (\frac{B}{B})^p \cdot h(\frac{B^2}{B}, \tau_B))$

Zasada odbicia

Oznaczenia

$p := 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$ $\quad\quad$ $\hat{f}(S_T) := (\frac{S_T}{B})^p \cdot f(\frac{B^2}{S_T})$

$h(S_t, t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)|\mathcal{F}_t]$

Lemat: Wycena wypłaty $\hat{f}(S_T)$

$$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \cdot (\frac{S_t}{B})^p \cdot h(\frac{B^2}{S_t}, t)$$

Wniosek z lematu

Rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$

Jeśli istnienie $\tau_B \in [0, T]$ takie, że $S_{\tau_B} = B$, wtedy:

$$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T) - \hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_{\tau_B}] =$$
$$\mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot (h(B, \tau_B) - (\frac{B}{B})^p \cdot h(\frac{B^2}{B}, \tau_B)) =$$
$$\mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot (h(B, \tau_B) - 1 \cdot h(B, \tau_B))$$

Zasada odbicia

Oznaczenia

$p := 1 - \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$ $\qquad$ $\hat{f}(S_T) := (\frac{S_T}{B})^p \cdot f(\frac{B^2}{S_T})$

$h(S_t, t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)|\mathcal{F}_t]$

Lemat: Wycena wypłaty $\hat{f}(S_T)$

$$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \cdot (\frac{S_t}{B})^p \cdot h(\frac{B^2}{S_t}, t)$$

Wniosek z lematu

Rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$

Jeśli istnienie $\tau_B \in [0, T]$ takie, że $S_{\tau_B} = B$, wtedy:

$$e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T) - \hat{f}(S_T)|\mathcal{F}_{\tau_B}] =$$
$$\mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot (h(B, \tau_B) - (\frac{B}{B})^p \cdot h(\frac{B^2}{B}, \tau_B)) =$$
$$\mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot (h(B, \tau_B) - 1 \cdot h(B, \tau_B)) = 0$$

Replikacja w przypadku up and out

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$
rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$,
gdzie $f(S_T) := g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$
rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$,
gdzie $f(S_T) := g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Jeśli $\overline{S_T} < B$

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$
rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$,
gdzie $f(S_T) := g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Jeśli $\overline{S_T} < B$
to w szczególności $S_T < B$

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$
rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$,
gdzie $f(S_T) := g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Jeśli $\overline{S_T} < B$
to w szczególności $S_T < B$
$f(S_T) - \hat{f}(S_T)$

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$
rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$,
gdzie $f(S_T) := g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Jeśli $\overline{S_T} < B$
to w szczególności $S_T < B$
$f(S_T) - \hat{f}(S_T) =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - \left(\frac{S_T}{B}\right)^p \cdot g\left(\frac{B^2}{S_T}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{\frac{B^2}{S_T} \leqslant B\}}$

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$
rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$,
gdzie $f(S_T) := g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Jeśli $\overline{S_T} < B$
to w szczególności $S_T < B$
$f(S_T) - \hat{f}(S_T) =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - (\frac{S_T}{B})^p \cdot g(\frac{B^2}{S_T}) \cdot \mathbb{1}_{\{\frac{B^2}{S_T} \leqslant B\}} =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - (\frac{S_T}{B})^p \cdot g(\frac{B^2}{S_T}) \cdot \mathbb{1}_{\{B \leqslant S_T\}}$

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$
rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$,
gdzie $f(S_T) := g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Jeśli $\overline{S_T} < B$
to w szczególności $S_T < B$
$f(S_T) - \hat{f}(S_T) =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - (\frac{S_T}{B})^p \cdot g(\frac{B^2}{S_T}) \cdot \mathbb{1}_{\{\frac{B^2}{S_T} \leqslant B\}} =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - (\frac{S_T}{B})^p \cdot g(\frac{B^2}{S_T}) \cdot \mathbb{1}_{\{B \leqslant S_T\}} =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot 1 - (\frac{S_T}{B})^p \cdot g(\frac{B^2}{S_T}) \cdot 0$

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$
rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$,
gdzie $f(S_T) := g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Jeśli $\overline{S_T} < B$
to w szczególności $S_T < B$
$f(S_T) - \hat{f}(S_T) =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - (\frac{S_T}{B})^p \cdot g(\frac{B^2}{S_T}) \cdot \mathbb{1}_{\{\frac{B^2}{S_T} \leqslant B\}} =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - (\frac{S_T}{B})^p \cdot g(\frac{B^2}{S_T}) \cdot \mathbb{1}_{\{B \leqslant S_T\}} =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot 1 - (\frac{S_T}{B})^p \cdot g(\frac{B^2}{S_T}) \cdot 0 = g(S_T)$

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$
rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$,
gdzie $f(S_T) := g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Jeśli $\overline{S_T} < B$
to w szczególności $S_T < B$
$f(S_T) - \hat{f}(S_T) =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - (\frac{S_T}{B})^p \cdot g(\frac{B^2}{S_T}) \cdot \mathbb{1}_{\{\frac{B^2}{S_T} \leqslant B\}} =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - (\frac{S_T}{B})^p \cdot g(\frac{B^2}{S_T}) \cdot \mathbb{1}_{\{B \leqslant S_T\}} =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot 1 - (\frac{S_T}{B})^p \cdot g(\frac{B^2}{S_T}) \cdot 0 = g(S_T)$

Jeśli $\overline{S_T} \geqslant B$

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$
rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$,
gdzie $f(S_T) := g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Jeśli $\overline{S_T} < B$
to w szczególności $S_T < B$
$f(S_T) - \hat{f}(S_T) =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - \left(\frac{S_T}{B}\right)^p \cdot g\left(\frac{B^2}{S_T}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{\frac{B^2}{S_T} \leqslant B\}} =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - \left(\frac{S_T}{B}\right)^p \cdot g\left(\frac{B^2}{S_T}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{B \leqslant S_T\}} =$
$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot 1 - \left(\frac{S_T}{B}\right)^p \cdot g\left(\frac{B^2}{S_T}\right) \cdot 0 = g(S_T)$

Jeśli $\overline{S_T} \geqslant B$ to istnieje $\tau_B \in [0, T]$ takie że $S_{\tau_B} = B$,

Replikacja w przypadku up and out

Chcąc wycenić funkcję wypłaty $g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$
rozważmy funkcję wypłaty $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$,
gdzie $f(S_T) := g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Jeśli $\overline{S_T} < B$
to w szczególności $S_T < B$

$$f(S_T) - \hat{f}(S_T) =$$
$$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - \left(\frac{S_T}{B}\right)^p \cdot g\left(\frac{B^2}{S_T}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{\frac{B^2}{S_T} \leqslant B\}} =$$
$$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}} - \left(\frac{S_T}{B}\right)^p \cdot g\left(\frac{B^2}{S_T}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{B \leqslant S_T\}} =$$
$$\mathrm{g}(\mathrm{S}_T) \cdot 1 - \left(\frac{S_T}{B}\right)^p \cdot g\left(\frac{B^2}{S_T}\right) \cdot 0 = g(S_T)$$

Jeśli $\overline{S_T} \geqslant B$ to istnieje $\tau_B \in [0, T]$ takie że $S_{\tau_B} = B$,
a zatem możemy sprzedać wypłatę $f(S_T) - \hat{f}(S_T)$ za 0

Przykład - up and out call

funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$

Przykład - up and out call

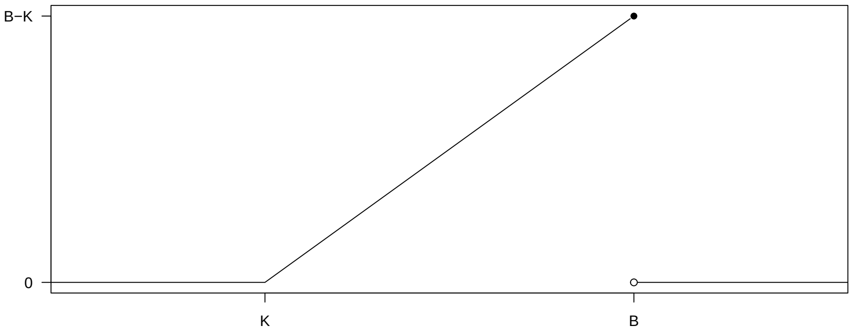
funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$

$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Przykład - up and out call

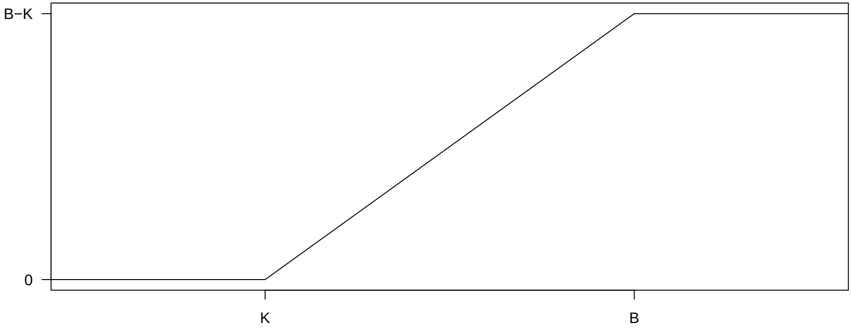
funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$

$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$



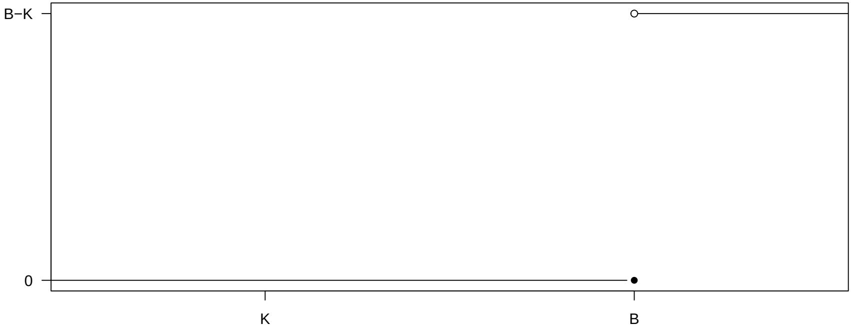
Przykład - up and out call

$$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$$
$$f_1(S_T) := (S_T - K)^+ - (S_T - B)^+$$



Przykład - up and out call

$$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$$
$$f_2(S_T) := (B - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > B\}}$$



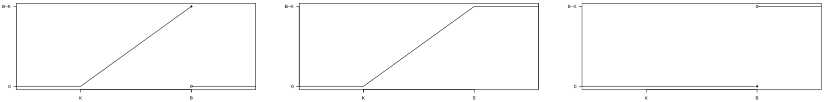
Przykład - up and out call

funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$

$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

Przykład - up and out call

funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$
$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

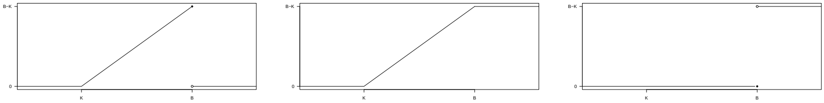


$$f(S_T) = (S_T - K)^+ - (S_T - B)^+ - (B - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > B\}}$$

Przykład - up and out call

funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$

$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

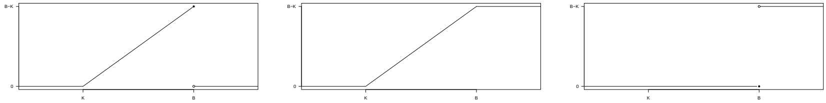


$$f(S_T) = (S_T - K)^+ - (S_T - B)^+ - (B - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > B\}}$$

$h(S_t, t)$

Przykład - up and out call

funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$
$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

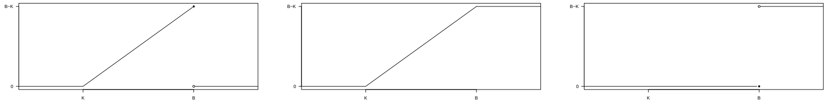


$$f(S_T) = (S_T - K)^+ - (S_T - B)^+ - (B - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > B\}}$$

$h(S_t, t) = e^{r(T-t)}(call_K - call_B - (B - K) \cdot concall_B)$

Przykład - up and out call

funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$
$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

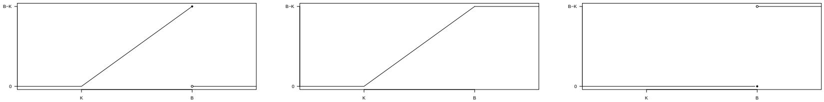


$$f(S_T) = (S_T - K)^+ - (S_T - B)^+ - (B - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > B\}}$$

$h(S_t, t) = e^{r(T-t)}(call_K - call_B - (B - K) \cdot concall_B)$
$call_x = S_t e^{-q(T-t)} \Phi(\delta_+(\frac{S_t}{x})) - x e^{-r(T-t)} \Phi(\delta_-(\frac{S_t}{x}))$

Przykład - up and out call

funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$
$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

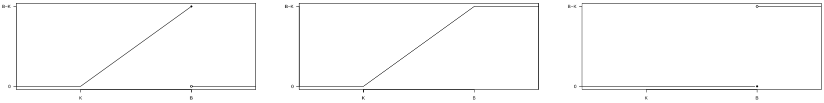


$$f(S_T) = (S_T - K)^+ - (S_T - B)^+ - (B - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > B\}}$$

$h(S_t, t) = e^{r(T-t)}(call_K - call_B - (B - K) \cdot concall_B)$
$call_x = S_t e^{-q(T-t)}\Phi(\delta_+(\frac{S_t}{x})) - xe^{-r(T-t)}\Phi(\delta_-(\frac{S_t}{x}))$
$concall_x = e^{-r(T-t)}\Phi(\delta_-(\frac{S_t}{x}))$

Przykład - up and out call

funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$
$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$

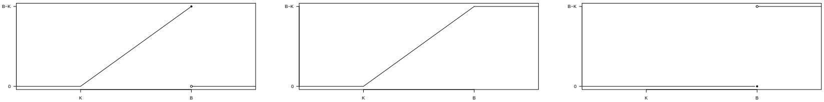


$$f(S_T) = (S_T - K)^+ - (S_T - B)^+ - (B - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > B\}}$$

$h(S_t, t) = e^{r(T-t)}(call_K - call_B - (B - K) \cdot concall_B)$
$call_x = S_t e^{-q(T-t)} \Phi(\delta_+(\frac{S_t}{x})) - x e^{-r(T-t)} \Phi(\delta_-(\frac{S_t}{x}))$
$concall_x = e^{-r(T-t)} \Phi(\delta_-(\frac{S_t}{x}))$
$\delta_\pm(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[ln(s) + (r - q \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)]$

Przykład - up and out call

funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$
$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$



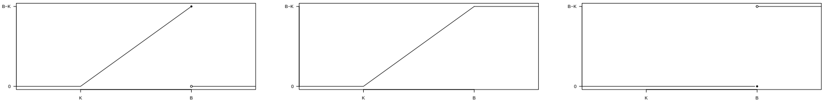
$$f(S_T) = (S_T - K)^+ - (S_T - B)^+ - (B - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > B\}}$$

$h(S_t, t) = e^{r(T-t)}(call_K - call_B - (B - K) \cdot concall_B)$
$call_x = S_t e^{-q(T-t)} \Phi(\delta_+(\frac{S_t}{x})) - x e^{-r(T-t)} \Phi(\delta_-(\frac{S_t}{x}))$
$concall_x = e^{-r(T-t)} \Phi(\delta_-(\frac{S_t}{x}))$
$\delta_\pm(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[ln(s) + (r - q \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)]$
$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}} | \mathcal{F}_t]$

Przykład - up and out call

funkcja wypłaty: $(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}}$ gdzie $K < B$

$f(S_T) := (S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant B\}}$



$$f(S_T) = (S_T - K)^+ - (S_T - B)^+ - (B - K) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > B\}}$$

$h(S_t, t) = e^{r(T-t)}(call_K - call_B - (B - K) \cdot concall_B)$

$call_x = S_t e^{-q(T-t)} \Phi(\delta_+(\frac{S_t}{x})) - x e^{-r(T-t)} \Phi(\delta_-(\frac{S_t}{x}))$

$concall_x = e^{-r(T-t)} \Phi(\delta_-(\frac{S_t}{x}))$

$\delta_\pm(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[ln(s) + (r - q \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)]$

$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}} | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)}(h(S_t, t) - (\frac{S_t}{B})^p \cdot h(\frac{B^2}{S_t}, t))$

Wzór na cenę up and out call

$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\overline{S_T} \leqslant B\}} | \mathcal{F}_t] =$
$S_t e^{-q(T-t)}[\Phi(\delta_+(\frac{S_t}{K})) - \Phi(\delta_+(\frac{S_t}{B}))]$
$-K\ e^{-r(T-t)}[\Phi(\delta_-(\frac{S_t}{K})) - \Phi(\delta_-(\frac{S_t}{B}))]$
$-B\left(\frac{S_t}{B}\right)^{-\frac{2(r-q)}{\sigma^2}} e^{-q(T-t)}[\Phi(\delta_+(\frac{B^2}{KS_t})) - \Phi(\delta_+(\frac{B}{S_t}))]$
$+K\ \left(\frac{S_t}{B}\right)^{-\frac{2(r-q)}{\sigma^2}+1} e^{-r(T-t)}[\Phi(\delta_-(\frac{B^2}{KS_t})) - \Phi(\delta_-(\frac{B}{S_t}))]$
gdzie:
$\delta_\pm(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[ln(s) + (r - q \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)]$

Podsumowanie

Zalety omawianej metody wyceny

Podsumowanie

Zalety omawianej metody wyceny

- Brak konieczności liczenia całek wielowymiarowych

Podsumowanie

Zalety omawianej metody wyceny

- Brak konieczności liczenia całek wielowymiarowych
- Uzyskanie semi-statycznej strategii replikującej

Podsumowanie

Zalety omawianej metody wyceny

- Brak konieczności liczenia całek wielowymiarowych
- Uzyskanie semi-statycznej strategii replikującej
- Pozwala w prosty sposób wyznaczyć współczynniki greckie

Podsumowanie

Zalety omawianej metody wyceny

- Brak konieczności liczenia całek wielowymiarowych
- Uzyskanie semi-statycznej strategii replikującej
- Pozwala w prosty sposób wyznaczyć współczynniki greckie
- Metodę można również wykorzystać w wycenie opcji z podwójną barierą

Podsumowanie

Zalety omawianej metody wyceny

- Brak konieczności liczenia całek wielowymiarowych
- Uzyskanie semi-statycznej strategii replikującej
- Pozwala w prosty sposób wyznaczyć współczynniki greckie
- Metodę można również wykorzystać w wycenie opcji z podwójną barierą
- Analogiczną metodę można wykorzystać w innych modelach

Źródła

- Rolf Poulsen *Exotic Options: Proofs Without Formulas*, 2004
- Peter Carr, Andrew Chou *Breaking Barriers*, Risk Magazine 1997
- Steven E. Shreve *Stochastic Calculus for Finance II*, Springer 2004
- J Michael Steele *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer 2010
- Piotr Z. Kobak *Inżynieria Finansowa*, skrypt wersja 2.0
- S. Peszat *Analiza Stochastyczna*, skrypt wersja z dnia 17 maja 2021

Dostęp do prezentacji

https://github.com/danielbiernat