La teoría de conjuntos ZF y el axioma de elección

Daniel Camarena Pérez

Universidad Nacional de Ingeniería

April 2, 2023

Contenido I

Contenido

Lógica matematica

Lógica de primer orden: es un sistema formal diseñado para estudiar la inferencia en los lenguajes de primer orden.
Lenguaje de primer orden: es un lenguaje formal (español), cuyos símbolos primitivos y reglas para unir esos símbolos están especificados con conectores lógicos, cuantificadores y funciones proposicionales.

Lógica matematica

Lógica de primer orden: es un sistema formal diseñado para estudiar la inferencia en los lenguajes de primer orden.
Lenguaje de primer orden: es un lenguaje formal (español), cuyos símbolos primitivos y reglas para unir esos símbolos están especificados con conectores lógicos, cuantificadores y funciones proposicionales.

- Axioma: enunciado fundamental
- Concepto primitivo: concepto no definido
- Demostración: secuencia finita de enunciados que conducen de un conjunto de premisas a una sentencia dada
- Teorema: proposición derivada como la conclusión de una demostración

Ejemplos

En la teoría de conjuntos ZF/ZFC:

- Axioma: existe el conjunto vacío
- Concepto primitivo: conjunto
- Teorema: no existe el conjunto que es elemento de sí mismo

Ejemplo de demostración

En la aritmética de Peano:

- **Teorema**: Para todo m y n enteros positivos, si m y n son pares, entonces $m + n$ es par.
- **Demostración**: Supongamos que m y n son enteros pares arbitrariamente elegidos. [Debe mostrarse que $m + n$ es par.]
  1. $m = 2r$, $n = 2s$ para algunos enteros r y s (por definición de par)
  2. $m + n = 2r + 2s$ (por sustitución)
  3. $m + n = 2(r + s)$ (mediante la factorización de 2)
  4. $r + s$ es un entero (pues es la suma de dos enteros)
  5. $m + n$ es par (por definición de par)

Teoría

Sistema hipotético deductivo formado por un conjunto de proposiciones dentro de un lenguaje formal.

Teoría

Sistema hipotético deductivo formado por un conjunto de proposiciones dentro de un lenguaje formal.

- Consistente: si para cada par de fórmulas $(\varphi, \neg\varphi)$ solo una pertenece a la teoría
- Completa: si para cada par de fórmulas $(\varphi, \neg\varphi)$ al menos una pertenece a la teoría

Teoría

¡¡En matemáticas todas las teorías son consistentes!!

...

Pero no todas son completas

Teoría

¡¡En matemáticas todas las teorías son consistentes!!

...

Pero no todas son completas

Ejemplos:

- La teoría de conjuntos ZFC
- La teoría de la selección natural (no es teoría lógica, es científica)

Paradoja

Son argumentos donde

- hay premisas no controvertidas y verdaderas.
- emplea un procedimiento no controversial.
- obtiene una conclusión

Paradoja

Son argumentos donde

- hay premisas no controvertidas y verdaderas.
- emplea un procedimiento no controversial.
- obtiene una conclusión
    - contradictoria
    - absurda, inapropiada o inaceptable

Paradoja

Son argumentos donde

- hay premisas no controvertidas y verdaderas.
- emplea un procedimiento no controversial.
- obtiene una conclusión
  - contradictoria
  - absurda, inapropiada o inaceptable

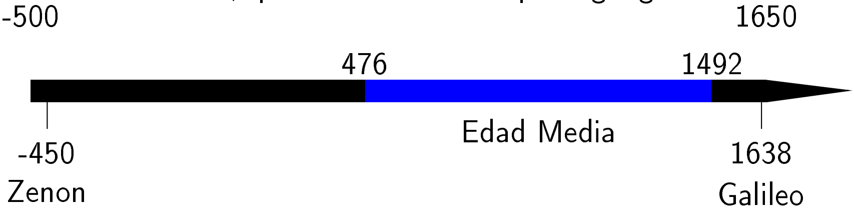
Ejemplo: La paradoja de Banach-Tarski

Contenido

La creación de la teoría de conjuntos se debe a una sola persona, Georg Cantor. Antes de ver ello, primero examinamos algunas contribuciones preliminares.

Edad antigua y media

La teoría de conjuntos tiene su origen en los razonamientos sobre el infinito, que datan desde la época griega.

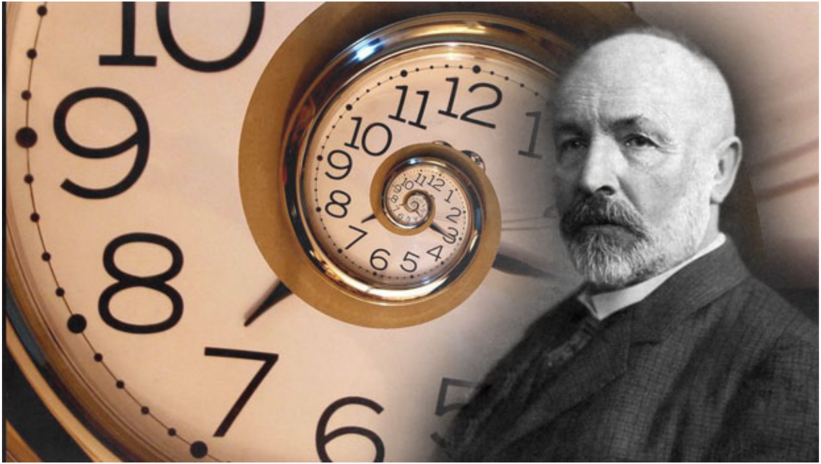


Edad moderna

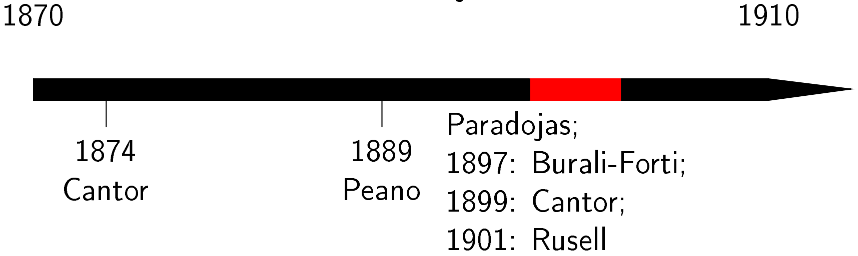
El trabajo de Boole es el fundamento de la lógica informática.

Dedekind publica su construcción formal de números reales y da una definición rigurosa de un entero.

Georg Cantor



En 1874 Cantor publicó un artículo en el *Crelle's Journal* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*) el cual marca el nacimiento de la teoría de conjuntos.

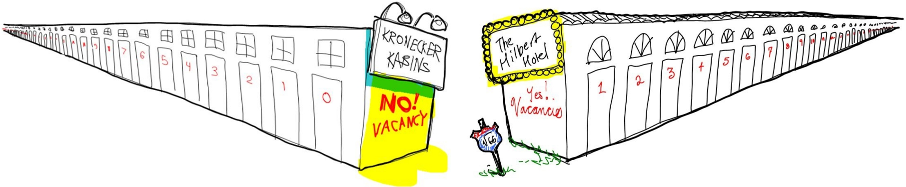


La controversia

Un segundo artículo fue presentado por Cantor en el *Crelle's Journal* en 1878, pero la teoría de conjuntos ya se estaba convirtiendo en centro de la controversia.
Kronecker, quien estaba en la redacción de *Crelle's Journal*, no estaba contento con las nuevas ideas revolucionarias contenidas en el documento de Cantor

Cantor fue tentado a retirar el artículo, pero Dedekind persuadió a Cantor de no retirar su artículo y Weierstrass apoyó publicación.

El hotel de Hilbert



El hotel de Hilbert representa un acercamiento al entendimiento del infinito.

El conjunto de los números naturales

Peano, en 1889, publica *Arithmetices principia, nova methodo exposita* que donde expone los axiomas de Peano

Axiomas de Peano

Existe un conjunto N, no vacío, y una función $s : N \to N$ de modo que se cumplen las siguientes propiedades:

El conjunto de los números naturales

Peano, en 1889, publica *Arithmetices principia, nova methodo exposita* que donde expone los axiomas de Peano

Axiomas de Peano

Existe un conjunto N, no vacío, y una función $s : N \to N$ de modo que se cumplen las siguientes propiedades:

1. s es inyectiva.
2. $N \setminus s(N) = \{1\}$
3. Todo subconjunto de N que contiene al 1 y tiene la propiedad, $\forall n \in X, s(n) \in N$, no es otro sino N.

El todo no es mayor que las partes

Ya se tiene que N es un modelo del conjunto de números naturales $\mathbb{N}$. En este modelo,

Teorema (Infinitud)

Todo conjunto infinito tiene un subconjunto propio que se puede poner en correspondencia uno-uno a si mismo.

El todo no es mayor que las partes

Ya se tiene que N es un modelo del conjunto de números naturales $\mathbb{N}$. En este modelo,

Teorema (Infinitud)

Todo conjunto infinito tiene un subconjunto propio que se puede poner en correspondencia uno-uno a si mismo.

Es decir, todo conjunto infinito tiene una parte equipotente a si mismo.

El continuo

Dedekind logró construir los números reales ($\mathbb{R}$) a partir de los números racionales ($\mathbb{Q}$) usando la técnica de las *cortaduras de Dedekind*.

El continuo

Dedekind logró construir los números reales ($\mathbb{R}$) a partir de los números racionales ($\mathbb{Q}$) usando la técnica de las *cortaduras de Dedekind*.

Una pregunta que surge es si el infinito de los naturales y el infinito de los reales son iguales.

El continuo

Dedekind logró construir los números reales ($\mathbb{R}$) a partir de los números racionales ($\mathbb{Q}$) usando la técnica de las *cortaduras de Dedekind*.
Una pregunta que surge es si el infinito de los naturales y el infinito de los reales son iguales.

Teorema (El continuo)

No existe una biyección entre el conjunto de los naturales y el conjunto de los reales.

La hipótesis del continuo

Teorema

La potencia de un conjunto no es equipotente al conjunto.

La hipótesis del continuo

Teorema

La potencia de un conjunto no es equipotente al conjunto.

Teorema

El continuo es equipotente de a la potencia del discreto, es decir,

$$\operatorname{card}(\mathbb{R}) = \operatorname{card}(P(\mathbb{N}))$$

La hipótesis del continuo

Teorema

La potencia de un conjunto no es equipotente al conjunto.

Teorema

El continuo es equipotente de a la potencia del discreto, es decir,

$$\operatorname{card}(\mathbb{R}) = \operatorname{card}(P(\mathbb{N}))$$

Hipótesis del Continuo (HC)

Todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ es o bien equipotente a $\mathbb{N}$ o bien equipotente a $\mathbb{R}$.

La paradoja del barbero

La paradoja de barbero

Definamos un conjunto

$$A = \{X |\ X \text{no es elemento de } X\}$$

Russell entonces se preguntó: ¿Es A un elemento de A?

La paradoja de barbero

Definamos un conjunto

$$A = \{X |\ X \text{no es elemento de } X\}$$

Russell entonces se preguntó: ¿Es A un elemento de A?

Tanto el supuesto de que A es un miembro de A y que A no es un miembro de A conllevan a una contradicción.

La paradoja de barbero

Definamos un conjunto

$$A = \{X|\ X \text{no es elemento de } X\}$$

Russell entonces se preguntó: ¿Es A un elemento de A?

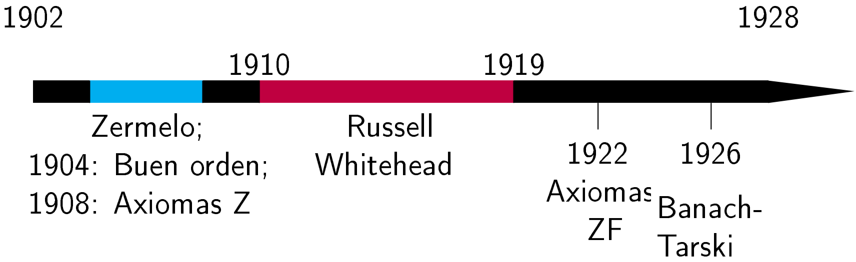
Tanto el supuesto de que A es un miembro de A y que A no es un miembro de A conllevan a una contradicción.

¡La propia construcción del conjunto parece dar una paradoja!

Contenido

Ernst Zermelo

Una nueva teoría de conjuntos



Los axiomas Zermelo-Fraenkel

I Extensionalidad: igualdad de conjuntos
II Vacío: existe al menos un conjunto
III Unión: unión de conjuntos
IV Potencia: el conjunto de los subconjuntos
V Infinitud: existe un conjunto infinito
VI Reemplazamiento
VII Relación de Tipos
AC Elección

Resolviendo la paradoja de Rusell

Axioma del Esquema de Comprensión (FALSO). Si P es una propiedad, entonces existe un conjunto $Y = \{x : P(x)\}$.

Resolviendo la paradoja de Rusell

Axioma del Esquema de Comprensión (FALSO). Si P es una propiedad, entonces existe un conjunto $Y = \{x : P(x)\}$.

Y el conjunto de todos los conjuntos no existe, en todo caso:

¡¡ es el concepto del conjunto de todos los conjuntos lo que es paradójico, no la idea misma de la comprensión de un conjunto !!

El Buen Orden

Todo subconjunto de los números naturales se puede ordenar en el sentido intuitivo.

El Buen Orden

Todo subconjunto de los números naturales se puede ordenar en el sentido intuitivo.
El concepto del buen orden generaliza la propiedad de buen orden de los naturales y da origen a la teoría de los números ordinales.

El Buen Orden

Todo subconjunto de los números naturales se puede ordenar en el sentido intuitivo.
El concepto del buen orden generaliza la propiedad de buen orden de los naturales y da origen a la teoría de los números ordinales.

Principio del Buen Orden

Todo subconjunto, no vacío, de naturales admite un primer elemento.

El Buen Orden

La noción de orden abstracta se define apelando a la noción de subcojunto.

El Buen Orden

La noción de orden abstracta se define apelando a la noción de subcojunto.

Teorema (Teorema del Buen Orden)

Todo subconjunto no vacío de naturales admite un primer elemento.

El Buen Orden

La noción de orden abstracta se define apelando a la noción de subcojunto.

Teorema (Teorema del Buen Orden)

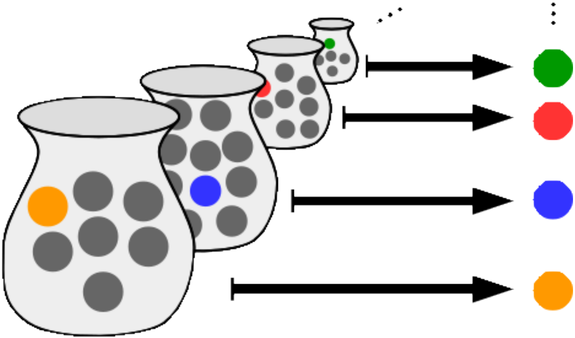
Todo subconjunto no vacío de naturales admite un primer elemento.

Proof.

¡¡Requiere hacer uso de un axioma adicional, el Axioma de Elección!!

□

El Axioma de Elección

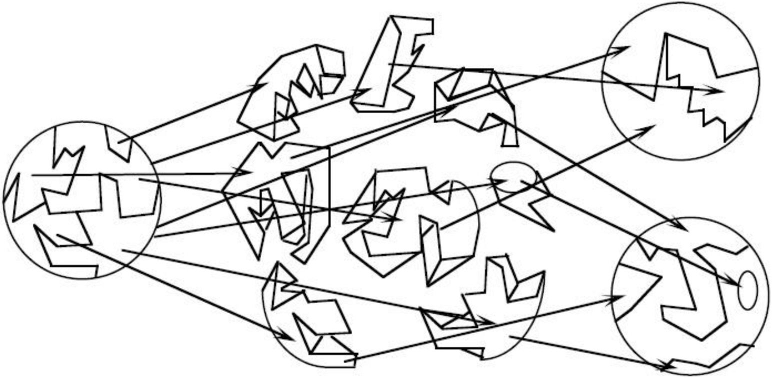


La paradoja de Banach-Tarski

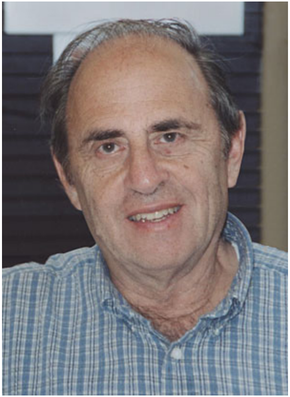
Teorema

Es posible dividir una esfera de radio 1 en ocho partes disjuntas dos a dos, de modo que, aplicando movimientos oportunos a cinco de ellas, obtengamos nuevos conjuntos que constituyan una partición de una esfera de radio 1, y lo mismo ocurra con las tres partes restantes.

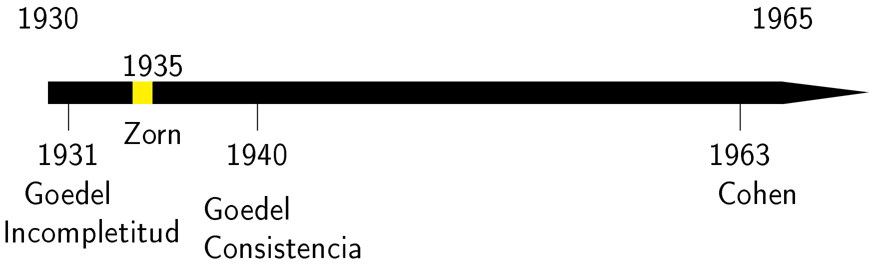
La paradoja de Banach-Tarski



Godel y Cohen



Goedel y Cohen



Equivalencias al Axioma de Elección

- Principio Multiplicativo
- Principio de Buen Orden
- El Lema de Zorn
- Principio de Kuratowski

Aplicaciones del Axioma de Elección

- Todo espacio vectorial tiene una base (Álgebra Lineal).
- La unión enumerable de conjuntos enumerables es enumerable.
- Existe un conjunto de números reales que no es Lebesgue-medible (Teoría de la Medida).
- El producto de espacios compactos es compacto (Topología).
- Todo anillo con unidad tiene un ideal maximal (Álgebra).
- Todo orden parcial puede extenderse a un orden total.
- El teorema de Hahn-Banach (Análisis Funcional).
- El teorema de completud para la lógica de primer orden.
- Toda álgebra de Boole es isomorfa a un campo de conjuntos.

El axioma de elección (AC) y ZF

Teorema

Bajo la teoría ZF, el axioma de elección es equivalente a la hipótesis del continuo generalizado.

El axioma de elección (AC) y ZF

Teorema

Bajo la teoría ZF, el axioma de elección es equivalente a la hipótesis del continuo generalizado.

Teorema (Indecibilidad; [2])

El axioma de elección y la hipótesis del continuo generalizado es consistente de los axiomas de la teoría de conjuntos ZF.

El axioma de elección (AC) y ZF

Teorema

Bajo la teoría ZF, el axioma de elección es equivalente a la hipótesis del continuo generalizado.

Teorema (Indecibilidad; [2])

El axioma de elección y la hipótesis del continuo generalizado es consistente de los axiomas de la teoría de conjuntos ZF.

Teorema (Independencia; [1])

El axioma de elección y la hipótesis del continuo generalizado es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos ZF.

Una teoría de conjuntos estándar

Teoría ZFC

La teoría de conjuntos es uno de los mayores logros de la matemática moderna. Básicamente todos los conceptos matemáticos, métodos y resultados admiten la representación dentro de la teoría axiomática de conjuntos.

.

Referencias I

Paul J Cohen and Martin Davis.
Set theory and the continuum hypothesis.
Courier Corporation, 2008.

Kurt Gödel.
The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis.
Proceedings of the National Academy of Sciences, 24(12):556–557, 1938.

Horst Herrlich.
Axiom of choice.
Springer, 2006.

Referencias II

- Thomas Jech.
  Set theory. the third millennium edition.
  Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 2003.

- Kazimierz Kuratowski.
  Introduction to set theory and topology, volume 101.
  Elsevier, 2014.

- Clifford A Pickover.
  The math book: from Pythagoras to the 57th dimension, 250 milestones in the history of mathematics.
  Sterling Publishing Company, Inc., 2009.

¡Muchas Gracias!