Algoritmos y Programación 3

Prof. Carlos Alonzo

UCAB

Octubre 2021

Teoría de grafos

Definición: Grafo

Un **grafo** es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito no vacío cuyos elmentos se llaman **vértices** o **nodos**, y E es un conjunto cuyos elementos se llaman **aristas** o **lados**. Las aristas son pares no ordenados de vértices de V, denotaremos las aristas como sigue $e = \{v, w\}$ donde $v, w \in V$.

Ejemplos de **Grafos**

¿Cuál es la semántica de los vértices del grafo?
¿Cuál es la semántica de las aristas del grafo?

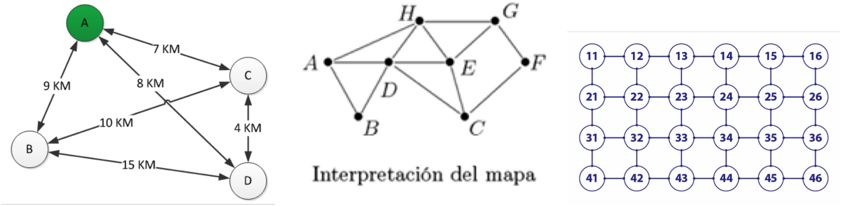


Figure: Tres (3) ejemplos de grafos

Nota importante

La tarea más importante que van a desarrollar en este semestre es modelar problemas usando grafos. Para ello, lo primero es determinar la semántica de los vértices y la semántica de las aristas, para luego resolver el problema original en términos de la teoría de grafos.

Teoría de grafos

Definición: Lazo o bucle

Un **lazo** o **bucle** es una arista que une un vértice consigo mismo.

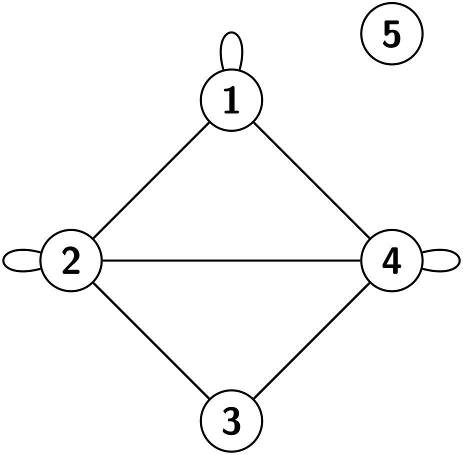
Definición: Vértice aislado

Un **vértice aislado** es aquel que no está conectado a ningún otro vértice.

Definición: Grafo simple*

Un grafo $G = (V, E)$ se dice que es simple si no tiene lazos o bucles.

Teoría de grafos



Teoría de grafos

Definición: Vértices adyacentes

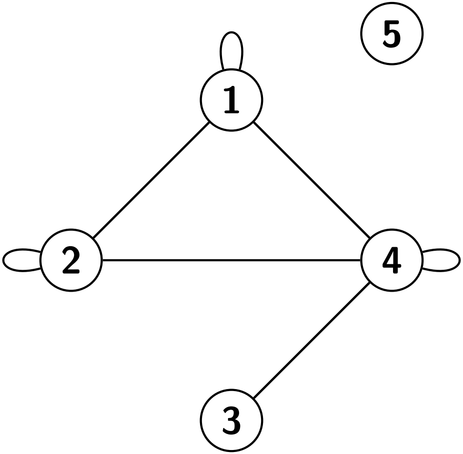
Un par de vértices u y v son **adyacentes** si existe una arista e que los une. Se dice que $e = \{u, v\}$ **incide** en los vértices u y v, o que la arista **conecta** u y v, o que los vértices u y v son **extremos** de e.

Definición: Grado de un vértice

El **grado de un vértice** v es el número de aristas que inciden en v. Se denota por $d(v)$. Puesto que cada arista adiciona una unidad (1) al grado de cada vértice en el que incide, por convención, un lazo o bucle en v contribuye en dos (2) unidades al grado de v. Todos los vértices de grado cero (0) son aislados y los vértices de grado uno (1) son **hojas**.

Teoría de grafos

Grafo $G = (V, E)$
$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{\{1, 1\}, \{2, 2\}, \{4, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$



Teoría de grafos

Definición: Grafo de orden n

Un grafo $G = (V, E)$ se dice que es un grafo de orden n, si es un grafo con n vértices, es decir, $|V| = n$.

Definición: Grafo r-regular

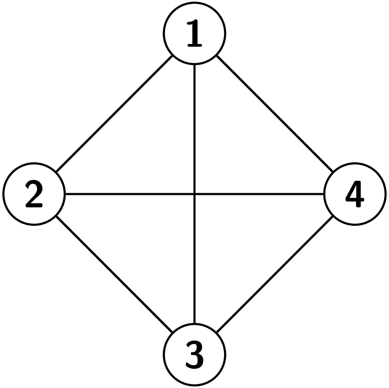
Un grafo $G = (V, E)$ se dice que es un grafo r-regular, si todos sus vértices tienen grado r.

Definición: Grafo completo K_n

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple de orden n. Se dice que G es el **grafo completo** K_n si todos los vértices tienen grado $n - 1$, es decir, todos los vértices están conectados con el resto de los vértices del grafo.

Teoría de grafos

Grafo completo K_4



Teoría de grafos

Lema del apretón de manos

La suma de los grados de todos los vértices de un grafo $G = (V, E)$ de orden n es igual al doble del número de aristas, es decir:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Demostración: Desarrollando la suma nos queda de la siguiente manera:

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(v_1) + d(v_2) + ... + d(v_n)$$

Cada arista incide en 2 vértices, por ende cada arista se cuenta dos veces en el desarrollo de la sumatoria. Entonces, esta sumatoria será igual al doble de la cardinalidad del conjunto de aristas, es decir, $2|E|$.

Teoría de grafos

Teorema

En todo grafo simple, el número de vértices de grado impar es par.

Demostración: Vamos a demostrar mediante **Reductio ad absurdum**.
Supongamos que el número de vértices de grado impar es impar.
Recordamos del bachillerato que las siguientes sumas son ciertas:

$$par + impar = impar$$

$$par + par = par$$

$$impar + impar = par$$

Ahora bien, si sumamos todos los vértices de grado par, dará como resultado un número **par**. Si sumamos todos los vértices de grado impar dará como resultado un número **impar**, puesto que hay un número impar de vértices de grado impar. Finalmente, la suma de los grados de todos los vértices será un número impar (par + impar = impar), lo cual contradice el Lema del apretón de manos.

Teoría de grafos

Tarea 1

Calcule el número de aristas que posee el grafo completo K_n para todo n

Teoría de grafos

Definición: Subgrafo

Sea un grafo $G = (V, E)$. Si $G' = (V', E')$ es otro grafo donde $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, se dice que G' es un **subgrafo** de G. Si $V' = V$ se llama **subgrafo recubridor**.

Definición: Grafo complementario

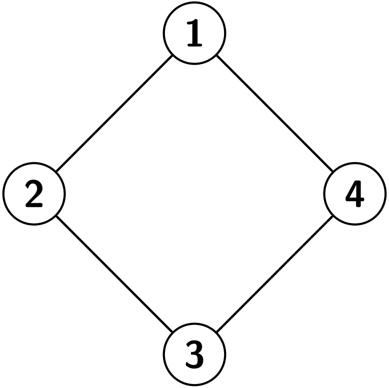
Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. El **grafo complementario** de G, $G_c = (V_c, E_c)$ es otro grafo simple con el mismo conjunto de vértices que G $(V' = V)$ pero con aquellas aristas que no están en G, es decir:

$$u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \in E_c \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$$

Teoría de grafos

Tarea 2

Dibujar el grafo complementario G_c del siguiente grafo:



Teoría de grafos

Definición: Matriz de adyacencias

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple de orden n con $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. La **matriz de adyacencias** de G es la matriz $A = (a_{i,j})$ cuadrada de orden n cuyo elemento $a_{i,j}$ es uno (1) si existe la arista entre v_i y v_j, y es cero (0) si la arista **no** existe entre v_i y v_j.

Teoría de grafos

Tarea 3

Dibujar el grafo simple G cuya matriz de adyacencias es la siguiente.
¿Cuántos vértices tiene este grafo ?
¿Cuántas aristas tiene este grafo ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Teoría de grafos

Definición: Coloración de un grafo

Sea G un grafo simple. Una **coloración** de G consiste en asignar un color a cada uno de los vértices de G de manera que vértices adyacentes tengan asignados colores diferentes.

Definición: Número cromático de un grafo

El número cromático de un grafo simple G es el número mínimo de colores que se requiere para una coloración de G. Se denota por $\chi(G)$.

Ejercicio 3

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple que posee 10 vértices y que el grado de cada uno de ellos es, al menos, 6. Si, además, el número de aristas de G es múltiplo de 13, entonces concluimos que:

☐ El número de aristas es $|E| = 3 \cdot 13$
☐ El número de aristas es $|E| = 2 \cdot 13$
☐ El número de aristas es $|E| = 4 \cdot 13$

Solución: Encontremos la respuesta correcta, construyéndola en base a razonamientos usando la teoría de grafos.
El grafo G tiene 10 vértices y todos los vértices tienen $d(v_i) \geqslant 6$.
El grafo completo K_{10} tiene 45 aristas, entonces es imposible que se cumpla que $|E| = 4 \cdot 13 = 52$.
Dado que sabemos que $\forall i : d(v_i) \geqslant 6$, si suponemos que todos los vértices tienen grado 6 ($d(v_i) = 6$) entonces G es un grafo 6−regular y tiene 30 aristas. Por ende, es imposible que se cumple que $|E| = 2 \cdot 13 = 26$.
En conclusión, la respuesta correcta es la primera $|E| = 3 \cdot 13$.

Ejercicio 4

En el estado Miranda, existen seis (6) estaciones de radio ubicadas en diferentes lugares, con las siguientes distancias entre sí (cada estación se identifica con un número):

Estaciones	1	2	3	4	5	6
1		85	175	200	50	100
2			125	175	100	160
3				100	200	250
4					210	220
5						100
6						

Las distancias están expresadas en kilómetros.
Se sabe que dos (2) emisoras cualesquiera **no** pueden transmitir en la misma frecuencia, si están a menos de 150 kms de distancia entre sí.

Determinar la mínima cantidad de frecuencias necesarias para que las seis (6) emisoras puedan transmitir en simultáneo.

Solución:

¿Cuál es la semántica de los vértices del grafo?

Los vértices del grafo representarán a las estaciones de radio

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

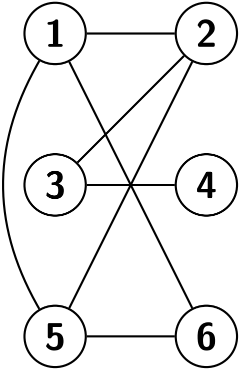
¿Cuál es la semántica de las aristas del grafo?

Existe una arista entre dos vértices **sii** la distancia entre las estaciones es menor a 150 kms.

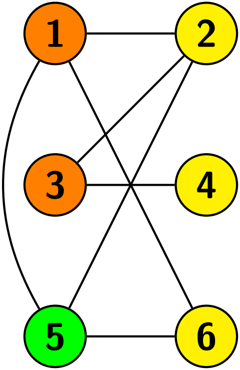
$\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow distancia(v_i, v_j) < 150$

Donde $distancia(v_i, v_j)$ corresponde a la distancia en Kms entre las estaciones de radio v_i y v_j.

Solución:



Solución:



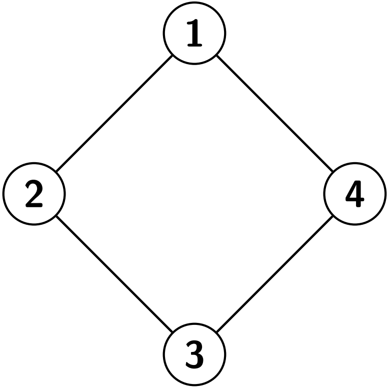
Teoría de grafos

Pregunta 1

Determinar el número cromático de K_n.

Pregunta 2

Determinar el número cromático del siguiente grafo:



Teoría de grafos: Conectividad

Definición: Cadena o trayectoria

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Una **cadena** o **trayectoria** de un vértice v_0 a un vértice v_n es una secuencia de aristas (no necesariamente distintas) de G de la forma:

$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, ..., \{v_{n-1}, v_n\}$

El número de aristas de la cadena recibe el nombre de **longitud** de la cadena.
Una cadena en la cual todas las aristas son distintas (no se repiten aristas) se llama **cadena simple**.
Una cadena simple, de longitud mayor o igual a 1, en la que $v_n = v_0$ recibe el nombre de **ciclo**. Si la cadena no es simple decimos que se trata de una **cadena cerrada**.

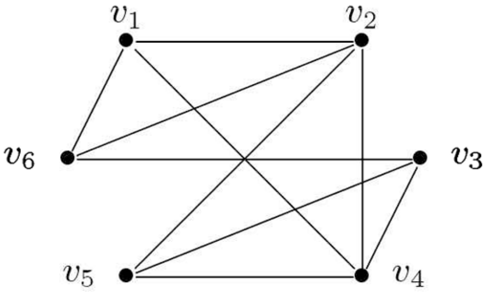
Teoría de grafos: Conectividad

Cadena como secuencia de vértices

Si el grafo $G = (V, E)$ es simple, podemos representar las cadenas por la secuencia de vértices, es decir:

$< v_0, v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n >$

Llamaremos v_0 como el **vértice inicial** de la cadena y a v_n como el **vértice final** de la cadena.



Teoría de grafos: Conectividad

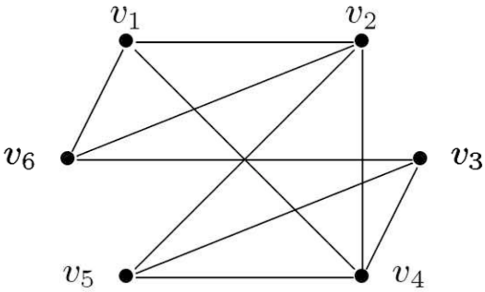
Ejemplos de algunas cadenas o trayectorias

Sea $G = (V, E)$ el grafo simple dibujado abajo. Alguna cadenas son las siguientes:

$< v_1, v_2, v_1, v_4, v_3 >$ es una cadena no simple y no cerrada de longitud 4.

$< v_1, v_6, v_2, v_1 >$ es un ciclo de longitud 3 (cadena simple y cerrada de longitud 3).

$< v_1, v_2, v_4, v_3, v_6, v_2, v_1 >$ es una cadena cerrada de longitud 6.



Teoría de grafos: Conectividad

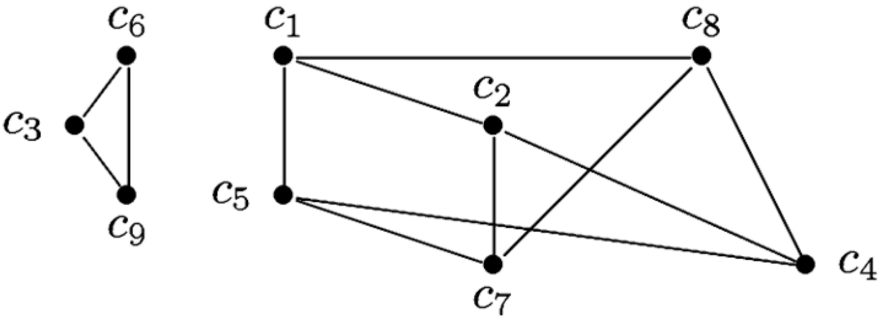
Definición: Vértices alcanzables o conectados

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Se dice que los vértices u y v son **alcanzables** entre sí o están **conectados** si $u = v$ o si existe una cadena que los une.

Definición: Grafo conexo

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Se dice que el grafo G es **conexo** si todos los vértices son alcanzables entre sí. En caso contrario, se dice que el grafo es **disconexo**.

Teoría de grafos: Ejemplo de grafo simple disconexo



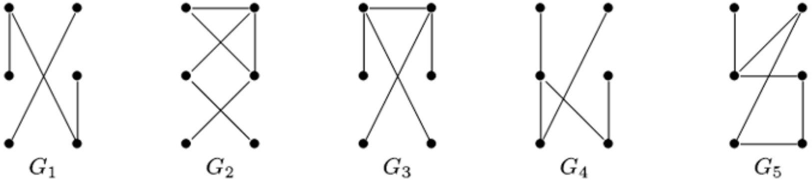
Teoría de grafos: Conectividad

Definición: ¿ qué es un árbol ?

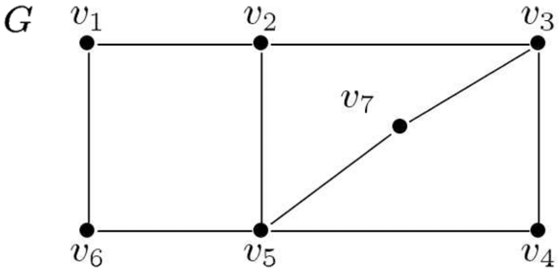
Un **árbol** es un grafo conexo sin ciclos.

Ejercicio: identificar árboles

Identifica cuáles de los siguientes grafos no son árboles y justifica por qué no lo son:



Teoría de grafos: ¿Qué hay de especial en este grafo ?



$$V_1 = \{v_1, v_3, v_5\},\ V_2 = \{v_2, v_4, v_6, v_7\}$$

Teoría de grafos: Conectividad

Definición: Grafo bipartito

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Decimos que G es **bipartito** si existe una partición del conjunto de vértices V en dos conjuntos U, W tales que cumplen:

$U \cup W = V$

$U \cap W = \emptyset$

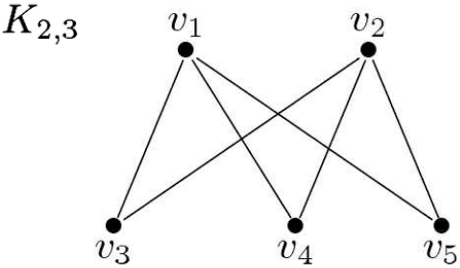
Y todas las aristas de G poseen un extremo en U y otro extremo en W. Es decir, todas las aristas de G inciden sobre vértices que no están en el mismo conjunto U o W.

Definición: Grafo bipartito completo

Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito. Decimos que G es **bipartito completo** si cada vértice de U es adyacente a todos los vértices de W. Se denota por $K_{n,m}$ al grafo bipartito completo en el cual $|U| = n$ y $|W| = m$

Pregunta ...

¿Cuántas aristas ($|E| =?$) posee el grafo bipartito completo $K_{n,m}$?



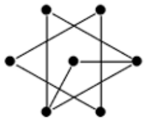
$$V_1 = \{v_1, v_2\},\ V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$$

Teorema

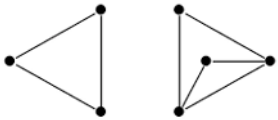
Un grafo simple $G = (V, E)$ es bipartito, **sii** ($\iff$) todos sus ciclos tienen lontigud par.

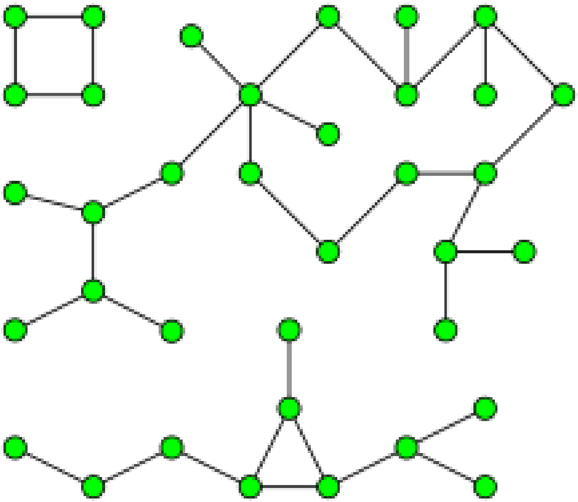
Definición: Componente conexa

Sea $G = (V, E)$ un grafo no conexo. Se denomina componente conexa de G a un subgrafo conexo maximal de G



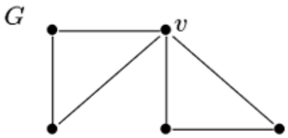
El grafo de la izquierda no es conexo pues tiene dos componentes conexas como se puede ver en el dibujo de la derecha:

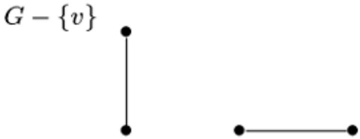




Definición: vértice o punto de corte

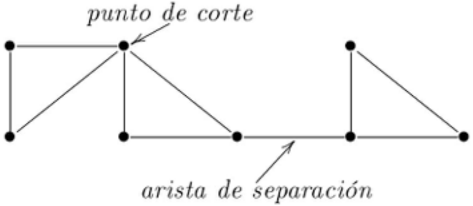
Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Un vértice v de G se llama **punto de corte** si el grafo $G' = (V', E')$ donde $V' = V - \{v\}$, tiene más componentes conexas que el grafo G.





Definición: arista de separación, arista puente o itsmo

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Una arista e de G se llama **arista de separación** si el grafo $G' = (V, E')$ donde $E' = E - \{e\}$, tiene más componentes conexas que el grafo G.



Ejercicio (Parcial Octubre 2018)

Dado el grafo simple $G = (V, E)$ tal que $V = \{v_2, v_3, ..., v_{30}\}$ y donde v_i es adyacente con v_j si y sólo si $m.c.d(i, j) \neq 1$ con $2 \leq i < j \leq 30$.

1. Razonar si G es conexo y determinar cuántas componentes conexas tiene.

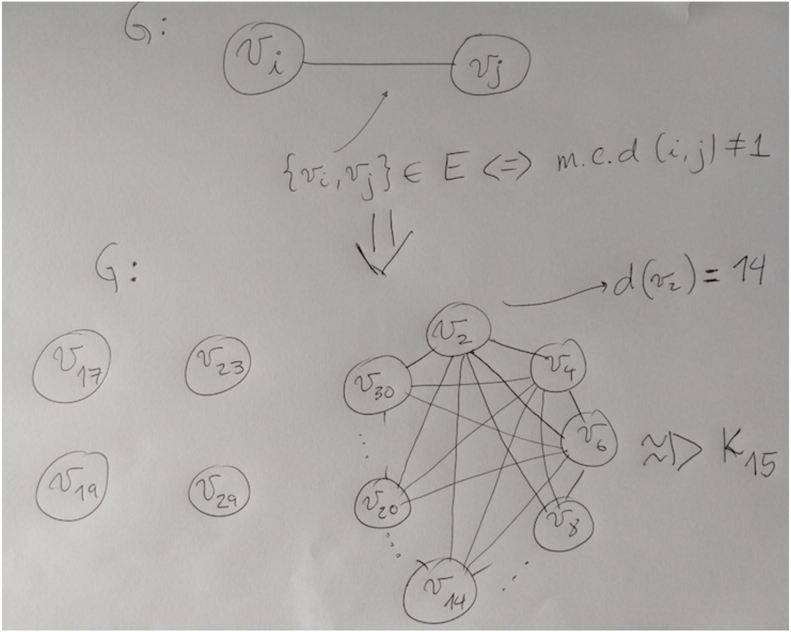
2. Determinar, argumentando su respuesta, el mayor valor de n para el cual K_n es subgrafo de G.

3. Sea G_c el grafo complementario de G. Razonar si G_c es bipartito.

Ejercicio (Parcial Octubre 2018)

Dado el grafo simple $G = (V, E)$ tal que $V = \{v_2, v_3, ..., v_{30}\}$ y donde v_i es adyacente con v_j si y sólo si $m.c.d(i, j) \neq 1$ con $2 \leq i < j \leq 30$.
1. Razonar si G es conexo y determinar cuántas componentes conexas tiene.

Solución: G posee 5 componentes conexas que son las siguientes:
Una componente conexa por cada uno de los 4 vértices aislados: $v_{17}, v_{19}, v_{23}, v_{29}$, y la quinta componente conexa corresponde al subgrafo compuesto con el resto de los vértices del grafo $V - \{v_{17}, v_{19}, v_{23}, v_{29}\}$, estos vértices están todos en la misma componente conexa puesto que poseen alguna arista que los una con otro vértice tal que el $m.c.d \neq 1$.


G:
v_i
v_j
$\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow m.c.d(i,j) \neq 1$
G:
$d(v_2) = 14$
v_{17}
v_{23}
v_{19}
v_{29}
v_2
v_4
v_{30}
v_6
v_{20}
v_8
v_{14}
K_{15}

Ejercicio (Parcial Octubre 2018)

Dado el grafo simple $G = (V, E)$ tal que $V = \{v_2, v_3, ..., v_{30}\}$ y donde v_i es adyacente con v_j si y sólo si $m.c.d(i, j) \neq 1$ con $2 \leq i < j \leq 30$.
2. Determinar, argumentando su respuesta, el mayor valor de n para el cual K_n es subgrafo de G.

Solución: El subgrafo completo más grande que posee el grafo G es K_{15} que corresponde al subgrafo conformado por todos los vértices pares: $v_2, v_4, ..., v_{10}, ..., v_{22}, v_{24}, ..., v_{28}, v_{30}$.

Ejercicio (Parcial Octubre 2018)

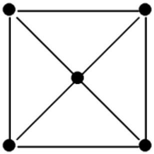
Dado el grafo simple $G = (V, E)$ tal que $V = \{v_2, v_3, ..., v_{30}\}$ y donde v_i es adyacente con v_j si y sólo si $m.c.d(i, j) \neq 1$ con $2 \leq i < j \leq 30$.
3. Sea G_c el grafo complementario de G. Razonar si G_c es bipartito.

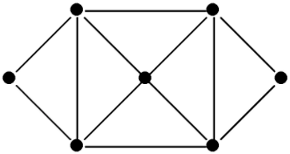
Solución: El grafo complementario G_c no puede ser bipartito puesto que contiene ciclos de longitud impar. Por ejemplo:
$\{v_{17}, v_{19}, v_{21}\}$

Definición: Grafo euleriano

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Se llama **cadena euleriana** a una cadena simple que contiene todas las aristas del grafo. Se llama **ciclo euleriano** a una cadena euleriana cerrada.

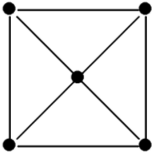
El grafo G diremos que es un **grafo euleriano** si posee un ciclo euleriano.

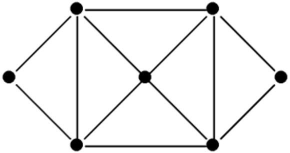




Teorema (Teorema de Euler)

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple conexo. G es un grafo euleriano si, y sólo si, todo vértice de G tiene grado par.

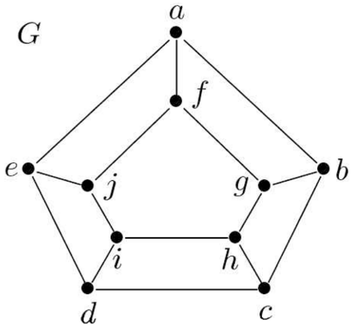




Definición: Grafo hamiltoneano

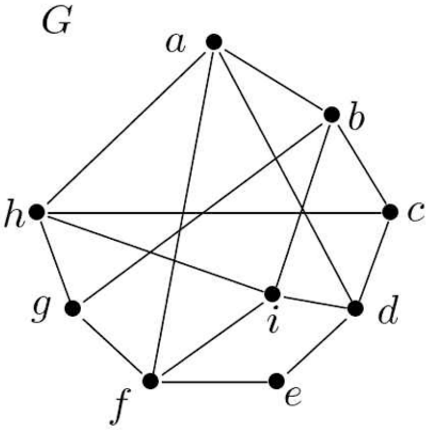
Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Se llama **cadena hamiltoneana** a una cadena que contiene todos los vértices del grafo una única vez. Si la cadena es cerrada se llama **ciclo hamiltoneano**.

El grafo G diremos que es un **grafo hamiltoneano** si posee un ciclo hamiltoneano.



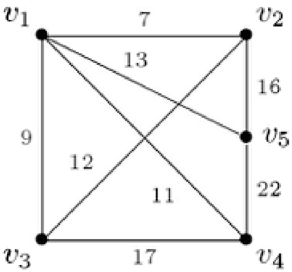
Ejercicio

Considere el siguiente grafo bipartito. Razone por qué este grafo bipartito no puede ser hamiltoneano. Su explicación desde estar dada en términos de la característica de bipartito.



Definición: Grafo ponderado

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que G es un **grafo ponderado** si posee una función de costos f tal que $f : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
Si e es una arista de G, es decir, $e \in E$, el número $f(e)$ se llama **peso** de la arista e.



Definición: Peso o costo de un grafo y de una cadena

Sea $G = (V, E)$ un grafo ponderado. Para cualquier $G' = (V', E')$ subgrafo de G se define el peso o costo de G' como la suma de los pesos de sus aristas:

$f(G') = \sum_{e \in E'} f(e)$

Sea la cadena $C = \{e_1, e_2, ..., e_i, ..., e_n\}$ con $e_i \in E$, una cadena de longitud n, se dice que el peso o costo de la cadena es:

$f(C) = f(e_1) + f(e_2) + ... + f(e_i) + ... + f(e_n)$.

Definición: Árbol y Bosque (Foresta)

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple conexo sin ciclos. Diremos que G es un **árbol**.

Un **bosque** o **foresta** es un grafo en el que cada componente conexa es un árbol.

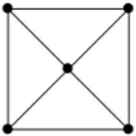
Los algoritmos de recorrido en grafos, es decir, el Algoritmo de Búsqueda en Profundidad y Búsqueda en Amplitud, ambos generan como resultados un bosque o foresta cuando el grafo es no conexo (disconexo) o generan un árbol cuando el grafo es conexo.

Definición: Árbol generador o cobertor

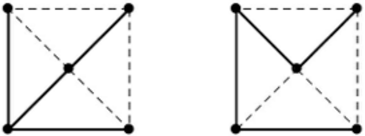
Sea $G = (V, E)$ un grafo simple conexo. Un **árbol generador** o **cobertor** de G es un subgrafo T de G que es un árbol y contiene todos los vértices de G.

Teorema

Todo grafo conexo contiene un árbol generador.



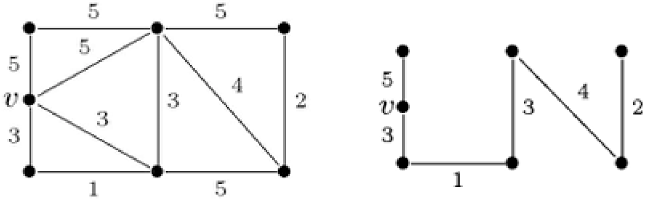
Grafo conexo G



Dos árboles generadores distintos de G

Definición: Árbol Mínimo Cobertor o Generador

Sea G un grafo ponderado conexo. Un árbol mínimo cobertor de G es un árbol cobertor tal que su peso es el menor de los pesos de todos los árboles cobertores posibles de G.



A continuación se presenta el algoritmo de Prim para calcular el árbol mínimo cobertor de un grafo G:

Data: un grafo ponderado conexo $G = (V, E)$ con función de costo $f(e), e \in E$

Result: un árbol mínimo cobertor cuyas aristas están en T

$T = \emptyset$;

$B = \{v\}$ donde $v \in V$ (inicia en cualquier vértice v de V);

while $(B \neq V)$ **do**

  Hallar $e = \{u, w\} \in E$ tal que $u \in B$ y $w \in V - B$ y $f(e)$ es mínimo;

  $T = T \cup \{e\}$;

  $B = B \cup \{w\}$;

end

Algorithm 1: Algoritmo de Prim (1957)