

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús  
Bacharelado em Ciência da Computação  
1ª Lista de Exercícios de Estrutura de Dados Avançada  
01/03/2019  
Prof. Lívio Freire

1. Mostre que numa árvore binária de  $N$  nós há  $N + 1$  links nulos (subárvores vazias).
2. Mostre que o número máximo de nós numa árvore binária de altura  $h$  é  $2^{h+1} - 1$ .
3. Mostre que o último nível de uma árvore binária completa com  $N$  nós possui  $(N + 1)/2$  nós.
4. Exiba o resultado da inserção das chaves 3, 1, 4, 6, 9, 2, 5, 7 numa árvore binária inicialmente vazia. Desenhe a árvore resultante após a deleção da raiz.
5. Escreva uma função para calcular a altura de uma árvore BST.
6. Escreva um método que recebe um array de chaves em ordem crescente e produz, em tempo linear, uma árvore binária balanceada.
7. Escreva um método para balancear uma árvore binária de busca usando a estratégia de força bruta. Para tal, após a inserção de uma nova chave, realize um percurso *inorder* na árvore para produzir um array ordenado pelas chaves com os valores armazenados na estrutura. Gere a nova árvore, agora balanceada, através dos elementos do array.
8. Escreva o método “select(int index)”, que recupera a chave do índice “index”, considerando a ordem crescente, de uma BST. O número de operações significativas, no pior caso, deve ser proporcional à altura da árvore.
9. A **profundidade** de um nó em uma árvore binária é a distância entre o nó e a raiz da árvore. Mais precisamente, a profundidade de um nó  $X$  é o comprimento do (único) caminho que vai da raiz até  $X$ . Por exemplo, a profundidade da raiz é 0 e a profundidade de qualquer filho da raiz é 1. Escreva um método que calcule a profundidade do nó que contém a chave  $k$  numa BST. Qual custo da função?
10. Quais as 3 propriedades de uma árvore AVL?
11. Desenhe uma árvore AVL de altura 4 que contém o menor número possível de nós.
12. Numa BST, a inserção de chaves ordenadas resulta no pior caso em relação à altura. Desenhe o resultado da inserção das chaves 1, 2, ..., 7, nessa ordem, numa árvore AVL vazia.
13. Insira a chave 18 na árvore AVL representada pela figura 13. Qual tipo de desbalanceamento a inserção causa? Desenhe o resultado após o balanceamento.
14. Insira as seguintes chaves, em ordem, numa árvore AVL vazia: 12, 8, 9, 20, 10, 15, 3. Encontre uma chave a ser inserida na árvore resultante para produzir o “Caso 1” (esquerda-esquerda) de desbalanceamento.

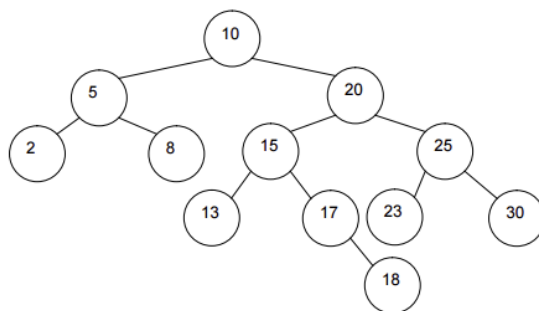


Figura 1: Árvore AVL

15. Projete um algoritmo com custo linear para verificar que a informação de altura numa árvore *AVL* está mantida corretamente e que a propriedade de balanceamento está válida.
16. Toda árvore vermelho-preta satisfaz a propriedade AVL? Prove ou mostre um contraexemplo.
17. Quantas chaves, no máximo, pode conter uma árvore 2-3 de altura 2? Qual o número mínimo de chaves em uma árvore 2-3 de altura 2?
18. Mostre que a altura de uma árvore 2-3 fica entre algo próximo de  $\log_3^N$  e algo próximo de  $\log_2^N$ .
19. Escreva um método para calcular a altura preta (número de links pretos) de uma árvore rubro-negra.
20. Desenhe a sequência de BSTs rubro-negras que resulta da inserção das chaves Y L P M X H C R A E S, nesta ordem, em uma árvore inicialmente vazia. Desenhe ao lado a correspondente sequência de árvores 2-3
21. Considere o código de `put()`. Mostre que `h.left` é diferente de `null` sempre que a linha “`if (getColor(h.left) == RED && getColor(h.left.left) == RED)`” é executada.
22. A altura de uma BST rubro-negra com  $N$  nós fica entre  $\log N$  e  $2 \log N$ . A altura de uma árvore 2-3 com  $N$  nós fica entre  $0.63 \log N$  e  $\log N$ . Por que a diferença? Afinal, BSTs rubro-negras e árvore 2-3 são equivalentes.
23. Mostre que qualquer BST pode ser transformada em qualquer outra sobre o mesmo conjunto de chaves por uma sequência apropriada de rotações “à esquerda” ou “à direita”.
24. Qual a menor e maior altura negra que uma BST rubro-negra com  $N$  nós pode ter?
25. Qual a altura mínima de uma BST rubro-negra com  $N$  nós?
26. Dada uma sequência ordenada de chaves, descreva como construir uma árvore rubro-negra em tempo linear.

Divirta-se!