Sistemas Lineales con Saltos Markovianos

I Simposio Internacional de Ciencias e Ingeniería
ISSE 2017

Camarena Pérez, V. Daniel
writer2505@gmail.com

Universidad Nacional de Ingeniería

2 de febrero del 2017

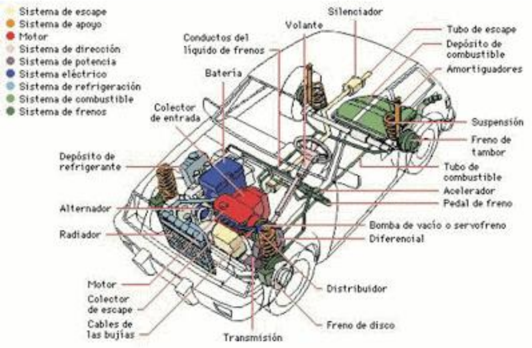
Introducción

Introducción

El presente trabajo busca abordar el estudio de un modelo matemático que sirve para describir diversos sistemas físicos, como aparatos electrónicos, o sistemas económicos, étc; que funcionan mediante recepción, procesamiento y envío de señales. Una etapa crucial es el procesamiento pues esta asociada al rendimiento del sistema. En matemática para estudiar esta etapa hablamos del concepto de estabilidad del sistema.

Introducción

Introducción



Introducción

Introducción

Sistema de entrada y salida:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) \\
y(k) &= C_{\theta(k)}x(k)
\end{aligned}
$$

Sistemas Lineales de Tiempo Discreto

Sistemas Lineales de Tiempo Discreto

Un *sistema lineal de tiempo discreto es un sistema (SLTD)* definido por la dinámica siguiente:

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{1}$$

donde:

El vector $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado del sistema en el instante k

La matriz cuadrada A es la matriz asociada al sistema (1).

Sistemas Lineales de Tiempo Discreto

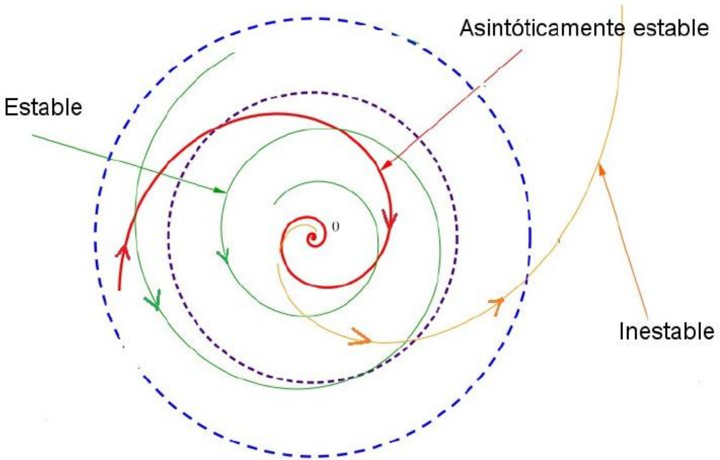
Un *sistema lineal de tiempo discreto es un sistema (SLTD)* definido por la dinámica siguiente:

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{1}$$

donde:
El vector $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado del sistema en el instante k
La matriz cuadrada A es la matriz asociada al sistema (1).
Con condición inicial $x(0) = x_0$ o también llamado estado inicial del sistema.

Sistemas Lineales de Tiempo Discreto

Sistemas Lineales de Tiempo Discreto



Sistemas Lineales de Tiempo Discreto

Sistemas Lineales de Tiempo Discreto

Teorema (Teorema de estabilidad)

Sea el sistema (1), *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

Sistemas Lineales de Tiempo Discreto

Teorema (Teorema de estabilidad)

Sea el sistema (1), *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El origen,* $x = 0$, *es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*

Sistemas Lineales de Tiempo Discreto

Teorema (Teorema de estabilidad)

Sea el sistema (1), *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El origen,* $x = 0$, *es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*
2. *Para cualquier* $x(0) \in \mathbb{R}^n$, *la sucesión* $\{x(k)\}_{k \geq 0}$ *converge al origen, es decir,*
$$\lim_{k \to \infty} x(k) = 0 \ \ \forall \ x(0) \in \mathbb{R}^n$$

Sistemas Lineales de Tiempo Discreto

Teorema (Teorema de estabilidad)

Sea el sistema (1), *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El origen,* $x = 0$, *es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*
2. *Para cualquier* $x(0) \in \mathbb{R}^n$, *la sucesión* $\{x(k)\}_{k \geq 0}$ *converge al origen, es decir,*

$$\text{lím}_{k \to \infty} x(k) = 0 \ \ \forall \ x(0) \in \mathbb{R}^n$$

3. *El radio espectral de la matriz asociada es menor a uno, es decir,* $\rho(A) < 1$

Sistemas Lineales de Tiempo Discreto

Teorema (Teorema de estabilidad)

Sea el sistema (1), *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El origen,* $x = 0$, *es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*
2. *Para cualquier* $x(0) \in \mathbb{R}^n$, *la sucesión* $\{x(k)\}_{k\geq 0}$ *converge al origen, es decir,*

$$\text{lím}_{k\to\infty} x(k) = 0 \ \ \forall\ x(0) \in \mathbb{R}^n$$

3. *El radio espectral de la matriz asociada es menor a uno, es decir,* $\rho(A) < 1$
4. *Ecuación de Lyapunov: dada una matriz* $N > 0$ *existe una solución única,* $M > 0$, *para la ecuación*

$$M - A^T MA = N \tag{2}$$

Cadenas de Markov

Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son procesos aleatorios sin memoria, es decir, cada instante de su evolución futura depende sólo de su posición actual, no de su trayectoria o historia pasada.

Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son procesos aleatorios sin memoria, es decir, cada instante de su evolución futura depende sólo de su posición actual, no de su trayectoria o historia pasada.
Sea $E = \{e_1, \ldots, e_d\}$ el espacio de estados, una sucesión $\{\theta_n \colon n \geq 0\}$ de variables aleatorias es una cadena de Markov en E cuando verifica la propiedad de Markov: para todos los estados $e_0, \ldots, e_{n+1} \in E$ se cumple:

Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son procesos aleatorios sin memoria, es decir, cada instante de su evolución futura depende sólo de su posición actual, no de su trayectoria o historia pasada.
Sea $E = \{e_1, \ldots, e_d\}$ el espacio de estados, una sucesión $\{\theta_n : n \geq 0\}$ de variables aleatorias es una cadena de Markov en E cuando verifica la propiedad de Markov: para todos los estados $e_0, \ldots, e_{n+1} \in E$ se cumple:

$$\mathbb{P}\left(\theta_{n+1} = e_{n+1} | \theta_0 = e_0, \ldots, \theta_n = e_n\right) = \mathbb{P}\left(\theta_{n+1} = e_{n+1} | \theta_n = e_n\right)$$

Cadenas de Markov

Cadenas de Markov

Ecuación de Chapman-Kolgommorov

Cadenas de Markov

Ecuación de Chapman-Kolgommorov

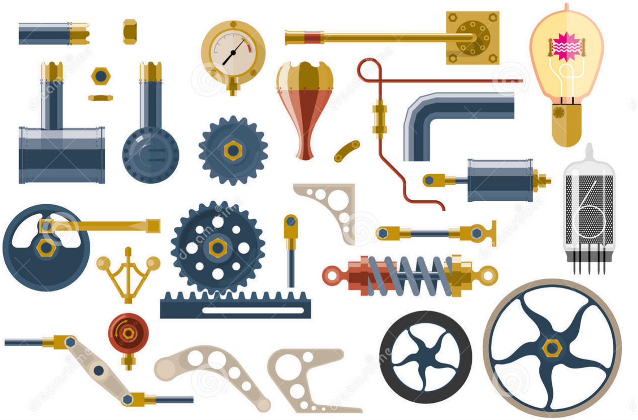
$$P^{(n)}(e_i, e_j) = \sum_{e_k \in E} P^{(m)}(e_i, e_k) P^{(n-m)}(e_k, e_j)$$

Cadenas de Markov

Cadenas de Markov

Cadenas de Markov

Cadenas de Markov



Sistema Lineal con Saltos Markovianos

Sistema Lineal con Saltos Markovianos

Un sistema lineal con saltos markovianos (SLSM) esta establecido por la siguiente dinámica

$$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) \quad k \geq 1 \tag{3}$$

Sistema Lineal con Saltos Markovianos

Un sistema lineal con saltos markovianos (SLSM) esta establecido por la siguiente dinámica

$$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) \quad k \geq 1 \tag{3}$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ variable de estado y $\{\theta(k) : k \in\geq 1\}$ es una cadena de Markov homogénea con espacio de estados $\mathbb{L} = \{1, \ldots, L\}$, matriz de transición $P = [p_{ij}]$ y vector de distribución inicial $\pi = [\pi_1 \ldots \ \pi_L]$

Sistema Lineal con Saltos Markovianos

Un sistema lineal con saltos markovianos (SLSM) esta establecido por la siguiente dinámica

$$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) \quad k \geq 1 \tag{3}$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ variable de estado y $\{\theta(k) : k \in \geq 1\}$ es una cadena de Markov homogénea con espacio de estados $\mathbb{L} = \{1, \dots, L\}$, matriz de transición $P = [p_{ij}]$ y vector de distribución inicial $\pi = [\pi_1 \dots \ \pi_L]$
Condiciones iniciales:

$$x(0), \quad \theta(0)$$

(dos variables aleatorias independientes).

Para cada $k \geq 1$ e $i \in \mathbb{L}$ se denota:

Para cada $k \geq 1$ e $i \in \mathbb{L}$ se denota:

$$Q_i(k) = \mathbb{E}[x(k)x(k)^T 1_{\{\theta(k)=i\}}] \tag{4}$$

$$Q(k) = \mathbb{E}\left[x(k)x(k)^T\right] \tag{5}$$

$$q_i(k) = \text{vec}(Q_i(k)) \tag{6}$$

$$q(k) = \begin{bmatrix} q_1(k) \\ \vdots \\ q_L(k) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Estabilidad en Media Cuadrática

Estabilidad en Media Cuadrática

Se dice que el sistema (3) es *estable en media cuadrática (EMC)* si para cualesquiera condiciones iniciales $x(0), \theta(0)$ se cumple

$$\lim_{k\to\infty} Q(k) = 0$$

Estabilidad en Media Cuadrática

Se dice que el sistema (3) es *estable en media cuadrática (EMC)* si para cualesquiera condiciones iniciales $x(0), \theta(0)$ se cumple

$$\text{lím}_{k\to\infty} Q(k) = 0$$

El sistema (3) se puede transformar en un sistema lineal de tiempo discreto.

Estabilidad en Media Cuadrática

Se dice que el sistema (3) es *estable en media cuadrática (EMC)* si para cualesquiera condiciones iniciales $x(0), \theta(0)$ se cumple

$$\lim_{k\to\infty} Q(k) = 0$$

El sistema (3) se puede transformar en un sistema lineal de tiempo discreto. Para cada $k \geq 1$ el vector $q(k)$ es solución del sistema

$$z(k+1) = \mathcal{A}z(k) \tag{8}$$

donde $\mathcal{A} = (P^T \otimes I_{n^2})\text{diag}[A_1 \otimes A_1, ..., A_L \otimes A_L]$

Estabilidad en Media Cuadrática

Se dice que el sistema (3) es *estable en media cuadrática (EMC)* si para cualesquiera condiciones iniciales $x(0), \theta(0)$ se cumple

$$\lim_{k\to\infty} Q(k) = 0$$

El sistema (3) se puede transformar en un sistema lineal de tiempo discreto. Para cada $k \geq 1$ el vector $q(k)$ es solución del sistema

$$z(k+1) = \mathcal{A}z(k) \tag{8}$$

donde $\mathcal{A} = (P^T \otimes I_{n^2})\text{diag}[A_1 \otimes A_1, ..., A_L \otimes A_L]$

Estabilidad en Media Cuadrática

Estabilidad en Media Cuadrática

El sistema (3) es EMC si y solo si para todos $x(0), \theta(0)$ se cumple

$$\lim_{k \to \infty} q(k) = 0$$

Estabilidad en Media Cuadrática

El sistema (3) es EMC si y solo si para todos $x(0), \theta(0)$ se cumple

$$\lim_{k\to\infty} q(k) = 0$$

Teorema

El sistema (3) es EMC si y solo si $\rho(\mathcal{A}) < 1$

Estabilidad en Media Cuadrática

Estabilidad en Media Cuadrática

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix},$$

Estabilidad en Media Cuadrática

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix},$$

Las matrices A_1 y A_2 son inestables.

Estabilidad en Media Cuadrática

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix},$$

Las matrices A_1 y A_2 son inestables.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 22{,}5 & 0{,}064 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 1{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 1{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}036 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}5 & 0{,}096 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 2{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 2{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}004 & 60 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Estabilidad en Media Cuadrática

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix},$$

Las matrices A_1 y A_2 son inestables.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 22{,}5 & 0{,}064 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 1{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 1{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}036 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}5 & 0{,}096 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 2{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 2{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}004 & 60 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que $\rho(\mathcal{A}) = 10{,}066 > 1$, por tanto el sistema no es EMC.

Estabilidad en Media Cuadrática

Estabilidad en Media Cuadrática

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}85 & 0{,}15 \end{bmatrix},$$

Estabilidad en Media Cuadrática

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}85 & 0{,}15 \end{bmatrix},$$

Las matrices A_1 y A_2 son inestables.

Estabilidad en Media Cuadrática

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}85 & 0{,}15 \end{bmatrix},$$

Las matrices A_1 y A_2 son inestables.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0{,}45 & -0{,}6 & -0{,}6 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}4 \\ 1{,}8 & -2{,}4 & -2{,}4 & 3{,}2 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Estabilidad en Media Cuadrática

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}85 & 0{,}15 \end{bmatrix},$$

Las matrices A_1 y A_2 son inestables.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0{,}45 & -0{,}6 & -0{,}6 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}4 \\ 1{,}8 & -2{,}4 & -2{,}4 & 3{,}2 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Observemos que $\rho(\mathcal{A}) = 0{,}6 > 1$, por tanto el sistema no es EMC.

La Estabilidad Estocástica

La Estabilidad Estocástica

Se dice que el sistema (3) es *estocásticamente estable (EE)* si para cualesquiera condiciones iniciales $x(0), \theta(0)$ se cumple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\|x(k)\|^2\right] < \infty$$

La Estabilidad Estocástica

Se dice que el sistema (3) es *estocásticamente estable (EE)* si para cualesquiera condiciones iniciales $x(0), \theta(0)$ se cumple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\|x(k)\|^2\right] < \infty$$

Supongamos que para cada conjunto $\{W_i : i \in \mathbb{L}\}$ de matrices definidas positivas, existe un conjunto $\{M_i : i \in \mathbb{L}\}$ de matrices definidas positivas tal que para cada $i \in \mathbb{L}$ se satisface

$$\sum_{j \in \mathbb{L}} p_{ij} A_i^T M_j A_i - M_i = -W_i. \tag{9}$$

Para la prueba se define

$$V(k) = x(k)^T M_{\theta(k)} x(k)$$

Cada $V(k)$ hace el papel de una función de Lyapunov.

La Estabilidad Estocástica

Teorema

El sistema (3) *es EE si y solo si para cada conjunto* $\{W_i : i \in \mathbb{L}\}$ *de matrices definidas positivas el sistema* (9) *es compatible.*

La Estabilidad Estocástica

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

con probabilidades de transición $p_{12} = p_{21} = 0{,}9$ y $p_{11} = p_{22} = 0{,}1$. Las matrices A_1 y A_2 son inestables.

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

con probabilidades de transición $p_{12} = p_{21} = 0{,}9$ y $p_{11} = p_{22} = 0{,}1$. Las matrices A_1 y A_2 son inestables.
Pero para las matrices $W_1 = W_2 = I$ el sistema (9) tiene como solución única a las matrices simétricas

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 23 & -10 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}, M_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}.$$

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

con probabilidades de transición $p_{12} = p_{21} = 0{,}9$ y $p_{11} = p_{22} = 0{,}1$. Las matrices A_1 y A_2 son inestables.
Pero para las matrices $W_1 = W_2 = I$ el sistema (9) tiene como solución única a las matrices simétricas

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 23 & -10 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}, M_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}.$$

Donde $M_1 > 0, M_2 > 0$. Más aún el sistema es estocásticamente estable.

La Estabilidad Estocástica

La Estabilidad Estocástica

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

con probabilidades de transición $p_{12} = p_{21} = p_{11} = p_{22} = 0{,}5$. Las matrices A_1 y A_2 son estables.

La Estabilidad Estocástica

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

con probabilidades de transición $p_{12} = p_{21} = p_{11} = p_{22} = 0{,}5$. Las matrices A_1 y A_2 son estables.

Pero para las matrices $W_1 = W_2 = I$ el sistema (9) tiene como solución única a las matrices simétricas

$$M_1 = \frac{1}{57}\begin{bmatrix} 57 & 0 \\ 0 & -73 \end{bmatrix}, M_2 = \frac{1}{57}\begin{bmatrix} -73 & 0 \\ 0 & 57 \end{bmatrix}.$$

La Estabilidad Estocástica

Considere el sistema (3) en dimensión $n = 2$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

con probabilidades de transición $p_{12} = p_{21} = p_{11} = p_{22} = 0{,}5$. Las matrices A_1 y A_2 son estables.
Pero para las matrices $W_1 = W_2 = I$ el sistema (9) tiene como solución única a las matrices simétricas

$$M_1 = \frac{1}{57}\begin{bmatrix} 57 & 0 \\ 0 & -73 \end{bmatrix}, M_2 = \frac{1}{57}\begin{bmatrix} -73 & 0 \\ 0 & 57 \end{bmatrix}.$$

Donde M_1, M_2 no son definidas positivas. Por tanto el sistema no es estocásticamente estable.

La Estabilidad Casi Segura

La Estabilidad Casi Segura

El sistema (3) es *casi seguramente estable (CSE)* si para cualesquiera condiciones iniciales $x(0), \theta(0)$ se cumple

$$\mathbb{P}\left(\text{lím}_{k\to\infty}\|x(k)\| = 0\right) = 1$$

La Estabilidad Casi Segura

El sistema (3) es *casi seguramente estable (CSE)* si para cualesquiera condiciones iniciales $x(0), \theta(0)$ se cumple

$$\mathbb{P}\left(\lim_{k\to\infty}\|x(k)\| = 0\right) = 1$$

Consideramos las notaciones siguientes:

$$\Phi_{k+1} = A_{\theta(k)} \dots A_{\theta(0)}$$

La Estabilidad Casi Segura

El sistema (3) es *casi seguramente estable (CSE)* si para cualesquiera condiciones iniciales $x(0), \theta(0)$ se cumple

$$\mathbb{P}\left(\lim_{k\to\infty} \|x(k)\| = 0\right) = 1$$

Consideramos las notaciones siguientes:

$$\Phi_{k+1} = A_{\theta(k)} \dots A_{\theta(0)}$$

Observe que se cumple

$$x(k) = \Phi_k x(0) \quad \text{para } k \geq 1$$

La Estabilidad Casi Segura

La Estabilidad Casi Segura

El exponente de Lyapunov para (3) se define de la forma siguiente

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathbb{E}\left(\log \|\Phi_k\|\right) \tag{10}$$

El exponente de Lyapunov para (3) se define de la forma siguiente

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\mathbb{E}\left(\log \|\Phi_k\|\right) \tag{10}$$

El exponente de Lyapunov α se puede expresar

$$\alpha = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \|\Phi_k\| \qquad c.s. \tag{11}$$

La Estabilidad Casi Segura

La Estabilidad Casi Segura

Teorema

Sea α el Exponente de Lyapunov entonces:

- *Si $\alpha > 0$ entonces el sistema (3) no es CSE.*
- *Si $\alpha = 0$ entonces el sistema (3) puede ser o no ser CSE.*
- *Si $\alpha < 0$ entonces el sistema (3) es CSE.*

Conclusiones

Conclusiones

Se reviso el estudio de un sistema lineal con saltos markovianos a partir de un sistema lineal de tiempo discreto.

Conclusiones

Se reviso el estudio de un sistema lineal con saltos markovianos a partir de un sistema lineal de tiempo discreto.
También se llegó a comprender la equivalencia entre las estabilidades EMC y EE.

Bibliografía I

Costa, Oswaldo Luiz do Valle.
Discrete-time Markov jump linear systems.
Springer, London, 2005.

Feng Xiangbo. Loparo Kenneth. & Yuandong Ji. Chizeck Howard.
Stochastic Stability properties of Jump Linear Systems.
IEEE Transactions on Automatic Control, **Vol 37** No.1, (1992) pp.38-53.

Chavez, J. R. & Costa, E. & Terra, M..
Equivalence between mean square, exponential and stochastic of Markov singular jump linear systems.
Conference on Decision and Control and European Control Conference, (2011) pp.2877-2882.

¡MUCHAS GRACIAS!