RESPONDENDO
...

LISTA 1 - DANIEL BRITO (397824)

1)

Seja uma árvore binária com N nós, então a quantidade de subárvores nulas desta árvore é F=N+1.

- Caso Base: Para N=1, temos F=1+1=2 subárvores vazias, uma esquerda e uma direita. Com isso, concluímos que P(1) é verdade e provamos o caso base.

- Hipótese de Indução: Assuma que F=K+1 é verdade para toda árvore binária com K nós, onde K≥1.

- Passo indutivo: Queremos provar que P(K+1) é verdade, ou seja, numa árvore binária com K+1 nós temos F=K+1+1 => F=K+2 subárvores vazias.

Analisando a inserção de um novo nó, percebemos que a quantidade de subárvores é sempre acrescida em 2 (uma subárvore esquerda e outra direita do novo nó), além disso, também subtrai-se 1, referente à subárvore que outrora estava vazia.

Daí, temos que a quantidade de subárvores nulas em uma árvore com K+1 nós é dada por: F=K+1+2-1 => F=K+2. **(c.q.d.)**

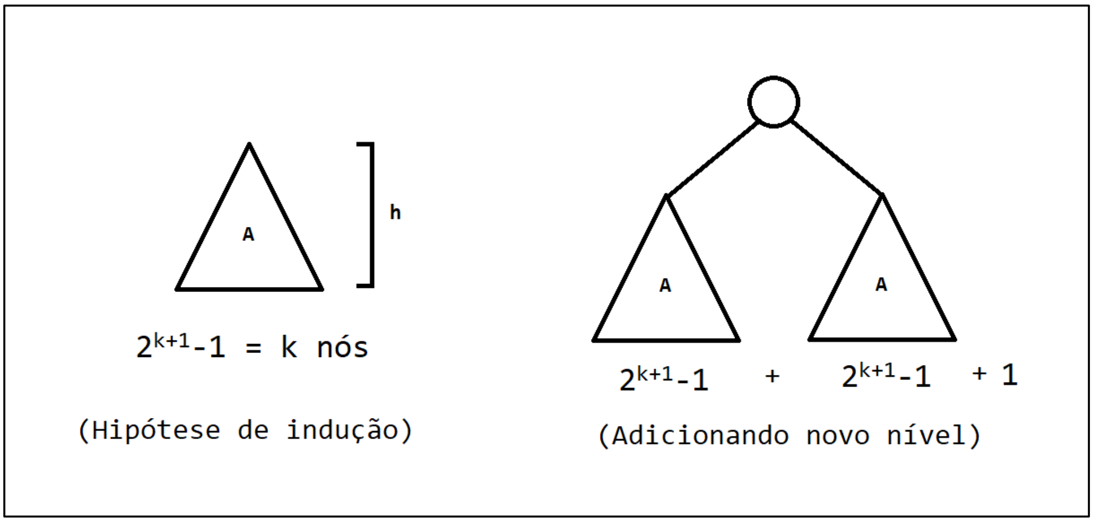
2)

- **Caso base:** Para h=0, temos $2^{0+1}-1=2-1=1$ nó, onde, neste caso, é o nó raiz. Com isso, concluímos que P(1) é verdade e provamos o caso base.

- **Hipótese de indução:** Suponha que para h=K, com K≥0, P(K) seja verdade. Ou seja, o número máximo de nós numa árvore binária de altura K é $2^{K+1}-1$.

- **Passo indutivo:** Queremos provar que P(K+1) é verdade. Ou seja, o número máximo de nós numa árvore binária de altura K+1 é $2^{K+2}-1$.

Assim, a partir da hipótese de indução, temos:



$2^{K+2}-1 = 2^{K+1}-1+2^{K+1}-1+1$
$2^{K+2}-1 = 2^{K+1}-1+2^{K+1}$
$2^{K+2}-1 = 2^{K+2}-1$ **(c.q.d)**

3)

Seja uma árvore binária completa com N nós, então a quantidade de folhas no último nível é F=(N+1)/2.

- Caso base: Para N=1, temos F=(1+1)/2 => F=1 nó, referente à raiz. Com isso, concluímos que P(1) é verdade e provamos o caso base.

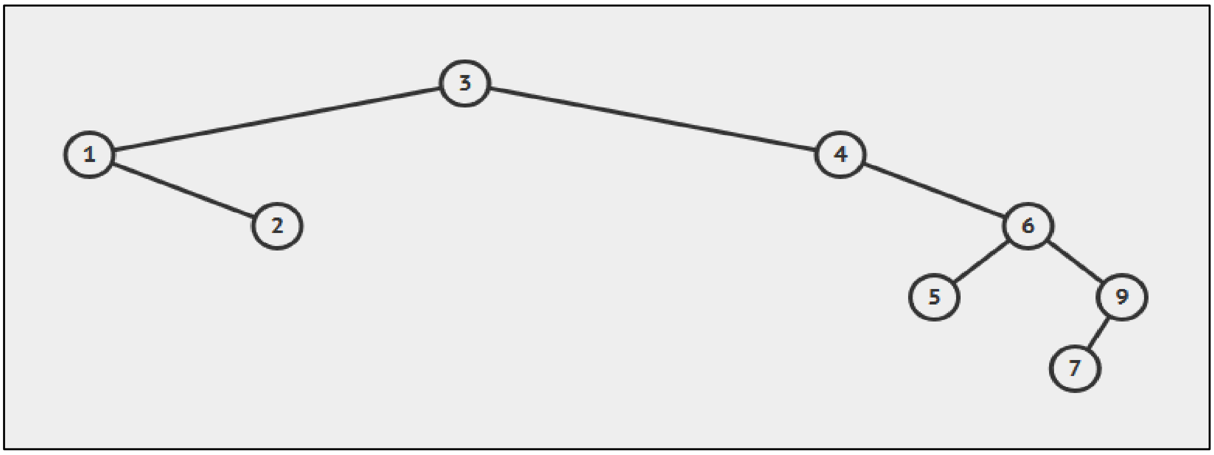
- Hipótese de indução: Assuma que para N=K, com K≥1, P(K) seja verdade. Ou seja, uma árvore completa com K nós possui F=(K+1)/2 folhas no último nível.

- Passo indutivo: Queremos provar que P(K+1) é verdade. Ou seja, numa árvore completa com K+1 nós há F=(K+1+1)/2 => F=(K+2)/2 folhas. Daí, podemos ver que o número de folhas dobra quando adicionamos K+1 nós: 2F=K+2. Então, precisamos provar que o número de folhas é 2F quando adicionamos K+1 nós na árvore. Assim, temos:

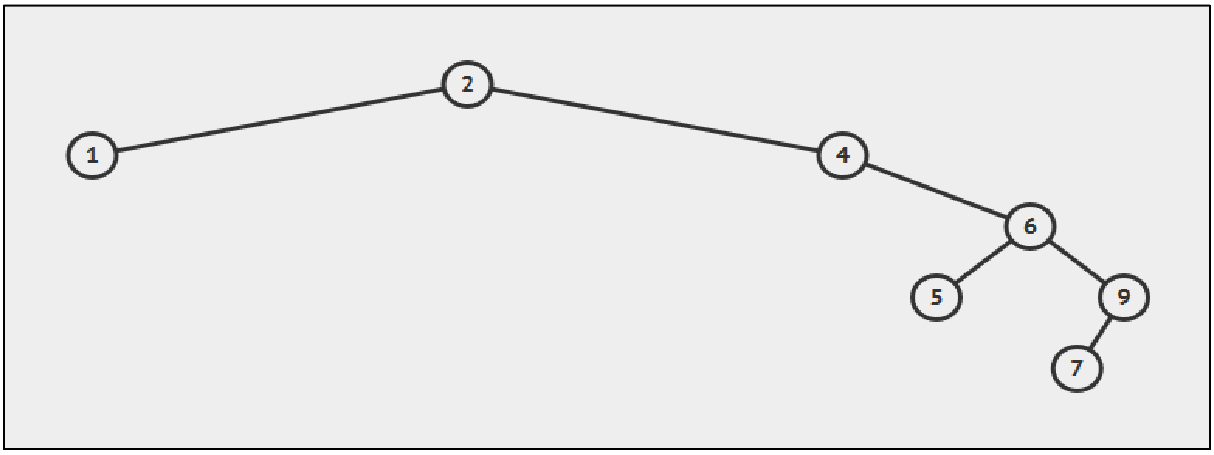
2F=(K+1+K+1)/2
2F=2(K+1)/2
2F=K+1 (Pela H.I.)
2F=2F **(c.q.d)**

4)

Inserção das chaves: 3, 1, 4, 6, 9, 2, 5, 7



Após a remoção da raiz e feita a substituição pelo maior elemento (2) da subárvore da esquerda:



Após a remoção da raiz e feita a substituição pelo menor elemento (4) da subárvore da esquerda: