La estabilidad los sistemas lineales de salto Markoviano en tiempo discreto

Victor Daniel Camarena Pérez

Universidad Nacional de Ingeniería

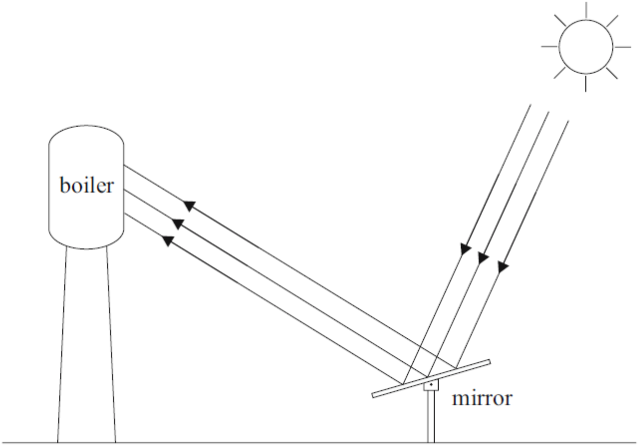
vcamarenap@uni.pe

1 de julio del 2019

Contenido

1. Introducción
2. El Modelo Estocástico
3. La Estabilidad del Sistema
4. Conclusiones y perspectivas

Motivación: Centrales térmicas solares



Central solar (Costa et al. 2005).

Motivación: Centrales térmicas solares

Agentes atmosféricos:

- Día soleado
- Día nublado

Diseños de sistemas:

- Una sola ley de control con una perturbación del modelo.
- Dos leyes de control, una para cada modo de operación, que se alternan.

Problema

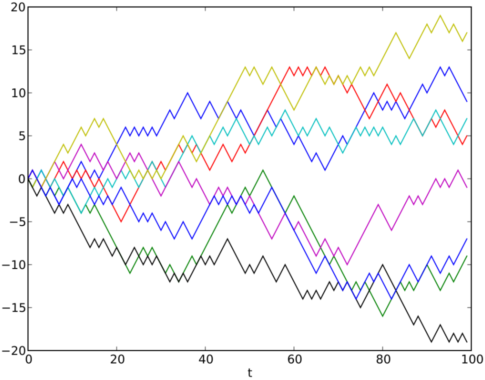
- $x(k) \in \mathbb{C}^d$: variable de estado
- $\{A_1, \ldots, A_l\}$: modos de operación
- $\theta(k) \in \mathbb{I} = \{1, \ldots, l\}$: dinámica de salto entre los modos

Dinámica del sistema

$$x(k+1) = A_{\theta(k)} x(k), \quad k \geq 0, \tag{1}$$

donde $\{\theta(k)\}_{k \geq 0}$ es una cadena de Markov con matriz de transición P y distribución inicial ν.

Cadena de Markov



Construcción de una cadena de Markov

Del Teorema de Extensión de Kolmogorov se tiene:
Una probabilidad de transición $P = [p_{ij}]$ sobre $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ y una distribución inicial ν sobre $\mathbb{I}$, con la dinámica

$$\begin{cases} \theta(0) \ \sim \ \nu \\ \theta(k+1)|\theta(k) = i_k, \ldots, \theta(0) = i_0 \ \sim \ p_{i_k \cdot} \end{cases}$$

definen una cadena de Markov $\{\theta(k)\}_{k \geq 0}$ con espacio de estados $\mathbb{I}$.

Construcción del Modelo Estocástico

Proposición 1

Sea el sistema dinámico dado por la dinámica siguiente

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k), & k \geq 0 \\ x(0) = x_0,\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

con condiciones iniciales independientes, entonces el proceso acoplado $\{(x(k), \theta(k))\}_{k\geq 0}$ *tiene espacio de estados* $\mathbb{C}^d \times \mathbb{I}$ *y goza de la propiedad de Markov.*

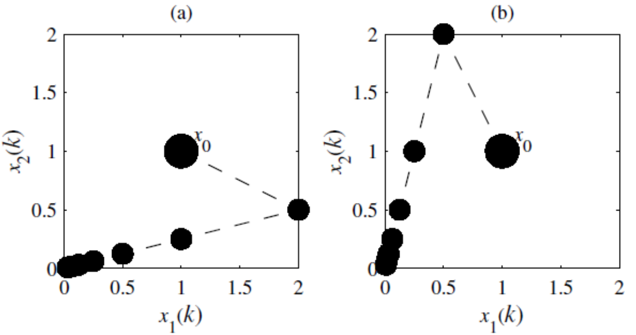
Construcción del Modelo Estocástico

Sea $\Omega = \left(\mathbb{C}^d \times \mathbb{I}\right)^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{F} = \left(\mathcal{B}_{\mathbb{C}^d} \times 2^{\mathbb{I}}\right)^{\mathbb{N}}$, entonces existe una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ sobre Ω y una filtración canónica $(\mathbb{F}_k)_{k\geq 0}$ tales que se tiene el *espacio de probabilidad canónico filtrado*

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_k\})$$

asociado al sistema (1).

El concepto de estabilidad



Evolución del sistema en el tiempo, $d = 2$ (Costa et al. 2005).

El concepto de estabilidad

Definición 1

Se dice que el sistema (1) es *estable en media cuadrática* (*EMC*) si para cualesquiera condiciones iniciales $x_0 \in \mathcal{C}_0^d$, $\theta_0 \in \Theta_0$ existen $\mu \in \mathbb{C}^d$ y $\mathbb{M} \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^d)^+$ tales que

1. $\|\mu(k) - \mu\| \to 0$ cuando $k \to \infty$.
2. $\|\mathbb{M}(k) - \mathbb{M}\| \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Notaciones

Para cada $k \geq 0$ e $i \in \mathbb{I}$ se consideran las notaciones:

$$q(k) = \begin{bmatrix} q_1(k) \\ \vdots \\ q_I(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{dI}, \tag{2}$$

$$q_i(k) = \mathbb{E}\left[x(k)1_{\{\theta(k)=i\}}\right] \in \mathbb{C}^d, \tag{3}$$

$$Q(k) = (Q_1(k), \ldots, Q_I(k)) \in \mathbb{H}^{d+}, \tag{4}$$

$$Q_i(k) = \mathbb{E}\left[x(k)x(k)^* 1_{\{\theta(k)=i\}}\right] \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^d)^+, \tag{5}$$

y

$$\mu(k) = \mathbb{E}[x(k)] = \sum_{i \in \mathbb{I}} q_i(k) \in \mathbb{C}^d, \tag{6}$$

$$\mathbb{M}(k) = \mathbb{E}\left[x(k)x(k)^*\right] = \sum_{i \in \mathbb{I}} Q_i(k) \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^d)^+. \tag{7}$$

Resultados previos

Proposición 2 (Costa et al. (2005), Proposición 3.1)

Para todo $k \geq 0$ *y* $j \in \mathbb{I}$ *se verifica*

1. $\mathbb{P}(\theta(k+1) = j | x(k), \theta(k)) = \mathbb{P}(\theta(k+1) = j | \theta(k)) = p_{\theta(k)j}$.
2. $q_j(k+1) = \sum_{i \in \mathbb{I}} p_{ij} A_i q_i(k)$.
3. $Q_j(k+1) = \sum_{i \in \mathbb{I}} p_{ij} A_i Q_i(k) A_i^*$.
4. $\mathbb{E}\left[\|x(k)\|^2\right] \leq d \|Q(k)\|_1$.
5. $\|Q(k)\|_1 \leq \mathbb{E}\left[\|x(k)\|^2\right]$.

Operadores principales

Si escribimos $Q_j(k+1) = \mathcal{T}_j(Q(k))$, $j \in \mathbb{I}$, entonces

$$Q(k+1) = \mathcal{T}(Q(k)) \tag{8}$$

y así $Q(k) = \mathcal{T}^k(Q(0))$.

- $Q(k) \in \mathbb{H}^{d+} = \{V = (V_1, \ldots, V_I) \colon \forall i \in \mathbb{I}, V_i \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^d)^+\}$.
- $\mathcal{T} : \mathbb{H}^{d+} \to \mathbb{H}^{d+}$ es un operador positivo.

Proposición 3 (Costa et al. (2005), Proposición 3.2)

El operador adjunto $\mathcal{L} = \mathcal{T}^*$ está dado por

$$\mathcal{L}_i(V) = \sum_{j \in \mathbb{I}} p_{ij} A_i^* V_j A_i \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^d), i \in \mathbb{I}, V \in \mathbb{H}^{d+}.$$

Matrices principales

Sea

$$\mathcal{B} = \left(P^t \otimes I_d\right) \operatorname{diag}\left[A\right] \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^{dI})$$

$$\mathcal{A} = \left(P^t \otimes I_{d^2}\right) \operatorname{diag}\left[\overline{A_i} \otimes A_i\right] \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^{d^2 I})$$

Proposición 4 (Costa et al. (2005), Proposición 3.4)

Para cada $Q \in \mathbb{H}^d$ se tiene

$$\hat{\varphi}(\mathcal{T}(Q)) = \mathcal{A}\hat{\varphi}(Q).$$

Relación entre las matrices principales

De la Proposición 2 se tiene que

$$q(k+1) = \mathcal{B}q(k) \tag{9}$$

y así $q(k) = \mathcal{B}^k q(0)$.

Proposición 5 (Costa et al. (2005), Proposición 3.6)

Si $\rho(\mathcal{A}) < 1$ *entonces* $\rho(\mathcal{B}) < 1$.

El recíproco no es válido en general.

Teorema de Estabilidad

Teorema 1 (Costa et al. (2005), Teorema 3.9)

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. *El sistema* (1) *es EMC.*
2. $\rho(\mathcal{A}) < 1$.
3. *Si* $U \in \mathbb{H}^{d+}$, $U > 0$, *existe un único* $V \in \mathbb{H}^{d+}$, $V > 0$, *tal que*
$$V - \mathcal{T}(V) = U. \tag{10}$$
4. *Para algún* $V \in \mathbb{H}^{d+}$, $V > 0$,
$$V - \mathcal{T}(V) > 0. \tag{11}$$
5. *Existen* $0 < \eta < 1 \leq \beta$, *tales que para* $x_0 \in \mathcal{C}_0^d$ *y* $\theta_0 \in \Theta_0$,
$$\mathbb{E}\left[\|x(k)\|^2\right] \leq \beta\eta^k \mathbb{E}\left[\|x_0\|^2\right], \quad k \geq 0. \tag{12}$$
6. *(EE) Para todo* $x_0 \in \mathcal{C}_0^d$ *y todo* $\theta_0 \in \Theta_0$ *se tiene*
$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\left[\|x(k)\|^2\right] < \infty. \tag{13}$$

Observación 1

Del Teorema 1 es fácil ver que el sistema (1) *es EMC equivale a ver que* $\mathbb{M}(k) \to 0$ *cuando* $k \to \infty$. *Esto será evidente luego de la revisión de las pruebas de la Proposición 8 y la Proposición 10. Ademá, de los items 3 y 4 de la Proposición 2 se sigue que el sistema* (1) *es EMC si y solo si la solución* $\{x(k) \colon k \geq 0\}$ *converge al origen en media cuadrática.*

Corolario 1

Si el sistema (1) *es EMC entonces el sistema* (1) *es EECS, es decir, para todo* $x_0 \in \mathcal{C}_0^d$ *y todo* $\theta_0 \in \Theta_0$ *se tiene que existe* $\gamma > 0$ *tal que*

$$\limsup_{k} \frac{1}{k} \ln \|x(k)\| \leq -\gamma \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}.$$

A continuación se esquematizan las relaciones entre los tipos de estabilidad definidos:

$$\text{EE} \Leftrightarrow \text{EMC} \Rightarrow \text{EECS}.$$

Por otro lado, en Costa & Fragoso (1995) muestran que cuando la cadena de Markov $\{\theta(k) \colon k \geq 0\}$ toma valores en un espacio infinito numerable entonces se pierde la equivalencia entre EE y EMC.

Ejemplo 2 (EMC no implica estabilidad de los modos de operación, Ejemplo 3.18 de Costa et al. (2005))

Sea $\{\theta(k)\}_{k\geq 0}$ una cadena de Markov que toma solo dos estados y tiene matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Sean los dos posibles modos de operación

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observe que cada modo de operación es inestable. Sin embargo, el sistema es EMC pues el operador segundo momento

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0.4 & -0.2 & -0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.6 \\ \hline 3.6 & -1.8 & -1.8 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \end{array}\right]$$

es estable ($\rho(\mathcal{A}) = 0.4 < 1$).

Ejemplo 3 (Estabilidad de los modos de operación no implica EMC, Ejemplo 3.17 de Costa et al. (2005))

Sea $\{\theta(k)\}_{k\geq 0}$ una cadena de Markov que toma solo dos estados y tiene matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Sean los dos posibles modos de operación

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que cada modo de operación es inestable. Sin embargo, el sistema es EMC pues el operador segundo momento

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 2 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

no es estable ($\rho(\mathcal{A}) = 2.125 \geq 1$).

Ejemplo 4 (EECS no implica EMC, Sección V de Bolzern et al. (2004))

Sea $\{\theta(k)\}_{k\geq 0}$ una cadena de Markov que toma solo dos estadosy matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Sean los dos posibles modos de operación

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Como se muestra en la Sección V de Bolzern et al. (2004), el Sistema Lineal de Salto Markoviano es EECS. Sin embargo, el sistema no es EMC pues el operador segundo momento

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0.024 & 0.12 & 0.12 & 0.6 & 0.004 & 0.02 & 0.02 & 0.10 \\ 0 & 0.024 & 0 & 0.12 & 0 & 0.004 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.024 & 0.12 & 0 & 0 & 0.004 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0.024 & 0 & 0 & 0 & 0.004 \\ \hline 0.324 & 0.144 & 0.144 & 0.064 & 0.729 & 0.324 & 0.324 & 0.144 \\ 0.18 & 0.072 & 0.08 & 0.032 & 0.405 & 0.162 & 0.18 & 0.072 \\ 0.18 & 0.08 & 0.072 & 0.032 & 0.405 & 0.18 & 0.162 & 0.072 \\ 0.10 & 0.04 & 0.04 & 0.016 & 0.225 & 0.09 & 0.09 & 0.036 \end{array}\right]$$

no es estable ($\rho(\mathcal{A}) = 1.14375 \geq 1$).

Demostración del Teorema de Estabilidad

Teorema 2 (Costa et al. (2005), Teorema 3.19)

Si existen $U, V \in \mathbb{H}^{d+}$, $U, V > 0$, *cummpliendo* $V = \mathcal{T}(V) + U$ *entonces* $\rho(\mathcal{A}) < 1$.

Demostración.

Como $\rho(\mathcal{A}) = \rho(\mathcal{T}) = \rho(\mathcal{L})$ se estudia el sistema lineal

$$\begin{cases} Y(k+1) = \mathcal{L}(Y(k)) \\ Y(0) = Y_0 \in \mathbb{H}^{d+} \end{cases} . \tag{14}$$

Defina la función $\phi\colon \mathbb{H}^{d+} \to \mathbb{R}$ como sigue: para $Y \in \mathbb{H}^{d+}$

$$\phi(Y) := \langle V, Y \rangle = \sum_{j \in \mathbb{I}} \operatorname{tr}(Y_j V_j)$$

función de Lyapunov del Sistema (14) en el origen,

b) $\phi(Y) > \phi(0) = 0$ para todo $Y \neq 0$ en $\mathbb{H}^{d+}$.

c) $\Delta\phi(Y) = \phi(\mathcal{L}(Y)) - \phi(Y) < 0$ para todo $Y \neq 0$ en $\mathbb{H}^{d+}$.

d) $\phi(Y) \to \infty$ cuando $\|Y\|_2 \to \infty$ en $\mathbb{H}^{d+}$.

$\square$

Demostración del Teorema de Estabilidad

De manera similar, desde que $\rho(\mathcal{T}) = \rho(\mathcal{A})$, se obtiene

Proposición 6 (Costa et al. (2005), Proposición 3.20)

Si $\rho(\mathcal{A}) < 1$ *entonces existe una única* $V \in \mathbb{H}^d$, *tal que*

$$V = \mathcal{T}(V) + U$$

para cada $U \in \mathbb{H}^d$. *Más aún,*

- $V = \hat{\varphi}^{-1}\left((I_{d^2S} - \hat{\varphi}[\mathcal{T}])^{-1}\hat{\varphi}(U)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}^k(U)$.
- $U = U^* \Leftrightarrow V = V^*$.
- $U \geq 0 \Rightarrow V \geq 0$.
- $U > 0 \Rightarrow V > 0$.

Este resultado sigue siendo válido si se reemplaza $\mathcal{T}$ *por* $\mathcal{L}$.

Demostración del Teorema de Estabilidad

Proposición 7 (Costa et al. (2005), Proposición 3.25)

Si $\rho(\mathcal{A}) < 1$ *entonces existen* $0 < \eta < 1 \leq \beta$, *de modo que para todo* $x_0 \in \mathcal{C}_0^d$ *y todo* $\theta_0 \in \Theta_0$,

$$\mathbb{E}\left[\|x(k)\|^2\right] \leq \beta\eta^k \mathbb{E}\left[\|x_0\|^2\right], \quad k \geq 0.$$

Proposición 8 (Costa et al. (2005), Proposición 3.24)

Si el Sistema (1) *es EE entonces también es EMC.*

Demostración del Teorema de Estabilidad

Ahora, se establece la conexión entre el radio espectral de $\mathcal{A}$ y la EMC. Primero, de la Ecuación (8) se tiene

$$Q(k) = \mathcal{T}^k(Q(0))$$

y así

$$\mathbb{M}(k) = \sum_{j \in \mathbb{I}} Q_j(k) = \sum_{j \in \mathbb{I}} \mathcal{T}_j^k(Q(0)).$$

Como $\rho(\mathcal{T}) = \rho(\mathcal{A})$ queda establecido el siguiente resultado.

Proposición 9 (Costa et al. (2005), Proposición 3.22)

Si $\rho(\mathcal{A}) < 1$ *entonces el Sistema* (1) *es EMC.*

Proposición 10 (Costa et al. (2005), Proposición 3.23)

Si el Sistema (1) *es EMC entonces* $\rho(\mathcal{A}) < 1$.

Demostración del Teorema de Estabilidad

Finalmente se realiza la prueba del Teorema 1.

Demostración.

Se sigue la secuencia

$$(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)$$

dada en la secuencia de resultados: Proposición 6, directo, Teorema 2, Proposición 7, Directo, Proposición 8, Proposición 10. $\square$

Conclusiones

Del presente trabajo se obtienen las siguientes conclusiones.

- La estabilidad media cuadrática (EMC) de un Sistema Lineal de Salto Markoviano en Tiempo Discreto admite un paisaje completo como se esperaba. De hecho, en el Teorema 1 se exhiben los enunciados análogos al test de radio espectral y la ecuación de Lyapunov del modelo clásico. Cumpliéndose así los objetivos generales y específicos.
- Cuando la cantidad de modos de operación del Sistema Lineal de Salto Markoviano en Tiempo Discreto es finita (nuestro caso de estudio) se tiene la equivalencia entre los tipos de Estabilidad Media Caudrática (EMC) y la Estabilidad Estocástica (EE), las cuales implican la Estabilidad Exponencial Casi Segura (EECS).
- La estabilidad de los modos de operación y la estabilidad del Sistema Lineal de Salto Markoviano no están directamente relacionadas. Además, la noción de estabilidad depende de la cantidad modos de operación del sistema y la dinámica aleatoria de cambio entre estos.

Perspectivas

Cabe mencionar que hay muchos puntos aún por estudiar, se recomienda para trabajos futuros los listados a continuación.

- Una caracterización completa para la Estabilidad Exponencial Casi Segura de un Sistema Lineal de Salto Markoviano en Tiempo Discreto.
- Explotar la propiedades que tiene una cadena de Markov para el caso del proceso estocástico de la Proposición 1.
- Explorar casos más generales de Sistemas Lineales de Salto Markoviano en Tiempo Discreto, por ejemplo, cuando hay una cantidad numerable de modos de operación para el sistema.
- Simular por una solución de un Sistema Lineal de Salto Markoviano en Tiempo Discreto. El método a usar sería el algoritmo de Monte Carlo con Cadenas de Markov.
- Desarrollar la teoría de estabilidad de un Sistema Lineal de Salto Markoviano en Tiempo Continuo.

Referencias

Bolzern, P., Colaneri, P. & Nicolao, G. D. (2004), On almost sure stability of discrete-time markov jump linear systems, *in* '2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601)', Vol. 3, pp. 3204–3208.

Costa, O. L. V. & Fragoso, M. D. (1995), 'Discrete-time lq-optimal control problems for infinite markov jump parameter systems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(12), 2076–2088.

Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. & Marques, R. P. (2005), *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*, Probability and Its Applications, Springer Science & Business Media.