Entrega 6

Daniel Brito

1) Para provar que o problema `ISOMORPHIC` pertence à classe NP-Completo, devemos mostrar que ele pertence à NP e NP-Difícil.

Para provar que o problema pertence à NP, seja G um subgrafo de G_2. Sabemos que existe um mapeamento entre os vértices de G_1 e G. Então, precisamos verificar se G_1 é isomorfo a algum subgrafo de G. A verificação de que o mapeamento é uma bijeção, e a verificação se, para cada aresta (u, v) em G_1 existe uma aresta $(f(u), f(v))$ presente em G, são realizadas em tempo polinomial. Portanto, `ISOMORPHIC` pertence à classe NP.

Para provar que o problema pertence à NP-Difícil, iremos fazer uma redução do problema `CLIQUE` para o problema em questão em tempo polinomial.

Assim, seja (G, k) a entrada do problema `CLIQUE`. A saída é verdade se o grafo G possui uma clique de tamanho k, sendo subgrafo de G. Seja G_1 um grafo completo com k vértices e G_2 igual a G, onde G_1, G_2 são entradas para o problema `ISOMORPHIC`. Note que $k \leq n$, onde n é o número de vértices em G, que é igual a G_2. Se $k > n$, então, a clique de tamanho k não poderia ser um subgrafo de G.

O tempo para criar G_1 é $O(k^2) = O(n^2)$, uma vez que $k \leq n$, e como o número de arestas em um grafo completo de tamanho $k = k \cdot (k-1)/2$. Assim, G tem uma clique de tamanho k se, e somente se, G_1 é um subgrafo de G_2. Com isso, temos que `ISOMORPHIC` pertence à classe NP-Difícil.

Portanto, como `ISOMORPHIC` pertence à NP e NP-Difícil, temos que `ISOMORPHIC` é NP-Completo.

2) Para provar que o problema `SET-PARTITION` pertence à classe NP-Completo, devemos mostrar ele pertence à NP e NP-Difícil.

Para provar que este problema pertence à classe NP, assuma que um conjunto S de `SET-PARTITION` possua duas partições, A e $\overline{A} = X - A$. Assim, devemos verificar se cada partição possui elementos que, uma vez somados, possuem valor igual.

Para provar que o problema pertence à NP, podemos fazer da seguinte maneira: Para cada elemento $x \in A$ e $x' \in \overline{A}$, temos que todos os elementos de S estão sendo considerados. Assim, seja $S_1 = 0$ e $S_2 = 0$. Para cada elemento $x \in A$, adicionamos este valor em S_1, e para cada elemento $x' \in \overline{A}$, adicionamos este valor em S_2. Por fim, verificamos se a o resultado de S_1 é igual ao de S_2. Portanto, como este processo ocorre em tempo linear, em relação ao tamanho do conjunto, temos que `SET-PARTITION` pertence à classe NP.

Para provar que este problema pertence à classe NP-Difícil, podemos realizar uma redução do problema `SUBSET-SUM` para `SET-PARTITION`.

Assim, seja s a soma dos valores de S. Além disso, assuma $S' = S \cup s - 2t$ como sendo uma entrada para `SET-PARTITION`. Desta forma, podemos fazer com que `SUBSET-SUM` retorne verdade se, e somente se, `SET-PARTITION` também retornar verdade. Note que, pela definição anterior, temos que a soma dos elementos de S' resulta em $2s - 2t$.

Com base nesta definição, temos que: Se existe um conjunto de números em S cuja soma resulte em t, então, os elementos restantes em S somados resultam em $s - t$. Portanto, S' pode ser particionado em dois subconjuntos cuja soma dos elementos de cada um resulta em $s - t$.

Agora, suponha que S' possa ser particionado em dois subconjuntos, de tal forma que a soma dos elementos de cada um resulte em $s - t$. Note que, pela definição anterior, sabemos que um destes subconjuntos contém o número $s - 2t$, e que a soma dos valores de S é s. Com isto, temos que a soma dos elementos de S' resulta em $2s - 2t = s + s - t - t$, podendo ser representada por: $s - t \cup s - t$. Como S' pode ser particionado em dois subconjuntos cuja soma dos elementos de cada um resulta em $s - t$, temos que `SET-PARTITION` pertence à classe NP-Difícil.

Portanto, como `SET-PARTITION` pertence à NP e NP-Difícil, temos que `SET-PARTITION` é NP-Completo.

4) Para provar que o problema `HAMILTONIAN-CYCLE` pertence à classe NP-Completo, devemos mostrar ele pertence à NP e NP-Difícil.

Para provar que este problema pertence à classe NP, podemos verificar se todos os vértices estão sendo considerados, e checar se cada um está conectado ao próximo por uma aresta, e também se o último é conectado ao primeiro. Este processo pode ser realizado em tempo proporcional a n, ou seja, polinomial. Portanto, temos que `HAMILTONIAN-CYCLE` pertence à classe NP.

Para provar que este problema pertence à classe NP-Difícil, podemos realizar uma redução do problema `HAMILTONIAN-PATH` para `HAMILTONIAN-CYCLE`.

Cada instância de `HAMILTONIAN-PATH` consiste em um grafo $G = (V, E)$, que pode ser utilizada como entrada para o problema `HAMILTONIAN-CYCLE` consistindo no grafo $G' = (V', E')$. Assim, iremos construir um grafo G' da seguinte maneira:

- V' = adicionar vértices V do grafo original G, e também um vértice adicional V_n, tal que todos os vértices conectados no grafo são conectados a ele. Logo, o número de vértices é dado por $V' = V + 1$;
- E' = Adicionar arestas E do grafo original, e também novas arestas entre os novos vértices adicionados e os originais. Logo, o número de arestas é dados por $E' = E + V$.

O novo grafo G' pode ser obtido em tempo polinomial através da adição de novas arestas aos novos vértices, o que requer tempo O(V). Tal redução pode ser realizada com base na seguinte ideia: Assuma que G possua um ciclo hamiltoniano cobrindo os V vértices do grafo, a partir de um vértice arbitrário V_s e com fim em V_e. Agora, temos todos os vértices conectados a um vértice arbitrário V_n em G'. Então, estendemos o caminho hamiltoniano original para o ciclo hamiltoniano por meio da utilização das arestas V_e para V_n e V_n para V_s, respectivamente. Agora, o grafo G' possui um ciclo fechado percorrendo todos os vértices uma única vez. Assumimos também que o grafo G' tem um ciclo hamiltoniano passando por todos os vértices, inclusive V_n. Então, para convertê-lo para um caminho hamiltoniano, nós removemos as arestas correspondentes ao vértice V_n no ciclo. Com isso, o caminho resultante irá cobrir todos os vértices V do grafo exatamente uma vez. Assim, temos que `HAMILTONIAN-CYCLE` pertence à classe NP-Difícil.

Portanto, como `HAMILTONIAN-CYCLE` pertence à NP e NP-Difícil, temos que `HAMILTONIAN-CYCLE` é NP-Completo.

5) Para provar que o problema `HITTING-SET` pertence à classe NP-Completo, devemos mostrar ele pertence à NP e NP-Difícil.

Para provar que este problema pertence à classe NP, podemos verificar se ele considera pelo menos um elemento S_i da família de conjuntos S. Portanto, como este processo ocorre em tempo polinomial, temos que `HITTING-SET` pertence à classe NP.

Para provar que este problema pertence à classe NP-Difícil, podemos realizar uma redução do problema `VERTEX-COVER` para `HITTING-SET`.

Por definição, no problema `VERTEX-COVER`, temos um grafo $G = (V, E)$. Então, seja X um *ground set* que é igual aos vértices de G. Isto significa que $X = V(G)$ e a coleção C do subconjunto S_i em X é $S_i = (u, v)$.

Assim, se VC é a cobertura de vértices de uma grafo G de tamanho k, isto implica que para cada aresta (u, v), u ou v pertence à VC. Logo, VC forma um *hitting set*, porque todos os subconjuntos irão formar uma interseção com todos os vértices em VC.

Se HS é um *hitting set* de X com tamanho k, agora, uma vez HS possui uma interseção com todos os subconjuntos de X, pelo menos uma das extremidades de toda aresta (u, v) deve pertencer à solução, logo, abrange pelo menos um vértice para cada aresta, formando VC. Assim, temos que `HITTING-SET` pertence à classe NP-Difícil.

Portanto, como `HITTING-SET` pertence à NP e NP-Difícil, temos que `HITTING-SET` é NP-Completo.

7) Para provar que o problema `DOMINATING-SET` pertence à classe NP-Completo, devemos mostrar ele pertence à NP e NP-Difícil.

Para provar que este problema pertence à classe NP, podemos tomar cada vértice e verificar, em tempo polinomial, se ele está presente no dado conjunto, ou se uma de suas arestas "*acessa*" o conjunto. Portanto, temos que `DOMINATING-SET` pertence à classe NP.

Para provar que este problema pertence à classe NP-Difícil, podemos realizar uma redução do problema `VERTEX-COVER` para `DOMINATING-SET`.

Assim, dado um grafo G, iremos construir um grafo G'' da seguinte maneira: G'' tem todas arestas e vértices de G. Além disso, para cada aresta $(u, v) \in G$, adicionamos um nó intermediário em um caminho paralelo em G''. Uma vez que (u, v) permanecem inalterados em G', adicionamos um vértice w a arestas (u, v) e (w, v) em G''. Agora, mostramos que G tem uma cobertura de vértices de tamanho k se, e somente se, G' tem um conjunto dominante de mesmo tamanho.

Se S é uma cobertura de vértices em G, então, devemos mostrar que S é um conjunto dominante para G'. Note que S é uma cobertura de vértices, o que significa que toda aresta em G tem pelo menos uma de suas extremidades em S. Considere $v \in G'$. Se v é um vértice de G, então, $v \in S$ ou existe alguma aresta conectando v a algum vértice u. Uma vez que S é uma cobertura de vértices, $v \notin S$, logo, u deve pertencer à S. Assim, temos que v é coberto por algum elemento em S. Contudo, se w é um vértice adicional em G', então, w tem dois vértices adjacentes $u, v \in G$. Portanto, se G tem uma cobertura de vértices, então, G' tem um conjunto dominante de (no máximo) mesmo tamanho.

Se G' tem um conjunto D de tamanho k, então, todos os vértices adicionais $w \in D$. Além disso, perceba que w deve estar conectado a exatamente dois vértices $u, v \in G$. Com isso, note que podemos substituir w por u ou v. Desta maneira, $w \in D$ irá nos ajudar a "*dominar*" apenas $u, v, w \in G'$. Podemos tomar u ou v e ainda "*dominar*"todos os vértices que w dominava. Logo, podemos eliminar todos os vértices adicionais. Uma vez que todos os vértices adicionais correspondem a uma das arestas de G, e como todos os vértices adicionais estão cobertos por D, significa que todas as arestas em G são cobertas pelo conjunto. Então, se G' tem um conjunto dominante de tamanho k, G tem uma cobertura de vértices de tamanho máximo k.

Portanto, como `DOMINATING-SET` pertence à NP e NP-Difícil, temos que `DOMINATING-SET` é NP-Completo.