Entrega 5

Daniel Brito

Por definição, um matróide é um par $M = (S, \mathcal{I})$, que satisfaz as seguintes condições:

1. S é um conjunto finito.
2. $\mathcal{I}$ é uma família não-vazia de subconjuntos de S, chamada de subconjuntos **independentes** de S, tal que, se $B \in \mathcal{I}$ e $A \subseteq B$, então, $A \in \mathcal{I}$. Dizemos que $\mathcal{I}$ é **hereditária** se satisfaz tal propriedade. O conjunto vazio $\emptyset$ é necessariamente um membro de $\mathcal{I}$.
3. Se $A \in \mathcal{I}$, $B \in \mathcal{I}$, e $|A| < |B|$, então, existe algum elemento $x \in B - A$, tal que $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. Dizemos que M satisfaz a **propriedade da troca**.

* * *

21)

Temos que a condição (1) já é satisfeita, uma vez que S é um conjunto finito.

Para provar a segunda condição, assumimos que $k \geq 0$, fazendo com que $\mathcal{I}_k$ seja um conjunto não-vazio. Além disso, para provar a hereditariedade (2), assumimos que $A \in \mathcal{I}_k$, ou seja, $|A| \leq k$. Então, se $B \subseteq A$, temos que $|B| \leq |A| \leq k$, logo, $B \in \mathcal{I}_k$.

Por fim, temos que provar a propriedade de troca (3). Assim, podemos assumir $A, B \in \mathcal{I}_k$, tal que $|A| < |B|$. Então, podemos tomar um elemento $x \in B$
A, logo, $|A \cup \{x\}| = |A| + 1 \leq |B| \leq k$. Portanto, podemos estender A de maneira que $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}_k$.

No que se refere à pergunta, penso que podemos citar o problema da Árvore Geradora Mínima.

23)

Novamente, temos que a condição (1) já é satisfeita, uma vez que ainda estamos trabalhando com o conjunto da questão anterior (penso eu).

Assim, a próxima etapa é mostrarmos que $\mathcal{I}'$ é não-vazio. Seja A qualquer elemento maximal de $\mathcal{I}$, então, temos que $S - A \in \mathcal{I}'$, uma vez que $S - (S - A) = A \subseteq A$ é maximal em $\mathcal{I}$.

Em seguida, precisamos mostrar a propriedade da hereditariedade (2). Suponha que $B \subseteq A \in \mathcal{I}'$, então, existe algum $A' \in \mathcal{I}$, tal que $S - A \subseteq A'$. Como $S - B \supseteq S - A \subseteq A'$, temos que $B \in \mathcal{I}'$.

Por fim, temos que provar a propriedade da troca (3). Assim, se temos que $B, A \in \mathcal{I}'$ e $|B| < |A|$, podemos encontrar um elemento x em $A - B$ para adicionar a B, de tal maneira que permaneça independente.

No primeiro caso, temos que $|A| = |B| + 1$. Assim, temos que escolher um elemento x único para compor $A - B$, uma vez que $S - B$ contém o conjunto independente maximal.

Se o primeiro caso não for válido, podemos assumir C como um conjunto independente maximal de $\mathcal{I} \subseteq S - A$. Assim, podemos tomar um conjunto arbitrário de tamanho $|C| - 1$ de algum conjunto independente maximal $D \subseteq S - B$. Como D é um conjunto independente maximal, também é independente, logo, pela propriedade da troca, existe algum $y \in C - D$, tal que $D \cup \{y\}$ é um conjunto independente maximal em $\mathcal{I}$. Desta maneira, podemos tomar um x, tal que $x \neq y \in A - B$. Uma vez que $S - (B \cup \{x\})$ ainda contém $D \cup \{y\}$, temos que $B \cup \{x\}$ é um conjunto independente em $(\mathcal{I})'$.