Геометрические преобразования

Под *геометрическим преобразованием изображения* мы будем понимать взаимно однозначное точечное отображение плоскости XOY, на которой задано исходное изображение, в плоскость UOV.

Аффинное преобразование и его подгруппы

Сохраняются прямые линии, отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой (или на параллельных прямых), и отношения площадей фигур; параллельные прямые переходят в параллельные.

Аффинное преобразование аналитически выражается невырожденным линейным преобразованием

$$u = ax + by + c,$$
$$v = dx + ey + f,$$

причем

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0.$$

Аффинное преобразование образует *группу*. Это означает, что любая композиция последовательно выполняемых аффинных преобразований (*произведение преобразований*) также является аффинным преобразованием. Любое аффинное преобразование имеет *обратное*, которое также является аффинным. Произведение прямого и обратного преобразований дает *единичное преобразование*, оставляющее все на своих местах.

Параметры обратного преобразования

$$x = Au + Bv + C,$$
$$y = Du + Ev + F$$

$$A = \frac{e}{\det}, \quad B = -\frac{b}{\det}, \quad C = \frac{bf - ec}{\det},$$
$$D = -\frac{d}{\det}, \quad E = \frac{a}{\det}, \quad F = \frac{cd - af}{\det},$$

где $\det = ae - bd$ — определитель

Если $(1-a)\times(1-e)\neq bd$, то аффинное преобразование имеет ***неподвижную точку*** $(X_{\text{н}}, Y_{\text{н}})$:

$$X_{\text{н}} = \frac{bf + c(1-e)}{(1-a)(1-e) - bd},$$
$$Y_{\text{н}} = \frac{cd + f(1-a)}{(1-a)(1-e) - bd}.$$

Свободные параметры аффинного преобразования связаны с координатами неподвижной точки простыми соотношениями

$$c = (1-a)X_{\text{н}} - bY_{\text{н}},$$
$$f = (1-e)Y_{\text{н}} - dX_{\text{н}}.$$

Подгруппой аффинной группы преобразований является *группа подобия*:

$$u = kx\cos w + ky\sin w + c,$$
$$v = -kx\sin w + ky\cos w + f.$$

анизотропное (зависящее от направления) *изменение масштаба*:

$$u = k_1x\cos w + k_2y\sin w + c,$$
$$v = -k_1x\sin w + k_2y\cos w + f.$$

В свою очередь в группу преобразований подобия входит *подгруппа плоских движений*, называемая также *группой изометрических преобразований*

$$
\begin{aligned}
u &= x\cos w + y\sin w + c,\\
v &= -x\sin w + y\cos w + f,
\end{aligned}
$$

гомотетия

$$
\begin{aligned}
u &= kx,\\
v &= ky
\end{aligned}
$$

и *группа трансляций*, или *плоскопараллельных переносов* (сдвигов)

$$
\begin{aligned}
u &= x + c,\\
v &= y + f.
\end{aligned}
$$

Алгоритмы

- преобразование по ближайшему дискрету

Преобразование по ближайшему дискрету выполняется следующим образом. Для каждой точки (пикселя) нового изображения вычисляется ее прообраз — точка исходного поля. Полученные координаты, округленные до целых чисел, указывают на некоторый пиксель исходного поля. Значение этого пикселя присваивается текущему пикселю нового изображения. Может оказаться, что вычисленный прообраз текущей точки лежит вне границ исходного изображения. Тогда в текущий пиксель нового поля заносится уровень NODATA.

- преобразование с разбиением на подклетки

Последовательные аффинные преобразования

Любое аффинное преобразование можно разложить на поворот, масштабирование и сдвиг.

Произведение преобразование **немультипликативно**.

$$\begin{aligned} A' &= aA + bD, \quad B' = aB + bE, \quad C' = aC + bF + c, \\ D' &= dA + eD, \quad E' = dB + eE, \quad F' = dC + eF + f. \end{aligned}$$

Здесь a, b, c, d, e, f — параметры очередного сомножителя, добавляемого в цепочку аффинных преобразований. A, B, C, D, E, F — параметры результирующего аффинного преобразования: без штрихов — старые, со штрихами — новые.

Неподвижная точка

- может не существовать (плоскопараллельный сдвиг)
- множество (неподвижная прямая)
- все неподвижные (тождественное преобразование)