ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА.
БАЗИС ХААРА (1D)

Пример

Дискретный вектор (набор яркостей пикселей):

(9 7 3 5)

Усреднение + децимация:

[$\underline{9\ 7}$ $\underline{3\ 5}$]

[$\underline{8\ 4}$]

[6]

Итог: сжатие <u>с потерей</u> информации.

Без потери информации: сохранять *уточняющие* коэффициенты усреднений

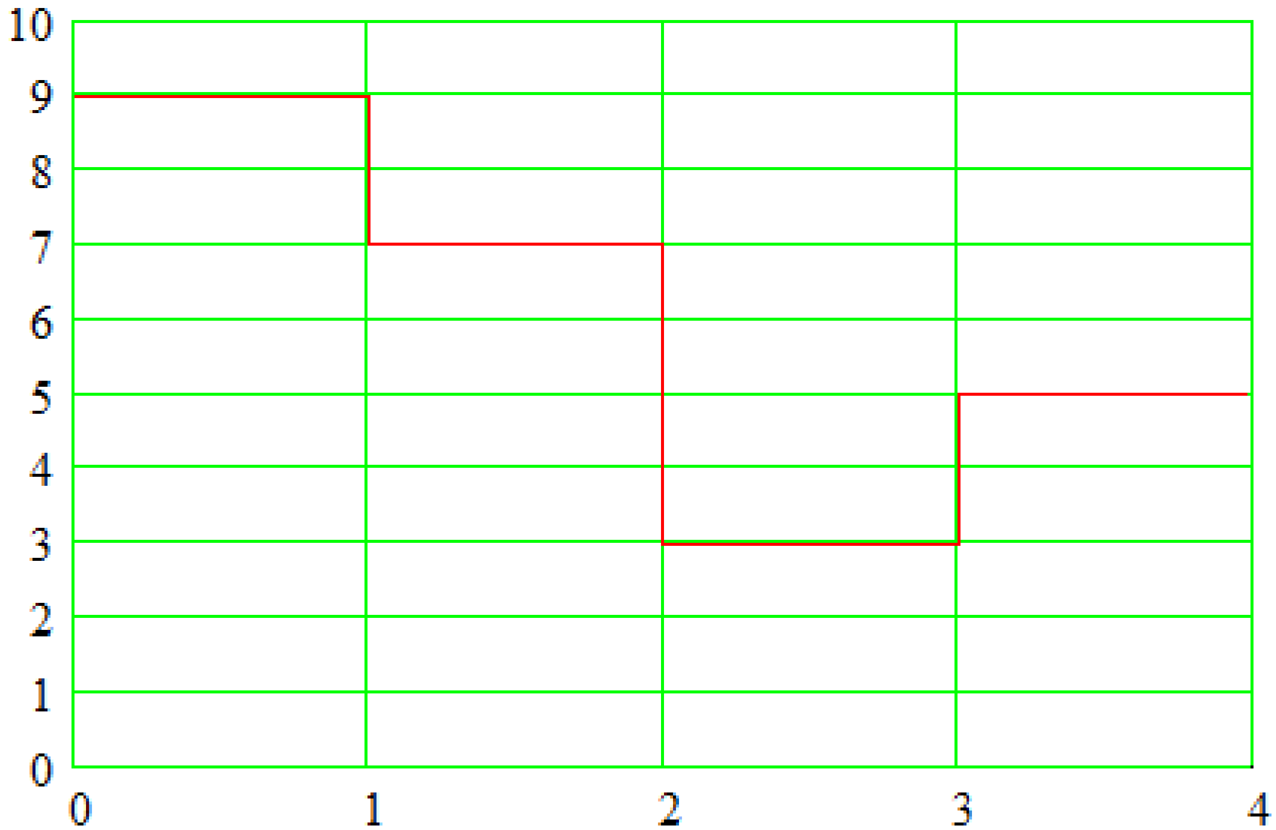
Разрешение	Средние	Уточняющие коэфф.
4	9 7 3 5	
2	8 4	+1 -1
1	6	2

Вейвлет-разложение:

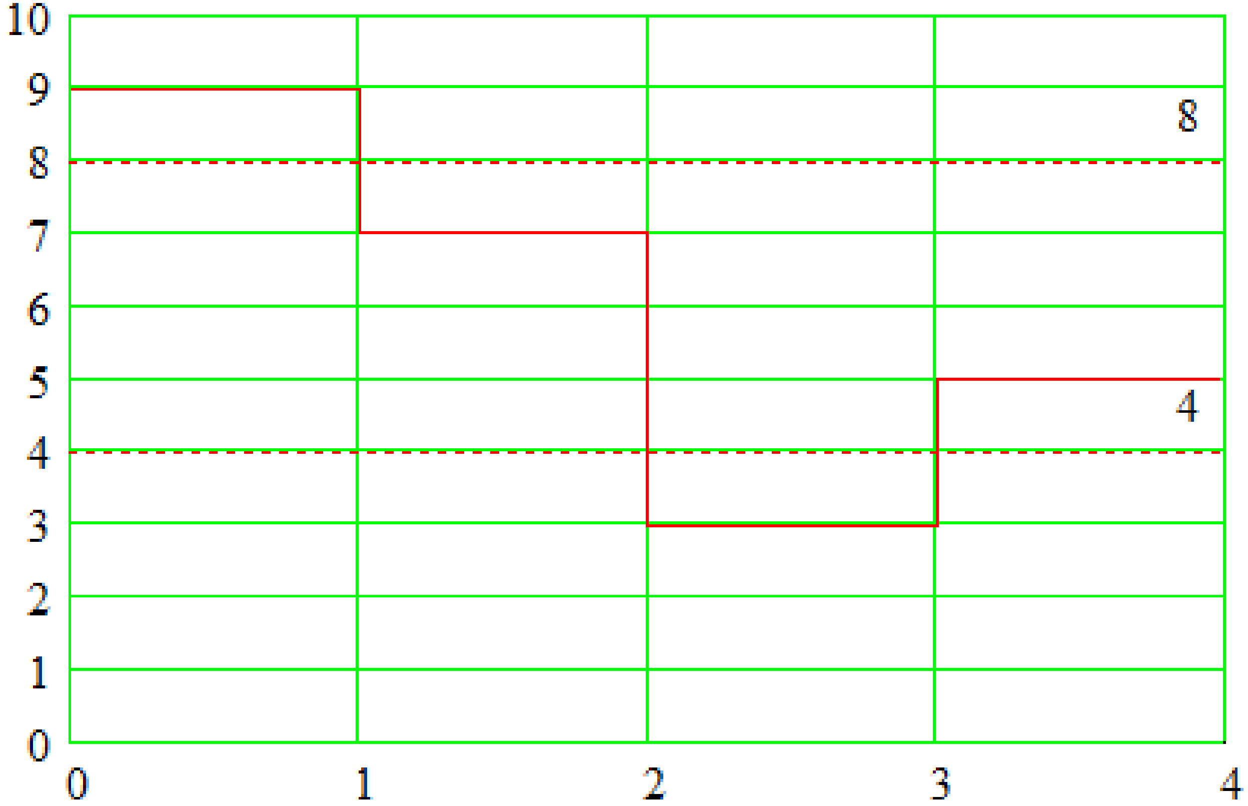
[**6**; *2, 1, -1*]

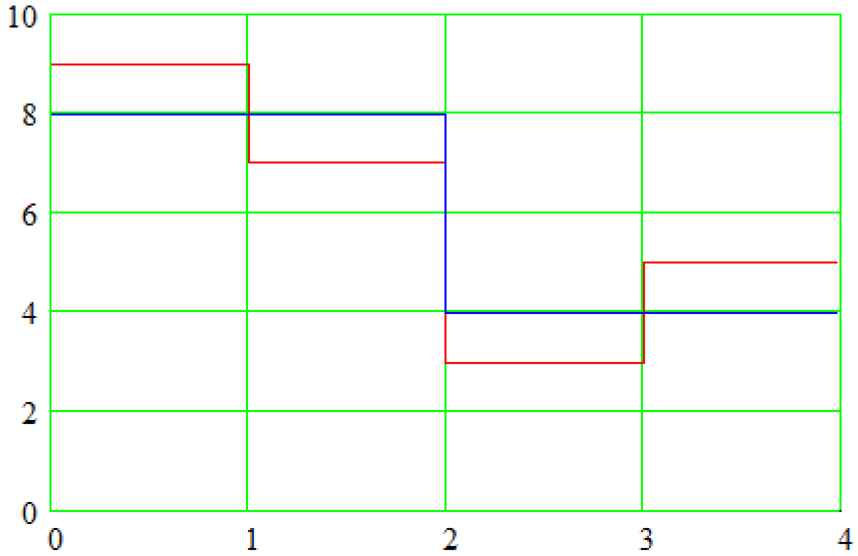
среднее уточняющие коэфф.

Исходный сигнал



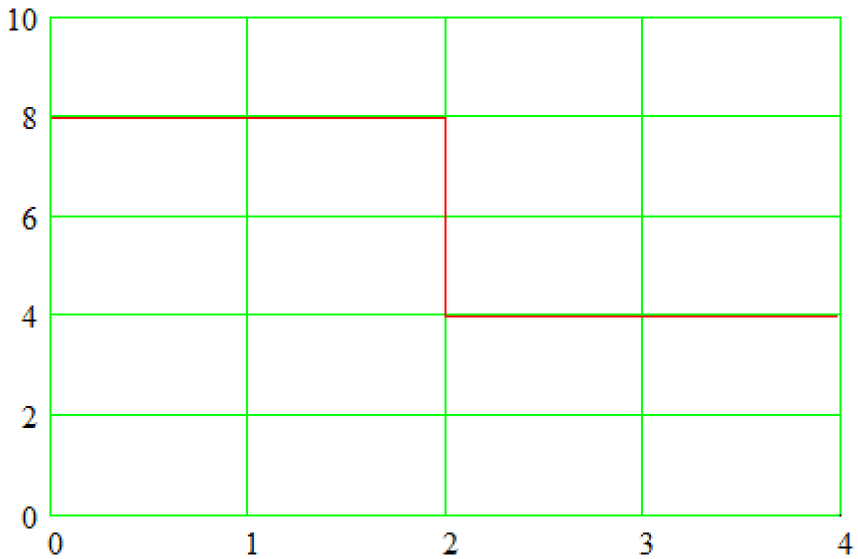
Усреднение

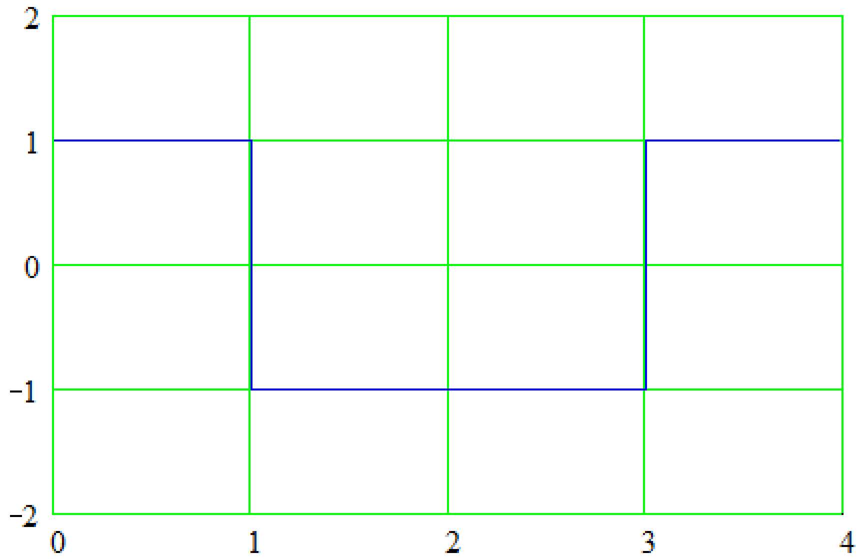




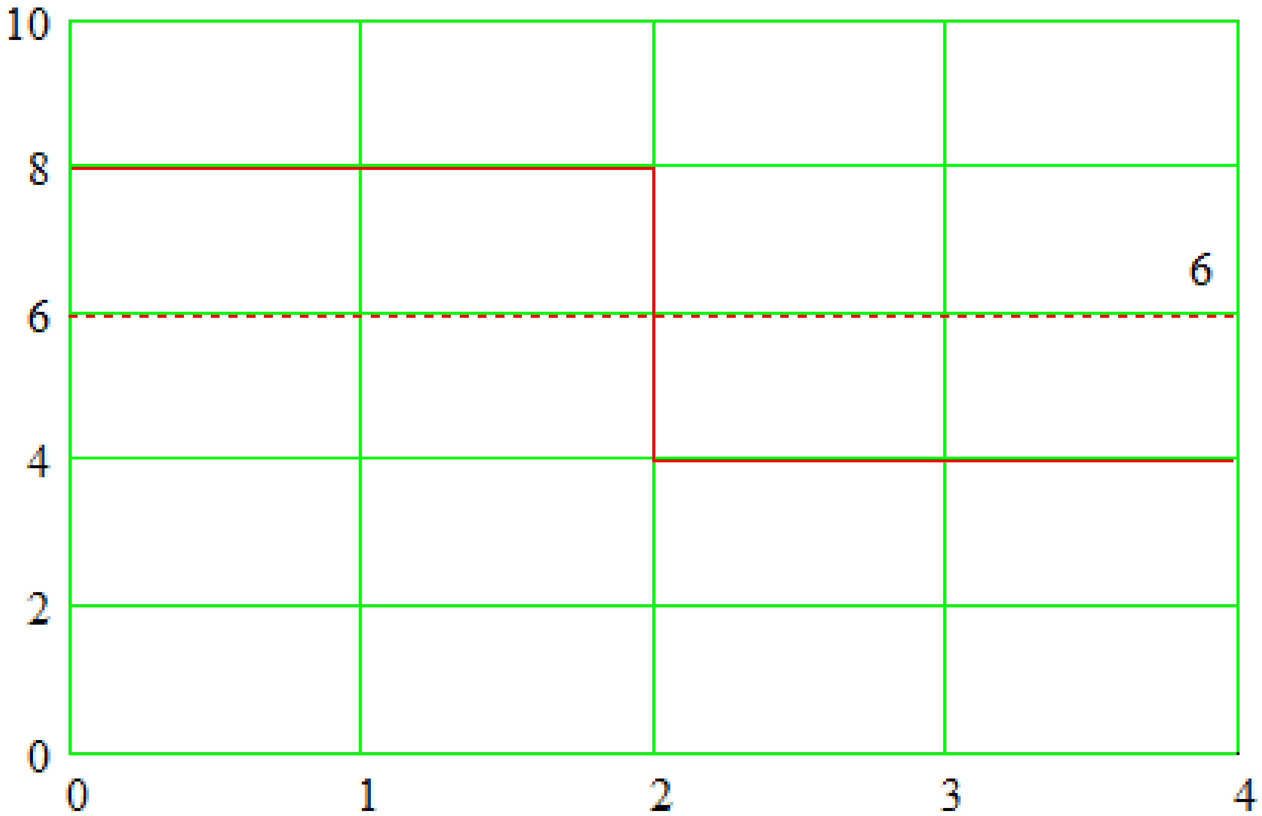
Усреднение

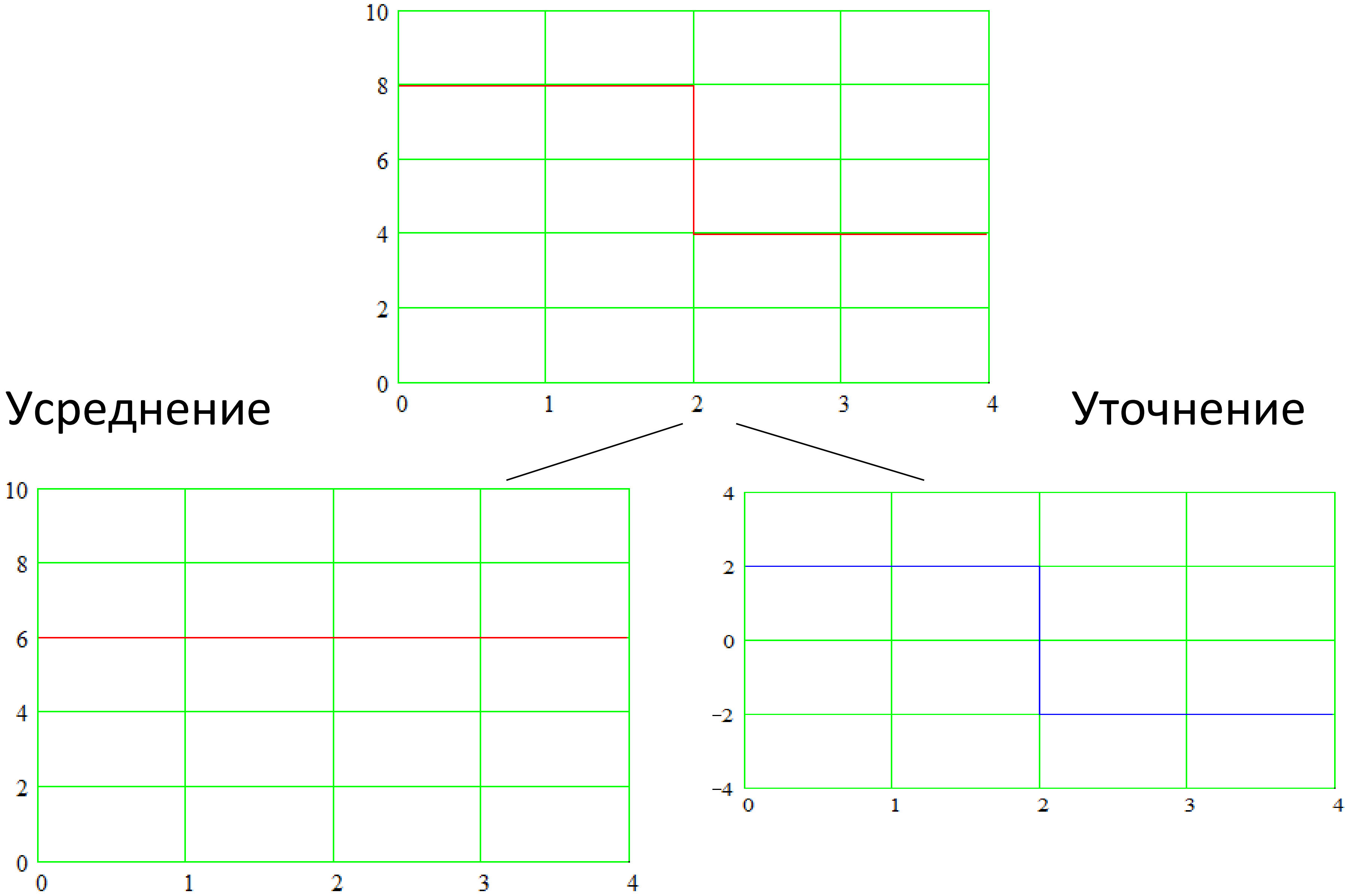
Уточнение





Усреднение




Усреднение
Уточнение

Метод блока фильтров:

рекурсивное вычисление усредняющих коэффициентов и нахождение разностей (потери информации нет!)

Особенность: большинство уточняющих коэффициентов малы по абсолютной величине (!)

Коэффициенты ~ интенсивности пикселей ~
~ характеристические функции интервалов
(с точностью до const)

Пусть V^0 – векторное пространство функций

$$f(x) = \text{const}, \quad x \in [0,1)$$

Аналогично:

V^1 – векторное пространство функций

$$f(x) = \mathrm{const}_1, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

$$f(x) = \mathrm{const}_2, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

…

В общем случае, V^j – векторное пространство функций, определенных на интервале [0,1), кусочно-постоянных на каждом из 2^j подынтервалов.

Любой паттерн X из 2^j пикселей – элемент V^j:

$$X \in V^j$$

Очевидно:

$$X \in V^j \quad \Rightarrow \quad X \in V^{j+1}$$

Т.о. векторные пространства V^j – *вложенные*:

$$V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \ldots \subset V^j \subset V^{j+1} \subset \ldots$$

(*кратномасштабный анализ* – КМА)

(*Multiresolution Analysis* – MRA)

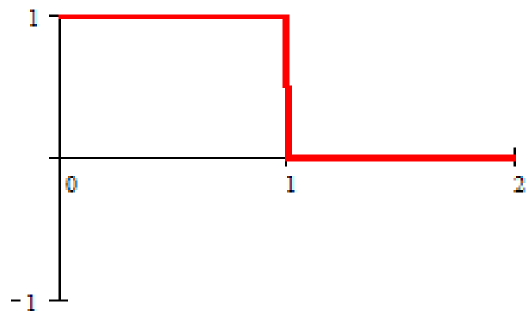
Базис в V^j – масштабирующие функции:

$$\varphi_{ij}(x) = \sqrt{2^j}\,\varphi\left(2^j x - i\right),$$

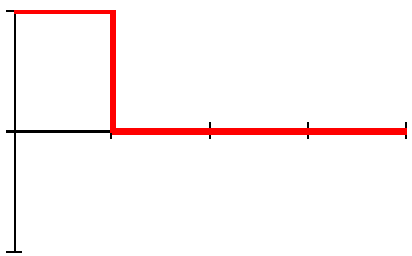
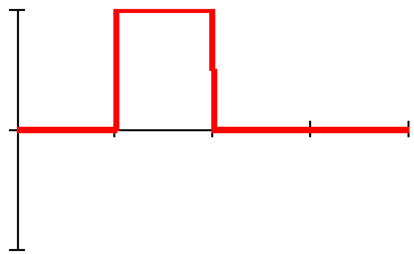
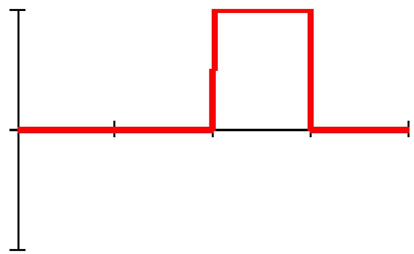
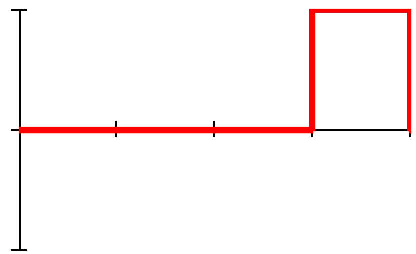
$$(i = 0, \dots, N-1, \quad N = 2^n)$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

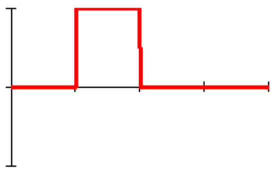
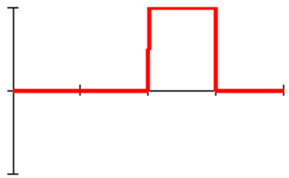


φ_{ij} – характеристические функции подынтервалов – функции с финитным носителем (compactly supported functions):

V^2			
$\varphi_{02}(x)$	$\varphi_{12}(x)$	$\varphi_{22}(x)$	$\varphi_{32}(x)$
			

Очевидно,

$$\left(\varphi_{ij},\varphi_{kl}\right)=\int_0^1\varphi_{ij}(x)\varphi_{kl}(x)\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}1, & i=k \text{ и } j=l\\ 0, & i\neq k \text{ или } j\neq l\end{cases}$$

( , )=0

Т.е., функции $\{\varphi_{ij}\}$ – ортогональные.

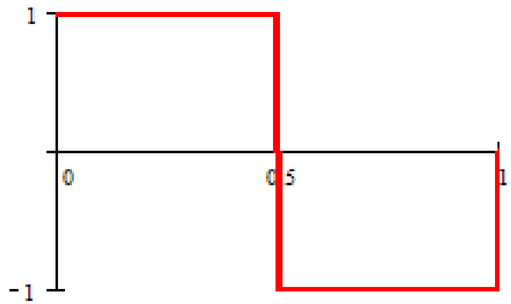
Каждое новое «более детальное» пространство V^{j+1} получается из «более грубого» пространства V^{j} с помощью дополнительного набора уточняющих функций:

$$\psi_{ij}(x) = \sqrt{2^j}\,\psi\left(2^j x - i\right),$$

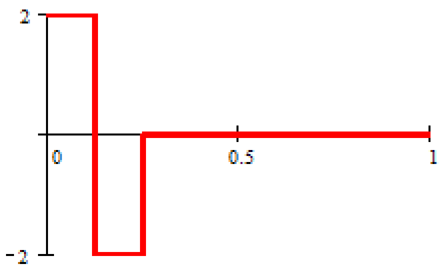
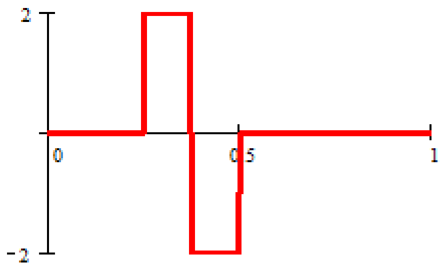
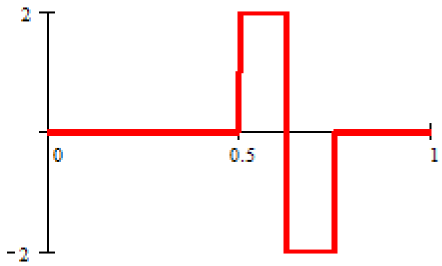
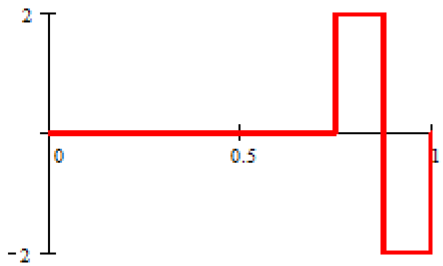
$$(i = 0, \dots, N-1, \quad N = 2^n)$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 0.5], \\ -1, & x \in [0.5, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

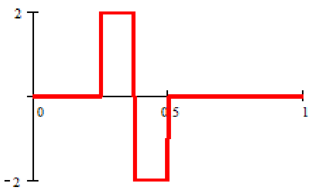


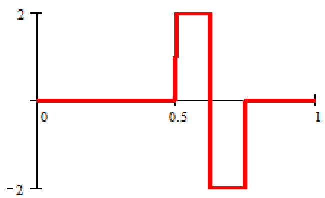
ψ_{ij} – линейно независимые функции (*вейвлеты*), образующие пространство W^j:

W^2			
$\psi_{02}(x)$	$\psi_{12}(x)$	$\psi_{22}(x)$	$\psi_{32}(x)$
			

Очевидно,

$$\left(\psi_{ij},\psi_{kl}\right)=\int\limits_0^1 \psi_{ij}(x)\psi_{kl}(x)\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}1, & i=k \text{ и } j=l\\ 0, & i\neq k \text{ или } j\neq l\end{cases}$$

(

, 

) = 0

Т.е., функции $\{\psi_{ij}\}$ – ортогональные.

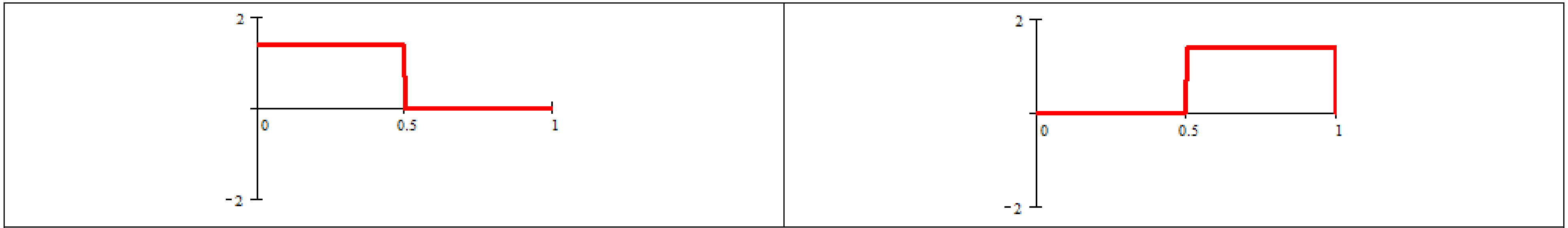
W^j - *ортодополнение* пространства V^j до V^{j+1}:

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j$$

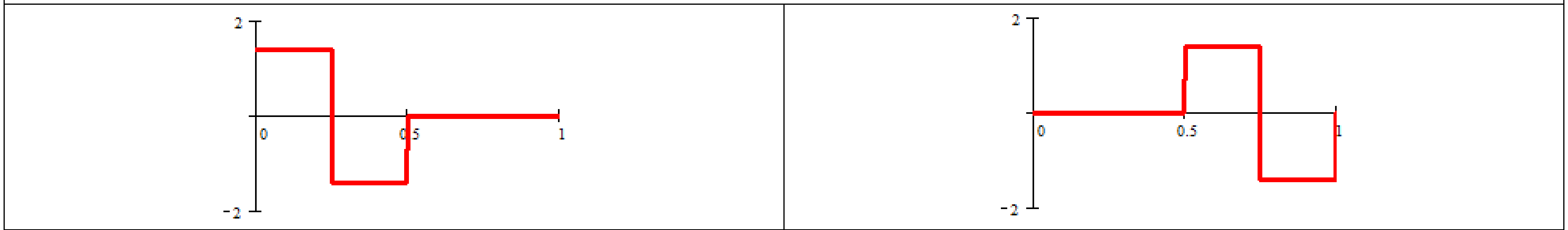
$$\forall \varphi_{ij} \in V^j, \quad \psi_{kj} \in W^j:$$

$$\left(\varphi_{ij}, \psi_{kj}\right) = \int_0^1 \varphi_{ij}(x) \psi_{kj}(x) \,\mathrm{d}\, x = 0$$

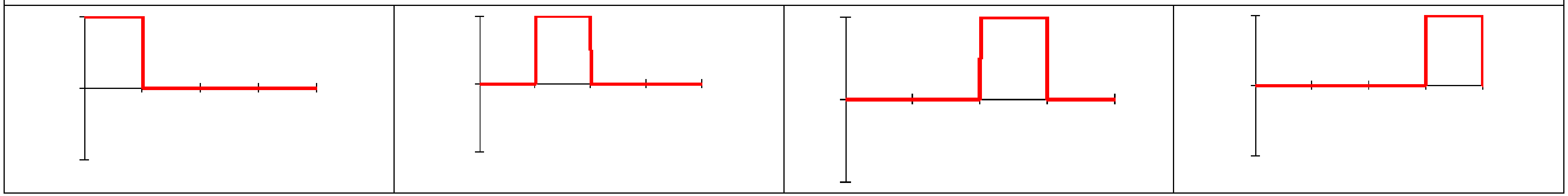
$$V^2 = V^1 \oplus W^1:$$



$$\oplus$$



$$=$$



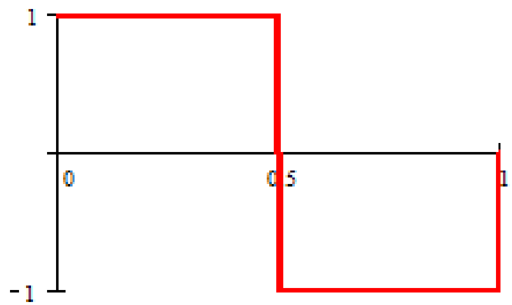
Таким образом, уточняющие коэффициенты – это коэффициенты разложения функции по базису вейвлетов.

Вейвлет *Хаара*:

$$\psi_{ij}(x) = \sqrt{2^j}\psi\left(2^j x - i\right)$$

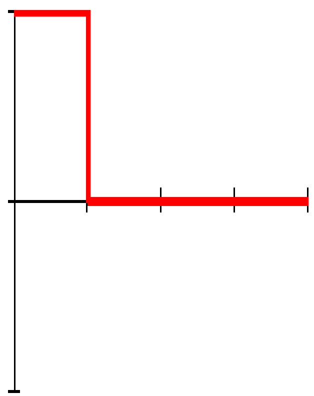
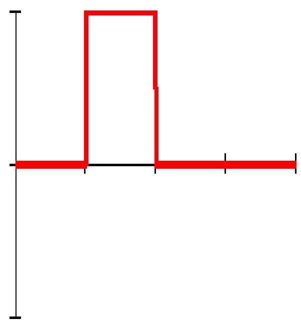
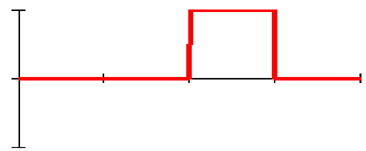
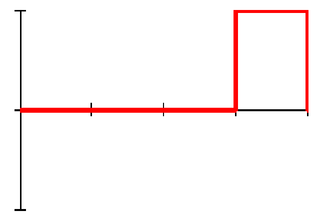
«Материнский вейвлет»:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 0.5], \\ -1, & x \in [0.5, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$



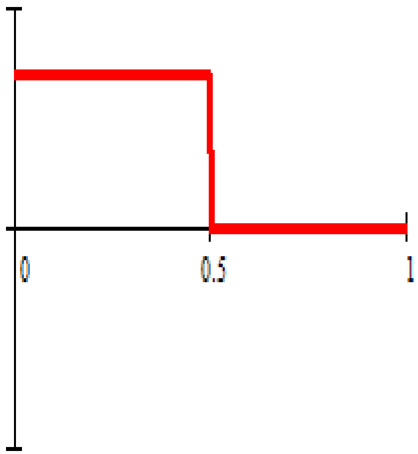
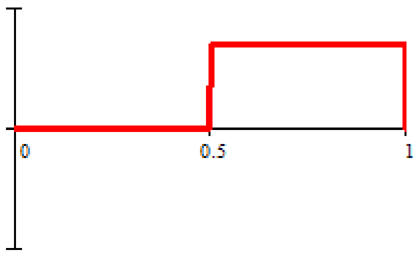
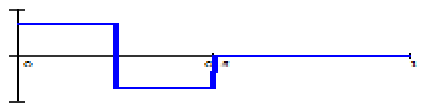
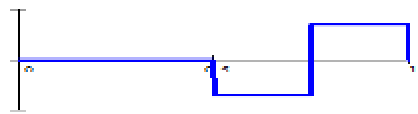
Пример: $f = (9\ 7\ 3\ 5)$

$$f(x) = c_{02}\varphi_{02}(x) + c_{12}\varphi_{12}(x) + c_{22}\varphi_{22}(x) + c_{32}\varphi_{32}(x)$$

$c_{02}\varphi_{02}(x)$	$c_{12}\varphi_{12}(x)$	$c_{22}\varphi_{22}(x)$	$c_{32}\varphi_{32}(x)$
			
$c_{02} = 9/2$	$c_{12} = 7/2$	$c_{22} = 3/2$	$c_{32} = 5/2$

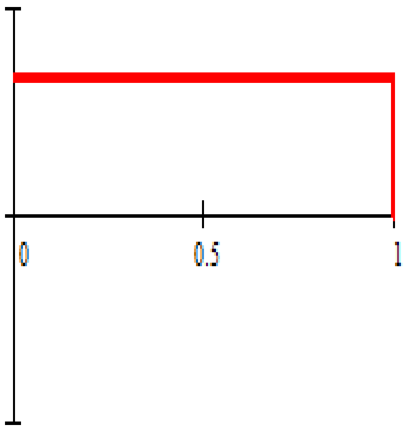
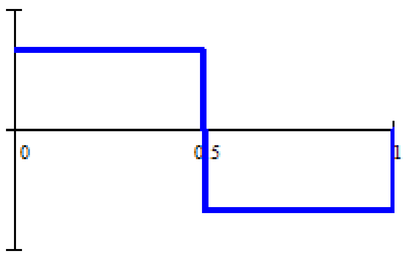
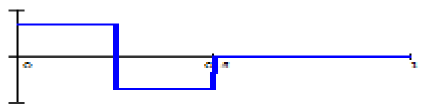
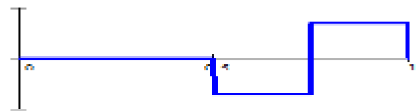
Вейвлет-разложение по базису Хаара в V^1:

$$f(x) = c_{01}\varphi_{01}(x) + c_{11}\varphi_{11}(x) + d_{01}\psi_{01}(x) + d_{11}\psi_{11}(x)$$

$c_{01}\varphi_{01}(x)$	$c_{11}\varphi_{11}(x)$	$d_{01}\psi_{01}(x)$	$d_{11}\psi_{11}(x)$
			
$c_{01} = 8/\sqrt{2}$	$c_{11} = 4/\sqrt{2}$	$d_{01} = 1/\sqrt{2}$	$d_{11} = -1/\sqrt{2}$

Вейвлет-разложение по базису Хаара в V^2:

$$f(x) = c_{00}\varphi_{00}(x) + d_{00}\psi_{00}(x) + d_{01}\psi_{01}(x) + d_{11}\psi_{11}(x)$$

$c_{00}\varphi_{00}(x)$	$d_{00}\psi_{00}(x)$	$d_{01}\psi_{01}(x)$	$d_{11}\psi_{11}(x)$
			
$c_{00} = 6$	$d_{00} = 2$	$d_{01} = 1/\sqrt{2}$	$d_{11} = -1/\sqrt{2}$

Свойства базиса Хаара

Ортонормированный базис *сдвигов-сжатий*:

$$\varphi_{ij}(x) = \sqrt{2^j}\,\varphi\left(2^j x - i\right), \quad \psi_{ij}(x) = \sqrt{2^j}\,\psi\left(2^j x - i\right),$$

$$(i = 0, \ldots, N-1, \quad N = 2^n)$$

Носитель:

$$\operatorname{supp}\varphi_{ij}(x) = \operatorname{supp}\psi_{ij}(x) = \left[\frac{i}{2^j}, \frac{i+1}{2^j}\right].$$

Ортонормированность:

$$\int_0^1 \varphi_{ij}(x)\varphi_{kl}(x)\,\mathrm{d}\,x = \delta_{ik}\delta_{jl},$$

$$\int_0^1 \psi_{ij}(x)\psi_{kl}(x)\,\mathrm{d}\,x = \delta_{ik}\delta_{jl},$$

$$\int_0^1 \varphi_{ij}(x)\psi_{kl}(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

Вейвлет-разложение функции:

$$f(x) \approx c_{00}\varphi_{00}(x) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{2^j-1} d_{ij}\psi_{ij}(x),$$

где (среднее значение):

$$c_{00} = \int_0^1 f(x)\varphi_{00}(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

- *проектирование* $f(x)$ на $\varphi_{00}(x)$

Детализирующие (уточняющие) коэффициенты:

$$d_{ij} = \int_0^1 f(x)\psi_{ij}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{i2^{-j}}^{(i+1)2^{-j}} f(x)\psi_{ij}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{i2^{-j}}^{(i+0.5)2^{-j}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{(i+0.5)2^{-j}}^{(i+1)2^{-j}} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (i = 0,\ldots,N-1, \quad j = 0,\ldots,n).$$

- *проектирование* $f(x)$ на $\psi_{ij}(x)$.

Проверка (равенство Парсеваля):

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \approx c_{00}^2 + \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{2^j-1} d_{ij}^2.$$

Пример

$$f(x) = x\sin 2\pi x, \quad x \in [0,1)$$

Вейвлет-разложение по базису V^3 (N=2^3=8):

$$f(x) \approx c_{00}\varphi_{00}(x) + \sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{7} d_{ij}\psi_{ij}(x),$$

$$c_{00} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \approx -0.159$$

$$d_{ij} = \int_{i2^{-j}}^{(i+0.5)2^{-j}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{(i+0.5)2^{-j}}^{(i+1)2^{-j}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

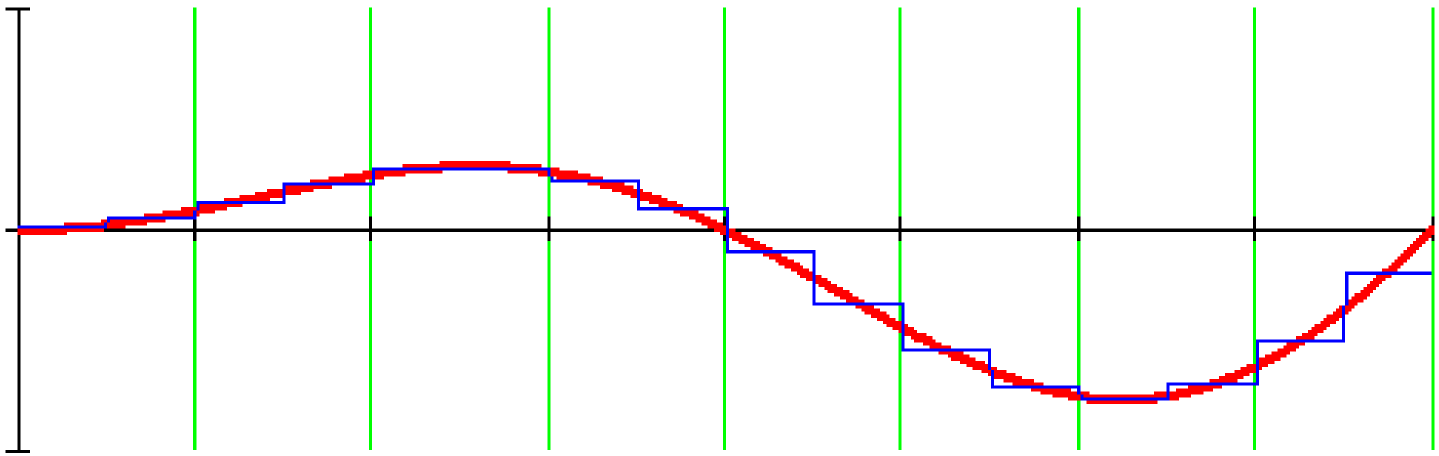
$$(i = 0,\dots,7, \quad j = 0,1,2,3).$$

$d_{00} \approx 0.318$

$d_{01} \approx -0.041, \quad d_{11} \approx 0.041$

$d_{02} \approx -0.035, \quad d_{12} \approx 0.030, \quad d_{22} \approx 0.102, \quad d_{32} \approx -0.096$

$d_{03} \approx -0.007, \quad d_{13} \approx -0.015 \quad d_{23} \approx -0.002, \quad d_{33} \approx 0.023,$
$d_{43} \approx 0.040, \quad d_{53} \approx 0.028, \quad d_{63} \approx -0.011, \quad d_{73} \approx -0.055.$



Проверка (равенство Парсеваля):

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \approx 0.160, \qquad c_{00}^2 + \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{2^j-1} d_{ij}^2 = 0.158$$

Оценка погрешности:

$$\varepsilon = \left| \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - \left(c_{00}^2 + \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{2^j-1} d_{ij}^2 \right) \right| \approx 0.002$$

Пороговое сжатие (thresholding)

Сжатие – процедура сокращения набора данных (с потерей либо без потери информации).

В практике обобщенного фурье-разложения или вейвлет-разложения сжатие эквивалентно сокращению набора коэффициентов (обнулению части из них).

2 основных типа сокращения (обнуления) коэффициентов:

- По порядковым номерам (например, отбрасывание «хвоста» обобщенного ряда Фурье).
- По порогу (например, thresholding – обнуление малых по абсолютному значению вейвлет-коэффициентов)

Возможно комбинирование обоих подходов.

Пусть ОРФ

$$f(x) = \sum_{j=1}^{M} c_j u_j(x).$$

Ортогональный базис:

$$\left(u_j, u_k\right) = \delta_{jk}.$$

Выполним перестановку индексов

$$\pi(j): \quad c_j \to c_{\pi(j)}, \quad j = 1, \ldots, M$$

так что

$$\left|c_{\pi(1)}\right| \geq \left|c_{\pi(2)}\right| \geq \ldots \geq \left|c_{\pi(M-1)}\right| \geq \left|c_{\pi(M)}\right|.$$

Пусть задан *порог* $\sigma > 0$. Если

$$\left|c_{\pi(j)}\right| \le \sigma, \quad \forall j: \quad N < j < M$$

то

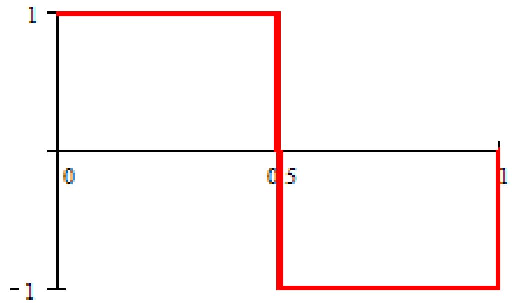
$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j u_j(x).$$

Тогда

$$f(x) - \tilde{f}(x) = \sum_{j=N+1}^{M} c_j u_j(x),$$

$$\varepsilon^2 = \left\| f - \tilde{f} \right\|_{L_2}^2 = \left(\sum_{j=N+1}^{M} c_j u_j, \sum_{k=N+1}^{M} c_k u_k \right) = \sum_{j=N+1}^{M} \sum_{k=N+1}^{M} c_j c_k \left(u_j, u_k\right) = \sum_{j=N+1}^{M} c_j^2.$$

Спектральные свойства вейвлетов Хаара



- $\operatorname{supp}\psi(x) = [0,1]$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\psi(x)\right|^2 \mathrm{d}\,x = 1$
- $\hat{\psi}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\,x = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{0}^{0.5} 1 \cdot \mathrm{e}^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_{0.5}^{1} (-1) \cdot \mathrm{e}^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\,x \right) =$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2(\omega/4)}{\omega/4} \mathrm{e}^{-i\omega/2}.$$

- $|\hat{\psi}(\omega)|$ – четная функция
- $\max|\hat{\psi}(\omega)| = |\hat{\psi}(\omega_0)|, \quad \omega_0 \approx 4.6622$
- $|\hat{\psi}(\omega)| \searrow \sim \dfrac{1}{\omega}$ при $\omega \to \infty$
- $\hat{\psi}(\omega) = 0$ при $\omega = 4\pi k$