

# 3 ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ И ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

## СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ СЖАТИИ

### 3.1 Ключевые положения

#### ***Основные положения вейвлет-преобразования***

*Вейвлеты (wavelets)* – это обобщенное название временных функций, имеющих вид волновых пакетов той или иной формы, локализованных по оси независимой переменной ( $t$  или  $x$ ) и способных к сдвигу по ней и масштабированию (сжатию/растяжению). Вейвлеты создаются с помощью специальных *базовых функций* – прототипов, задающих их вид и свойства.

Вейвлеты и основанные на них интегральные *вейвлет-преобразования* были предложены в начале 90-х годов прошлого века (хотя первый простейший тип вейвлета, по существу был описан Хааром еще в 1909 году) и в последующее время интенсивно развивались.

Набор вейвлетов может приближать сложный сигнал или изображение, причем идеально точно или с некоторой погрешностью. Благодаря прекрасному представлению *локальных особенностей* сигналов, принципиально отсутствующему у рядов Фурье, и множеству видов вейвлеты нашли практическое применение для анализа тонких особенностей сложных сигналов и изображений для их сжатия и очистки от шума.

Ряд Фурье использует в качестве базисных функций синусоиды. Они предельно локализованы в частотной области (превращаясь на спектограмме в вертикальную линию), но очень плохо локализованы (точнее, вообще не локализованы) во временной области. Противоположный пример – импульсная базисная функция

$$\delta_k(t) = \begin{cases} 1, & k = t, \\ 0, & k \neq t. \end{cases}$$

Она четко локализована во временной области и потому идеально подходит для представления разрывов сигнала. Но эта базисная функция не несет информации о частоте сигнала и потому плохо приспособлена для представления сигналов на заданном отрезке времени и тем более периодических сигналов.

Вейвлеты занимают промежуточное положение между рассмотренными крайними случаями (синусоидой и импульсной функцией). Базисными функциями вейвлетов могут быть различные функции, в том числе напоминающие модулированные импульсами синусоиды, функции со скачками уровня и т. д. Это

обеспечивает легкое представление сигналов с локальными скачками и разрывами наборами вейвлетов того или иного типа. Почти все вейвлеты не имеют аналитического представления в виде одной формулы и могут даваться итерационными выражениями.

Одна из основополагающих идей вейвлет-представления сигналов заключается в разбивке сигнала на две составляющие – грубую (аппроксимирующую) и утонченную (детализирующую) – с последующим их дроблением с целью изменения уровня декомпозиции сигнала.

Число используемых при разложении сигнала вейвлетов задает *уровень декомпозиции* сигнала. При этом за нулевой уровень декомпозиции принимается сам сигнал, а уровни декомпозиции образуют ниспадающее *вейвлет-дерево* того или иного вида. Точность представления сигнала по мере перехода на более низкие уровни декомпозиции снижается, но зато появляется возможность вейвлет-фильтрации сигналов, удаления из сигналов шумов и эффективной компрессии сигналов.

*Прямое вейвлет-преобразование* означает разложение произвольного входного сигнала на принципиально новый базис в виде совокупности волновых пакетов – вейвлетов, которые характеризуются четырьмя принципиально важными свойствами:

- имеют вид коротких, локализованных во времени (или в пространстве) волновых пакетов с нулевым значением интеграла;
- обладают возможностью сдвига по времени;
- способны к масштабированию (сжатию/растяжению);
- имеют ограниченный (или локальный) частотный спектр.

В основе *непрерывного* вейвлет-преобразования лежит использование двух непрерывных и интегрируемых по всей оси  $t$  (или  $x$ ) функций:

- вейвлет-функция  $\psi(t)$  с нулевым значением интеграла  $\left( \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \right)$ , определяющая детали сигнала и порождающая детализирующие коэффициенты:

$$d_{j-1} = \int s(t) \overline{\psi_{j-1}(t)} dt \quad (3.1a)$$

- маштабирующая функция  $\phi(t)$  с единичным значением интеграла  $\left( \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \right)$ , определяющая грубое приближение (аппроксимацию) сигнала и порождающая коэффициенты аппроксимации:

$$a_{j-1} = \int s(t) \overline{\phi_{j-1}(t)} dt. \quad (3.1b)$$

Phi-функции  $\varphi(t)$  присущи далеко не всем вейвлетам, а только тем, которые относятся к ортогональным, т.е. таким, у которых интеграл от произведения любых двух функций ряда равен нулю.

Свойство ортогональности заметно облегчает анализ, дает возможность реконструкции сигналов (полного и точного воспроизведения) и позволяет реализовать алгоритмы быстрых вейвлет-преобразований.

Один из первых известных ортогональных вейвлетов - *вейвлет Хаара* (haar). Функция  $\psi$  у него имеет вид прямоугольных импульсов меандра (значение 1 в интервале  $[0,0.5]$  и -1 в интервале  $[0.5,1]$ ). Функция  $\varphi$  (см. рис. 3.1) имеет значение 1 в интервале  $[0,1]$  и 0 за пределами этого интервала. Вейвлеты Хаара хорошо локализованы в пространстве, но не очень хорошо локализованы в частотной области, поскольку меандр имеет широкий спектр частот (теоретически бесконечный).

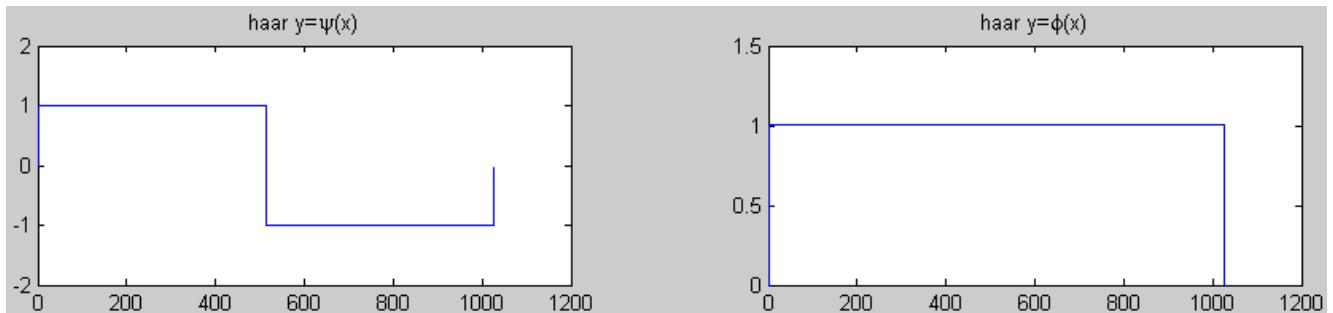


Рисунок 3.1 - Функции  $\psi$  и  $\varphi$  вейвлета Хаара

Преобразование Хаара в общем виде для одномерного сигнала (отсчетов) упрощается по сравнению с формулами (3.1 $a$  и  $\bar{b}$ ) и выглядит следующим образом. Пусть имеется одномерный дискретный сигнал  $s$ . Каждой паре элементов с индексами  $2j$  и  $2j + 1$ ,  $j \in Z$ , поставим в соответствие два значения:

$$a_j = \frac{s_{2j} + s_{2j+1}}{2}, \quad d_j = \frac{s_{2j} - s_{2j+1}}{2}. \quad (3.2)$$

К сигналу  $a_j$  можно применить аналогичную операцию и так же получить два сигнала, один из которых является огрубленной версией  $a_j$ , а другой содержит детализирующую информацию, необходимую для восстановления  $a_j$ .

Обратное преобразование Хаара выглядит следующим образом:

$$s_{2j} = a_j + d_j, \quad s_{2j+1} = a_j - d_j. \quad (3.3)$$

Разберем конкретный пример: пусть  $s_i$ : (220, 211, 212, 218, 217, 214, 210, 202). Мы получим следующие последовательности  $a_1$  (215.5, 215, 215.5, 206) и  $d_1$  (4.5, -3, 1.5, 4). Повторим операцию, рассматривая  $a_1$  как  $s_i$ . Мы получим из (215.5, 215, 215.5, 206): (215.25, 210.75) (0.25, 4.75).

На примере преобразования Хаара хорошо видна структура вейвлет-преобразования дискретного сигнала. На каждом шаге преобразования сигнал распадается на две составляющие: приближение с более низким разрешением – аппроксимацию и детализирующую информацию.

Рассмотрим двумерный сигнал  $s$ -матрицу конечного или бесконечного размера. Применим к каждой строке матрицы один шаг одномерного вейвлет-преобразования. В результате получится две матрицы, строки которых содержат аппроксимированную и детализирующую составляющие строк исходной матрицы. К каждому столбцу обеих матриц также применим шаг одномерного преобразования. В результате получается четыре матрицы. Первая является аппроксимирующей составляющей исходного сигнала (огрубленной версией), остальные три содержат детализирующую информацию – вертикальную, горизонтальную и диагональную. Таким образом, шаг двумерного преобразования свелся к композиции одномерных преобразований. Поэтому реализация двумерного преобразования не требует никаких дополнительных операций.

Например, для изображения 512x512 пикселов получим после первого преобразования 4 матрицы размером 256x256 элементов (рис. 3.2).

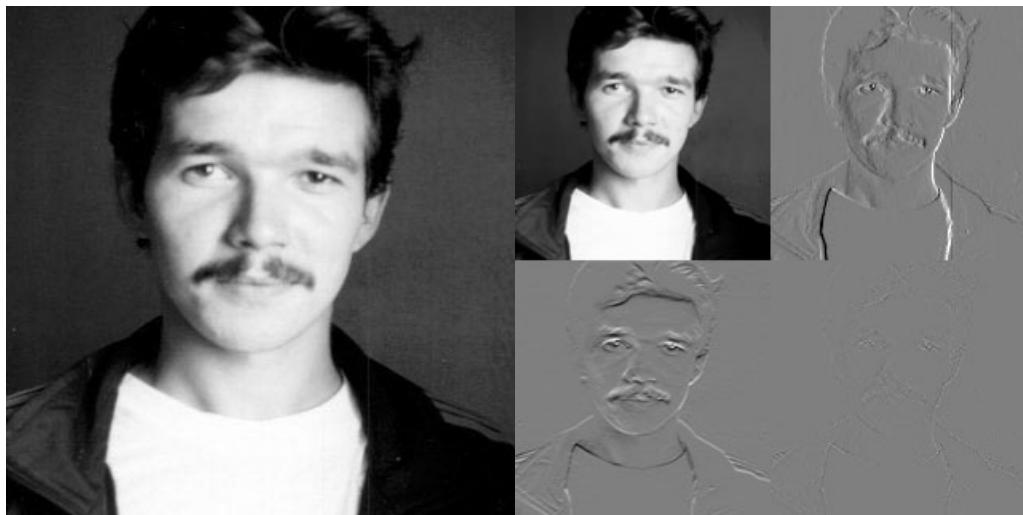


Рисунок 3.2 – Реализация двумерного вейвлет-преобразования.

В первой, как легко догадаться, будет храниться уменьшенная копия изображения. Во второй – усредненные разности пар значений пикселов по горизонтали. В третьей – усредненные разности пар значений пикселов по вертикали. В четвертой – усредненные разности значений пикселов по диагонали. По аналогии с двумерным случаем мы можем повторить наше преобразование и получить вместо первой матрицы 4 матрицы размером 128x128. Повторив наше преобразование в третий раз, мы получим в итоге: 4 матрицы 64x64, 3 матрицы 128x128 и 3 матрицы 256x256.

Например, для матрицы

$$\begin{array}{cccc}
 15 & 18 & 12 & 16 \\
 17 & 13 & 16 & 18 \\
 16 & 14 & 17 & 17 \\
 14 & 15 & 17 & 16
 \end{array}$$

на первом этапе при применении вейвлет-преобразования к каждой строке исходной матрицы получаем 2 матрицы:

$$\begin{array}{ccccc}
 (15+18)/2 & (12+16)/2 & (15-18)/2 & (12-16)/2 & \\
 (17+13)/2 & (16+18)/2 & (17-13)/2 & (16-18)/2 & \\
 (16+14)/2 & (17+17)/2 & (16-14)/2 & (17-17)/2 & \\
 (14+15)/2 & (17+16)/2 & (14-15)/2 & (17-16)/2 &
 \end{array}$$

или

$$\begin{array}{ccccc}
 16,5 & 14 & -1,5 & -2 & \\
 15 & 17 & 2 & -1 & \\
 15 & 17 & 1 & 0 & \\
 14,5 & 16,5 & -0,5 & 0,5 &
 \end{array}$$

Далее применяем преобразование Хаара к каждому столбцу матриц:

Для первой матрицы

$$\begin{array}{ccccc}
 (16,5+15)/2 & (14+17)/2 & (16,5-15)/2 & (14-17)/2 & \\
 (15+14,5)/2 & (17+16,5)/2 & (15-14,5)/2 & (17-16,5)/2 &
 \end{array}$$

Для второй матрицы

$$\begin{array}{ccccc}
 (-1,5+2)/2 & (-2-1)/2 & (-1,5-2)/2 & (-2+1)/2 & \\
 (1-0,5)/2 & (0+0,5)/2 & (1+0,5)/2 & (0-0,5)/2 &
 \end{array}$$

или

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Низкочастотная составляющая} & & \text{Вертикальное отклонение} & & \\
 15,75 & 15,5 & 0,75 & -1,5 & \\
 14,75 & 16,75 & 0,25 & 0,25 & \\
 \text{Горизонтальное отклонение} & & \text{Диагональное отклонение} & & \\
 0,25 & -1,5 & -1,75 & 0,5 & \\
 0,25 & 0,25 & 0,75 & -0,25 &
 \end{array}$$

Восстановление исходной матрицы происходит в обратном порядке в соответствии с формулами (3.3)

Так как для полной реконструкции сигнала могут быть применены только ортогональные вейвлеты, а вейвлет Хаара обладает «негладкостью», Ингрид Добеши предложила использовать функции, вычисляемые итерационным путем, впоследствии названные *вейвлетами Добеши*. Они обладают следующими свойствами: ортогональностью, компактным носителем (т.е. среднее значение функции равно нулю и функция быстро убывает на бесконечности), а также эти функции  $n+2$  раз пересекают ось абсцисс. При этом  $n$  называют порядком вейвлета. При  $n = 1$  получаем вейвлет Хаара. На рисунке 3.3 представлены вейвлеты Добеши порядка 2, 4 и 10.

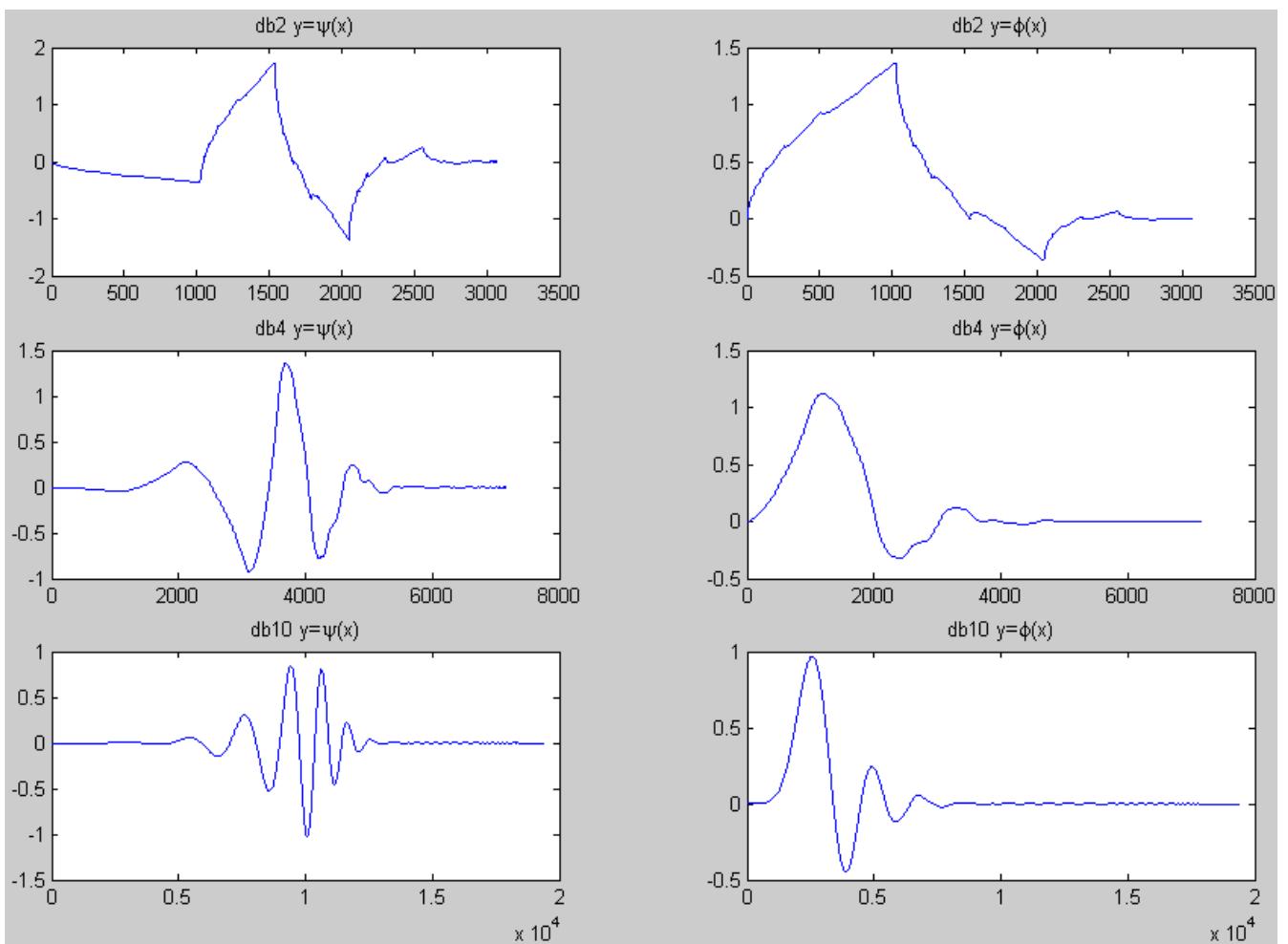


Рисунок 3.3 – Вейвлеты Добеши порядка 2, 4 и 10

Как видно из рисунка, при увеличении порядка вейвлета возрастает «гладкость» вейвлета, что увеличивает его возможности, но при этом также увеличивается объем вычислений при преобразовании.

Вейвлеты Добеши не могут обладать симметричностью, что сужает их использование. Однако можно попробовать приблизиться, насколько возможно, к симметрии. Такие вейвлеты, полученные из вейвлетов Добеши, называются *симлетами*.

Вопрос о построении вейвлетов, у которых нулевые моменты имеет не только функция вейвлета  $y(x)$ , но и порождающий вейвлет  $j(x)$  был впервые поставлен Р. Койфманом, поэтому такие вейвлеты называются *койфлетами*. Наличие нулевых моментов в порождающих вейвлетах облегчает анализ и вейвлет-преобразование. Койфлеты несимметричны, однако они более симметричны, чем вейвлеты Добеши. Вид функций симлетов и койфлетов показан на рис. 3.4

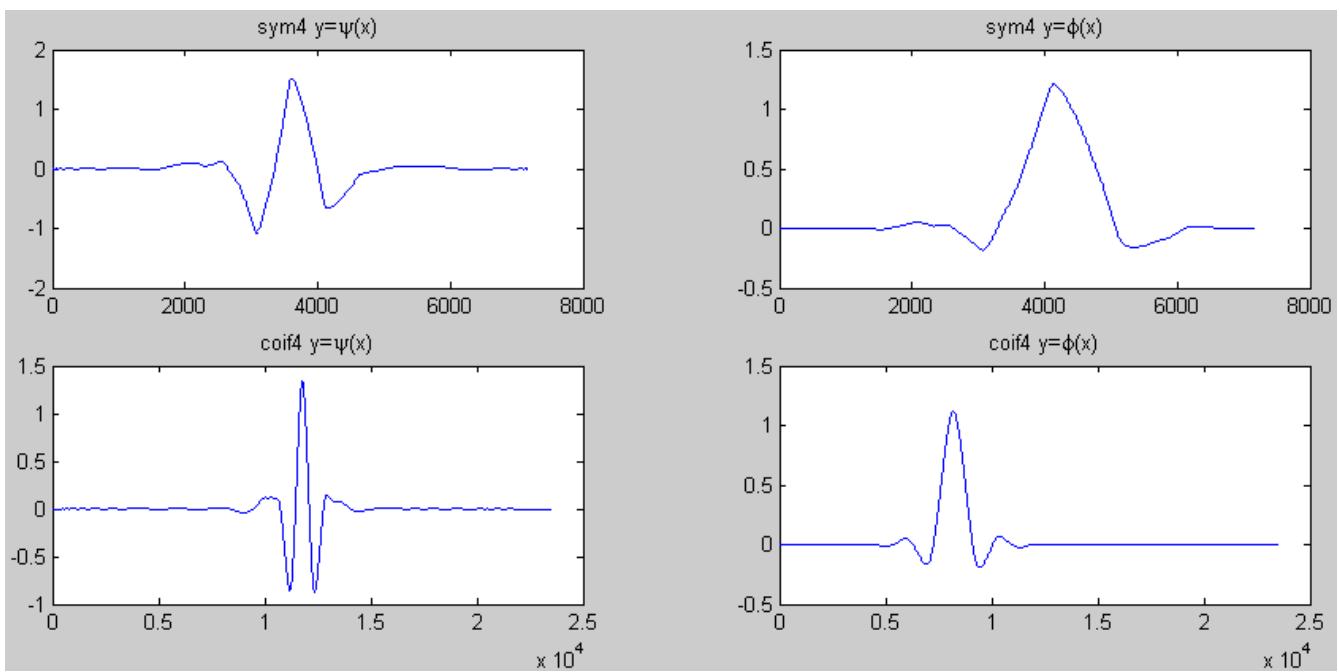


Рисунок 3.4 – Вид функций симлетов и койфлетов 4-го порядка

#### ***Сжатие изображений с помощью вейвлет-преобразования (JPEG-2000).***

Алгоритм сжатия с помощью вейвлет-преобразования идентичен алгоритму JPEG. Различие состоит в применении вместо ДКП вейвлет-преобразования, которое имеет следующие преимущества:

- при больших коэффициентах сжатия с помощью вейвлет-преобразования изображение становится нечетким (размытым), что воспринимается глазом человека гораздо лучше, чем блочная структура JPEG;
- возможность использования различных функций в качестве базисных, а также создания новых вейвлетов для различных типов сигналов для более точного приближения к ним;
- возможность постепенного просмотра изображения в процессе загрузки изображения по сети.

Потери качества в данном алгоритме происходят за счет детализирующей информации следующим образом. Все значения коэффициентов, меньше порогового, обнуляются, а остальные округляются до целого. Чем больше пороговое значение, тем больше потери детализирующей информации, и, следовательно, тем более размыто изображение.

### **3.2 Задание к практическому занятию**

1 По разделу 3.1 данного пособия изучить принципы сжатия с помощью вейвлет-преобразования.

2 Провести расчет двумерного преобразования Хаара для матрицы исходного изображения:

$$\begin{array}{cccc}
 N & N+1 & N+2 & N-1 \\
 N+3 & N-1 & N-2 & N \\
 N-3 & N+2 & N+1 & N+2 \\
 N+1 & N+2 & N+3 & N+1
 \end{array}$$

где  $N$  – последние 2 цифры студенческого билета.

3 Округлить коэффициенты в полученной матрице до целых чисел.

4 Восстановить исходную матрицу из округленных коэффициентов и рассчитать среднеквадратическое отклонение.

### 3.3 Задание к лабораторной работе

Целью лабораторной работы является изучение алгоритма сжатия с помощью вейвлет-преобразования, оценка качества сжатого изображения и определение наилучшего базиса вейвлет-функций для заданных изображений. В процессе выполнения лабораторной работы необходимо:

1 Начертить в протоколе лабораторной работы структурную схему алгоритма сжатия с помощью вейвлетов (в руководстве она не представлена).

2 Запустить с рабочего стола файл Wavelet\_Compression. Для начала работы нажать кнопку «Пуск», выбрать рисунок, соответствующий номеру бригады, и вейвлет из списка. По виду вейвлета определить его порядок. Полученные на экране данные свести в таблицу вида табл. 3.1:

Таблица 3.1 – Итоги выполнения лабораторной работы

Вейвлет	Размер файла, байт		Коэффициент сжатия	Оценка качества	
	исходного	сжатого		СКО	Субъективная

Сжатие необходимо провести для всех представленных в списке видов вейвлетов. Коэффициент сжатия рассчитывается самостоятельно. Субъективная оценка сжатия производится путем сравнения исходного и сжатого изображений.

### 3.4 Ключевые вопросы

1 В чем заключается идея сжатия с помощью вейвлетов?

2 Что такое вейвлеты, порождающие вейвлеты?

3 Какими свойствами обладают ортогональные вейвлеты с компактным носителем?

4 В чем заключается одномерное преобразование Хаара?

5 Каким образом хранится информация об изображении при двумерном преобразовании Хаара?

6 Чем отличаются вейвлеты Хаара, Добеши, симлеты и койфлеты между собой?

7 Назовите преимущества вейвлет-преобразования перед ДКП.