UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

“SOBRE TRANSIENCIA Y RECURRENCIA DE CAMINATAS ALEATORIAS AUTOINTERACTUANTES”

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADA POR:
VICTOR DANIEL CAMARENA PÉREZ
ASESOR:
DR. GONZALO PANIZO GARCÍA
CO-ASESOR:
DR. ALEJANDRO F. RAMÍREZ

LIMA-PERÚ
2021

... para ti Rei, con quien empecé a soñar y a luchar,

a la par, incluso desde aristas distintas.

Agradecimientos:

A los profesores del Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA). Y especialmente, a Gonzalo Panizo y Alejandro Ramírez (Pontificia Universidad Católica de Chile) por asesorarme y apoyarme en la elaboración del presente trabajo.

Índice general

Índice de figuras

Resumen

Es conocido que una caminata aleatoria simple simétrica en $\mathbb{Z}^d$ es recurrente si $d = 1, 2$, y es transiente si $d \geq 3$. Aquí se estudia el comportamiento transiente o recurrente de caminatas aleatorias que se denominan caminatas aleatorias autointeractuantes y que no son Markovianas pues, en contraste con las caminatas simples simétricas, el caminante decide su salto de acuerdo a la historia del proceso. Finalmente, se prueba la transiencia en altas dimensiones para una versión generalizada de caminata aleatoria excitada balanceada.

Palabras Claves: Caminata aleatoria autointeractuante, transiencia, recurrencia, caminata aleatoria excitada balanceada.

Abstract

It is well known that a symmetric simple random walk in $\mathbb{Z}^d$ is recurrent if $d = 1, 2$, and is transient if $d \geq 3$. Here we study the transient or recurrent behavior of random walks that are called self-interacting random walks and that are not Markovian because, in contrast to simple symmetric random walks, the walker decides his jump according to the history of the process. Finally, high-dimensional transience is proved for a generalized version of balanced excited random walk.

Keywords: Self-interacting random walks, transience, recurrent, excited random walks.

Introducción

Motivación y antecedentes

Es bien conocido el Teorema de Polya que dice que una caminata aleatoria simple simétrica en $\mathbb{Z}^d$ es recurrente en dimensión $d = 1, 2$, y transiente en dimensión $d \geq 3$. Se dice que Kakutani dio la siguiente interpretación de este resultado:

«A drunken man always returns home, but a drunken bird will be eventually lost».

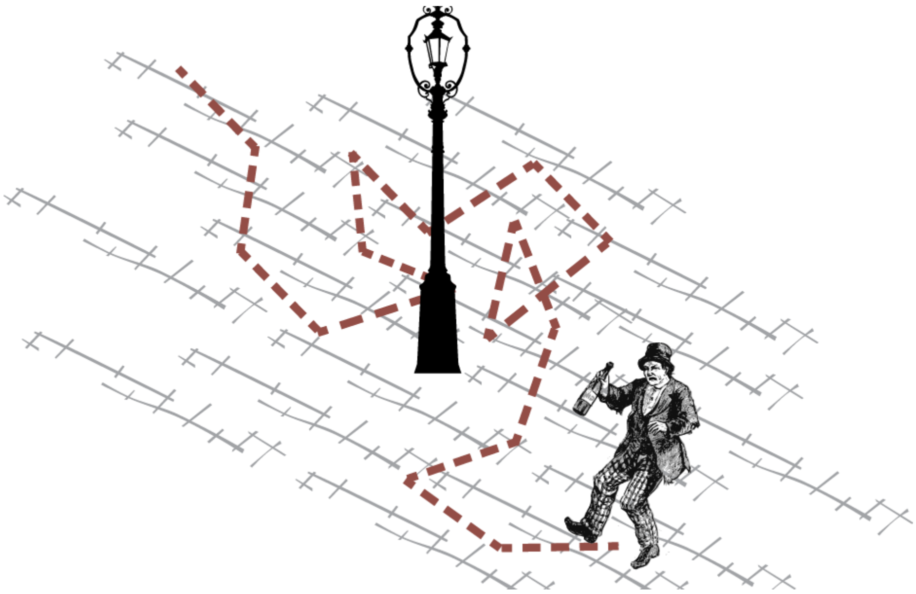

Figura 1: Un hombre borracho siempre retorna a casa (Fuente: Mark Needham, https://medium.com/neo4j/graph-algorithms-release-random-walk-and-personalized-pagerank-80160db3757).

Claramente, un hombre borracho realiza una caminata aleatoria en la plana superficie terrestre (Fig. 1) y el pájaro borracho realiza una caminata aleatoria en el espacio tridimensional. De hecho uno puede pensar una caminata aleatoria simple simétrica como un modelo tanto para el hombre borracho como para el pájaro borracho. Es importante hacer notar que la libertad de movimiento (medida en la dimensión d del espacio) que tiene el caminante determina su posición a largo plazo. En el caso del hombre borracho que siempre regresa a casa se dice que el caminante, o la caminata, es recurrente y en el caso del pájaro borracho que eventualmente se pierde se dice que el caminante, o la caminata, es transiente.

En el modelo de caminata aleatoria simple simétrica el adjetivo simple hace referencia a que tiene la propiedad Markoviana, que plantea que el caminante da un paso olvidando lo caminado previamente. Aquí se tratarán caminatas aleatorias no simples. Un ejemplo de caminata que ya no es simple es uno de los primeros modelos de caminata aleatoria excitada que aparece el 2003 [2]. El modelo de Benjamimi y Wilson es una caminata sobre $\mathbb{Z}^d$ que no tiene la propiedad Markoviana debido a que combina dos tipos de pasos bajo una regla que depende de la historia del caminante: si el caminante visita un sitio por primera vez realiza un paso con un sesgo en una dirección mientras que si llega a un sitio ya visitado hace un paso como una caminata aleatoria simple simétrica. Benjamini y Wilson muestran que su modelo es recurrente en dimensión 1 y transiente en dimensión mayor a 1. El hecho que esta caminata no sea recurrente en dimensión 2 tiene que ver con el sesgo introducido en un tipo de paso que hace perder la simetría.

En el 2010, Raimond y Schapira [15] dan respuesta afirmativa al problema de recurrencia, planteado por Benjamini, de una variante de caminata aleatoria excitada en $\mathbb{Z}$ en la cual si el caminante visita un sitio por primera vez realiza un paso con distribución simétrica del tipo Cauchy en $\mathbb{Z}$ mientras que si llega a un sitio ya visitado hace un paso de caminata simple simétrica. En ese mismo trabajo, Raimond y Schapira definen y describen un modelo general de caminata aleatoria con probabilidades de transición modificadas, tema del presente trabajo donde este modelo se denomina caminata aleatoria autointeractuante, al combinar varios tipos de pasos con una regla más general que las reglas planteadas por Benjamini (mencionadas anteriormente).

En el 2011, Benjamini, Kozma y Schapira [1] estudian una familia de caminatas aleatorias excitadas en dimensión $d \geq 2$, denotada $M(d_1, d_2)$ con $d = d_1 + d_2$ y $d_1, d_2 \geq 1$, que combinan dos pasos simétricos del tipo caminata aleatoria simple simétrica en subespacios de dimensiones d_1 y d_2, usando una regla del tipo Benjamini. Queda claro que tal modelo, conocido como caminata aleatoria excitada balanceada pues todos sus pasos son simétricos, es un caso particular de caminata aleatoria autointeractuante. Benjamini Kozma y Schapira conjeturan la recurrencia en dimensión 2 y transiencia en dimensión $d \geq 3$, y demuestran la transiencia en dimensión $d \geq 4$. En el 2016, Peres, Schapira y Sousi [13] muestran que la caminata $M(1, 2)$ es transiente, restando probar que la caminata $M(2, 1)$ es transiente para completar la validez de la conjetura de transiencia en dimensión 3. Cabe mencionar que hay varias familias de caminatas aleatorias excitadas, como se puede leer en la revisión de Kozygina y Zerner [8]. La mayoría de resultados sobre transiencia se obtienen para caminatas no balanceadas aprovechando el sesgo de algunos de los pasos, por ejemplo el trabajo de Berard y Ramírez [3].

En el 2013, Peres, Popov y Sousi [12] abordan el problema de transiencia y recurrencia del modelo de caminata aleatoria autointeractuante con pasos simétricos. Aquella investigación, que guía el presente trabajo, establece condiciones suficientes de transiencia y recurrencia recogiendo el enfoque inicial de Raimond y Schapira [14] de usar supermartingalas como en la teoría de Lyapunov-Foster [7].

Planteamiento del problema

Aquí, una caminata aleatoria autointeractuante es una caminata aleatoria que no es Markoviana en la que cada paso que da el caminante depende de los recorridos realizados hasta antes de dar el paso. Sea $X = (X_n)_{n\geq 0}$ la caminata aleatoria autointeractuante entonces los pasos son los incrementos consecutivos $(\xi_k)_{k\geq 1}$ definidos por

$$\xi_k = X_k - X_{k-1}$$

para cada $k \geq 1$. Luego, fijado un instante $n \geq 0$, X_n es la posición actual del caminante, ξ_{n+1} es el paso a realizar y la posición siguiente está dada por

$$X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1},\ n \geq 0,$$

con la condición que en nuestro modelo la variable paso ξ_{n+1} se puede pensar como una función de todo el recorrido del caminante descrito por la secuencia $X_0, X_1, \ldots, X_n$ (Ver Definición 1.1, hay formulaciones equivalentes en [14]). El interés del presente trabajo se centra en determinar un comportamiento recurrente o transiente de caminatas con pasos simétricos.

Además, se plantea la conjetura de recurrencia en dimensión $d = 2$ y transiencia en dimensión $d \geq 3$ para una extensión de la familia de caminatas aleatorias excitadas balanceadas de Benjamini, Kozma y Schapira [1] descrita por Camarena, Panizo y Ramírez [4]. Este modelo es una caminata aleatoria sobre $\mathbb{Z}^d$, denotada por $M_d(d_1, d_2)$ y con parámetros enteros $d \geq 2$, $d_1, d_2 \geq 1$ tales que $d_1 + d_2 \geq d$, cuya dinámica del caminante es la siguiente: si el caminante visita un sitio por primera vez realiza un paso de caminata simple simétrica5 en las primeras d_1 coordenadas mientras que si llega a un sitio ya visitado hace un paso de caminata simple simétrica en las últimas d_2 coordenadas. Considere los vectores canónicos $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $1 \leq i \leq d$, cuya i-ésima coordenada es 1, mientras las otras coordenadas son 0. Entonces la caminata $M_d(d_1, d_2)$ se define como el proceso $(X_k)_{k\geq 0}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que si al tiempo n, X_n es un sitio visitado por primera vez, entonces al tiempo $n+1$ para todo $1 \leq i \leq d_1$

$$\mathbb{P}[X_{n+1} - X_n = e_i | \mathcal{F}_n, X_n \neq X_j \text{ para todo } 0 \leq j < n] = \frac{1}{2d_1},$$

donde $\mathcal{F}_n$ es el σ-álgebra generada por $X_0, \ldots, X_n$; mientras que si X_n es un sitio ya visitado, entonces al tiempo $n+1$ para todo $1+d-d_2 \leq i \leq d$

$$\mathbb{P}[X_{n+1} - X_n = e_i | \mathcal{F}_n, X_n = X_j \text{ para algún } 0 \leq j < n] = \frac{1}{2d_2}.$$

Este modelo es un caso específico de caminata aleatoria autointeractuante. Cuando $d = d_1 + d_2$ corresponde al modelo de Benjamini, Kozma y Schapira, y se denomina de *no-superposición* pues los tipos de pasos que da el caminante ocurren en subespacios complementarios. El interés del presente trabajo se centra en probar la transiencia en alta dimensión ($d \geq 4$) para el caso de *superposición*, que ocurre cuando $d_1 + d_2 > d$.

Objetivos

Nuestro meta general es establecer condiciones que permitan decidir si una caminata aleatoria autointeractuante es transiente o recurrente.

Este objetivo se desglosa en los siguientes objetivos específicos.

1. Establecer condiciones suficientes para que una caminata aleatoria autointeractuante sea transiente.

2. Establecer condiciones suficientes para que una caminata aleatoria autointeractuante sea recurrente.

3. Establecer un resultado de transiencia en altas dimensiones para una versión de caminata aleatoria excitada balanceada.

Metodología y estructura del desarrollo teórico

Los procedimientos y métodos a emplearse son los previamente empleados en los trabajos mencionados en la sección Motivación y antecedentes. La estructura del desarrollo teórico consta de cuatro capítulos que desarrollan los objetivos específicos previa definición de la familia de caminatas aleatorias a estudiar.

En el capítulo uno se definen y exponen tanto lo que es una caminata aleatoria autointeractuante como sus principales propiedades, se exhiben ejemplos de caminatas transientes y recurrentes, y se cierra con preguntas relacionadas con los objetivos específicos. En el capítulo dos se desarrolla el primer objetivo y da respuesta a la primera pregunta planteada en el capítulo uno, estableciendo una condición de suficiencia para transiencia que viene de adaptar el uso de supermartingales de la teoría de Foster-Lyapunov a nuestro problema [12]. En el capítulo tres se desarrolla el segundo objetivo y da respuesta a la segunda pregunta planteada en el capítulo uno, se establece una condición de suficiencia para recurrencia que también deriva de la teoría de Foster-Lyapunov. En el capítulo cuatro se desarrolla el tercer objetivo y se aborda la tercera pregunta planteada en el capítulo uno, se estudia una versión generalizada del modelo de caminata aleatoria excitada balanceada [4] para la cual se conjetura que hay recurrencia en dimensión $d = 2$ y transiencia en dimensión $d \geq 3$, probándose el resultado de transiencia parcialmente.

Después de este desarrollo teórico, se resumen las conclusiones del trabajo y algunas recomendaciones en general.

Capítulo 1

El modelo de caminatas aleatorias autointeractuantes

En el presente capítulo se define el modelo de caminatas aleatorias a estudiar, llamadas caminatas aleatorias autointeractuantes. Se muestran algunas propiedades generales así como se presentan algunos ejemplos. Por último, se reenuncian las principales cuestiones a abordar en lo que resta del trabajo.

1.1. Definición y propiedades generales

Como se menciona en la introducción, Raimond y Schapira [15] definieron un modelo general de caminata aleatoria no Markoviana que posteriormente fue estudiado por Peres, Popov y Sousi [12] bajo la denominación de caminata aleatoria autointeractuante. El modelo a estudiar es un caso particular del definido a continuación en el que los pasos que puede dar el caminante son balanceados.

Definición 1.1. *[Caminata aleatoria autointeractuante] Para dos enteros $s \geq 1$ y $d \geq 1$, sean $\mu_1, \ldots, \mu_s$ s medidas en $\mathbb{R}^d$ y sean $(\xi_n^i)_{n\geq 1}$ sucesiones de vectores aleatorios independientes en $\mathbb{R}^d$ con $\xi_n^i \sim \mu_i$ para todo $n \geq 1$, $i = 1, \ldots, s$. Se define una* regla adaptada

$\ell = (\ell(k))_{k\geq 0}$ *como un proceso estocástico sobre* $I = \{1, \ldots, s\}$ *adaptado a la filtración de la caminata* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. *Una* caminata aleatoria autointeractuante *es una caminata* $X = (X_n)_{n\geq 0}$, *con* $X_0 = 0$, *generada por las medidas de probabilidad* $\mu_1, \ldots, \mu_s$ *y la regla adaptada* ℓ *mediante la recurrencia*

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n^{\ell(n-1)}, \quad n \geq 1.$$

En el presente trabajo, se consideran caminatas aleatorias autointeractuantes balanceadas en el sentido que cada medida de probabilidad tiene media cero. Sea una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}^d$ y un vector aleatorio Z cuya distribución es μ. Se dice que μ tiene *media cero* si $\mathbb{E}Z = 0$; y se dice que μ tiene β momento, $\beta > 0$, si $\mathbb{E}\left[\|Z\|^\beta\right] < \infty$. Se define la *matriz covarianza* de μ por

$$\mathrm{Var}(\mu) = \mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}\left[(Z - \mathbb{E}Z)(Z - \mathbb{E}Z)^t\right].$$

Si Z tiene media cero, se cumplen las siguientes propiedades

$$\mathrm{Var}(AZ) = A\mathrm{Var}(Z)A^t, \tag{1.1}$$

$$\mathbb{E}[(x \cdot Z)^2] = x^t\mathrm{Var}(Z)x, \tag{1.2}$$

$$\mathbb{E}[\|Z\|^2] = \mathrm{tr}(\mathrm{Var}(Z)); \tag{1.3}$$

donde A es una matriz real de orden d y $x \in \mathbb{R}^d$.

El siguiente resultado muestra que una caminata aleatoria generada por medidas de probabilidad con media cero y una regla adaptada es una martingala.

Lema 1.1. *Si las medidas* $\mu_1, \ldots, \mu_s$ *tienen media cero entonces la caminata aleatoria autointeractuante* $(X_n)_{n\geq 0}$ *es una martingala.*

Demostración. Primero, X es adaptado. Sea $\ell(0) \in \sigma(X_0)$, defina la filtración $(\mathcal{F}_n)$ por $\mathcal{F}_0 = \sigma(X_0)$ y

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(\{\xi_n^i : i \in I\}), \quad n \geq 1;$$

entonces $\ell(0), X_0 \in \mathcal{F}_0$. Luego, por inducción, para $n \geq 1$, si $\ell(n-1) \in \mathcal{F}_{n-1}$ entonces $X_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$ implica

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n^{\ell(n-1)} = X_{n-1} + \sum_{i \in I} 1_{\{\ell(n-1)=i\}} \xi_n^i$$

es una suma de productos de variables aleatorias $\mathcal{F}_n$-medibles; esto es $X_n \in \mathcal{F}_n$. Segundo, X tiene incremento condicional nulo. En efecto, para $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\xi_n^{\ell(n-1)} | \mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{i \in I} 1_{\{\ell(n-1)=i\}} \mathbb{E}[\xi_n^i | \mathcal{F}_{n-1}] = 0,$$

por independencia. □

Por otro lado, las caminatas aquí estudiadas abarcan a las caminatas aleatorias Markovianas y, en general, el presente trabajo se centra en las caminatas no Markovianas. Varios ejemplos de caminatas aleatorias autointeractuantes no Markovianas se darán en la siguiente sección así como el modelo de las caminatas aleatorias excitadas balanceadas que se aborda en el capítulo 4.

El siguiente lema da una forma alternativa de escribir el modelo de caminatas aleatorias autointeractuantes.

Lema 1.2. *Sea un conjunto de medidas de probabilidad $\mu_1, \ldots, \mu_s$, sean $(\xi_n^i)_{n \geq 1}$ sucesiones de vectores aleatorios independientes en $\mathbb{R}^d$ con $\xi_n^i \sim \mu_i$ para todo $n \geq 1$, $i = 1, \ldots, s$ y una regla ℓ adaptada a la filtración del proceso. Para cada $n \geq 0$ e $i \in I$, se denota el número de saltos realizados con la medida i hasta el tiempo n por*

$$r_n(i) = \sum_{m=0}^{n-1} 1_{\{\ell(m)=i\}}.$$

Entonces, el proceso estocástico $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$, con $Y_0 = 0$, definido por

$$Y_n = Y_{n-1} + \xi_{1+r_{n-1}(\ell(n-1))}^{\ell(n-1)}, \; n \geq 1,$$

es igual en distribución a una caminata aleatoria X generada por las medidas $\mu_1, \ldots, \mu_s$ y la regla ℓ.

Demostración. Es suficiente mostrar que los procesos X e Y coinciden en ley en los intervalos temporales $\{0, 1, \ldots, n\}$, $n \geq 0$. Por principio de inducción, para $n \geq 1$ si se asume que

$$(X_0, \ldots, X_{n-1}) \sim (Y_0, \ldots, Y_{n-1}),$$

por independencia, se tiene que

$$\left(X_0, \ldots, X_{n-1}, X_{n-1} + \xi_n^{\ell(n-1)}\right) \sim \left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, Y_{n-1} + \xi_{1+r_{n-1}(\ell(n-1))}^{\ell(n-1)}\right);$$

por lo tanto,

$$(X_0, \ldots, X_{n-1}, X_n) \sim (Y_0, \ldots, Y_{n-1}, Y_n).$$

□

Ahora, se precisan las nociones de transiencia y recurrencia para caminatas aleatorias autointeractuantes pues es motivo del presente estudiar cuando una caminata manifiesta tal o cual comportamiento. De hecho, las definiciones dadas a continuación se reducen a las nociones usuales de transiencia y recurrencia para una caminata aleatoria simple en $\mathbb{R}^d$ (Observación A.1).

Definición 1.2 (Transiencia y recurrencia)**.** *Sea una caminata aleatoria X generada por las medidas $\mu_1, \ldots, \mu_s$ y la regla ℓ, y un $x \in \mathbb{R}^d$. Se dice que la caminata X es* transiente *si*

$$\lim_{n \to \infty} \|X_n\| = +\infty \quad c.s.$$

Se dice que la caminata X es recurrente *si existe $R > 0$ tal que*

$$\liminf_n \|X_n\| \leq R \quad c.s.$$

Recuerde que el *soporte* de una medida de probabilidad μ, denotado $\mathrm{supp}(\mu)$, es definido como el menor conjunto cerrado $F \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\mu(F) = 1$. La Propiedad (1.2) implica que la matriz covarianza de μ es no singular si y solo si el subespacio vectorial generado por el soporte de μ es $\mathbb{R}^d$; en este caso, μ se dice d-*dimensional*. Una noción más débil es la que dice que μ es *no-degenerada* si el subespacio vectorial generado por el soporte de μ es al menos unidimensional.

El estudio de transiencia y recurrencia se centra en caminatas aleatorias que necesariamente no quedan confinadas en una región acotada sino que se dispersan por todo el espacio. Entonces una hipótesis implícita en los siguientes capítulos es que la caminata aleatoria tiene esta propiedad llamada de *no-confinamiento*; de hecho, el siguiente lema establece condiciones suficientes para ello.

Lema 1.3. *Sea X una caminata generada por las medidas con media cero $\mu_1, \ldots, \mu_s$. Si todas las medidas son no-degeneradas entonces*

$$\limsup_n \|X_n\| = +\infty \quad c.s.$$

para toda regla adaptada ℓ.

Demostración. En efecto, desde que cada medida admite un soporte de dimensión mayor que o igual a 1, se pueden encontrar a lo más $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{S}^{d-1}$ tales que el ángulo entre el vector u_1 y cualquiera de los otros vectores unitarios sea menor a $\pi/2$ y

$$\mathbb{P}(\langle Z_j, u_j \rangle > 0) > 0, \ \forall\, Z_j \sim \mu_j.$$

Entonces, existe $u \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\epsilon > 0$ y $h > 0$ tales que

$$\mathbb{P}(\langle Z_j, u \rangle > \epsilon) \geq h, \ \forall\, Z_j \sim \mu_j.$$

Así, para $m, n \geq 1$, condicionando a $\mathcal{F}_k$, se sigue

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\langle X_{m+n} - X_n, u\rangle > \epsilon m | \mathcal{F}_n) &\geq \mathbb{P}(\langle Z_{n+1}^{\ell(n)} + \cdots + Z_{m+n}^{\ell(m+n-1)}, u\rangle > \epsilon m | \mathcal{F}_n) \\
&\geq \mathbb{P}(\mathbb{P}(\langle Z_{n+1}^{\ell(n)}, u\rangle > \epsilon | \mathcal{F}_n), \ldots, \mathbb{P}(\langle Z_{m+n}^{\ell(m+n-1)}, u\rangle > \epsilon | \mathcal{F}_{m+n-1}) | \mathcal{F}_n) \\
&\geq h^m.
\end{aligned}$$

La desigualdad anterior implica que, para ,

$$\mathbb{P}\left(|\langle X_{m+n}, u\rangle| > \frac{\epsilon m}{2} \text{ o } |\langle X_n, u\rangle| > \frac{\epsilon m}{2} | \mathcal{F}_n \right) \geq h^m;$$

sumando sobre n y por el Lema Borel-Cantelli condicional se obtiene

$$|\langle X_{m+n}, u\rangle| > \frac{\epsilon m}{2} \text{ o } |\langle X_n, u\rangle| > \frac{\epsilon m}{2} \text{ i.v.},$$

lo que prueba

$$\limsup_n |\langle X_n, u\rangle| > \frac{\epsilon m}{2}.$$

Desde que m es arbitrario y $\limsup_n \|X_n\| \geq \limsup_n |\langle X_n, u\rangle|$ queda justificada la afirmación. $\square$

Un ejemplo de caminata aleatoria autointeractuante se describe a continuación.

Ejemplo 1.1 (Caminata aleatoria autointeractuante recurrente, $d = 1$)**.** *Imagine un proceso que es obtenido desde una caminata simple simétrica en $\mathbb{Z}$ por modificación de la distribución de salto cada vez que visita un sitio nuevo. Si la caminata es denotada por $(X_n : n \geq 0)$ entonces la distribución condicional de $X_{n+1} - X_n$ dado el pasado al tiempo n es la distribución de un salto de caminata simple, siempre que X_n es un punto visitado durante el periodo $[0,\ n-1]$. En este caso $\mathbb{P}\{X_{n+1} - X_n = \pm 1 \big| X_m,\ m \leq n\} = 1/2$ y esta distribución es denotada por μ_1. Luego, si X_n se encuentra en un punto no visitado antes del instante n, se tiene que la distribución condicional de $X_{n+1} - X_n$, dado el pasado, es una distribución simétrica en $\mathbb{Z}$, μ_2, en el dominio de la atracción normal de una ley simétrica de Cauchy (en particular, μ_2 no tiene un primer momento finito). Luego, ¿la caminata es recurrente?, ¿es transiente?*

Esta pregunta fue propuesta por I. Benjamini [14]. En las notaciones aquí usadas, las medidas de salto son dos medidas en $\mathbb{R}$, μ_1 definida por

$$\mu_1 = \frac{1}{2} 1_{\{+e_1\}} + \frac{1}{2} 1_{\{-e_1\}}$$

y μ_2 definida por

$$\mu_2 = \frac{1}{\pi_0} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + z^2} 1_{\{z\}}$$

donde, de [11], la constante de normalización es

$$\pi_0 = \frac{\pi \cosh \pi}{\operatorname{senh} \pi} \approx 3.153348\ldots$$

La regla $\ell = (\ell(k))_{k\geq 0}$ *queda determinada por* $\ell(0) = 1$ *y*

$$\ell(k) = \begin{cases} 1 & si\ X_k \notin \{X_0, \ldots, X_{k-1}\} \\ 2 & c.o.c. \end{cases}, \quad k \geq 1. \tag{1.4}$$

Note que el proceso ℓ *es adaptado al proceso* X.

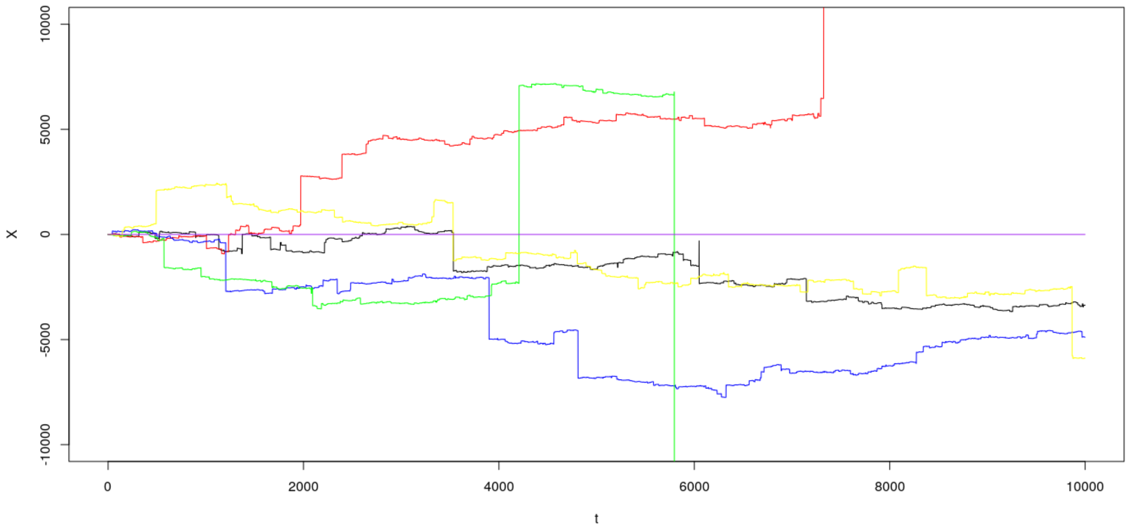

Figura 2: La figura muestra el rango de la caminata aleatoria con probabilidades de transición ocasionamente modificadas, definida en [14], en dimensión $d = 1$ durante el intervalo temporal $[0, 10000]$. Cada línea de color representa una realización del proceso y la línea horizontal púrpura señala el origen de coordenadas.

En [14] se muestra que esta caminata es recurrente (mediante una técnica de acoplamiento, ver también la Observación 3.1). En la figura 2 se puede observar la gráfica de realizaciones de la caminata aleatoria autointeractuante en dimensión $d = 1$ *durante un intervalo temporal* $[0, 10000]$. *Observe que las trayectorias del proceso (líneas roja, amarilla, verde, azul y negra) durante la mayor parte del tiempo presentan poco variabilidad* *pero pueden tener saltos de gran longitud. Es de hacer notar que no es evidente de este gráfico la propiedad de recurrencia de la caminata que surge de combinar una caminata aleatoria recurrente con una transiente.*

1.2. Principales cuestiones

Ahora, en el presente escrito nuestro interés está discernir entre un comportamiento recurrente y uno transiente, específicamente se tienen las siguientes cuestiones:

1. Dadas $\mu_1, \ldots, \mu_s$ medidas en probabilidad en $\mathbb{R}^d$ con media cero. ¿Cuáles son las condiciones sobre las medidas de modo que para toda regla adaptada ℓ la caminata generada sea transiente?

2. Dadas $\mu_1, \ldots, \mu_s$ medidas en probabilidad en $\mathbb{R}^d$ con media cero. ¿Cuáles son las condiciones sobre las medidas de modo que para toda regla adaptada ℓ la caminata generada sea recurrente?

3. Clasificar según transiencia o recurrencia una familia de caminatas que generalizan las caminatas aleatorias excitadas balanceadas estudiadas en [1].

La respuesta a la primera pregunta se aborda en el capítulo 2. Una importante condición de suficiencia es estudiada, la cual es conocida como condición traza. La respuesta a la segunda pregunta se aborda en el capítulo 3. En el capítulo 4 se estudian las caminatas aleatorias excitadas balanceadas.

Capítulo 2

Transiencia

En el presente capítulo se aborda la cuestión de establecer condiciones suficientes para garantizar que una caminata aleatoria autointeractuante sea transiente. Una condición de suficiencia requiere que cada traza de las matrices covarianza de los diferente tipos de saltos superen al doble de su radio espectral, salvo transformaciones lineales, la cual es una condición bastante general y conocida como *condición traza*. Se cierra el capítulo mostrando que en dimensión $d \geq 3$ al combinar una cantidad, menor a d, de posibles tipos saltos soportados en subespacios de dimensión mayor o igual a 3 mediante una regla adaptada arbitraria se obtiene una caminata transiente.

Lema 2.1 (Criterio de transiencia)**.** *Sea X una caminata aleatoria generada por las medidas $\mu_1, \ldots, \mu_s$ con media cero y no-degeneradas, y una regla adaptada ℓ. Si existe una función $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1}) - \varphi(X_n)|\mathcal{F}_n] \leq 0$$

y $\varphi(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Entonces la caminata X es transiente.

Demostración. Observe que $Y_n = \varphi(X_n),\ n \geq 0$, es una supermartingala no negativa entonces existe Y_∞ tal que

$$\varphi(X_n) \to Y_\infty \ c.s.$$

Desde que el Lema 1.3 garantiza $\limsup_n \|X_n\| = +\infty$ c.s. se sigue

$$0 = \liminf_n \varphi(X_n) = Y_\infty \; c.s..$$

Por condición para φ, se concluye que $\lim_{n\to\infty} \|X_n\| = +\infty$ c.s.. □

2.1. La condición traza

Se dice que una matriz semidefinida positiva V satisface la *condición traza* si

$$\operatorname{tr}(V) > 2\lambda_{\text{máx}}(V).$$

Se dice que una medida μ satisface la *condición traza* si su matriz de covarianzas la satisface, esto es,

$$\operatorname{tr}(\operatorname{Var}(\mu)) > 2\lambda_{\text{máx}}(\operatorname{Var}(\mu)).$$

Observación 2.1. *Sea la función $h\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x) = \frac{x^2}{1+x^2}\left(1 + \frac{2}{\ln(1+x^2)}\right), \; x > 0.$$

Entonces, la función h es decreciente y

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1.$$

Es fácil ver que cuando $x \to +\infty$ el límite da 1. Luego, calculando la derivada de h se tiene que

$$h'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2 \ln^2(1+x^2)}\left(-2x^2 + \ln^2(1+x^2) + 2\ln(1+x^2)\right) < 0$$

para todo $x > 0$; por lo tanto, h decrece estrictamente en todo su dominio.

Lema 2.2. *Sean $\mu_1, \ldots, \mu_s$ medidas en $\mathbb{R}^d$ con media cero, $d \geq 3$, con $2+\beta$ momento, para algún $\beta > 0$. Suponga que las medidas de salto satisfacen la condición traza, es decir,*

$$\operatorname{tr}(\operatorname{Var}(\mu_i)) > 2\lambda_{\text{máx}}(\operatorname{Var}(\mu_i))$$

para todo $1 \leq i \leq s$. *Considere la función*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\ln(1 + \|x\|^2)} \wedge 1, \ x \in \mathbb{R}^d.$$

Entonces existe una constante $R > 0$ *suficientemente grande tal que*

$$\mathbb{E}[\varphi(x + Z) - \varphi(x)] \leq 0$$

para $\|x\| \geq R$ *y cualquier vector aleatorio* $Z \sim \mu_i$, $i = 1, \ldots, s$.

Demostración. Primero observe que basta mostrar el caso en que las matrices de covarianzas $\mathrm{Var}(\mu_i)$, $i = 1, \ldots, s$, son diagonales. Esto desde que cada matriz de covarianza $\mathrm{Var}(\mu_i)$ es diagonalizable vía una transformación ortogonal y, tanto la función $\varphi(x)$ como la condición traza son invariantes por transformaciones ortogonales.

Sea $Z \sim \mu$ con μ una medida en $\mathbb{R}^d$ con $2 + \beta$ momento, por la fórmula de Taylor con resto de Lagrange, existe $0 < \eta < 1$ tal que

$$\varphi(x + \tilde{Z}) = \varphi(x) + \varphi'(x) \cdot \tilde{Z} + \frac{1}{2}\varphi''(x) \cdot \tilde{Z}^2 + \frac{1}{3!}\varphi'''(x + \eta\tilde{Z}) \cdot \tilde{Z}^3.$$

para $\tilde{Z}$ no muy grande.

Considere $\tilde{Z} = Z1_{\{Z \leq \frac{\|x\|}{2}\}}$ y $\|x\| \geq 2\sqrt{2}$, de modo que $\|x + \tilde{Z}\| \geq \sqrt{2}$. Ahora, se acotará en promedio cada sumando del segundo miembro de la siguiente igualdad

$$\varphi(x + Z) - \varphi(x) = [\varphi(x + Z) - \varphi(x + \tilde{Z})] + \varphi'(x) \cdot \tilde{Z} + \frac{1}{2}\varphi''(x) \cdot \tilde{Z}^2 + \frac{1}{6}\varphi'''(x + \eta\tilde{Z}) \cdot \tilde{Z}^3.$$

Primero,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi(x + Z) - \varphi(x + \tilde{Z})\right] &= \mathbb{E}\left[(\varphi(x + Z) - \varphi(x))1_{\{Z > \frac{\|x\|}{2}\}}\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\|x\|}{2}\right) \\
&\leq \frac{2^{2+\beta}\mathbb{E}\left[\|Z\|^{2+\beta}\right]}{\|x\|^{2+\beta}},
\end{aligned}$$

por la desigualdad de Markov. Segundo, desde que $0 = \mathbb{E}Z = \mathbb{E}\tilde{Z} + \mathbb{E}\left[Z1_{\{Z>\frac{\|x\|}{2}\}}\right]$ se sigue

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}[\varphi'(x)\cdot\tilde{Z}]\right| &\leq \sum_{i=1}^{d}\left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right|\left|\mathbb{E}\left[\tilde{Z}_i\right]\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{d}\left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right|\left|\mathbb{E}\left[Z_i 1_{\{Z>\frac{\|x\|}{2}\}}\right]\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{d}\frac{\varphi^2(x)\cdot 2|x_i|}{1+\|x\|^2}\mathbb{E}\left[\|Z\|1_{\{Z>\frac{\|x\|}{2}\}}\right] \\
&\leq \frac{\varphi^2(x)\cdot 2d\|x\|}{1+\|x\|^2}\mathbb{E}\left[\|Z\|1_{\{Z>\frac{\|x\|}{2}\}}\right] \\
&\leq \frac{\varphi^2(x)\cdot 2d\|x\|}{1+\|x\|^2}\cdot\frac{2^{1+\beta}\mathbb{E}\left[\|Z\|^{2+\beta}\right]}{\|x\|^{1+\beta}}.
\end{aligned}$$

por la desigualdad de Holder. Tercero, como la matriz de covarianzas está en forma diagonal se tiene

$$\mathbb{E}[\varphi''(x)\cdot\tilde{Z}^2] = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i^2}\mathbb{E}\left[Z_i^2\right] - \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\partial x_j}\mathbb{E}\left[Z_iZ_j1_{\{Z>\frac{\|x\|}{2}\}}\right].$$

Luego, se acota

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\partial x_j}\mathbb{E}\left[Z_iZ_j1_{\{Z>\frac{\|x\|}{2}\}}\right]\right| &\leq \sum_{i,j=1}^{d}\left|\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|\mathbb{E}\left[|Z_iZ_j|1_{\{Z>\frac{\|x\|}{2}\}}\right] \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{d}\frac{\varphi^2(x)\cdot 16\|x\|^2}{(1+\|x\|^2)^2}\mathbb{E}\left[\|Z\|^2 1_{\{Z>\frac{\|x\|}{2}\}}\right] \\
&\leq d^2\frac{\varphi^2(x)\cdot 16\|x\|^2}{(1+\|x\|^2)^2}\cdot\frac{2^{\beta}\mathbb{E}\left[\|Z\|^{2+\beta}\right]}{\|x\|^{\beta}} \\
&\leq \frac{16d^2\varphi^2(x)}{1+\|x\|^2}\cdot\frac{2^{\beta}\mathbb{E}\left[\|Z\|^{2+\beta}\right]}{\|x\|^{\beta}}.
\end{aligned}$$

y se calcula

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} \mathbb{E}\left[Z_i^2\right] &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} \mathbb{E}\left[Z_i^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{2\varphi^2(x)}{\left(1+\|x\|^2\right)^2} \Big(2(2\varphi(x)+1)x_i^2 - (1+\|x\|^2)\Big) \mathbb{E}\left[Z_i^2\right] \\
&= \frac{2\varphi^2(x)}{\left(1+\|x\|^2\right)^2} \left(2(2\varphi(x)+1)\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \mathbb{E}[Z_i^2] - (1+\|x\|^2)\sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}[Z_i^2]\right) \\
&= \frac{2\varphi^2(x)}{\left(1+\|x\|^2\right)^2} \left(2(2\varphi(x)+1)\|x\|^2 \frac{\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \mathbb{E}[Z_i^2]}{\|x\|^2} - (1+\|x\|^2)\operatorname{tr}(\operatorname{Var}(Z))\right) \\
&= \frac{2\varphi^2(x)}{1+\|x\|^2} \left(2h(\|x\|^2) \frac{\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \mathbb{E}[Z_i^2]}{\|x\|^2} - \operatorname{tr}(\operatorname{Var}(Z))\right),
\end{aligned}$$

del lema anterior y por hipótesis para la matriz de covarianzas de Z se tiene que

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} \mathbb{E}\left[Z_i^2\right] \sim -\frac{2\varphi^2(x)}{1+\|x\|^2}.$$

Por último, desde que las derivadas parciales de tercer orden son de la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} &= -\frac{16\varphi(x)^2}{\left(1+\|x\|^2\right)^3} \left(3\varphi^2(x) + 3\varphi(x) + 1\right) x_i x_j x_k \\
&\quad + \frac{4\varphi^2(x)(2\varphi(x)+1)}{\left(1+\|x\|^2\right)^2} \left(\delta_{ij}x_k + \delta_{ik}x_j + \delta_{jk}x_i\right),
\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\max_{i,j,k=1,\dots m} \left| \frac{\partial^3 \varphi(x+\eta\tilde{Z})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right| &\leq \frac{16 \cdot 7\varphi(x+\eta\tilde{Z})^2 \|x+\eta\tilde{Z}\|^3}{\left(1+\|x+\eta\tilde{Z}\|^2\right)^3} \\
&\leq \frac{16 \cdot 7\varphi^2(x/2)\|3x/2\|^3}{\left(1+\|x/2\|^2\right)^3}.
\end{aligned}$$

Luego, de la Observación 2.1, para $\|x\|$ suficientemente grande

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}[\varphi(x+Z) - \varphi(x+\tilde{Z})]\right| + \left|\varphi'(x)\cdot\mathbb{E}[\tilde{Z}]\right| + \frac{1}{2}\left|\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j} \mathbb{E}\left[Z_i Z_j 1_{\{Z > \frac{\|x\|}{2}\}}\right]\right| \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left|\varphi'''(x+\eta\tilde{Z})\cdot\mathbb{E}[\tilde{Z}]^3\right| \quad < \quad \left|\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} \mathbb{E}\left[Z_i^2\right]\right|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $R \geq 0$ tal que para todo $\|x\| \geq R$,

$$\mathbb{E}[\varphi(x+Z) - \varphi(x)] \leq 0.$$

Por último, como la cantidad de medidas consideradas es finita, eligiendo el mayor valor de los R asociados, se concluye la afirmación a probar. $\square$

Teorema 2.1 (Teorema 1.3, [12]). *Sean $\mu_1, \ldots, \mu_s$ medidas en $\mathbb{R}^d$ con media cero, $d \geq 3$, con $2+\beta$ momento, para algún $\beta > 0$. Suponga que, bajo alguna transformación lineal, las medidas de salto satisfacen la condición traza, esto es,*

$$\operatorname{tr}(A\operatorname{Var}(\mu_i)A^t) > 2\lambda_{\text{máx}}(A\operatorname{Var}(\mu_i)A^t)$$

para todo $1 \leq i \leq s$. Entonces toda caminata aleatoria X generada por esas medidas y una regla adaptada arbitraria ℓ es transiente.

Demostración. Sea el proceso $Y_n = AX_n,\ n \geq 0$, entonces las matrices covarianza de las variables salto satisfacen la condición traza del Lema 2.2. Sean $R > 0$ como en Lema 2.2, considere la función

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\ln(1+\|x\|^2)} \wedge \frac{1}{\ln(1+R^2)},\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Se tiene que $\tilde{\varphi}(y) = \frac{1}{\ln(1+\|y\|^2)} = \varphi(y)$ para todo $\|y\| \geq R$; luego, por la propiedad de la función φ, se sigue

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{\varphi}(Y_{n+1}) - \tilde{\varphi}(Y_n)|\mathcal{F}_n] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\tilde{\varphi}(Y_{n+1}) - \frac{1}{\ln(1+R^2)}\right)1_{\{\|Y_n\|<R\}}|\mathcal{F}_n\right] \\
&\quad + \mathbb{E}[(\tilde{\varphi}(Y_{n+1}) - \tilde{\varphi}(Y_n))1_{\{\|Y_n\|\geq R\}}|\mathcal{F}_n] \\
&\leq \mathbb{E}[(\varphi(Y_{n+1}) - \varphi(Y_n))|\mathcal{F}_n]1_{\{\|Y_n\|\geq R\}} \leq 0.
\end{aligned}$$

Entonces, el proceso $\tilde{\varphi}(Y_n),\ n \geq 0$, es una supermartingala no negativa y, por el Lema 2.1, el proceso $Y_n = AX_n,\ n \geq 0$, es transiente. Por inyectividad de A se tiene que, cuando $n \to \infty$,

$$\|Y_n\| \to +\infty \text{ si y solo si } \|X_n\| \to +\infty;$$

por lo tanto, $X_n,\ n \geq 0$, es transiente. $\square$

2.2. Transiencia en dimensión $d \geq 3$

Primero, se enuncia un resultado de álgebra matricial que inmediatamente permite satisfacer la condición traza y que de hecho fue inspirado por ello.

Proposición 2.1 (Teorema 1, [6]). *Sean k, d, s enteros positivos tales $d > k$ y $s \leq [\frac{d-1}{k-1}]$. Sean $M_1, \ldots, M_s$ matrices de orden d simétricas definida-positiva de rango máximo. Entonces existe una matriz cuadrada A tal que*

$$\frac{\lambda_{\text{máx}}(AM_iA^t)}{\operatorname{tr}(AM_iA^t)} < \frac{1}{k} \tag{2.1}$$

para todo $1 \leq i \leq s$.

Finalmente, se tiene el gran resultado de transiencia en dimensión $d \geq 3$, que ya había sido probado parcialmente en [12].

Teorema 2.2 (Transiencia en dimensión $d \geq 3$). *Sea s y d enteros positivos.Sean $\mu_1, \ldots, \mu_s$ medidas en $\mathbb{R}^d$ con media cero y $2 + \beta$ momento, para algún $\beta > 0$. Si el soporte de cada medida es de dimensión mayor o igual a $3 \vee (s + 1)$ entonces la caminata aleatoria X generada por estas medidas y cualquier regla adaptada ℓ es transiente.*

Demostración. Considerando la proyección sobre las $s+1$ primeras coordenadas se tiene que es suficiente probar la proposición para s ($s \geq 2$) medidas no degeneradas en $\mathbb{R}^{s+1}$.

En efecto, considerando $k = 2$ y $d = s + 1$, las matrices covarianza $M_i = \operatorname{Var}(\mu_i)$ para todo $1 \leq i \leq s$, se verifican las hipótesis de la Proposición 2.1. Entonces existe una matriz cuadrada A tal que

$$\operatorname{tr}(A\operatorname{Var}(\mu_i)A^t) > 2\lambda_{\text{máx}}(A\operatorname{Var}(\mu_i)A^t)$$

para todo $1 \leq i \leq s$, de modo que se satisface la condición traza del Teorema 2.1. $\square$

Capítulo 3

Recurrencia

En el presente capítulo se aborda la cuestión de establecer condiciones suficientes para garantizar que una caminata aleatoria autointeractuante sea recurrente. Aquí se muestra que en dimensión $d = 1$ toda caminata aleatoria autointeractuante es recurrente.

Lema 3.1. *Sea X una caminata aleatoria generada por las medidas $\mu_1, \ldots, \mu_s$ con media cero y no-degeneradas, y una regla adaptada ℓ. Sea la función $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ tal que $\varphi(x) \to +\infty$ cuando $x \to \infty$. Suponga que existe un conjunto compacto $K = B[0, R]$ tal que el proceso parado al tocar K, $\{\varphi(X_{n\wedge\tau_K})\}_{k\geq 0}$, es una supermartingala. Entonces la caminata X es recurrente.*

Demostración. Sea el tiempo de parada $\tau_K = \text{ínf}\{n \geq 0\colon \|X_n\| \leq R\}$. Observe que $Y_n = \varphi(X_{n\wedge\tau_K}),\ n \geq 0$, es una supermartingala no negativa, luego existe Y tal que

$$\varphi(X_{n\wedge\tau_K}) \to Y < +\infty \ c.s..$$

Si $\tau_K = +\infty$ con probabilidad positiva, dado que $\text{lím sup}_n \|X_n\| = +\infty$ c.s. (por el Lema 1.3) y $\varphi(x) \to +\infty$ cuando $x \to \infty$, se sigue

$$+\infty = \liminf_n \varphi(X_{n\wedge\tau_K}) = Y$$

con probabilidad positiva, lo cual es una contradicción. $\square$

3.1. Recurrencia en dimensión $d = 1$

Lema 3.2. *Sean $\mu_1, \ldots, \mu_s$ medidas en $\mathbb{R}$ no degeneradas con media cero y $2+\beta$ momento, para algún $\beta > 0$. Considere la función*

$$\varphi(x) = \ln(1+x^2),\ x \in \mathbb{R}.$$

Entonces existe una constante $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\mathbb{E}[\varphi(x+Z) - \varphi(x)] \leq 0$$

para $|x| > R$ y cualquier variable aleatoria $Z \sim \mu_i$, $i = 1, \ldots, s$.

Demostración. Sea $Z \sim \mu$ con μ una medida en $\mathbb{R}$ con $2+\beta$ momento, por la fórmula de Taylor con resto de Lagrange, existe $0 < \eta < 1$ tal que

$$\varphi(x+\tilde{Z}) = \varphi(x) + \varphi'(x)\tilde{Z} + \frac{1}{2}\varphi''(x)\cdot\tilde{Z}^2 + \frac{1}{3!}\varphi'''(x+\eta\tilde{Z})\cdot\tilde{Z}^3.$$

para $\tilde{Z}$ acotados.

Considere $\tilde{Z} = Z1_{|Z|\leq\frac{|x|}{2}}$ y $|x| \geq 2\sqrt{2}$, entonces se tiene que $|x+\tilde{Z}| \geq \sqrt{2}$. Luego se quiere acotar en media cada sumando del segundo miembro de la igualdad

$$\varphi(x+Z) - \varphi(x) = [\varphi(x+Z) - \varphi(x+\tilde{Z})] + \varphi'(x)\cdot\tilde{Z} + \frac{1}{2}\varphi''(x)\cdot\tilde{Z}^2 + \frac{1}{6}\varphi'''(x+\eta\tilde{Z})\cdot\tilde{Z}^3.$$

Primero,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi(x+Z) - \varphi(x+\tilde{Z})\right] &= \mathbb{E}\left[(\varphi(x+Z) - \varphi(x))1_{|Z|>\frac{|x|}{2}}\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{|x|}{2}\right) \\
&\leq \frac{2^{2+\beta}\mathbb{E}\left[|Z|^{2+\beta}\right]}{|x|^{2+\beta}},
\end{aligned}$$

por la desigualdad de Markov. Segundo, desde que $0 = \mathbb{E}Z = \mathbb{E}\tilde{Z} + \mathbb{E}\left[Z 1_{|Z|>\frac{|x|}{2}}\right]$ se sigue

$$\left|\mathbb{E}[\varphi'(x) \cdot \tilde{Z}]\right| \leq |\varphi'(x)| \left|\mathbb{E}\left[Z 1_{|Z|>\frac{|x|}{2}}\right]\right| \leq \frac{2|x|}{1+x^2} \cdot \frac{2^{1+\beta}\mathbb{E}\left[|Z|^{2+\beta}\right]}{|x|^{1+\beta}}.$$

por la desigualdad de Holder. Tercero, se tiene

$$\mathbb{E}[\varphi''(x) \cdot \tilde{Z}^2] = \varphi''(x)\mathbb{E}\left[\tilde{Z}^2\right] = \varphi''(x)\mathbb{E}\left[Z^2\right] - \varphi''(x)\mathbb{E}\left[Z^2 1_{|Z|>\frac{|x|}{2}}\right].$$

Luego, se acota

$$\left|\varphi''(x)\mathbb{E}\left[Z^2 1_{|Z|>\frac{|x|}{2}}\right]\right| \leq |\varphi''(x)|\,\mathbb{E}\left[\left|Z^2 1_{|Z|>\frac{|x|}{2}}\right|\right] \leq \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{2^{\beta}\mathbb{E}\left[|Z|^{2+\beta}\right]}{|x|^{\beta}}$$

y se calcula

$$\varphi''(x)\mathbb{E}\left[Z^2\right] = -\frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}\mathbb{E}\left[Z^2\right] < 0.$$

Por último, desde que la derivada de tercer orden es

$$\varphi'''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3},$$

se tiene

$$\left|\varphi'''(x+\eta\tilde{Z})\right| \leq \left|\frac{4|x+\eta\tilde{Z}|^3}{(1+|x+\eta\tilde{Z}|^2)^3}\right| \leq \frac{4|3x/2|^3}{(1+|x/2|^2)^3}.$$

Así, por las propiedades de φ, para $|x|$ suficientemente grande

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}[\varphi(x+Z)-\varphi(x+\tilde{Z})]\right| + \left|\varphi'(x)\mathbb{E}[\tilde{Z}]\right| + \frac{1}{2}\left|\varphi''(x)\mathbb{E}\left[Z^2 1_{|Z|>\frac{|x|}{2}}\right]\right| \\ + \frac{1}{6}\left|\varphi'''(x+\eta\tilde{Z})\mathbb{E}[\tilde{Z}^3]\right| < \left|\varphi''(x)\mathbb{E}[\cdot Z^2]\right|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $R > 0$ tal que para todo $|x| > R$

$$\mathbb{E}[\varphi(x+Z)-\varphi(x)] \leq 0.$$

Como la cantidad de medidas μ_i es finita, eligiendo el mayor R, se concluye lo requerido.

$\square$

Proposición 3.1. *Sean $\mu_1, \ldots, \mu_s$ medidas en $\mathbb{R}$ no degeneradas con media cero y $2+\beta$ momento, para algún $\beta > 0$. Entonces toda caminata aleatoria X generada por esas medidas y una regla adaptada arbitraria ℓ es recurrente.*

Demostración. Sea $\varphi(x) = \ln(1 + \|x\|^2),\ x \in \mathbb{R}$. Considere el tiempo de parada

$$\tau_R = \text{ínf}\{t \geq 0 \colon X_t \in B[0,R]\}.$$

Si $R > 0$ es elegido como el Lema 3.2 entonces el proceso $\varphi(X_{n\wedge\tau_R}),\ n \geq 0$, es una supermartingala no negativa pues

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\varphi(X_{(n+1)\wedge\tau_R}) - \varphi(X_{n\wedge\tau_R})|\mathcal{F}_{n\wedge\tau_R}] &\leq \mathbb{E}\left[(\varphi(X_{(n+1)\wedge\tau_R}) - \varphi(X_{n\wedge\tau_R}))1_{\{\tau_R\leq n\}}|\mathcal{F}_{n\wedge\tau_R}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}[(\varphi(X_{(n+1)\wedge\tau_R}) - \varphi(X_{n\wedge\tau_R}))1_{\{\tau_R > n\}}|\mathcal{F}_{n\wedge\tau_R}] \\
&\leq \mathbb{E}[\varphi(X_n + \xi_{n+1}^{\ell(n)}) - \varphi(X_n)|\mathcal{F}_{n\wedge\tau_R}]1_{\{X_n\notin B[0,R]\}} \leq 0.
\end{aligned}$$

Por el Lema 3.1 el proceso $X_n,\ n \geq 0$, es recurrente. $\square$

Observación 3.1. *Un caso más general en cierto sentido que usa la técnica de supermartingalas lo muestra la Proposición 2.2 en [14]. En ese caso, se consideran dos medidas correspondientes a una medida de salto de un paseo simple unidimensional y una medida simétrica del tipo Cauchy con una regla adaptada en el sentido de Benjamini (Ecuación 1.4). La función φ empleada es del tipo logaritmo, más aún,*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \ln|x| & \textit{si } |x| \geq A \\ 0 & \textit{si } |x| < A \end{cases}$$

con $A \geq 1$. De hecho, esta caminata es una versión similar a la pregunta original de I. Benjamini [14] (Ejemplo 1.1).

Capítulo 4

Una Revisión Sobre la Caminata Aleatoria Excitada Balanceada

Aquí se describe un modelo específico de caminata aleatoria autointeractuante desde el trabajo de Camarena, Panizo y Ramírez [4].

Resumen

La caminata aleatoria excitada balanceada introducida por Benjamini, Kozma y Schapira en 2011, es definida como un proceso estocástico en tiempo discreto sobre $\mathbb{Z}^d$, dependiendo de dos parámetros enteros $1 \leq d_1, d_2 \leq d$, que cada vez que se encuentra en un sitio $x \in \mathbb{Z}^d$ al tiempo n, este salta a $x \pm e_i$ con probabilidad uniforme, donde $e_1, \ldots, e_d$ son los vectores canónicos, para $1 \leq i \leq d_1$, si el sitio x fue visitado por primera vez al tiempo n, mientras que salta a $x \pm e_i$ con probabilidad uniforme, para $1 + d - d_2 \leq i \leq d$, si el sitio x fue visitado antes del tiempo n. Aquí se da una visión general de este modelo cuando $d_1 + d_2 = d$ y se presentan y estudian los casos cuando $d_1 + d_2 > d$. En particular, se prueba que para todos los casos $d \geq 5$ y muchos de los casos $d = 4$, la caminata aleatoria excitada balanceada es transiente.

4.1. Introducción

Considere una versión extendida de la caminata aleatoria excitada balanceada introducida por Benjamini, Kozma y Schapira en [1]. La caminata aleatoria excitada balanceada se define en cualquier dimensión $d \geq 2$, y depende de dos enteros $d_1, d_2 \in \{1, \ldots, d\}$ con $d_1 + d_2 \geq d$. Para cada $1 \leq i \leq d$, sea $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ el vector canónico cuya coordenada i-ésima es 1, mientras que todas las demás coordenadas son 0. Defina el proceso $(S_n \colon n \geq 0)$, denominado *caminata aleatoria excitada balanceada* en $\mathbb{Z}^d$ como una mezcla de dos caminatas aleatorias simples, con la condición inicial $S_0 = 0$: si al tiempo n, S_n visita un sitio para la primera vez, con probabilidad $1/(2d_1)$, en el tiempo $n + 1$ realiza un paso de caminata aleatorio simple usando una de las primeras coordenadas d_1, de modo que para todo $1 \leq i \leq d_1$,

$$\mathbb{P}[S_{n+1} - S_n = \pm e_i | \mathcal{F}_n, S_n \neq S_j \text{ para todo } 1 \leq j < n] = \frac{1}{2d_1},$$

donde $\mathcal{F}_n$ es el σ-álgebra generado por $S_0, \ldots, S_n$; por otro lado, si al tiempo n, S_n se encuentra en un sitio que ha visitado previamente, en el tiempo $n+1$ realiza una caminata aleatoria simple utilizando una de las últimas coordenadas d_2, de modo que para todo $1 + d - d_2 \leq i \leq d$,

$$\mathbb{P}[S_{n+1} - S_n = \pm e_i | \mathcal{F}_n, S_n = S_j \text{ para algún } 1 \leq j < n] = \frac{1}{2d_2}.$$

Definición 4.1 (Caminata aleatoria $M_d(d_1, d_2)$)**.** *Este proceso $S = (S_n)$ es llamado caminata aleatoria $M_d(d_1, d_2)$.*

En [1], esta caminata aleatoria se consideró en el caso cuando $d_1 + d_2 = d$, que denomina el caso de *no-superposición*. Aquí se trata el caso de *superposición* correspondiente a $d_1 + d_2 > d$.

Definición 4.2. *Se dice que la caminata aleatoria $M_d(d_1, d_2)$ es* transiente *si se visita cualquier sitio solo una cantidad finita de veces, mientras que decimos que es* recurrente *si visita cada sitio infinitas veces.*

Como una caminata aleatoria $M_d(d_1, d_2)$ no es Markvoniana, en principio puede no ser ni transiente ni recurrente.

Para el caso no superpuesto, en 2011 en [1] se demostró que la caminata aleatoria $M_4(2, 2)$ es transiente, mientras que en 2016, Peres, Schapira y Sousi en [13], mostraron que la caminata aleatoria $M_3(1, 2)$ es transiente, pero la transiencia de la caminata aleatoria $M_3(2, 1)$ sigue siendo una pregunta abierta.

El principal resultado aquí presentado es el siguiente teorema relacionado con el caso superpuesto.

Teorema 4.1. *Para cada $d \geq 4$ y $1 \leq d_1, d_2 \leq d$ con $d_1 + d_2 > d$ y $(d, d_1, d_2) \neq (4, 3, 2)$, la caminata aleatoria $M_d(d_1, d_2)$ es transiente.*

El Teorema 4.1 puede probarse directamente siempre que $d \geq 7$, para todos los valores admisibles de d_1 y d_2. Sea $r := d_1 + d_2 - d$. Note que si $r \geq 3$ entonces la caminata es transiente, desde que su restricción a las r coordenadas superpuestas es al menos un caminata aleatoria simple simétrica tridimensional con tiempos de espera acotados geométricamente. Se argumentará en los siguientes dos párrafos que la caminata también es transiente si $d_1 - r \geq 3$ o $d_2 - r \geq 3$. Asumiendo por el momento que cada una de las tres desigualdades $r \geq 3$, $d_1 - r \geq 3$ o $d_2 - r \geq 3$ implica transiencia, note que si ninguna de estas se satisface entonces se tiene que $d = d_1 + d_2 - r \leq 6$. Se concluye que para $d \geq 7$ la caminata es transiente para todos los valores admisibles de d_1 y d_2.

Case $d_2 - r \geq 3$. Se afirma que con probabilidad 1 la fracción de tiempos que la caminata aleatoria usa las últimas $d_2 - r$ coordenadas es asintóticamente acotada por una constante positiva y por lo tanto, la caminata aleatoria es transiente. Para ver esto note que cuando el caminante hace tres pasos consecutivos, la probabilidad de en al menos unos de estos pasos uno sea un sitio previamente visitado (antiguo) es acotado y mayor que 0. De hecho, si en dos pasos consecutivos el caminante visita dos sitios previamente no visitados (nuevos) entonces con probabilidad $1/(2d_1)$ este puede retroceder en el siguiente paso y, entonces, visitar un sitio antiguo.

Case $d_1 - r \geq 3$. Se afirma que el número de veces que la caminata aleatoria usa las primeras $d_1 - r$ coordenadas va al infinito cuando $n \to \infty$, lo que es suficiente para probar transiencia. Denote por $r(n)$ el cardinal del rango de la caminata al instante n. Se mostrará que $r(n) \to \infty$ casi seguramente cuando $n \to \infty$. Para $k \geq 1$, sea $n_k = \text{ínf}\{n \geq 0 : r(n) = k\}$. Se argumentará que si $n_k < \infty$ entonces $n_{k+1} < \infty$ casi seguramente. Note que $r(n_k) = k$, S_{n_k} es un sitio nuevo, y solo existen otros $k-1$ sitios en el rango. Sea $n_k < \infty$ y A_1 el evento en que los siguientes k pasos de la caminata son dados solo en direcciones coordenadas positivas. Sobre A_1, en los tiempos $n_k+1, n_k+2, \ldots, n_k+k$ la caminata visita k sitios distintos de $\mathbb{Z}^d \setminus \{S_{n_k}\}$. Entre estos sitios existen a lo más $k-1$ sitios antiguos. Entonces, sobre el evento $A_1 \cap \{n_k < \infty\}$ la caminata necesariamente visitará un sitio nuevo y $n_{k+1} \leq n_k + k < \infty$. Note que la probabilidad de A_1 (dado $n_k < \infty$) es $(2d_1)^{-k}$. Note que si A_1 no ocurre, entonces se puede considerar los siguientes k pasos a n_k+k y definir A_2 como el evento en que estos k pasos siguientes la caminata salta solo en las direcciones coordenadas positivas, y así sucesivamente. Como, condicional a $n_k < \infty$, los eventos $A_1, A_2, \ldots$ son independientes y cada uno tiene probabilidad $(2d_1)^{-k}$, se concluye que $n_{k+1} < \infty$.

Por lo tanto, para completar la prueba del 4.1 solo se tiene que considerar los casos $d = 4, 5, 6$. Esto se hará de la siguiente manera, los casos $d = 5, 6$ y varios casos en $d = 4$, pueden ser derivados de manera elemental usando la condición traza de [12]. De una manera menos directa, los casos $M_4(2,4)$ y $M_4(4,2)$ pueden tratarse mediante los métodos de [1]. El caso $M_4(2,3)$ que es algo más complejo, puede tratarse mediante una modificación de los métodos desarrollados por Peres, Schapira y Sousi [13] para la caminata aleatoria $M_3(1,2)$ a través de buenos controles sobre incrementos de martingala por una sucesión de variables aleatorias geométricas i.i.d. No es claro cómo los métodos mencionados arriba pueden ser aplicados a la caminata $M_4(3,2)$ para resolver la pregunta sobre su transiencia-recurrencia, así este caso permanece abierto.

En la Sección 2 se dará una revisión rápida de los principales resultados que se han obtenido previamente para el caso no superpuesto de la caminata aleatoria excitada balanceada. En la Sección 3, se probará el Teorema 4.1. En la Sección 3.1, se presentará la condición traza de [12], que se utilizará para probar los casos $d = 5, 6$ y varios casos en la dimensión $d = 4$. En la Sección 3.2, se probará la transiencia de las caminatas $M_4(2, 4)$ y $M_4(4, 2)$. Mientras que en la Sección 3.3, se considera la prueba de la transiencia de la caminata aleatoria $M_4(2, 3)$.

4.2. Revisión de la caminata aleatoria excitada balanceada

La caminata aleatoria excitada balanceada fue introducida en su versión de no-superposición por Benjamini, Kozma y Schapira [1]. Un precursor de la caminata aleatoria excitada balanceada es la caminata aleatoria excitada, introducida por Benjamini y Wilson en 2003 [2], que se define en términos de un parámetro $0 < p < 1$ de la siguiente manera: la caminata aleatoria $(X_n : n \geq 0)$ tiene espacio de estados $\mathbb{Z}^d$ y empieza en $X_0 = 0$; cada vez que la caminata aleatoria visita un sitio por primera vez, salta con probabilidad $(1 + p)/2d$ en la dirección e_1, probabilidad $(1 - p)/2d$ en la dirección $-e_1$ y con probabilidad $1/2d$ en las otras direcciones; cada vez que la caminata aleatoria visita un sitio que ya visitó anteriormente, salta con probabilidad uniforme en las direcciones $\pm e_i$, $1 \leq i \leq d$. Benjamini y Wilson demostraron en [2] que el modelo es transiente para $d > 1$. Se demostró un teorema de límite central y una ley de grandes números para $d > 1$ en [3] y [9]. Una revisión general del modelo se puede encontrar en [8]. A menudo, los métodos utilizados para probar la transiencia, la ley de los grandes números y el teorema del límite central para la caminata aleatoria excitada, se basan en la balisticidad del modelo (el hecho de que la velocidad no es cero), mediante el uso de tiempos de regeneración. Esto significa que la mayoría de estos métodos no son adecuados para estudiar la caminata aleatoria excitada balanceada, que no es balística. Por el momento, se han obtenido algunos resultados para la caminata aleatoria excitada balanceada, donde básicamente para cada caso se ha desarrollado una técnica diferente. El primer resultado, obtenido por Benjamini, Kozma y Schapira en [1] para el caso $M_4(2,2)$, es el siguiente teorema.

Teorema 4.2 (Benjamini, Kozma y Schapira, 2011)**.** *La caminata aleatoria* $M_4(2,2)$ *es transiente.*

La prueba del Teorema 4.2 se basa en obtener estimaciones suficientemente buenas para la probabilidad de que una caminata aleatoria bidimensional regrese a su punto de partida en un intervalo de tiempo $[n/c(\log n)^2, cn]$, para alguna constante $c > 0$, y en el cardinal del rango de la caminata aleatoria. Esto permite desacoplar usando independencia las 2 primeras coordenadas de las 2 últimas. En este artículo, aplicaremos este método para derivar la transiencia en los casos $M_4(4,2)$ y $M_4(2,4)$ del Teorema 4.1.

En 2016, Peres, Sousi y Schapira en [13], consideraron el caso $M_3(1,2)$ demostrando el siguiente resultado.

Teorema 4.3 (Peres, Schapira y Sousi, 2016)**.** *La caminata aleatoria* $M_3(1,2)$ *es transiente.*

El enfoque desarrollado en [13] para probar el Teorema 4.3, comienza con el condicionamiento de todos los saltos de las dos últimas coordenadas, y luego observa la primera coordenada en los momentos en que se mueven las dos últimas, lo que da una martingala. Entonces es suficiente obtener buenas estimaciones sobre la probabilidad de que esta martingala sea 0 en el tiempo n. La prueba del Teorema 4.1 para la caminata aleatoria $M_4(2,3)$, se basa en una modificación del método utilizado para probar el Teorema 4.3, donde un punto clave es obtener límites apropiados para los incrementos de martingala (que corresponderán a la primera coordenada del movimiento de la $M_4(2,3)$ caminata aleatoria) en términos de una sucesión de variables aleatorias geométricas i.i.d.

4.3. Prueba del Teorema 4.1

Se dividirá la prueba del Teorema 4.1 en tres pasos. Con la excepción de los casos $M_4(1,4)$, $M_4(4,1)$, $M_4(2,4)$, $M_4(4,2)$ y $M_4(2,3)$, se utilizará un resultado importante de Peres, Popov y Sousi [12]. Los casos $M_4(1,4)$ y $M_4(4,1)$ pueden ser derivados como aquellos en dimensión $d \geq 7$. Para los casos $M_4(2,4)$ y $M_4(4,2)$ se mostrará cómo se puede adaptar el argumento de [1]. Y el caso $M_4(2,3)$ se maneja como en [13].

4.3.1. La condición traza de [12]

Aquí se recuerda la llamada condición traza de [12] que es una condición general bajo la cual una versión generalizada de caminata aleatoria balanceada es transiente, y se ve cómo se puede usar para probar el Teorema 4.1 para los casos restantes en $d \geq 5$ y los casos $M_4(3,3)$, $M_4(3,4)$, $M_4(4,3)$ y $M_4(4,4)$.

Dados $d \geq 1$ y $m \geq 1$, considere las medidas de probabilidad $\mu_1, \ldots, \mu_m$ en $\mathbb{R}^d$ y por cada $1 \leq i \leq m$, sea $(\xi_n^i : n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. distribuidas de acuerdo con μ_i. Decimos que un proceso estocástico $(\ell_k : k \geq 0)$ es una regla adaptada con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ del proceso, si para cada $k \geq 0$, ℓ_k es $\mathcal{F}_k$-medible. Ahora, se define la caminata aleatoria $(X_n : n \geq 0)$ generada por las medidas de probabilidad $\mu_1, \ldots, \mu_m$ y la regla adaptada ℓ por

$$X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}^{\ell_n}, \qquad \text{for} \quad n \geq 0.$$

Sea μ una medida sobre $\mathbb{R}^d$. μ es llamada de *media* 0 si $\int x d\mu = 0$. Se dice que la medida μ tiene β *momento* si para toda variable aleatoria Z distribuida según μ, $||Z||$ tiene momento de orden β. La matriz covarianza de μ, $Var(\mu)$, es definida como la covarianza de Z.

Dada una matriz A, se denota por $\lambda_{max}(A)$ su máximo autovalor y por A^t su transpuesta. En [12], se probó el siguiente resultado.

Teorema 4.4 (Peres, Popov and Sousi, 2013). *Sean $\mu_1, \ldots, \mu_m$ medidas en $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, con media cero y $2+\beta$ momento, para algún $\beta > 0$. Asuma que existe una matriz A tal que la condición traza es satisfecha:*

$$tr(A\,Var(\mu_i)\,A^t) > 2\lambda_{max}(A\,Var(\mu_i)\,A^t)$$

para todo $1 \leq i \leq m$. Entonces cualquier caminata aleatoria X generada por estas medidas y cualquier regla adaptada es transiente.

Se sigue del Teorema 4.4, que cuando $d_1 \geq 3$ y $d_2 \geq 3$, la condición traza es satisfecha con $A = I$, para las dos matrices covarianza asociadas a los movimientos en las primeras d_1 y últimas d_2 dimensiones, y entonces la caminata aleatoria $M_d(d_1, d_2)$ es transiente. Por lo tanto, por la discusión justo después del enunciado del Teorema 4.1 en la Sección 4.1, se observa que los únicos casos que no están cubiertos por el Teorema 4.4 corresponden a

$$d_1 - r \leq 2,\ r \leq 2 \quad \text{and} \quad d_2 - r \leq 2, \tag{4.1}$$

y

$$\min\{d_1, d_2\} \leq 2.$$

Pero (4.1) implica que $\max\{d_1, d_2\} \leq 2 + r$. Así,

$$d_1 + d_2 = \max\{d_1, d_2\} + \min\{d_1, d_2\} \leq 4 + r,$$

conduce a $d = d_1 + d_2 - r \leq 4$. Esto prueba la transiencia para todos lo casos con $d \geq 5$. Ahora note que en dimensión $d = 4$ las caminatas aleatorias $M_4(3,3)$, $M_4(3,4)$, $M_4(4,3)$ y $M_4(4,4)$ cumplen $d_1 \geq 3$ o $d_2 \geq 3$, entonces se satisface la condición traza de [12].

Finalmente, las caminatas aleatorias $M_4(4,1)$ y $M_4(1,4)$ satisfacen $d_1 - r \geq 3$ o $d_2 - r \geq 3$, por lo que también son transientes.

4.3.2. Las caminatas $M_4(2,4)$ y $M_4(4,2)$

Considere la caminata aleatoria $M_4(4,2)$ y denote por $r(n)$ el cardinal de su rango al tiempo n. Sea la notación $S = (X, Y)$ para la caminata aleatoria $M_4(4,2)$, donde X representa las primeras dos componentes e Y las últimas dos. También, $r_1(n)$ denota el número de veces hasta el tiempo n que la caminata aleatoria saltó usando las coordenadas X mientras estaba en un sitio visitado por primera vez y $r_2(n) := r(n) - r_1(n)$. En analogía con el Lema 1 de [1], se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.1. *Para cada $M > 0$ y cada $i = 1, 2$, existe una constante $C > 0$ such that*

$$\mathbb{P}[n/(C\log n)^2 \leq r_i(n) \leq 99n/100] = 1 - o\left(n^{-M}\right). \tag{4.2}$$

Demostración. Primero note que en analogía a la prueba del Lema 1 de [1], se tiene que

$$\mathbb{P}[n/(C\log n)^2 \leq r(n) \leq 99n/100] = 1 - o\left(n^{-M}\right).$$

Desde que cada vez que la caminata aleatoria se encuentra en un sitio recientemente visitado, entonces con una probabilidad de $1/2$ salta usando la caminata aleatoria de X y con una probabilidad de $1/2$ salta usando la caminata aleatoria de Y, por unas estimaciones estándar de grandes desvíos, se deduce (4.2). □

Ahora note que

$$\{(X_k, Y_k) : k \geq 1\} = \{(U_{r_1(k-1)},\ V_{r_2(k-1)} + W_{k-r(k-1)}) : k \geq 1\}, \tag{4.3}$$

donde U, V y W son tres caminatas aleatorias simples simétricas en $\mathbb{Z}^2$. Se sigue de la identidad (4.3) y el Lema 4.1 usando las cotas de las componentes $r_1(n)$ y $r_2(n)$ del cardinal del rango de la caminata, que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[0 \in \{S_n, \ldots, S_{2n}\}] \leq{}& \mathbb{P}[0 \in \{\tilde{U}(n/(C\log n)^2), \ldots, \tilde{U}(2n)\}] \\ &\times\mathbb{P}[0 \in \{\tilde{W}(n/(C\log n)^2), \ldots, \tilde{W}(2n)\}] + o(n^{-M}),\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $\tilde{U}$ y $\tilde{W}$ son caminatas aleatorias simples simétricas sobre $\mathbb{Z}^2$. En este punto, se recuerda el Lema 2 de [1].

Lema 4.2 (Benjamini, Kozma y Schapira, 2011). *Sea U una caminata aleatoria simple sobre $\mathbb{Z}^2$ y sea $t \in [n/(\log n)^3, 2n]$. Entonces*

$$\mathbb{P}[0 \in \{U(t), \ldots, U(2n)\}] = O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right).$$

Combinando la desigualdad (4.4) con el Lema 4.2, se concluye que existe una constante $C > 0$ tal que para cada $n > 1$ (ver la Proposición 1 de [1])

$$\mathbb{P}[0 \in \{S_n, \ldots, S_{2n}\}] \leq C\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)^2.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[0 \in \{S_{2^k}, \ldots, S_{2^{k+1}}\}] < \infty,$$

y la transiencia de la caminata aleatoria $M_4(4,2)$ se sigue de Borel-Cantelli. Se puede usar un argumento similar para probar la transiencia de la caminata aleatoria $M_4(2,4)$.

4.3.3. La caminata aleatoria $M_4(2,3)$

Aquí se sigue el método desarrollado por Peres, Schapira y Sousi en [13]. Primero se enuncia la Proposición 2.1 de [13].

Proposición 4.1 (Peres, Schapira y Sousi, 2016). *Sean $\rho > 0$ y $C_1, C_2 > 0$. Sea M sea una martingala con variación cuadrática V y suponga que $(G_k : k \geq 0)$ es una sucesión de variables aleatorias geométricas $i.i.d.$ con media C_1 tal que para todo $k \geq 0$,*

$$|M_{k+1} - M_k| \leq C_2 G_k. \tag{4.5}$$

Para todo $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq \log_2(n)$ sean $t_k := n - \frac{n}{2^k}$ y

$$A_k := \left\{V_{t_{k+1}} - V_{t_k} \geq \rho \frac{t_{k+1} - t_k}{(\log n)^{2a}}\right\}.$$

Suponga que para unos $N \geq 1$ y $1 \leq k_1 < \cdots < k_N < \log_2(n)/2$ se cumple

$$\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^{N} A_{k_i}\right) = 1. \tag{4.6}$$

Entonces, existe una constante $c > 0$ y un entero positivo n_0 tal que para todos $0 < a < 1$ y $n \geq n_0$ se tiene que

$$\mathbb{P}(M_n = 0) \leq \exp\left(-cN/(\log n)^a\right).$$

Observación 4.1. *La Proposición 4.1 está ligeramente modificada con respecto a la Proposición 2.1 de [13] ya que se permite que la media C_1 de las variables aleatorias geométricas sea arbitraria y que la cota (4.5) tenga un constante arbitraria C_2.*

Ahora observe que la caminata aleatoria $M_4(2,3)$ denotada $(S_n : n \geq 0)$ se puede definir de la siguiente manera. Supongamos que $(\zeta_n : n \geq 1)$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. que toman cada uno de los valores $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$ y $(0, 0, 0, \pm 1)$ con probabilidad $1/6$, mientras que $(\xi_n : n \geq 1)$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. (independientes de la sucesión anterior) que toman cada uno de los valores $(0, \pm 1, 0, 0)$ y $(\pm 1, 0, 0, 0)$ con probabilidad $1/4$. Defina ahora recursivamente, $S_0 = 0$, y

$$S_{n+1} = S_n + \Delta_{n+1}$$

donde el paso es

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \xi_{r(n)}\,, & \text{si } r(n) = r(n-1) + 1 \\ \zeta_{n+1-r(n)}\,, & \text{si } r(n) = r(n-1) \end{cases}$$

y $r(n) = \#\{S_0, \ldots, S_n\}$ es el cardinal del rango de la caminata aleatoria al tiempo n (note que formalmente $r(-1) = 0$).

Se escribe la posición en el tiempo n de la caminata aleatoria $M_4(2,3)$ como

$$S_n = (X_n, Y_n, Z_n, W_n).$$

Defina recursivamente la sucesión de tiempos de parada $(\tau_k : k \geq 0)$ por $\tau_0 = 0$ y para $k \geq 1$,

$$\tau_k := \text{ínf}\{n > \tau_{k-1} : (Z_n, W_n) \neq (Z_{n-1}, W_{n-1})\}.$$

Note que $\tau_k < \infty$ c.s. para todo $k \geq 0$. Además, el proceso $(U_k : k \geq 0)$ definido por

$$U_k = (Z_{\tau_k}, W_{\tau_k}),$$

es una caminata aleatoria simple en la dimensión $d = 2$, y es igual a la caminata aleatoria simple con pasos definidos por las dos últimas coordenadas de ζ. Ahora, sea $\mathbb{P}_U$ la ley de S condicionalmente en todo el proceso de U. Tenga en cuenta que la primera coordenada $\{X_n : n \geq 0\}$ es un $\mathcal{F}_n := \sigma\{\Delta_k : k \leq n\}$-martingala con respecto a $\mathbb{P}_U$, ya que

$$\mathbb{E}_U(\, X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) = 1_{\{r(n)=r(n-1)+1\}}\, \mathbb{E}(\, \xi_{r(n)} \cdot e_1 \,|\, \mathcal{F}_n,\, U),$$

U es $\sigma(\zeta_k : k \geq 1)$-medible ya que se define solo en términos de la sucesión $\left(\zeta_k 1_{\{\pi_{34}(\zeta_k)\neq 0\}}\right)_{k\geq 1}$, ($\pi_{34}$ es el proyección en las 3rd y 4th coordenadas), y

$$\mathbb{E}[\, \xi_{r(n)} \cdot e_1 \,|\, \mathcal{F}_n, (\zeta_k : k \geq 1)] = 0,$$

por independencia. Por lo tanto, por el Teorema de Muestreo Opcional se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.3. *$\{M_m : m \geq 0\}$ con $M_m := X_{\tau_m}$, es $\mathcal{G}_m$-martingala con respecto a $\mathbb{P}_U$, donde $\mathcal{G}_m := \mathcal{F}_{\tau_m}$.*

Para probar la transiencia de la caminata aleatoria $M_4(2, 3)$, es suficiente mostrar que $\{(M_n, U_n) : n \geq 0\}$ es transiente (bajo $\mathbb{P}$). Se llama por $r_U(n)$ al cardinal del rango de la caminata aleatoria U en el tiempo n. Para cada $n \geq 0$ y $k \geq 0$, sea

$$t_k := n - n/2^k \tag{4.7}$$

y

$$\mathcal{K} := \left\{k \in \{1, \ldots, (\log n)^{3/4}\} : r_U(t_{k+1}) - r_U(t_k) \geq \rho(t_{k+1} - t_k)/\log n\right\}. \tag{4.8}$$

Se mostrará que

$$\mathbb{P}(M_n = U_n = 0) = \mathbb{E}[\mathbb{P}_U(M_n = 0)1\{|\mathcal{K}| \geq \rho(\log n)^{3/4}, U_n = 0\}]$$
$$+\mathbb{E}[\mathbb{P}_U(M_n = 0)1\{|\mathcal{K}| < \rho(\log n)^{3/4}, U_n = 0\}], \tag{4.9}$$

es sumable en n, para $\rho = \rho_0$ elegido apropiadamente. En este punto, recuerde la Proposición 3.4 de [13], la cual es un enunciado para caminatas aleatorias simples simétricas en $\mathbb{Z}^2$.

Proposición 4.2 (Peres, Schapira y Sousi, 2016)**.** *Para $k \geq 1$, considere t_k definido como en* (4.7)*. Entonces, para $\mathcal{K}$ definido como en* (4.8)*, se tiene que existen constantes positivas α, C_3, C_4 y ρ_*, tales que para todo $\rho < \rho_*$, y todo $n \geq 1$*

$$\mathbb{P}(|\mathcal{K}| \leq \rho(\log n)^{3/4} | U_n = 0) \leq C_3 e^{-C_4(\log n)^\alpha}.$$

Eligiendo $\rho = \rho_0 \leq 1$ suficientemente pequeño, por la Proposición 4.2, se obtiene la siguiente cota para el segundo término del lado derecho de la Ecuación (4.9),

$$\mathbb{E}[\mathbb{P}_U(M_n = 0)1\{|\mathcal{K}| < \rho_0(\log n)^{3/4}, U_n = 0\}] \leq C_3 C_5 \frac{1}{n} \exp\left(-C_4(\log n)^\alpha\right), \tag{4.10}$$

donde se ha usado el hecho que $\mathbb{P}(U_n = 0) \leq \frac{C_5}{n}$ para alguna constante $C_5 > 0$.

Para la cota del primer término del lado derecho de la Ecuación (4.9), se usará la Proposición 4.1 con $a = 1/2$ y $\rho = \rho_0/4$. Primero se mostrará que (4.6) es satisfecho. De hecho, tenga en cuenta que para cada $n \geq 0$ cuando U_n está en un sitio nuevo, $\mathbb{E}_U[(M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{G}_n] \geq 1/2$. Entonces, para todo $k \in \mathcal{K}$, con $\rho = \rho_0$, se tiene que para todo n suficientemente grande

$$\begin{aligned}
V_{t_{k+1}} - V_{t_k} &= \sum_{n=t_k+1}^{t_{k+1}} \mathbb{E}_U[(M_n - M_{n-1})^2 | \mathcal{G}_{n-1}] \\
&\geq \big(r_U(t_{k+1} - 1) - r_U(t_k - 1)\big)/2 \\
&\geq \big(r_U(t_{k+1}) - r_U(t_k) - 1\big)/2 \\
&\geq (\rho_0/4)(t_{k+1} - t_k)/(\log n)^{2a}.
\end{aligned}$$

Entonces, sobre el evento $|\mathcal{K}| \geq \rho_0(\log n)^{3/4}$, se tiene que existen $k_1, \ldots, k_N \in \mathcal{K}$ con $N = \rho_0(\log n)^{3/4}$ tales que

$$\mathbb{P}_U\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_{k_i}\right) = 1.$$

Ahora, se muestra que existe una sucesión de variables aleatorias geométricas i.i.d. $(G_k : k \geq 0)$ tal que (4.5) se satisface con $C_1 = 24$ y $C_2 = 3$. De hecho, note que

$$|M_{n+1} - M_n| = |X_{\tau_{n+1}} - X_{\tau_n}| \leq \sum_{k=\tau_n}^{\infty} |X_{(k+1)\wedge\tau_{n+1}} - X_{k\wedge\tau_{n+1}}|. \tag{4.11}$$

Note que el lado derecho de (4.11) es el número de pasos de X entre los tiempos τ_n y τ_{n+1}. Ahora, en cada tiempo k (con k empezando en τ_n) que se realiza un paso en X, hay una probabilidad de al menos $\frac{1}{4^2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{24}$ que la caminata aleatoria S haga tres pasos sucesivos en los tiempos $k+1$, $k+2$ y $k+3$, de tal manera que en uno de ellos realiza un paso en U y a lo más dos de estos pasos son de la caminata aleatoria X: si la caminata aleatoria está al tiempo k en un sitio visitado previamente, con una probabilidad de $2/3$ en el tiempo $k+1$, la caminata aleatoria U se moverá; si la caminata aleatoria está al tiempo k en un sitio que nunca antes había visitado, con probabilidad $\frac{1}{4^2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{24}$, habrá 3 pasos sucesivos de S a veces $k+1$, $k+2$ y $k+3$, siendo los primeros 2 pasos de la caminata aleatoria X y el tercer paso de U (solo se requiere moverse en la dirección e_1 usando X en el tiempo $k+1$, seguirlo inmediatamente en el tiempo $k+2$ por un paso reverso en la dirección $-e_1$ usando X nuevamente, y luego inmediatamente en el tiempo $k+3$, hacer un paso en U). Como esto sucede independientemente cada 3 pasos en la escala de tiempo de X (el tiempo aumenta en una unidad cada vez que X se mueve), vemos que podemos vincular los incrementos de martingala eligiendo variables aleatorias geométricas i.i.d. $(G_k : k \geq 0)$ con parámetro $1/24$ en (4.5) multiplicado por 3.

Observación 4.2. *La sucesión de variables aleatorias geométricas i.i.d. construidas anteriormente no son las óptimas, en el sentido de que es posible construir otras sucesión de variables aleatorias geométricas i.i.d. de parámetro mayor a* $1/24$*.*

Desde que ahora se sabe que (4.6) y (4.5) se satisfacen, por la Proposición 4.1, existen $n_0 \geq 1$ y $C_6 > 0$ tales que sobre el evento $|\mathcal{K}| \geq \rho_0(\log n)^{3/4}$ se tiene que para $n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}_U(M_n = 0) \leq e^{-C_6\rho_0 \frac{(\log n)^{3/4}}{(\log n)^{1/2}}}.$$

Por lo tanto, para $n \geq n_0$ se tiene

$$\mathbb{E}[\mathbb{P}_U(M_n = 0)1\{|\mathcal{K}| \geq \rho_0(\log n)^{3/4}, U_n = 0\}] \leq C_5 \frac{1}{n} e^{-C_6\rho_0 \frac{(\log n)^{3/4}}{(\log n)^{1/2}}}. \tag{4.12}$$

Usando las cotas (4.10) y (4.12) en (4.9) nos da que existen constantes $C_7 > 0$, $C_8 > 0$ y algún $\beta > 0$, de modo que

$$\mathbb{P}(M_n = U_n = 0) \leq \frac{1}{n} C_7 e^{-C_8(\log n)^{\beta}}$$

Por el Lema de Borel-Cantelli, se concluye que el proceso (M, U) es transiente, lo que conduce a la transiencia de S.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

Del presente trabajo se obtienen las siguientes conclusiones.

- Se enunció el modelo de caminatas aleatorias autointeractuantes como una extensión de las caminatas aleatorias simples en $\mathbb{R}^d$. También se extendió las nociones de transiencia y recurrencia para este tipo de caminatas.

- Se tiene la llamada condición traza, que bajo ciertas condiciones adicionales, implica la transiencia de una caminata aleatoria autointeractuante. En dimensión $d \geq 3$ combinar, mediante una regla adaptada arbitraria, una cantidad menor a la dimensión de caminatas transientes se origina una caminata aleatoria autointeractuante transiente.

- En baja dimensión, $d = 1$ y bajo ciertas condiciones adicionales, una caminata aleatoria autointeractuante es recurrente.

- Una clasificación del comportamiento de una versión más general del modelo de caminata aleatoria excitada balanceada, que es un caso particular de caminata aleatoria autointeractuante, se probó parcialmente. En específico, se probó que una caminata aleatoria excitada balanceada es transiente en dimensión alta $d \geq 5$ y en varios casos en dimensión $d = 4$.

Recomendaciones

Cabe mencionar que hay muchos puntos pendientes de estudio, algunos de los cuales son listados a continuación.

- ¿Cuáles son las condiciones sobre las medidas $\mu_1, \ldots, \mu_s$ en $\mathbb{R}^2$ de modo que para toda regla adaptada ℓ la caminata aleatoria autointeractuante generada sea recurrente? ¿o transiente? (Se usa la notación del capítulo 1)

- ¿Cuáles son las condiciones sobre la regla adaptada ℓ de modo que para todas las medidas $\mu_1, \ldots, \mu_s$ en $\mathbb{R}^d$ la caminata aleatoria autointeractuante generada sea recurrente? ¿o transiente? (Se usa la notación del capítulo 1)

- Completar la prueba de transiencia de caminatas aleatorias excitadas balanceadas en dimensión $d \geq 3$, en dimensión $d = 4$ solo resta la caminata $M_4(3, 2)$. (Se usa la notación del capítulo 4)

Bibliografía

[1] Itaı Benjamini, Gady Kozma, and Bruno Schapira. A balanced excited random walk. *Comptes Rendus Mathematique*, 349(7):459–462, 2011.

[2] Itai Benjamini and David Wilson. Excited random walk. *Electron. Commun. Probab.*, 8:86–92, 2003.

[3] Jean Berard and Alejandro Ramirez. Central limit theorem for the excited random walk in dimension $d \geq 2$. *Electron. Commun. Probab.*, 12:303–314, 2007.

[4] Daniel Camarena, Gonzalo Panizo, and Alejand ro F. Ramírez. An overview of the balanced excited random walk. *arXiv e-prints*, page arXiv:2002.05750, February 2020.

[5] Rick Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 4 edition, 2010.

[6] Ronen Eldan, Fedor Nazarov, and Yuval Peres. How many matrices can be spectrally balanced simultaneously? *Israel Journal of Mathematics*, 224(1):385–406, Apr 2018.

[7] G. Fayolle, V. A. Malyshev, and M. V. Menshikov. *Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains*. Cambridge University Press, 1995.

[8] Elena Kosygina and Martin P. W. Zerner. Excited random walks: results, methods, open problems. 2012.

[9] Gady Kozma. Non-classical interacting random walks. Problem session. *Oberwolfach Reports*, 4(2):1521–1574, 2008.

[10] Gregory F Lawler. *Intersections of Random Walks*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel, 2013.

[11] Nickos Papadatos. The characteristic function of the discrete cauchy distribution, 2018.

[12] Yuval Peres, Serguei Popov, and Perla Sousi. On recurrence and transience of self-interacting random walks. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 44(4):841–867, Dec 2013.

[13] Yuval Peres, Bruno Schapira, and Perla Sousi. Martingale defocusing and transience of a self-interacting random walk. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 52(3):1009–1022, 08 2016.

[14] Olivier Raimond and Bruno Schapira. Random walks with occasionally modified transition probabilities, 2009.

[15] Olivier Raimond and Bruno Schapira. Random walks with occasionally modified transition probabilities. *Illinois J. Math.*, 54(4):1213–1238, 2010.

Apéndice A

Resultados clásicos para caminatas aleatorias

Sea $(\xi_k : k \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sobre $\mathbb{R}^d$ se define la caminata aleatoria simple en $\mathbb{R}^d$ como el proceso estocástico $X = (X_n : n \geq 0)$ dado por, $X_0 = 0$,

$$X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Se dice que $x_0 \in \mathbb{R}^d$ es un sitio recurrente si para todo $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\|X_n - x_0\| < \epsilon \text{ recurr.}) = 1.$$

Observe que el evento $A = \{\|X_n - x_0\| < \epsilon \text{ recurr.}\}$ no depende de la reorganización de una cantidad finita de las variables $(\xi_k)_{k \geq 0}$, de modo que por la Ley 0-1 de Hewitt-Savage (Teorema 4.1.1 de [5]) se tiene que cuando A no es seguro tiene probabilidad nula. De hecho, para conocer el conjunto de sitios recurrentes es suficiente probar si el origen $x_0 = 0$ es recurrente: el conjunto $\mathcal{R}$ de valores recurrentes es o bien $\emptyset$ o bien un subgrupo aditivo cerrado de $\mathbb{R}^d$.

Si $\mathcal{R} = \emptyset$, la caminata aleatoria se llama *transiente*; en otro caso la caminata es llamada *recurrente*. A continuación, se establecen condiciones suficientes para un comportamiento transiente o recurrente.

Proposición A.1 ([5]). *Sea X la caminata aleatoria simple en $\mathbb{R}^d$ y $\epsilon > 0$.*
Criterio de transiencia*:*

$$\textit{Si } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|X_n\| < \epsilon) < \infty \textit{ entonces } \mathbb{P}(\|X_n\| < \epsilon \textit{ recurr.}) = 0.$$

Criterio de recurrencia*:*

$$\textit{Si } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|X_n\| < \epsilon) = \infty \textit{ entonces } \mathbb{P}(\|X_n\| < 2\epsilon \textit{ recurr.}) = 1.$$

Demostración. La primera afirmación se desprende del Lema Borel-Cantelli. Resta mostrar la segunda afirmación. Sean $\epsilon > 0$ y $A = \{\|X_n\| < \epsilon \text{ recurr.}\}$, considere los eventos

$$A_{\delta,n,m} = \{\|X_n\| < \delta, \|X_j\| \geq \delta \text{ para todo } j \geq n+m\}$$

$$B_{\delta,n,m} = \{\|X_j - X_n\| \geq \delta \text{ para todo } j \geq n+m\}$$

donde $n, m \geq 0$ y $\delta > 0$. Para cada $m \geq 1$, si ω pertenece a algún $A_{\epsilon,n,m}$, un evento con n mínimo, entonces la caminata solo puede quedarse a lo más otros $m-1$ instantes a distancia ϵ del origen, esto implica

$$\sum_{n\geq 1} 1_{A_{\epsilon,n,m}} \leq m.$$

Se sigue

$$\begin{aligned}
m &\geq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_{\epsilon,n,m}) \\
&\geq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\|X_n\| < \epsilon, B_{2\epsilon,n,m}) \\
&\geq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\|X_n\| < \epsilon)\mathbb{P}(B_{2\epsilon,n,m}) \\
&= \mathbb{P}(B_{2\epsilon,0,m}) \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\|X_n\| < \epsilon).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, desde que el lado derecho suma infinito se concluye que $\mathbb{P}(B_{2\epsilon,0,m}) = 0$ para todo $m \geq 1$ y

$$\mathbb{P}(A^c) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(B_{2\epsilon,0,m}) = 0.$$

$\square$

A continuación se resume la clásica teoría de supermartingalas de Foster-Lyapunov que también establece criterios suficientes de recurrencia y transiencia para cadenas de Markov. Sea $(X_n : n \geq 0)$ una cadena de Markov sobre un espacio de estados numerable E con probabilidad de transición P. Se dice que $x \in E$ es un estado recurrente si

$$\mathbb{P}(X_n = x \text{ para algún } n \geq 1 | X_0 = x) = 1;$$

y en otro caso se dice que x es transiente. Por la propiedad de Markov cuando x es un estado recurrente se tiene que $\mathbb{P}(X_n = x \text{ recurr.} | X_0 = x) = 1$. Se dice que los estados x e y se comunican si $\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) > 0$ y $\mathbb{P}(X_m = x | X_0 = y) > 0$ para algunos n, m. Cuando la cadena es irreducible (esto es, todo par de estados se comunican) si algún estado es recurrente (o transiente) entonces todos los estados también lo son, y se tiene un resultado similar a la Proposición A.1.

Proposición A.2 (Criterio Foster-Lyapunov, [7]). *Sea X una cadena de Markov irreducible sobre un espacio de estados numerable E.*
Criterio de transiencia*: La cadena de Markov es transiente si y solo si existe una función $\varphi \colon E \to \mathbb{R}_+$ y un conjunto no vacío $A \subset E$ tales que*

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1}) - \varphi(X_n) | X_n = x] \leq 0, \quad \forall x \in E \setminus A,$$

y $\varphi(x) < \inf_{y \in A} \varphi(y)$ cuando $x \in E \setminus A$.
Criterio de recurrencia*: La cadena de Markov es recurrente si y solo si existe una función $\varphi \colon E \to \mathbb{R}_+$ y un conjunto finito no vacío set $A \subset E$ tales que*

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1}) - \varphi(X_n) | X_n = x] \leq 0, \quad \forall x \in E \setminus A,$$

y $\varphi(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

Demostración. Primero, para el criterio de la transiencia. Fije $X_0 = x$ con $x \in E \setminus A$, entonces el proceso $Y_n = \varphi(X_n),\ n \geq 0$, es una supermartingala. Para cada $K \geq 1$, $K \wedge \tau_A$ es un tiempo de parada acotado y, por el teorema de muestreo opcional, se sigue

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = Y_0 &\geq \mathbb{E}_x[Y_{K\wedge\tau_A}] \\
&\geq \mathbb{E}_x[\varphi(X_{\tau_A})1_{\{\tau_A \leq K\}}] \\
&\geq \mathbb{P}_x(\tau_A \leq K) \inf_{y\in A} \varphi(y).
\end{aligned}$$

Luego, tomando límite, cuando $K \to \infty$, en la desigualdad

$$\mathbb{P}_x(\tau_A \leq K) \leq \frac{\varphi(x)}{\inf_{y\in A}\varphi(y)}$$

se obtiene $\mathbb{P}_x(\tau_A < \infty) < 1$ y esto implica la transiencia de la cadena. Ahora, si la cadena es transiente, fijado $A = \{x_0\}$ con $x_0 \in E$, se define $\varphi(x) = \mathbb{P}_x(\tau_A < \infty),\ x \in E$. Entonces se tiene que $\varphi(y) = 1$ para $y \in A$ y, por transiencia, $\varphi(x) = 0$ para $x \in E \setminus A$, de modo que φ satisface las condiciones necesarias del criterio de transiencia.

Segundo, para el criterio de recurrencia. Fije $X_0 = x$ con $x \in E \setminus A$, entonces el proceso $Y_n = \varphi(X_n),\ n \geq 0$, es una supermartingala. Desde que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, cada conjunto de nivel $\{y \in E\colon \varphi(y) \leq M\}$, $M \geq 0$, contiene una cantidad finita de estados; y por, la irreducibilidad de la cadena, se tiene

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(X_n) = +\infty \quad c.s. \text{ sobre } \{\tau_A = \infty\}.$$

Por otro lado, por el teorema de convergencia de supermartingalas se tiene $Y_n \to Y_\infty$ c.s. y $\mathbb{E}_x[Y_\infty] \leq Y_0$. Se sigue

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = Y_0 &\geq \mathbb{E}_x[Y_\infty] \\
&\geq \mathbb{E}\left[Y_\infty 1_{\{\tau_A=\infty\}}\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\limsup_{n\to\infty} \varphi(X_n) 1_{\{\tau_A=\infty\}}\right] = +\infty,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Ahora, si la cadena es recurrente, fijado $A = \{x_0\}$ con $x_0 \in E$, se define $\varphi(x) = \mathbb{P}_x(\tau_A < \infty)$, $x \in E$. Entonces se tiene que $\varphi(y) = 1$ para $y \in A$ y, por transiencia, $\varphi(x) = 0$ para $x \in E \setminus A$, de modo que φ satisface las condiciones necesarias del criterio de transiencia. $\square$

Ejemplo A.1 (Teorema de Polya para caminatas aleatorias simples simétricas en $\mathbb{Z}^d$)**.** *Sea $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $1 \leq i \leq d$, el $i-$ésimo vector unitario de la base canónica de $\mathbb{R}^d$. Considere la caminata X definida por la sucesión $(\xi : k \geq 1)$ con distribución por*

$$\mathbb{P}(\xi_1 = e_i) = \mathbb{P}(\xi_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}.$$

Se tienen dos criterios para determinar transiencia o recurrencia. Primero, desde que por el Teorema del Límite Central Local (Teorema 1.2.1 de [10]) se tiene

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 2\left(\frac{d}{2\pi n}\right)^{d/2} + O(n^{-(2+d)/2}),$$

entonces sumando se consigue

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_k = 0) \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} + O(1) & d = 1 \\ \frac{1}{\pi} \log n + O(1) & d = 2 \\ c + O(n^{(2-d)/2}) & d = 3 \end{cases}.$$

Por lo tanto, de la Proposición A.1, la caminata es recurrente si $d \leq 2$ y transiente si $d \geq 3$.

Segundo, considerando la función

$$\varphi(x) = \begin{cases} \|x\|^{2\alpha} & d = 1 \\ \ln^{\alpha} \|x\|^2 & d = 2 \\ \|x\|^{-2\alpha} & d \geq 3 \end{cases},$$

con $\alpha > 0$, entonces calculando se tiene

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1}) - \varphi(X_n)|X_n = x] \sim \begin{cases} 2\alpha(2\alpha-1)\|x\|^{(2\alpha-2)} & d=1 \\ \frac{4\alpha(\alpha-1)}{\|x\|^2}\ln^{\alpha-2}\|x\|^2 & d=2 \\ -2\alpha(-2\alpha+d-2)\|x\|^{(-2\alpha-2)} & d\geq 3 \end{cases}\cdot$$

Por lo tanto, de la Proposición A.2 eligiendo adecuadamente $0 < \alpha < 1$, se tiene que la caminata es recurrente si $d \leq 2$ y transiente si $d \geq 3$.

Por último, es importante resaltar que desde que en una caminata aleatoria simple en $\mathbb{R}^d$ la posición X_{n+1} es función de X_n (fijada la distribución de las pasos ξ_k's), entonces es evidente la propiedad Markov y se tienen que las definiciones de transiencia y recurrencia para caminatas aleatorias simples y cadenas de Markov irreducibes son parecidas. Más áun, las definiciones de transiencia y recurrencia de una caminata aleatoria simple en $\mathbb{R}^d$ pueden enunciarse de manera más general, sin perder la equivalencia de modo que puedan considerarse válidas aún cuando no se tenga la propiedad de Markov.

Observación A.1 (Definiciones de transiencia y recurrencia)**.** *Una caminata aleatoria simple en $\mathbb{R}^d$ se dice recurrente si el origen es un estado recurrente; más aún, si existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\mathbb{P}(\|X_n\| < \epsilon \text{ recurr.}) = 1.$$

Una caminata aleatoria simple en $\mathbb{R}^d$ se dice transiente si diverge al infinito; es decir, si

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\|X_n\| = +\infty\right) = 1.$$