

# Mathematical Analysis in Economics

Daniel Camarena



25 de enero de 2021

# Prólogo

# ¿Qué análisis matemático?

- Estudiar el **cambio**
- Derivada
- Límite
- Integral
- Medida

Bibliografía recomendada.

- [**Folland99**] G. Folland (1999). Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.
- [**Axler20**] Sheldon Axler (2020). Measure, Integration & Real Analysis.

# ¿Qué análisis matemático?

- Estudiar la **aproximación**
- Función lineal
- Distancia
- Proyección
- Descomposición

Bibliografía recomendada.

- [**Conway94**] J. Conway (1994). A Course in Functional Analysis.
- [**Daniel13**] Daniel Li (2013). Cours d'analyse fonctionnelle.

# ¿Qué es la economía?

- Estudiar **al agente económico y el mercado**
- Bienes y servicios
- Individuo
- Sistema
- Comportamiento humano

Clasificación de la economía:

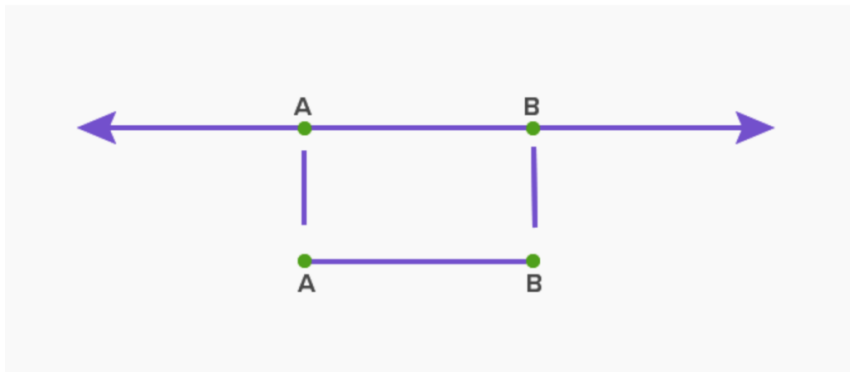
- Economía Teórica vs Economía Empírica
- Microeconomía vs Macroeconomía

# Contenido

- 1 Prólogo
- 2 Measure Theory
  - Dos problemas de análisis
  - Sumilla de Teoría de la Medida
- 3 Functional Analysis
  - Función como modelo
  - Sumilla de Análisis Funcional
- 4 Teoría de la Utilidad Esperada
  - Teoría de Decisión
  - Decisión bajo riesgo e incertidumbre
  - Actitudes frente al riesgo
- 5 Resumen y Preguntas

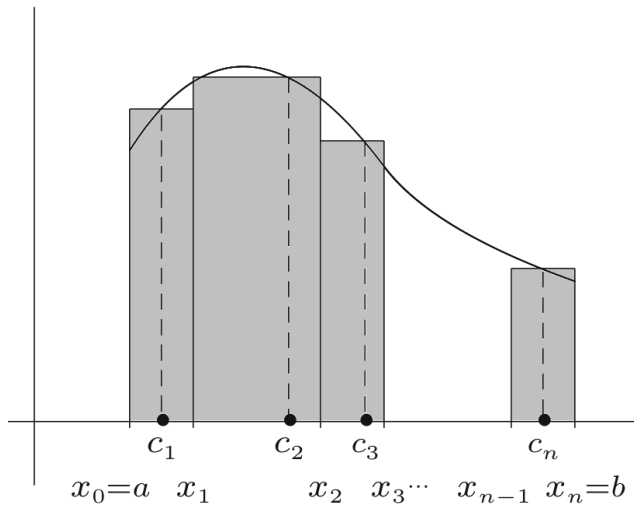
# Measure Theory

## Extendiendo la longitud de los segmentos

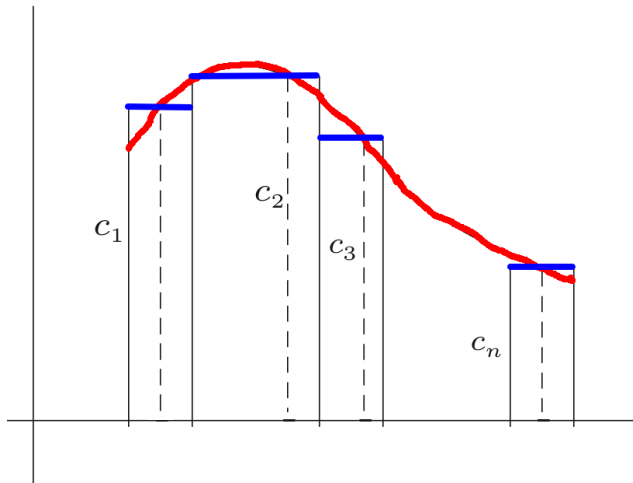




## El área bajo curvas definidas por funciones



## Extendiendo el cálculo de área bajo curvas



# Sumilla de Teoría de la Medida

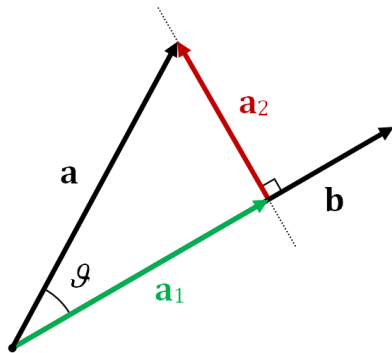
- **Espacio de medida:** Sigma-álgebras, medidas, medida de Lebesgue
- **Teoría de integración:** Funciones medibles, integral, propiedades
- **Modos de convergencia:** Convergencia monótona, casi todo punto, en medida. Integrabilidad uniforme
- **Espacios producto:** Medida producto, integración iterada, teorema de Fubini

Bibliografía recomendada.

- **[Folland99]** G. Folland (1999). Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.
- **[Axler20]** Sheldon Axler (2020). Measure, Integration & Real Analysis.

# Functional Analysis

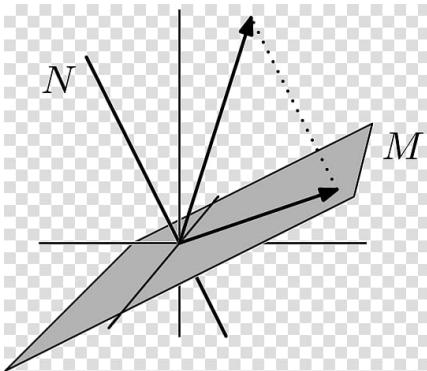
## El problema de la proyección



## De matrices a funciones

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

# Espacios de funciones



# Sumilla de Análisis Funcional

- ① **Espacios de Banach:** Espacio normado, funcionales, teorema de Hahn Banach
- ② **Espacios de Hilbert:** Espacio producto interno, proyección, bases ortonormales y series de Fourier
- ③ **Operadores en espacios de Hilbert:** operadores lineales, operadores autoadjuntos, teorema espectral
- ④ **Derivada de una medida:** medidas absolutamente continuas, derivada de Radon-Nikodym

Bibliografía recomendada.

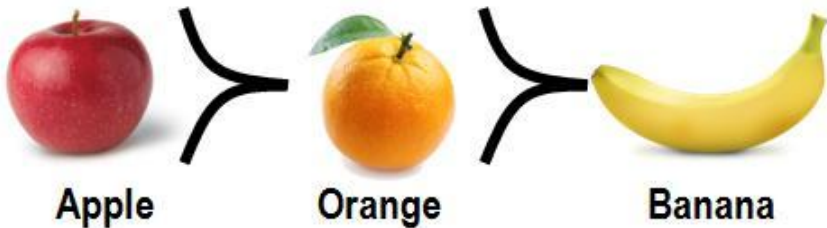
- [Conway94] J. Conway (1994). A Course in Functional Analysis.
- [Daniel13] Daniel Li (2013). Cours d'analyse fonctionnelle.



# Teoría de Utilidad Esperada

# El Problema de Decisión

un agente debe elegir entre una o más alternativas



# Teoría de Decisión

Una relación  $\preceq$  sobre  $X$  se llama *preferencia* si es

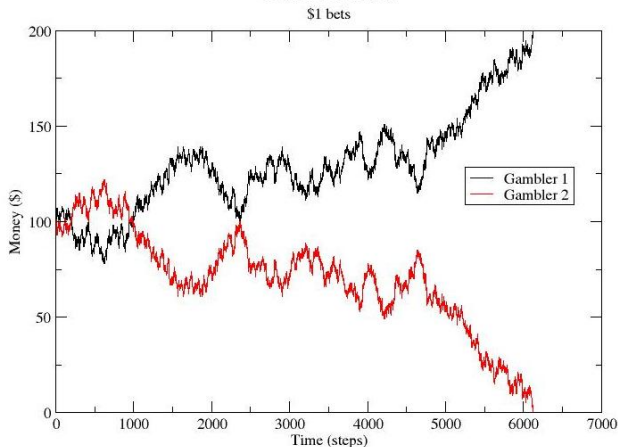
- Reflexiva:  $\forall a \in X : a \preceq a$
- Transitiva:  $\forall a, b, c \in X : a \preceq b \wedge b \preceq c \rightarrow a \preceq c$
- Total:  $\forall a, b \in X : a \preceq b \vee b \preceq a$

Se dice que  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función de utilidad* que representa a  $\preceq$  si

$$x \preceq y \text{ implica } u(x) \leq u(y).$$

## Teorema de Debreu

Si  $X$  es un espacio topológico con base numerable y la preferencia  $\preceq$  es continua entonces existe una función de utilidad continua que representa a  $\preceq$ .



Considere un conjunto finito  $X$  de consecuencias. Una **lotería** es una distribución de probabilidad  $p : C \rightarrow [0, 1]$  sobre  $C$ , donde

$$\sum_{x \in X} p(x) = 1.$$

El **conjunto de todas las loterías** es denotado por  $\mathcal{P}$ .

## Decisión bajo riesgo

Se dice que  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función de utilidad von Neumann-Morgenstern* que representa a preferencia  $\preceq$  sobre  $\mathcal{P}$  si

$$p \preceq q \text{ implica } \sum_{x \in X} u(x)p(x) \leq \sum_{x \in X} u(x)q(x).$$

### Existencia y unicidad

Una preferencia continua  $\preceq$  sobre  $\mathcal{P}$  puede ser representada por una función de utilidad von Neumann-Morgenstern  $u$  si y solo si la preferencia es **independiente**:

$$\forall p, q, r \in \mathcal{P}, a \in ]0, 1] : ap + (1 - a)r \leq aq + (1 - a)r \Leftrightarrow p \preceq q$$

# Actitudes frente al riesgo

La **utilidad esperada** y el **ingreso esperado** bajo la lotería  $p \in \mathcal{P}$  es por

$$U(p) := \sum_{x \in X} u(x)p(x), \quad E_p(x) = \sum_{x \in X} x \cdot p(x).$$

Un agente económico es llamado

- *adverso al riesgo* si él siempre prefiere un nivel de ingreso seguro:

$$U(p) \leq u(E_p(I)) \quad \forall p.$$

- *neutral* si él siempre es indiferente:

$$U(p) = u(E_p(I)) \quad \forall p.$$

- *amante al riesgo* si él prefiere la lotería a un ingreso seguro:

$$U(p) \geq u(E_p(I)) \quad \forall p.$$

# Actitudes frente al riesgo

## Cuestiones:

- Cuantificar cuando un agente económico es **más adverso al riesgo** que otro.
- Determinar la preferencia entre loterías con poco conocimiento acerca del agente económico (**dominancia estocástica**).

## Alguna aplicaciones

- Insurance
- Optimal Portfolio Choice
- Optimal Risk Sharing

# Resumen y Preguntas



## The mathematical analysis es útil en el...

- Fundamento teórico de la economía
- Modelamiento matemático en economía
- Background previo a un posgrado en economía
- Diseño de la metodología en un proyecto de investigación económica

# Preguntas y consultas

# Preguntas y consultas

# ¡Muchas Gracias!