Entrega 1 - *Daniel Brito*

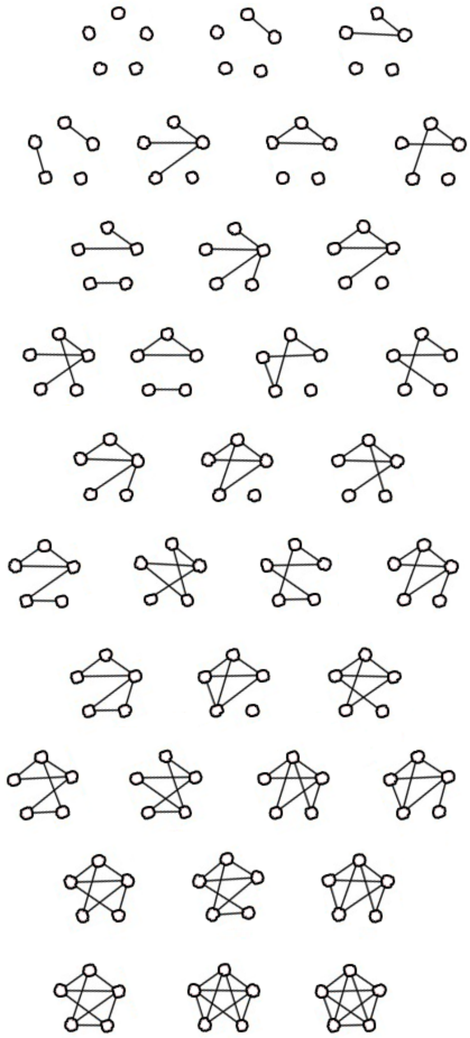
Capítulo 1

5) Let G be a graph of order 3 or more. Prove that G is connected iff G contains two distinct vertices u and v such that $G - u$ and $G - v$ are connected.

IDA) Seja G um grafo conexo. Como G é conexo, logo, possui uma árvore geradora. Sabemos que uma árvore geradora é um subgrafo que contém todos os vértices de G, que é conexo e acíclico. Assuma que p é um caminho maximal da árvore geradora de G, e que os vértices u e v são os extremos de p. Com isso, sabemos que as extremidades de p possuem grau 1, pois, uma vez que o grau de um extremos é maior que 1, a maximalidade garante que o outro vizinho da folha além do seu antecessor teria que ser um vértice que pertence ao caminho, o que é um absurdo, visto que uma árvore geradora não possui ciclos. Portanto, como u e v possuem grau 1, podemos removê-las sem que isto impacte no restante do caminho de p, o qual ainda possui caminhos ligando os vértices remanescentes.

VOLTA) Seja $G - u$ um grafo conexo. Pela definição de conectividade, temos que existe um caminho que liga quaisquer par de vértices do grafo $G - u$. Incluindo um vértice u ao grafo G, podemos afirmar que u terá, pelo menos, um vizinho w. Além disso, como $G - u$ é conexo, temos que w possui um caminho para qualquer outro vértice. Assim, com a aresta uw, u consegue ter um caminho para qualquer outro vértice, uma vez que seu vizinho w também possui.

24) Draw all of the (non-isomorphic) graphs of order 5.



12) For vertices u and v in a connected graph G, let $d(u, v)$ be the shortest length of a $u - v$ path in G. Prove that d satisfies the triangle inequality.

Devemos mostrar que, dados os vértices $u, v, w \in G$, então, $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$. Tal demonstração pode ser feita por contradição. Assim, assuma que $d(u, v) + d(v, w) < d(u, w)$. Pela definição, $d(u, v)$ é o tamanho do menor caminho de u para v, e $d(v, w)$ é o tamanho do menor caminho de v para w. Contudo, $d(u, w)$ é o tamanho do menor caminho de u para w, logo, $d(u, v) + d(v, w)$ não pode ser menor que $d(u, w)$. Absurdo. Portanto, podemos concluir que d satisfaz a desigualdade triangular.

19) Let G be a graph of order n. Prove that if $deg(u) + deg(v) \geq n - 1$ for every two nonadjacent vertices u and v of G, then G is connected.

Assuma que u e v não possuam um vizinho em comum, ou seja, $N(u) \cup N(v) = \emptyset$, onde $N(x)$ representa o conjunto de vizinhos de x. Assim, temos que $|N(u) \cup N(v)| = deg(u) + deg(v)$. Como u e v não possuem vizinhos em comum, então, $deg(u) \leq n - 2 - deg(v)$, logo, $deg(u) + deg(v) < n - 1$. Absurdo. Portanto, u e v devem possuir um vizinho em comum.

26) Prove that if G is a disconnected graph then $\overline{G}$ is connected.

Sabemos que G é desconexo, então, existe um componente conexo C tal que $V(C)$ contém, pelo menos, um vértice v, e existe, pelo menos, um vértice w que está em $V(G)$, mas não está em $V(C)$. Precisamos mostrar que $\overline{G}$ é conexo. Assim, considere dois vértices quaisquer $x, y \in V(\overline{G}) = V(G)$, e também os seguintes casos:

- Caso 1: x, y estão ambos $V(C)$. Como x e w não estão no mesmo componente de G, $xw \notin E(G)$, logo, $xw \in E(\overline{G})$. Analogamente, $yw \in E(\overline{G})$. Assim, temos um caminho $x \to w \to y$ entre x e y.
- Caso 2: x, y não estão em $V(C)$. Como x e y não estão no mesmo componente em G, $xv \notin E(G)$, logo, $xv \in (\overline{G})$. Analogamente, $yv \in E(\overline{G})$. Assim, temos um caminho $x \to v \to y$ entre x e y.
- Caso 3: $x \in V(C)$ e $y \notin V(C)$. Com base nos casos anteriores, existe uma aresta entre y e v. Além disso, v e x são conexos (Caso 1). Portanto, pela propriedade transitiva, temos que y está conectado com x.
- Caso 4: $x \notin V(C)$ e $y \in V(C)$. Similar ao Caso 3, mas utilizando w ao invés de v.

8) Prove that if G is a nontrivial graph of order n and size $m > \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}$, then G is connected.

Podemos mostrar que todo par de vértices não-adjacentes possui um vizinho em comum. Baseado nesta ideia, para qualquer par de vértices u, v, temos que $uv \in E(G)$ ou existe um $x \in V(G)$ que é um vizinho comum de u, v. Assim, temos que $u \to x \to v$ é um caminho. Isto estabelece que todo par u, v é conexo.

Considere qualquer par de vértices não-adjacentes. Seja G' o subgrafo obtido a partir da remoção de u e v de $V(G)$, e todos as arestas incidentes em u e v de $E(G)$. Como u e v são não-adjacentes, temos: $m = |E(G)| = deg(u) + deg(v) + |E(G')| > \frac{(n-2)(n-3)}{2}$.Com isso, temos que $E(G') \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, uma vez que G' possui $n-2$ vértices. Assim, $deg(u) + deg(v) > \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = n-2$. Portanto, eles devem ter um vizinho comum entre os $n-2$ vértices remanescentes de G'.

22) Let G and H be isomorphic graphs. Prove the following.

(c) The graph G is bipartie iff H is bipartite.

Seja $f : V(G) \to V(H)$ a bijeção que estabelece o isomorfismo.

G é bipartido se, e somente se, H é bipartido. Como acima, basta que G bipartido $\to$ H é bipartido pela propriedade de simetria do isomorfismo.

Seja $V(G) = V_1 \cup V_2$ uma partição em G. Seja $W_1 = \{f(x) : x \in V_1\}$ e $W_2 = \{f(y) : y \in V_2\}$. Verificamos que $V(H) = W_1 \cup W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Para qualquer vértice $a \in V(H)$, $f^{-1}(a)$ está em V_1 ou V_2. No primeiro caso, $a = f(f^{-1}(a)) \in W_2$, e no segundo caso, está em W_2. Então, $V(H) = W_1 \cup W_2$. Suponha que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, e seja $a \in W_1 \cap W_2$. Assim, $f^{-1}(a) \in V_1 \cap V_2$ contradiz o biparticionamento de $V(G)$. Agora, considere qualquer aresta $xy \in E(H)$. Isto implica que $f^{-1}(x)f^{-1}(y) \in E(G)$ seja a definição de isomorfismo. Portanto, $f^{-1}(x)$ e $f^{-1}(y)$ estão em diferentes lados em G. Podemos assumir que $f^{-1}(x) \in V_1$ e $f^{-1}(y) \in V_2$ (o caso reverso também tem um argumento semelhante). Por fim, pela definição $f(f^{-1}(x)) \in W_1$ e $f(f^{-1}(y)) = y \in W_2$, temos que os endpoints estão em lados diferentes de H.

(d) The graph G is connected iff H is connected.

Seja $f : V(G) \to V(H)$ a bijeção que estabelece o isomorfismo.

Como acima, basta que G conexo $\to$ H é conexo pela propriedade de simetria do isomorfismo.

G é conexo se, e somente se, H é conexo. Como acima, basta que G conexo $\to$ H é conexo pela propriedade de simetria do isomorfismo.

Considere quaisquer dois vértices $x, y \in V(G)$. Seja $u = f^{-1}(x) \in V(G)$ e $v = f^{-1}(y) \in V(G)$. Uma vez que G é conexo, existe um caminho de u até v: $ua_1a_2...a_kv$, onde $a_1, ..., a_k$ são os vértices intermediários do caminho. Então, $xf(a_1)f(a_2)...f(a_k)y$ é um caminho em H, logo, para quaisquer vértices consecutivos nesta sequência, temos que f^{-1} mapeia para uma aresta no caminho em G.

11) Let G be the graph with $\delta(G) = \delta$. Prove each of the following.

(a) The graph G contains a path of length δ.

Para $\delta = 0$, a declaração é trivial, pois para qualquer vértice $v \in V$, a sequência v forma um caminho de tamanho 0.

Assuma que $\delta \geq 1$. Seja n o tamanho maximal de um caminho em G, e seja $v_1, v_2, ..., v_{n+1}$ tal caminho de tamanho n. Para provar (a), nós temos que mostrar que $n \geq \delta$.

Neste caso, podemos recorrer à uma demonstração por contradição, com $n < \delta$. Seja $S = N(v_{n+i}\ \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$. Temos que $|S| \geq \delta(G) - n \geq \delta - n \geq 1$, ou seja, $S \neq \emptyset$. Tomemos um elemento $u \in S$. Então, a sequência $v_1, v_2, ..., v_{n+1}, u$ forma um caminho de tamanho $n+1$. Absurdo, pois assumimos que n é tamanho maximal de um caminho em G.

(b) If $\delta \geq 2$, prove that G contains a cycle of length at least $\delta + 1$.

Se $\delta(G) = 1$, então G não precisa ter ciclos.

Agora, assuma que $\delta \geq 2$. Como na demonstração anterior, seja n o tamanho maximal de uma caminho em G, e seja $v_1, v_2, ..., v_{n+1}$ tal caminho de tamanho n. A partir de (a), temos que $n \geq \delta$. Assim, considere $S = N(v_{n+1}\ \{v_i | n - \delta + 2 \leq i \leq n\}$.

Claramente, $|S| \leq \delta - (\delta - 1) = 1$, ou seja, $S \neq \emptyset$. Tomemos um elemento $u \in S$. Então, o trajeto $v_1, v_2, ..., v_{n+1}, u$ não pode ser um caminho, pois seu tamanho é $n + 1 > n$. Isto significa que $u = v_m$, para algum $m \in [1, n - \delta + 1]$, e então $v_m, v_{m+1}, ..., v_{n+1}$ é um caminho de tamanho $n + 1 - m + 1 = n + 2 - m \geq n + 2 - (n - \delta + 1) = \delta + 1$.

21) Prove Theorem 1.8: If two graphs G and H are isomorphic, then (a) they have the same order and (b) the same size, and (c) the degrees of the vertices of G are the same as the degrees of the vertices of H.

(a) Para que G e H sejam estruturalmente idênticos, deve haver uma bijeção dos vértices de G para os vértices de H, em uma relação de 1 para 1, de tal forma que os conjuntos finitos tenham o mesmo tamanho. Com isso, resolvemos a questão da ordem, que é o número de vértices e o mesmo número de arestas.

Sejam G e H dois grafos isomórficos. Então, existe um isomorfismo $f : V(G) \to V(H)$ de $V(G)$ para $V(H)$. Seja sua inversa $f^{-1} : V(H) \to V(G)$ definida como sendo: $f^{-1}(v_2) = v_1 \iff f(v_1) = v_2$.

Sejam $u_2, v_2 \in V(H)$, tal que $f^{-1}(u_2) = u_1$ e $f^{-1}(v_2) = v_1$. Assim, $f(u_1) = (u_2)$ e $f(v_1) = v_2$. Então, u_2 e v_2 são adjacentes se, e somente se, $f(u_1)$ e $f(v_1)$ são adjacentes. Porque G é isomórfico a H, $f(u_1)$ e $f(v_1)$ são adjacentes se, e somente se, $u_1 = f^{-1}(u_2)$ e $v_1 = f^{-1}(v_2)$ são adjacentes. Logo, u_2 e v_2 são adjacentes se, e somente se, $u_1 = f^{-1}(u_2)$ e $v_1 = f^{-1}(v_2)$ são adjacentes.

Portanto, H também é isomórfico a G. Com isso, percebemos também que o isomorfismo preserva a simetria.

(c) Seja $f : V(G) \to V(H)$ a bijeção que estabelece o isomorfismo. Seja $u \in V(G)$ um vértice arbitrário de G, tal que $f(u) = v \in V(H)$. Seja $deg_G(u) = n$. Assim, precisamos mostrar que $deg_H(v) = n$.

Como $deg_G(u) = n$, existe $u_1, u_2, ..., u_n \in V(G)$ que são adjacentes a u. Qualquer outro vértice de G não é adjacente a u.

Seja $f(u_i) = v_i$ para $1, 2, ..., n$. Uma vez que f define um isomorfismo, cada um dos vértices $v_1, v_2, ..., v_n \in V(H)$ são adjacentes a v. De maneira análoga, qualquer outro vértice de H não é adjacente a v.

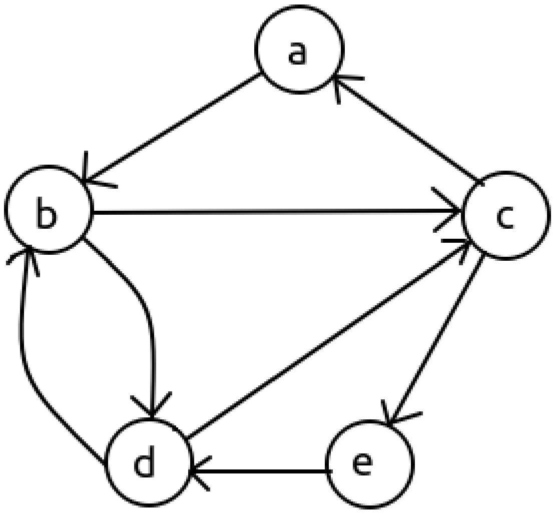
Então, temos que $deg_H(v) = n$, o que se aplica para todos os vértices $u \in V(G)$.

Capítulo 3

5) Prove that an Eulerian graph G has even size iff G has an even number of vertices v such that $deg(v) \equiv 2(mod\, 4)$.

Seja o grafo G, com m representando o número de arestas de G. Se G é euleriano, então todos os nós têm grau par. Assim, seja $2a_i$ o grau do nó i. Com base no teorema de Teoria dos Grafos, temos que $m = \sum a_i$. Mas a_i é par se, e somente se, o grau do nó i é um múltiplo de 4, enquanto que é ímpar se, e somente se, o grau é $deg(i) = 2(mod\, 4)$. Então, a paridade de m é decidida pela paridade de nós com $deg(i) \equiv 2(mod\, 4)$. Mais precisamente, m tem a mesma paridade dos nós com $deg(i) \equiv 2(mod\, 4)$.

4) Prove or disprove: There exists a strong digraph with an Eulerian trail.



8)(a) Find an Eulerian circuit in the de Brujin digraph $B(2,4)$ shown in Figure 3.6.

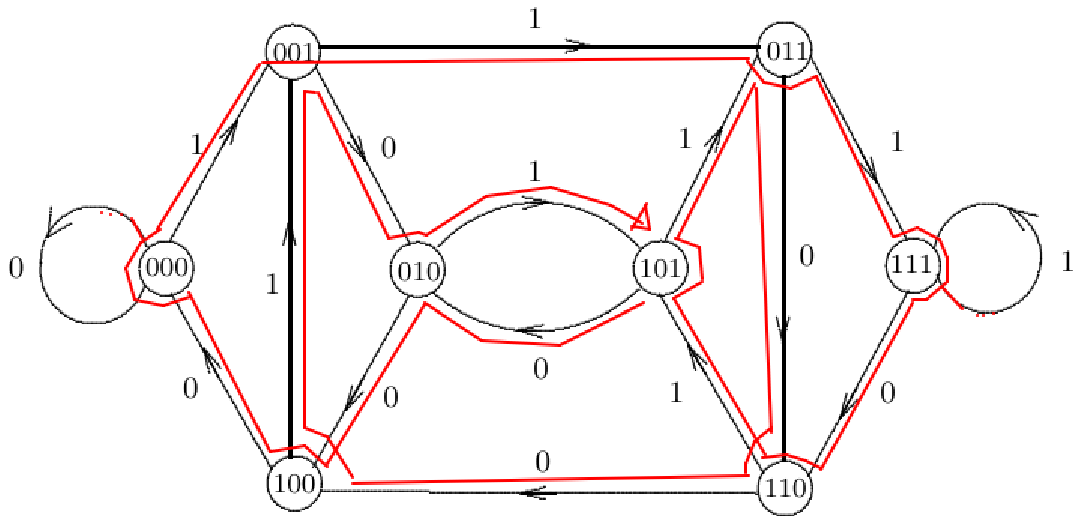


Figure 3.6: The de Bruijn digraph $B(2,4)$

(b) Use the information in (a) to construct the corresponding de Brujin sequence.

Assuma que o caminho euleriano passa pelos vértices: 000, 000, 001, 011, 111, 111, 110, 101, 011, 110, 100, 001, 010, 101, 010, 100, 000. Assim, temos a seguinte sequência: 0000111101100101.

(c) Locate the 4-words 1010, 0101, 1001, and 0110 in the de Brujin sequence in (b).

- 1010: ...0}000111101100{101...
- 0101: 000011110110{0101}
- 1001: 0000111101{1001}01
- 0110: 00001111{0110}0101

11) Prove that if T is a tree of order at least 4 that is not a star, then $\overline{T}$ contains a Hamiltonian path.

Vamos provar tal afirmação por meio de uma indução sobre a ordem n de T. Para $n = 4$, o caminho P_4 de ordem 4 é a única árvore de ordem 4, que não é uma estrela. Como $\overline{T} = T$, o resultado se mantém para $n = 4$. Assuma que para toda árvore de ordem $k - 1 \geq 4$, que não é uma estrela, seu complemento possui um caminho hamiltoniano.

Seja T uma árvore de ordem k que não é uma estrela. Então, T possui um endpoint v, tal que $T - v$ não é uma estrela. Pela hipótese de indução, $\overline{T - v}$ possui um caminho hamiltoniano, dado por $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$. Como v é um end-point de T, isto significa que v é adjacente a, no máximo, um de v_1 e v_{k-1}. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que v_1 e v não são adjacentes em T. Então, v e v_1 são adjacentes em $\overline{T}$, e $v, v_1, v_2, ..., v_{k-1}$ é um caminho hamiltoniano em $\overline{T}$.

19) Prove that no bipartite graph of order 3 or more is Hamiltonian-connected.

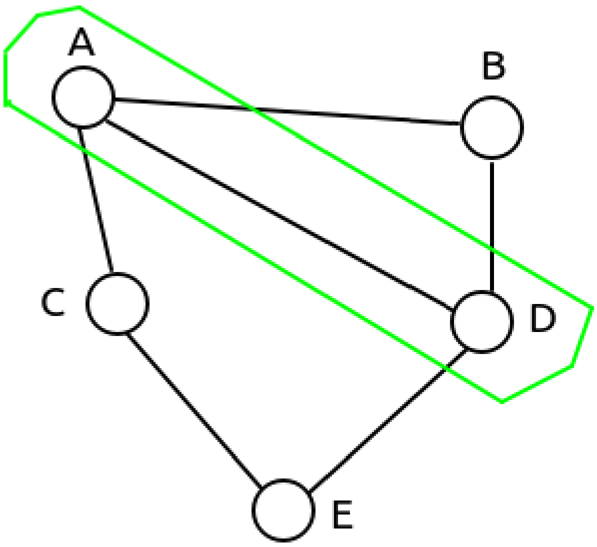
É suficiente mostrar que nenhum grafo bipartido completo é hamiltoniano conectado, pois qualquer grafo bipartido pode ser obtido a partir de um grafo completo por meio da remoção de arestas. E a remoção de arestas não pode tornar um grafo hamiltoniano conectado.

Assim, seja G um grafo bipartido completo formado pelas partes X e Y.

Se $|X| = |Y|$, tome $u, v \in X$. Nenhum caminho hamiltoniano pode começar em u e terminar em v, uma vez que qualquer caminho hamiltoniano partindo de X deve terminar em Y.

Se $|X| < |Y|$, tome $u \in Y$ e $u \in X$. Nenhum caminho hamiltoniano pode começar em u e terminar em v, uma vez que qualquer caminho hamiltoniano partindo de Y deve terminar em Y. Para $|X| > |Y|$, temos uma situação análoga.

20) Give an example of a Hamiltonian graph G and a path of order 2 in G, that cannot be extended to a Hamiltonian cycle of G.



18) Prove that every Hamiltonian-connected graph of order 4 is 3-connected.

Assuma que G não é 3-*connected*. Então, G possui um corte de tamanho 2, digamos $\{x, y\}$. Suponha que este corte separa os vértices a e b. Uma vez que G é 4-*ordered* hamiltoniano, existe um ciclo em G que possui os vértices a, x, y, b nesta sequência. Agora, percorrendo de a até b neste ciclo, utilizando um caminho que evita x e y, encontramos um caminho a, b em $G - \{x, y\}$. Absurdo.