Числовые характеристики изображений

В задачах обработки изображений последние нередко интерпретируются как случайные процессы двух переменных, т. е. как случайные поля. Это оправдано хотя бы потому, что при формировании изображений практически всегда имеются шумы. Следствием указанной интерпретации является то, что для обработки изображений могут и в ряде случаев удачно применяются статистические методы обработки информации.

Определение статистических характеристик начнем с вычисления начальных и центральных моментов. Момент, рассматриваемый относительно начала координат, называется начальным, а относительно математического ожидания — центральным.

В теории вероятностей начальные моменты m_k k-го порядка вычисляются по общей формуле

$$m_k = \sum_i x_i^k p_i,$$

где x_i — некоторое значение дискретной случайной величины X, $p_i = P\{X = x_i\}$ — вероятность, с которой случайная величина X принимает значение x_i.

Математическая статистика оперирует с оценками указанных моментов. Применительно к анализу изображения $||A_{ij}||$ размером $N_i \times N_j$ элементов соответствующая формула приобретает вид:

$$m_k = \frac{1}{N_i \times N_j} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} A_{ij}^k.$$

Для вычисления начальных моментов можно использовать не только само изображение, но и его гистограмму. Мы рассмотрим случай, когда ширина интервалов гистограммы равна единице и каждому уровню поля (а их, как правило, 256) соответствует свой столбец гистограммы. В этом случае используется расчетная формула, являющаяся аналогом (3.1),

$$m_k = \frac{1}{\mathrm{sum}} \sum_{h=0}^{h_{\max}} h^k G_h,$$

где h — текущий уровень элементов поля, $h_{\max}$ — максимальный уровень поля, G_h — высота столбца гистограммы, т. е. количество элементов изображения, имеющих уровень h, sum — количество пикселей, использованных при построении гистограммы (объем выборки).

Очевидно, что

$$\mathrm{sum} = \sum_{h=0}^{h_{\max}} G_h.$$

Центральные моменты u_k в теории вероятностей определяются выражением

$$u_k = \sum_i (x_i - m_1)^k P_i.$$

Поэтому для получения центральных моментов лучше вначале вычислить начальные моменты по одной из вышеприведенных формул, а затем использовать известные выражения для пересчета начальных моментов в центральные:

$$\begin{aligned}
u_2 &= m_2 - m_1^2 \\
u_3 &= m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^2 \\
u_4 &= m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4.
\end{aligned}$$

Центральный момент второго порядка u_2 называется *дисперсией*. Величина

$$\sigma = \sqrt{u_2}$$

называется *среднеквадратическим отклонением*.

С центральным моментом третьего порядка u_3 связан ***коэффициент асимметрии*** g_1, характеризующий «скошенность» распределения вероятностей:

$$g_1 = \frac{u_3}{\sigma^3}$$

Для симметричного (относительно математического ожидания) распределения коэффициент асимметрии равен нулю.

С центральным моментом четвертого порядка u_4 связан ***коэффициент эксцесса*** g_2, характеризующий «крутость» распределения:

$$g_2 = \frac{u_4}{\sigma^4} - 3.$$

Коэффициент эксцесса нормального распределения равен нулю. Если кривая плотности вероятностей имеет более острую и высокую вершину по сравнению с нормальным распределением, то эксцесс положителен, если более низкую и пологую — отрицателен.

Удобной мерой, характеризующей поведение случайной величины (через ее закон распределения) от строгой детерминированности до полной «хаотичности», является *энтропия*. Ее применение особенно полезно в случаях асимметричных и/или многовершинных распределений, когда использование таких числовых характеристик, как среднее значение, среднеквадратическое отклонение и моменты высших порядков, теряет всякую наглядность.

Энтропия дискретной случайной величины, она же средняя собственная информация, определяется известным из теории информации выражением [18]:

$$I = -\sum_i p_i \log_2 p_i .$$

где p_i — как и раньше, вероятность, с которой случайная величина X принимает значение x_i.

Энтропия изображения зависит от количества уровней, а при одинаковом числе уровней — от закона распределения. При равномерном законе распределения (полная «хаотичность») энтропия достигает максимума, который зависит только от количества уровней:

$$I_0 = \log_2(h_{\max} - h_{\min} + 1).$$

Так, например, энтропия изображения, имеющего уровни от 0 до 255, не может превышать 8.

Степень близости закона распределения к равномерному удобно характеризовать *относительной энтропией* I/I_0 или величиной

$$D = 1 - I/I_0,$$

которая в теории информации называется *избыточностью* Мы будем использовать второе понятие. При равномерном законе распределения избыточность равна нулю.

Энтропию удобнее всего вычислять с помощью гистограммы. Подставляя в (3.8) вместо вероятности p_i ее оценку G_h/sum и проводя элементарные преобразования, получаем

$$I = \log_2 \mathrm{sum} - \frac{1}{\mathrm{sum}} \sum_{h=0}^{h_{\max}} G_h \log_2 G_h.$$

$$I = \frac{1}{\ln 2} \times \left(\ln \mathrm{sum} - \frac{1}{\mathrm{sum}} \sum_{h=0}^{h_{\max}} G_h \ln G_h \right).$$