

La estabilidad casi segura de los sistemas lineales de salto Markoviano en tiempo discreto

V. Daniel Camarena Pérez

Universidad Nacional de Ingeniería

Group pf Mathematical Modeling and Numerical Simulation

vcamarenap@uni.pe

5 de enero del 2018

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Los sistemas lineales de salto Markoviano en tiempo discreto
- 3 La estabilidad casi segura y el exponente de Lyapunov

Ecuaciones en diferencias

Sea el sistema de ecuaciones en diferencias

$$x(k+1) = Ax(k), \quad k \geq 0, \quad (1)$$

Ecuaciones en diferencias

Sea el sistema de ecuaciones en diferencias

$$x(k+1) = Ax(k), \quad k \geq 0, \quad (1)$$

donde

$$x(k) \in \mathbb{R}^d,$$

Ecuaciones en diferencias

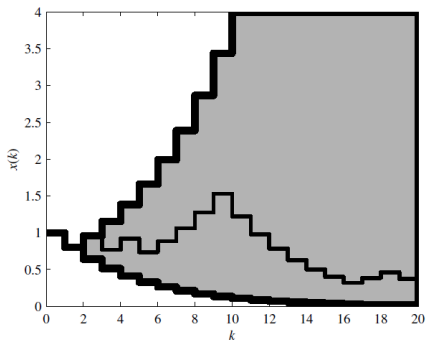
Sea el sistema de ecuaciones en diferencias

$$x(k+1) = Ax(k), \quad k \geq 0, \quad (1)$$

donde

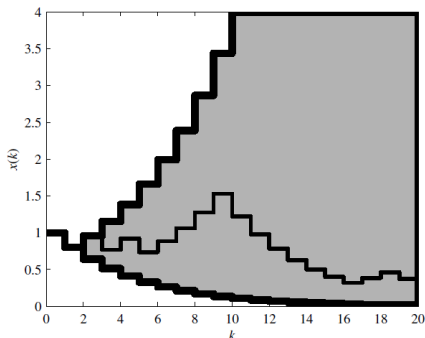
$$x(k) \in \mathbb{R}^d, \quad A \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Ecuaciones en diferencias



Estabilidad de la solución (Costa et al. 2005).

Ecuaciones en diferencias

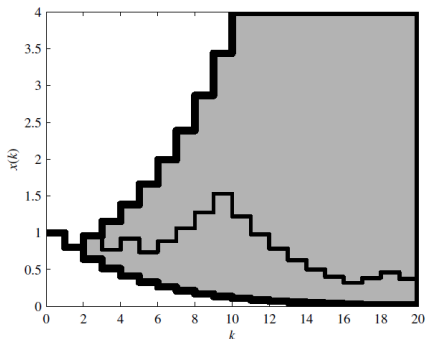


Estabilidad de la solución (Costa et al. 2005).

Teorema 1

El sistema (1) es estable $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$

Ecuaciones en diferencias

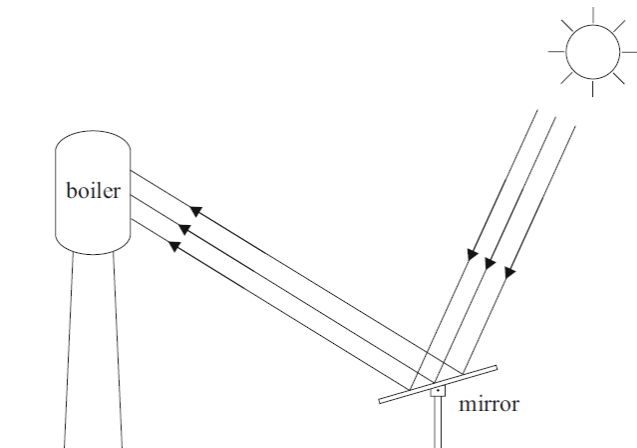


Estabilidad de la solución (Costa et al. 2005).

Teorema 1

El sistema (1) es estable $\Leftrightarrow \rho(A) < 1 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|A^k\| < 0$.

Control de receptores centrales térmicos solares



Control de receptores centrales térmicos solares

Agentes atmosféricos:

- Día soleado
- Día nublado

Control de receptores centrales térmicos solares

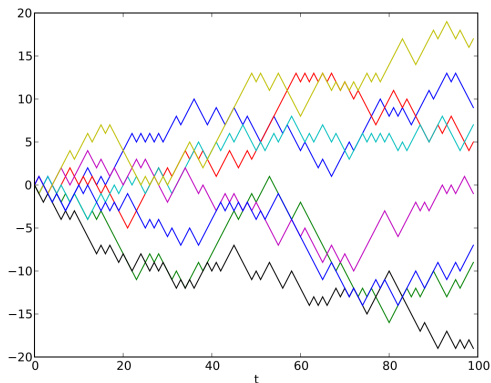
Agentes atmosféricos:

- Día soleado
- Día nublado

Tenemos tres tipos de diseños de sistemas

- 1 Una sola ley de control con una perturbación del modelo.
- 2 Dos leyes de control, una para cada modo de operación, independientes.
- 3 Dos leyes de control, una para cada modo de operación, alternando según una dinámica estocástica.

Procesos estocásticos



Camino aleatorio en \mathbb{Z} .

Procesos estocásticos

Sea X_k la posición del sapo luego de dar k saltos, $k \geq 0$.

Procesos estocásticos

Sea X_k la posición del sapo luego de dar k saltos, $k \geq 0$.

Coleccionamos todos los caminos posibles

$$\{k \mapsto X_k(\omega)\}_{\omega \in \Omega}.$$

Procesos estocásticos

Sea X_k la posición del sapo luego de dar k saltos, $k \geq 0$.

Coleccionamos todos los caminos posibles

$$\{k \mapsto X_k(\omega)\}_{\omega \in \Omega}.$$

Coleccionamos todas las posiciones posibles dada una cantidad finita de saltos

$$\{\omega \mapsto X_k(\omega)\}_{k \geq 0}.$$

Modelando el control de receptores centrales térmicos solares

- $x(k) \in \mathbb{R}^d$: variable de estado
- $\{A_1, \dots, A_N\}$: modos de operación
- $\theta(k) \in \mathbb{S} = \{1, \dots, N\}$: dinámica de salto entre los modos

Modelando el control de receptores centrales térmicos solares

- $x(k) \in \mathbb{R}^d$: variable de estado
- $\{A_1, \dots, A_N\}$: modos de operación
- $\theta(k) \in \mathbb{S} = \{1, \dots, N\}$: dinámica de salto entre los modos

Dinámica del sistema

$$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k), \quad k \geq 0, \quad (2)$$

Modelando el control de receptores centrales térmicos solares

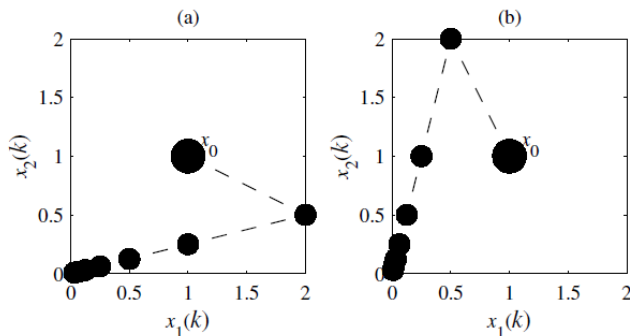
- $x(k) \in \mathbb{R}^d$: variable de estado
- $\{A_1, \dots, A_N\}$: modos de operación
- $\theta(k) \in \mathbb{S} = \{1, \dots, N\}$: dinámica de salto entre los modos

Dinámica del sistema

$$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k), \quad k \geq 0, \quad (2)$$

donde $\{\theta(k)\}_{k \geq 0}$ es una cadena de Markov irreducible, ergódica, con matriz de transición P y distribución inicial igual a su única distribución invariante π .

El concepto de estabilidad



Evolución del sistema en el tiempo, $d = 2$ (Costa et al. 2005).

El concepto de estabilidad

El sistema (2) es estable \mathbb{P}_π -casi seguramente si para todo estado inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$ se cumple

$$\mathbb{P}_\pi \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k)\| = 0 \right) = 1.$$

El exponente de Lyapunov

Definimos el exponente de Lyapunov del sistema (2)

$$\alpha_{\pi} = \limsup_k \frac{1}{k} \mathbb{E}_{\pi} \|A_{\theta(k-1)} \cdots A_{\theta(0)}\|.$$

El exponente de Lyapunov

Definimos el exponente de Lyapunov del sistema (2)

$$\alpha_\pi = \limsup_k \frac{1}{k} \mathbb{E}_\pi \|A_{\theta(k-1)} \cdots A_{\theta(0)}\|.$$

Lema 1

Se cumple

$$\alpha_\pi = \limsup_k \frac{1}{k} \|A_{\theta(k-1)} \cdots A_{\theta(0)}\|, \quad \mathbb{P}_\pi - \text{c.s.}$$

Caracterización de la estabilidad casi segura

Caracterización de la estabilidad casi segura

Teorema 2

- 1. Si $\alpha_\pi < 0$ entonces el sistema (2) es estable \mathbb{P}_π -casi seguramente.

Caracterización de la estabilidad casi segura

Teorema 2

- i. Si $\alpha_\pi < 0$ entonces el sistema (2) es estable \mathbb{P}_π -casi seguramente.
- ii. Si $\alpha_\pi > 0$ entonces el sistema (2) no es estable \mathbb{P}_π -casi seguramente.

Ejemplo

Sea $\{\theta(k)\}_{k \geq 0}$ una cadena de Markov que toma solo dos estados, irreducible, recurrente y con distribución invariante $\pi = (0.5, 0.5)$, matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Sea $\{\theta(k)\}_{k \geq 0}$ una cadena de Markov que toma solo dos estados, irreducible, recurrente y con distribución invariante $\pi = (0.5, 0.5)$, matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Sean los dos posibles modos de operación

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (continuación)

Como en la prueba del lema 1 definimos la siguiente cadena de Markov $\tilde{\theta}(k) = (\theta(2k+1), \theta(2k))$, $k \geq 0$, con espacio de estados

$$\{ \tilde{1} = (1, 1); \tilde{2} = (1, 2); \tilde{3} = (2, 1); \tilde{4} = (2, 2) \},$$

y matriz de transición

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la cadena es irreducible, recurrente positiva, y tiene distribución invariante

$$\tilde{\pi} = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25).$$

Ejemplo (continuación)

Notemos que $A_1 A_2 = 0$. Así, como el estado $\tilde{2} = (1, 2)$ es recurrente positivo, $\mathbb{P}_{\tilde{\pi}}$ -casi seguramente este estado aparece en la secuencia $(\theta(k-1), \dots, \theta(0))$ para k suficientemente grande ... Entonces se consigue $\alpha_{\pi} = -\infty < 0$ y el sistema es \mathbb{P}_{π} -casi seguramente.

Ejemplo (continuación)

Notemos que $A_1 A_2 = 0$. Así, como el estado $\tilde{2} = (1, 2)$ es recurrente positivo, $\mathbb{P}_{\tilde{\pi}}$ -casi seguramente este estado aparece en la secuencia $(\theta(k-1), \dots, \theta(0))$ para k suficientemente grande ... Entonces se consigue $\alpha_{\pi} = -\infty < 0$ y el sistema es \mathbb{P}_{π} -casi seguramente.

Observe que $\rho(A_1) = \rho(A_2) = 2 \geq 1$, es decir, **la estabilidad del sistema de salto Markoviano no implica la estabilidad de los sistemas invariantes asociados.**

Ejemplo (continuación)

Notemos que $A_1 A_2 = 0$. Así, como el estado $\tilde{2} = (1, 2)$ es recurrente positivo, $\mathbb{P}_{\tilde{\pi}}$ -casi seguramente este estado aparece en la secuencia $(\theta(k-1), \dots, \theta(0))$ para k suficientemente grande ... Entonces se consigue $\alpha_{\pi} = -\infty < 0$ y el sistema es \mathbb{P}_{π} -casi seguramente.

Observe que $\rho(A_1) = \rho(A_2) = 2 \geq 1$, es decir, **la estabilidad del sistema de salto Markoviano no implica la estabilidad de los sistemas invariantes asociados.**

Se presume que cuando $\alpha_{\pi} = 0$ el sistema no es estable \mathbb{P}_{π} -casi seguramente.

Referencias

- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. & Marques, R. P. (2005), *Discrete-time Markov jump linear systems*, Springer Science & Business Media.
- Fang, Y. (1994), Stability analysis of linear control systems with uncertain parameters, PhD thesis, Case Western Reserve University.
- Fang, Y., Loparo, K. & Feng, X. (1995), 'Stability of discrete time jump linear systems', *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control* **5**(3), 275–321.

¡Muchas Gracias!