# Introducción al Análisis Matemático

Daniel Camarena

16 de septiembre de 2021

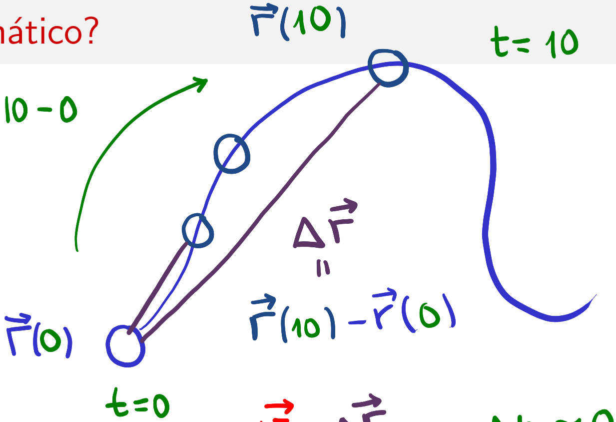
# Prólogo

# ¿Dónde nace el análisis matemático?

- Estudiar el **cambio**
- Velocidad
- Desplazamiento
- Continuidad

$\Delta t = 10 - 0$

$\vec{r}$ : posición




$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad \Delta t \approx 0$$

$$\underbrace{\sum_{\Delta t} \Delta \vec{r}}_{\Delta \vec{r}} \approx \sum_{\Delta t} \vec{v}\, \Delta t$$

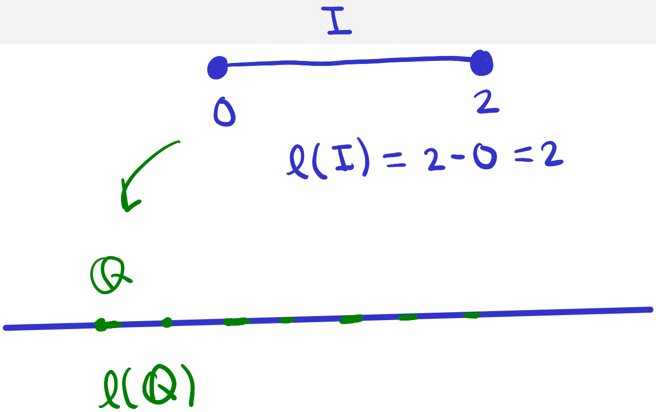
$$\Delta \vec{r} \approx \int v \, dt$$

Bibliografía recomendada.


- **[Apostol1]** Tom Apostol. Calculus Vol. I.
- **[Apostol2]** Tom Apostol. Calculus Vol. II.
- **[Abbott]** Stephen Abbott. Understanding Analysis.

# ¿Qué es análisis matemático?

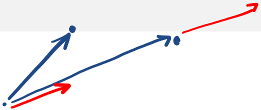
- Estudiar lo **medible**
- Medida
- Integral
- Convergencia
- Derivada




Bibliografía recomendada.


- [**Folland99**] G. Folland (1999). Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.
- [**Axler20**] Sheldon Axler (2020). Measure, Integration & Real Analysis.

# ¿Qué es análisis matemático?



$\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$

- Estudiar lo **lineal**
- Espacio lineal
- Transformación lineal
- Distancia
- Proyección

$$(f+g)'(0) = f'(0) + g'(0)$$

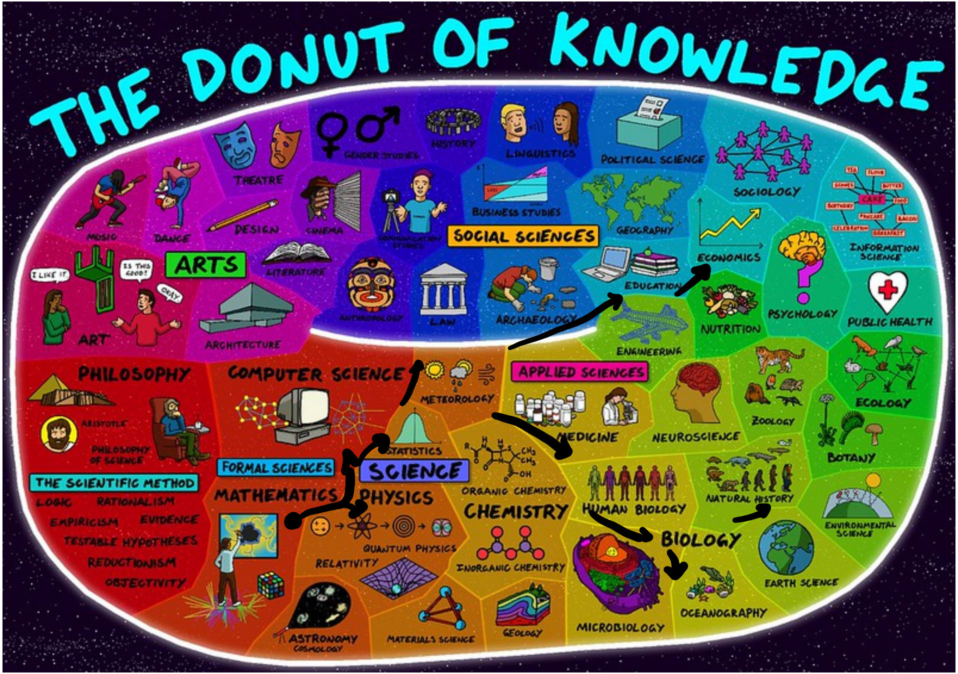
$$\int_0^1 (f+g)(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx$$

Bibliografía recomendada.


- [**Conway94**] J. Conway (1994). A Course in Functional Analysis.
- [**Daniel13**] Daniel Li (2013). Cours d'analyse fonctionnelle.

# ¿Qué más es análisis matemático?

- Estudiar las **funciones continuas** (Topología)
- Estudiar las **funciones convexas** (Optimización)
- Estudiar las **funciones complejas** ( $\mathbb{C}$ )
- Estudiar las **ecuaciones diferenciales ordinarias** ( $x' = f(x)$ )
- Estudiar las **ecuaciones diferenciales parciales** ( $\Delta u = 0$ )

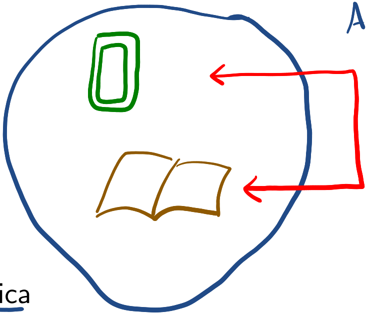

THE DONUT OF KNOWLEDGE
ARTS
MUSIC
DANCE
THEATRE
DESIGN
CINEMA
LITERATURE
ART
I LIKE IT
IS THIS GOOD?
OKAY.
ARCHITECTURE
GENDER STUDIES
HISTORY
LINGUISTICS
POLITICAL SCIENCE
BUSINESS STUDIES
SOCIAL SCIENCES
GEOGRAPHY
SOCIOLOGY
ECONOMICS
INFORMATION SCIENCE
ANTHROPOLOGY
LAW
ARCHAEOLOGY
EDUCATION
NUTRITION
PSYCHOLOGY
PUBLIC HEALTH
ENGINEERING
PHILOSOPHY
ARISTOTLE
PHILOSOPHY OF SCIENCE
THE SCIENTIFIC METHOD
LOGIC
RATIONALISM
EMPIRICISM
EVIDENCE
TESTABLE HYPOTHESES
REDUCTIONISM
OBJECTIVITY
COMPUTER SCIENCE
METEOROLOGY
APPLIED SCIENCES
MEDICINE
NEUROSCIENCE
ZOOLOGY
ECOLOGY
BOTANY
STATISTICS
FORMAL SCIENCES
SCIENCE
MATHEMATICS
PHYSICS
ORGANIC CHEMISTRY
CHEMISTRY
HUMAN BIOLOGY
NATURAL HISTORY
ENVIRONMENTAL SCIENCE
QUANTUM PHYSICS
RELATIVITY
INORGANIC CHEMISTRY
BIOLOGY
EARTH SCIENCE
ASTRONOMY
COSMOLOGY
MATERIALS SCIENCE
GEOLOGY
MICROBIOLOGY
OCEANOGRAPHY

# ¿Economía y Análisis Matemático?

- Estudiar **al agente económico y el mercado**
- Bienes y servicios
- Individuo
- Sistema
- Comportamiento humano

Preferencias

Alternativas



¿Tablet o libro?

Clasificación de la economía:

- Economía Teórica vs Economía Empírica
- Microeconomía vs Macroeconomía

Estadística

Teo moderna de Prob. ← Teoría de Medida

# Contenido

# Lógica y Conjuntos

# Lógica Matemática

V o F

- ¿Qué es la lógica matemática?
- Proposiciones
- Operadores lógicos
- Funciones proposicionales
- $\forall$ Cuantificadores
- Argumentos

$\cdot p$ $*\neg$
$*\wedge$
$\cdot q$
$\cdot \equiv$
$*\forall$

p: está lloviendo
q: la vacuna no es efectiva

¿$p \equiv q$?
Equivalencia lógica

$P(x)$: Toda vacuna $x$ con efectividad $\geq 90\%$ se llama efectiva

$\neg, \wedge, \vee$

si llueve entonces la vacuna es efectiva

$\rightarrow, \leftrightarrow$

$P(\text{rusa}) \wedge r \rightarrow s$

r: La vacuna rusa supera tiene efect. $\geq 90\%$

$\therefore$ La vacuna rusa es efectiva: s

Bibliografía recomendada.


- ✓ **[Johnsonbaugh]** Johnsonbaugh (2005). Matemáticas Discretas.
- ✓ **[Rosen]** Rosen (2019). Discrete Mathematics and Its Applications.

# Operadores lógicos

A: Esta lloviendo
B: La vacuna rusa es efectiva

**Negación**

| A | ¬ A |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

**Conjunción**

| A | B | A ∧ B |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

$A \wedge B$:

**Disyunción**

| A | B | A ∨ B |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

$A \vee B$:

**Condicionalidad**

| A | B | A → B |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

$A \rightarrow B$:

**Bicondicionalidad**

| A | B | A ↔ B |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

## Leyes lógicas

Conmutativas: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

Asociativa: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Distributivas: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Morgan: $\neg (p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

Condicional: $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$

$$\neg (p \to q) \equiv \underbrace{\neg(\neg p)} \wedge \neg q$$

$$\equiv p \wedge \neg q$$

## Leyes de conjuntos

$A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$\vdots$

<u>Def:</u> $\lim a_n \neq L$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \; n \geq N \wedge |a_n - L| \geq \varepsilon$$

- Demostraciones

Teo: $m,n \in \mathbb{Z} \wedge m \text{ par} \wedge n \text{ par} \longrightarrow m+n \text{ par}$

$$
\begin{array}{r}
m = 2k \\
n = 2\ell \quad + \\
\hline
m+n = 2(k+\ell)
\end{array}
\longrightarrow m+n \text{ es par}
$$

- Teo: $p \vee q \longrightarrow r$

$p \equiv V$

$q \equiv V$

- Teo: $p \longrightarrow (q \vee r)$

$(p \wedge \neg q) \longrightarrow r$

# Teoría de Conjuntos

"colección de objetos" $A, B, C \ldots$

"pertenencia" $\in$

- ¿Qué son los conjuntos?
- Historia de la teoría de conjuntos
- Operaciones con conjuntos $\cap, \cup$ $=$ $\subset$
- → Relaciones
- → Relaciones de orden
- → Funciones

Bibliografía recomendada.


- **[Johnsonbaugh]** Johnsonbaugh (2005). Matemáticas Discretas.
- **[Garling]** Garling (2013). A Course in Mathematical Analysis. Vol 1.

# Operaciones con conjuntos

Conjuntos + Pertenencia

A, B,

$a \in A <$ V / F

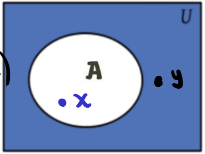
$x \in A \equiv V$

$y \in A \equiv F$

$y \notin A \equiv \neg(y \in A)$

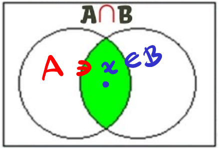
$\equiv V$

**Complemento $A^c$**



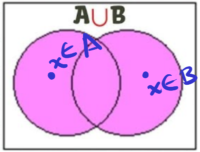

$\{x : x \notin A\} = A^c$

**Intersección**



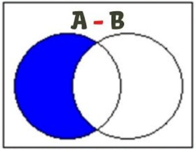

$\{x : x \in B \wedge x \in A\} = A \cap B$

**Unión**

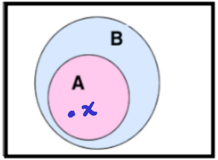



$\{x : x \in A \vee x \in B\} = A \cup B$

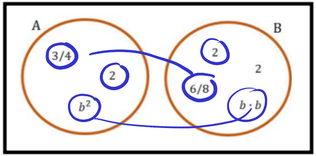
**Diferencia**




**Inclusión**




**Igualdad**




$A \subset B \equiv \forall x, x \in A \to x \in B$

$A = B \equiv \forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B$

# Conjuntos y Números Reales

# Teoría de Conjuntos

- ¿Qué son los conjuntos?
- Historia de la teoría de conjuntos
- Operaciones con conjuntos
- Relaciones
- Relaciones de orden
- Funciones

Bibliografía recomendada.


- **[Johnsonbaugh]** Johnsonbaugh (2005). Matemáticas Discretas.
- **[Garling]** Garling (2013). A Course in Mathematical Analysis. Vol 1.

conjuntos + pertenencia

$a, b$ $\quad$ $a \in b <$ V / F

Teoría de Conjuntos

ZF + C

**Def.:** $a \subseteq b \equiv \forall x, x \in a \rightarrow x \in b$ $\quad$ inclusión

① $a = b \equiv a \subseteq b \wedge b \subseteq a$ $\quad$ igualdad

② $\exists a$ tal que para todo conjunto $x$, $x \notin a$ $\quad$ conjunto vacío

**Not.:** $\emptyset$, $\{\ \}$

- $|x| \leq -1 \rightarrow C.S. = ?$
- ¿$\emptyset \in \emptyset$? No pues $\emptyset$ es un conjunto $\quad$ $\emptyset \notin \emptyset \equiv V$
- ¿$\emptyset \subset a$? Si

③ $a, b$ conjuntos $\exists \{a,b\}$ par no ordenado $\{a,b\}=\{b,a\}$

Def: $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$ par ordenado

- $\{a,b\}=\{c,d\} \rightarrow$ ?

Prop: $(a,b)=(c,d)$ entonces $a=c \wedge b=d$ $\mathbb{R}^2$

④ Los elementos de $A$ son conjuntos

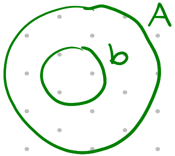
$\exists \bigcup_{x\in A} x$ (unión de los miembros de A)

$y \in \bigcup_{x\in A} x \Leftrightarrow \exists x\in A,\ y\in x$

$A\cup B=\{x : x\in A \vee x\in B\}$

- $A\cup B = \bigcup_{x\in\{A,B\}} x$

5. Existe $P(A)$ conjunto potencia




$$\underline{b \in P(A)} \iff \underline{b \subseteq A}$$

- $P(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
- $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\} \in \ ?$ $\quad \in P(B) = P(P(\{a,b\}))$

$\in \underbrace{P(\{a,b\})}_{B}$

6. $A$ conjunto

$Q(x)$ fórmula bien definida

$\{x \in A : Q(x)\}$ es un conjunto

**Teorema:** No existe un conjunto $\Omega$ tal que si $a$ es un conjunto entonces $a \in \Omega$

No existe el conjunto universal

**Prueba:** Argumento de la Paradoja de Rusell.

Por contradicción Suponga que tal conjunto $\Omega$ existe

Como $Q(x): x \notin x$ es una fórmula bien definida

entonces $b = \underbrace{\{x \in \Omega : x \notin x\}}_{\checkmark}$ existe ... es un conjunto

$$\begin{cases} b \in b \to b \notin b & \text{por def } (\to\leftarrow) \\ \underbrace{b \notin b \wedge b \in \Omega}_{} \to b \in b & (\to\leftarrow) \end{cases}$$

- $A \cap B = \{x \in A : \underbrace{x \in B}_{Q(x)}\}$

  $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \leftrightarrow x \in B \cap A$

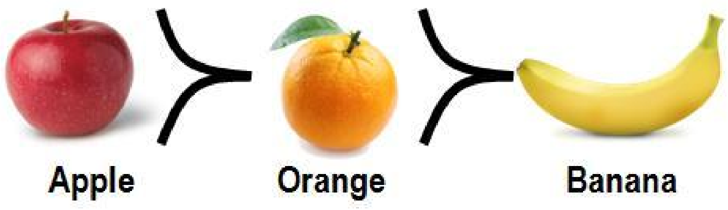
  $B \cap A = \{x \in B : x \in A\}$

- $A \cap B = \emptyset$ excluyentes

- $A \setminus B = \{x \in A : \underbrace{x \notin B}_{Q(x)}\}$

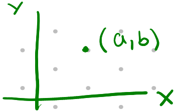
- $\bigcap_{x \in A} x = \{y \in \underbrace{\bigcup_{x \in A} x}_{\text{conjunto}} : \underbrace{\forall a \in A,\ y \in a}_{Q(y)}\}$ (intersección de los miembros de A)

# Relaciones



# Relaciones

$$(a,b) \in P(P(\underbrace{\{a,b\}}_{\underbrace{\{a\}}_{A}\cup\underbrace{\{b\}}_{B}}))$$




$$\underbrace{A \times B} = \{ x \in \boxed{P(P(A \cup B))} : \underbrace{\exists a \in A, \exists b \in B, x = (a,b)}_{Q(x)} \}$$

- Descartes → producto cartesiano

**Def.:** $R$ es una relación sobre $A \times B$ si $R \subseteq A \times B$

- $\underline{(a,b) \in R}$ se denota $\overset{a \gtrsim b}{aRb}$
- $dom(R) = \{ a \in A : \exists b \in B, (a,b) \in R \}$
- $rango(R) = \{ b \in B : \exists a \in A, (a,b) \in R \}$

$R$ es una relación en $A$ si $R \subset A \times A$

Fija un conj. $A$.

- $\in_A = \{ (b,B) \in A \times P(A) : \underbrace{b \in B} \}$ es una relación?

$\in_A \subseteq A \times P(A)$

- $\subseteq_A = \{ (B,C) \in P(A) \times P(A) : \underbrace{B \subseteq C} \}$ es una relación $P(A)$

inclusión

$\subseteq_A \subseteq P(A) \times P(A)$ ✓

$\leq$ es una relación de orden parcial en $A$ si $(\leq \subseteq A \times A)$

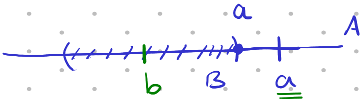
i) $a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$ (transitividad)

ii) $a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a = b$ (antisimetría)

**Interpretación:**

$a \leq b$ "a es menor o igual a b"

$\boxed{b \geq a}$ "b es mayor o igual a a"




**Cotas:** $a \in A$, $B \subseteq A$

$a$ es una cota superior de $B$ si $\forall b \in B$, $b \leq a$

$a$ es una cota inferior de $B$ si $\forall b \in B$, $a \leq b$

**Observación:**

Una cota superior puede no estar en $B$, si lo está se llama máximo

$B$ solo puede admitir un máximo

## Maximal y minimal:

$a$ es un maximal de $B$ si $a \in B \wedge (\forall b \in B, a \leq b \rightarrow a = b)$

$a$ es un minimal de $B$ si $a \in B \wedge (\forall b \in B, b \leq a \rightarrow a = b)$

Entonces

$a$ máximo de $B$ $\rightarrow$ $a$ maximal de $B$

$a$ maximal de $B$ $\rightarrow$ $a$ es el único elemento de $B$ mayor o igual a $b$

## Supremo e ínfimo:

$a$ es el supremo de $B$ si $\begin{cases} a \text{ es cota superior de } B \\ c \text{ es cota superior de } B \rightarrow a \leq c \end{cases}$

$b$ es el ínfimo de $B$ si $\begin{cases} a \text{ es cota inferior de } B \\ c \text{ es cota inferior de } B \rightarrow c \leq a \end{cases}$

Entonces

$a$ máximo de $B$ $\rightarrow$ $a$ supremo de $B$

$a$ supremo de $B$ $\rightarrow$ $a$ la menor cota superior de $B$

$B$ solo puede admitir un supremo

$a$ y $b$ se llaman comparables si $a \leq b \vee b \leq a$

$\leq$ se dice total si todo par de elementos de $A$ son comparables
(completa)

## Preferencias (Microeconomics I, MIT)

$\succsim$ relación en $X$

$x \succsim y$ "$x$ es débilmente preferido a $y$"

$\succsim$ es racional si es $\begin{cases} \text{completa} & \text{y} \\ \text{transitiva} \end{cases}$

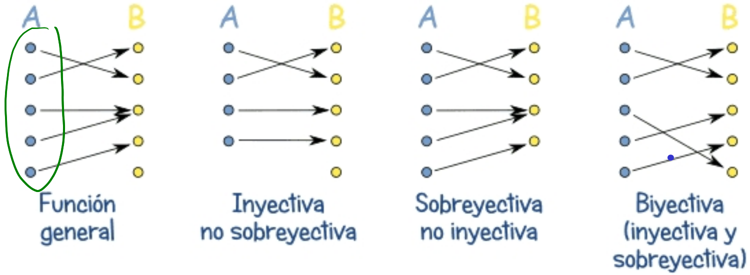
**Ejercicio:** $\succsim$ preferencia racional y reflexiva ($x \succsim x$)

$x \sim y \equiv (x \succsim y) \wedge (y \succsim x)$ se llama indiferencia

equivalencia

Probar que $\sim$ es simétrica, reflexiva y transitiva

# Funciones



A
B
Función general
A
B
Inyectiva no sobreyectiva
A
B
Sobreyectiva no inyectiva
A
B
Biyectiva (inyectiva y sobreyectiva)

Sea $f$ una relación sobre $A \times B$

$f$ se llama **función de $A$ en $B$** si $\forall a \in A, \exists! b \in B, (a,b) \in f$

(mapa, aplicación)

**Notación:** $b = f(a)$ llamado imagen de $a$ vía $f$

$f = \{ z \in A \times B : z = (a, f(a)) \}$ gráfica de $f$

**Esquema:** $a \longmapsto \boxed{\text{caja negra}} \longrightarrow f(a)$

$f : A \longrightarrow B$

$a \longmapsto f(a)$

Regla de correspond

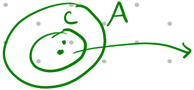
$A \xrightarrow{f} B$

$a \longmapsto f(a)$

**Ejemplo:** $s : A \longrightarrow P(A)$

$a \longmapsto \{a\} = \{a, a\}$

Si $f : A \to B$ y $C \subseteq A$, se define la imagen de $C$ vía $f$ por




$$f(C) = \{ y \in B : \exists x \in C, y = f(x) \}$$

Se ha extendido la noción de imagen de elementos a subconjuntos

$$P_f : \overline{P(A)} \longrightarrow \overline{P(B)}$$
$$C \longmapsto f(C)$$

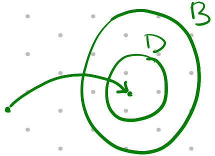
Como $\emptyset \subseteq A$, debe estar definido $P_f(\emptyset) = \emptyset \longrightarrow f(\emptyset) = \emptyset$

**Obs:** En teoría general de funciones $f(\emptyset)$ puede ser diferente de $\emptyset$

$$( s(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset )$$

Si $f : A \to B$ y $D \subseteq B$, se define la imagen inversa de $C$ vía $f$ por

$$f^{-1}(D) = \{ x \in A : \exists\, y \in D,\ y = f(x) \}$$




lo cual define a la función imagen inversa

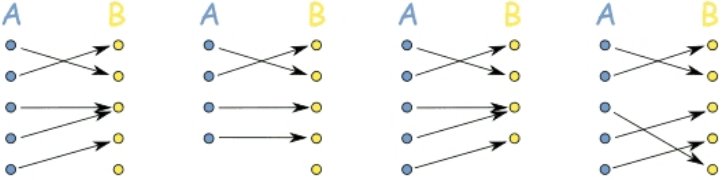
$$f^{-1} : \overline{P(B)} \longrightarrow \overline{P(A)}$$
$$D \longmapsto f^{-1}(D)$$

**Obs:** Si $b \in B$, $f^{-1}(\{b\})$ se llama imagen inversa de $b$ y se denota $f^{-1}(b)$

# Funciones Sea una función $f: A \to B$

$f$ es inyectiva si $f^{-1}(b)=\{a\}$ para algún $a \in A$ $\big( f(a)=f(a') \to a=a' \big)$
(uno-uno,
inyección)

Ejemplo: $B \subseteq A$, $i_B : B \to A$, $x \mapsto x$ inclusión




Función general

Inyectiva no sobreyectiva

Sobreyectiva no inyectiva

Biyectiva (inyectiva y sobreyectiva)

$f$ es sobreyectiva si $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ $\big( f(x)=b$ admite solución$\big)$
(suryectiva,
suryección)

Ejemplo: $\pi_A : A \times B \to A$, $(a,b) \mapsto a$ proyección

## $\sigma$-álgebra (Teoría de la medida)

$\mathcal{A}$ es un $\sigma$-álgebra en $\Omega$ si $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$ y

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \longrightarrow \underset{\Omega \setminus A}{\overset{\shortparallel}{A^c}} \in \mathcal{A}$

iii) $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup\limits_{A \in \{A_n : n \in \mathbb{N}\}} A \in \mathcal{A}$

**Ejemplo:** $\Omega = \{a, b\}$ ✓

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ ✗

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ✓

importancia en $\Omega$ "continuos" (conjuntos infinitos no contables)

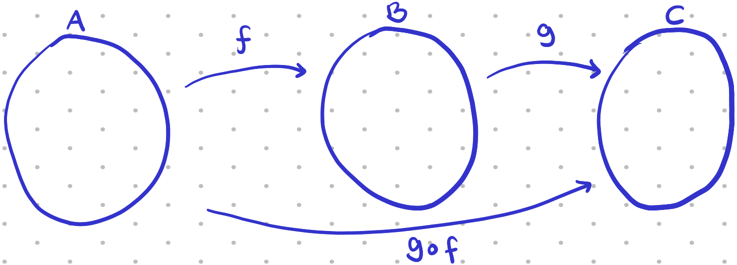
**Ejercicio:** $\mathcal{E}$ un $\sigma$-álgebra en $E$

$f: \Omega \longrightarrow E$ una función

Probar que $\mathcal{A} = \{ f^{-1}(B) : B \in \mathcal{E} \}$ es un $\sigma$-álgebra en $\Omega$

$\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{E})$

**Composición:** $f: A \to B$, $g: B \to C$ se define $g \circ f: A \to C$
$$a \mapsto g(f(a))$$




$g \circ f$ es la función composición de $g$ con $f$, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

**Observación:** Esta operación no es conmutativa pero sí asociativa

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Si $f$ biyectiva $f^{-1}: B \to A$, $b \mapsto f^{-1}(\{b\})$ función inversa y $f^{-1} \circ f: A \to A$, $a \mapsto a$ $\quad f \circ f^{-1}: B \to B$, $b \mapsto b$

# Teoremas en teoría de conjuntos

## The Knaster-Tarski fixed-point theorem:

Si $f: P(A) \to P(A)$ función creciente entonces $f$ admite un punto fijo

$[B \subseteq C \subseteq A \to f(B) \subseteq f(C)]$ $(\exists G \subseteq A$ tal que $f(G) = G)$

## The Schröder-Bernstein theorem:

$f: A \to B$ , $g: B \to A$ son inyectivas implican $\exists\, h: A \to B$ biyectiva

## Cantor's theorem: $f: A \to P(A)$ no puede ser sobreyectiva.

**Ejercicio:** $g: P(A) \to A$ no puede ser inyectiva (asuma $A \neq \emptyset$)

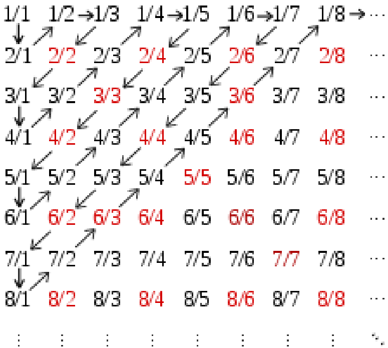
# Números Reales

- ¿Qué son los números reales?
- Conjuntos finitos y contables
- Fracciones y decimales
- Desigualdades e intervalos
- Valor absoluto
- Acotamiento y completitud

Bibliografía recomendada.


- [**Abbott**] Abbott (2015). Understanding Analysis.
- **[Garling]** Garling (2013). A Course in Mathematical Analysis. Vol 1.

# Conjuntos contables



(7)

(8) Si $A$ es un conjunto no vacío entonces existe $a \in A$ tq $a \cap A = \emptyset$

Es decir, $a$ y $A$ no tienen elementos en común.
Esto evita rondar en círculos.

Proposición: $a \notin a$

Prueba: Considere $\{a\} \neq \emptyset$ entonces $a \cap \{a\} = \emptyset$.
Como $a \in \{a\}$ entonces $a \notin a$.

Se define $a^+ = a \cup \{a\}$ entonces $a \subseteq a^+$

Un conjunto $A$ es llamado conjunto sucesor si $\begin{cases} \emptyset \in A \\ a \in A \rightarrow a^+ \in A \end{cases}$

## 9 Existe un conjunto sucesor S

**Teorema (el conjunto sucesor más pequeño):**

Existe un conjunto sucesor $\mathbb{N}$ tal que si $T$ es un conjunto sucesor entonces $\mathbb{N} \subseteq T$

**Prueba:** Sea $S$ un conjunto sucesor, defina

$$\mathbb{N} = \bigcap \{ B \in P(S) : B \text{ es conjunto sucesor} \}$$

La intersección esta bien definida, de hecho resulta un conjunto sucesor. Si $T$ es un conjunto sucesor entonces $S \cap T \subseteq S$ es un conjunto sucesor y

$$\mathbb{N} \subseteq S \cap T \subseteq T$$

**Teorema (Modelo del conjunto de los números naturales):**

Si $\begin{aligned} s : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^+ \end{aligned}$ entonces $(\mathbb{N}, s)$ cumple los axiomas de Peano

**Notación:** $1 = \emptyset$, $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, ...

## 10 Axioma de Elección:

Si $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ es una familia de conjuntos no vacíos entonces $\prod_{\alpha \in A} B_\alpha$ es no vacío

Es decir, existe una función elección $c: A \to \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ tq $\forall \alpha \in A$, $c_\alpha = c(\alpha) \in B_\alpha$

**Observación:** Axioma de elección $\longleftrightarrow$ Lema de Zorn

## Conjuntos finitos

$(\mathbb{N}, s)$ modelo numérico para contar

Adición $\begin{cases} n+1 = s(n) \\ n + s(m) = s(n+m) \end{cases}$

Comparación $\begin{cases} n < m \text{ si} \\ \exists k \in \mathbb{N},\ n+k = m \end{cases}$

Para $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \{ i \in \mathbb{N} : i < n \vee i = n \} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Se dice que un conjunto $A$ es finito si $A$ es vacío o $\exists c: I_n \to A$ biyección

**Observación:** $c$ establece una enumeración de $A$, $A = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ (finita y ordenada)

## Resultados:

- $f: I_m \to I_n$ inyectiva implica $m < n \vee m = n$
- Si $A \neq \emptyset$ es finito entonces admite máximo
- Si $A \neq \emptyset$ es finito entonces $\exists! \, n \in \mathbb{N}$ tq $c: I_n \to A$ es biyección

Si $A$ es finito se define su cardinal

$$\#A = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ n & \text{si } A \neq \emptyset \text{ y } c: I_n \to A \text{ biyección} \end{cases}$$

- Si $A$ es finito entonces $\#P(A) = 2^{\#A}$

## Conjuntos infinitos:

Un conjunto $A$ se llama infinito si no es finito

- $\mathbb{N}$ no es finito $\to$ $\mathbb{N}$ es infinito

Un conjunto $A$ se llama contable si $A$ es finito o $\exists \; c: \mathbb{N} \to A$ biyección.
(enumeración)

**Proposición:** Son equivalentes

i) $A$ es contable

ii) $A = \emptyset \vee \exists f : \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva

iii) $\exists f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

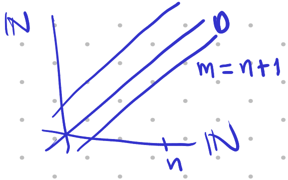
- No cualquier conjunto infinito es contable

  $f : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ no puede ser sobreyectiva

- Si $B$ contable y $A \subseteq B$ entonces $A$ contable
- Si $g : A \to B$ y $A$ contable entonces $g(A)$ contable
- Si $A$ y $B$ contables entonces $A \times B$ contable
- Si $A$ contable y $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de conjuntos contables entonces $\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ es contable

**Observación:** ¡El todo no es más grande que las partes!

# Conjunto de números reales




$(\mathbb{N}, +, \cdot, <)$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$

$\sim_1$ relación en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$(m,n) \sim_1 (p,q) \equiv (m+q = n+p)$$

$\vdots$

$[(2,1)] = -1$

$[(1,1)] = 0$

$[(1,2)] = 1$

$\vdots$

$$\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{\sim_1}$$

$$\mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{\sim_2}$$

$$\mathbb{R} = \frac{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}{\sim_3}$$

$$\Big( \underbrace{\underbrace{\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Conjunto}}, =, +, \cdot}_{\text{cuerpo}}, \leq}_{\text{cuerpo ordenado}}, \quad \Big)$$

**Completitud: Axioma del Supremo**

Si $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente admite supremo

- $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente $\longrightarrow$ Principio Arquimedeano

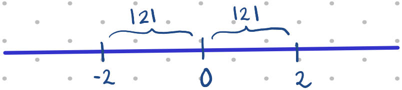
$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \longleftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

# Intervalos

| | | |
|---|---|---|
| **cerrado** | $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,:\,a\le x\le b\}$ |  |
| **abierto** | $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,a< x< b\}$ |  |
| **semiabierto o semicerrado** | $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,a\le x< b\}$ |  |
| **semiabierto o semicerrado** | $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,:\,a< x\le b\}$ |  |
| **semirrecta cerrada** | $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,x\ge a\}$ |  |
| **semirrecta abierta** | $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,x> a\}$ |  |
| **semirrecta cerrada** | $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\,:\,x\le b\}$ |  |
| **semirrecta abierta** | $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,x< b\}$ |  |
| **recta real** | $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ |  |

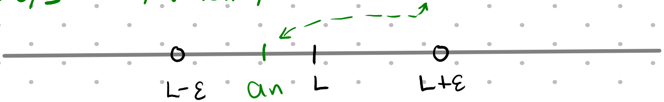
# Valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$




- $|x| \leq r \leftrightarrow r \geq 0 \wedge (-r \leq x \leq r) \leftrightarrow x^2 \leq r^2 \wedge r \geq 0$
- $|x| \geq r \leftrightarrow x \geq r \vee x \leq -r \leftrightarrow x^2 \geq r^2$
- $|-x| = |x|$
- $x \leq |x| \wedge -x \leq |x|$ (luego $|x| = \text{máx}\{-x, x\}$)
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $|a+b| \leq |a| + |b| \leftrightarrow (a+b)^2 \leq (|a|+|b|)^2$

$\lim a_n = L$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$



# Resumen y Preguntas

# El análisis matemático es útil en el...

- **Entrenar un pensamiento lógico, estructurado y riguroso**
- **Fundamento teórico de la economía**
- **Modelamiento matemático en economía**
- **Diseño de la metodología en un proyecto de investigación económica**
- **Background para un posgrado en economía**

# Recursos...

- **Primeras clases de Mate 1 (UP)**
- **Microeconomics I (MIT)**
- **Análise na Reta (IMPA)**
- **Ejercicios de análisis**
- **Otros: teoría de la medida, programación dinámica...**

# ¡Muchas Gracias!