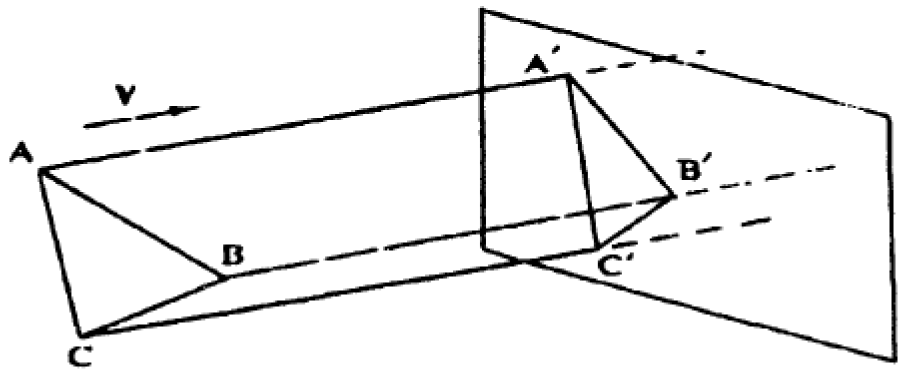
Проективные преобразования

Все виды проекций, используемые в инженерной графике, а также реализуемые в системах формирования изображений, представляют собой комбинации двух главных типов проекций: параллельной и перспективной (центральной).

Параллельная проекция

Точки объекта проецируются на поверхность пучком лучей, параллельных заданному направлению **V**.



Координаты точек изображения при параллельной проекции определяются путем совместного решения уравнения прямой, проходящей через предметную точку A параллельно единичному вектору, и уравнения поверхности проекции:

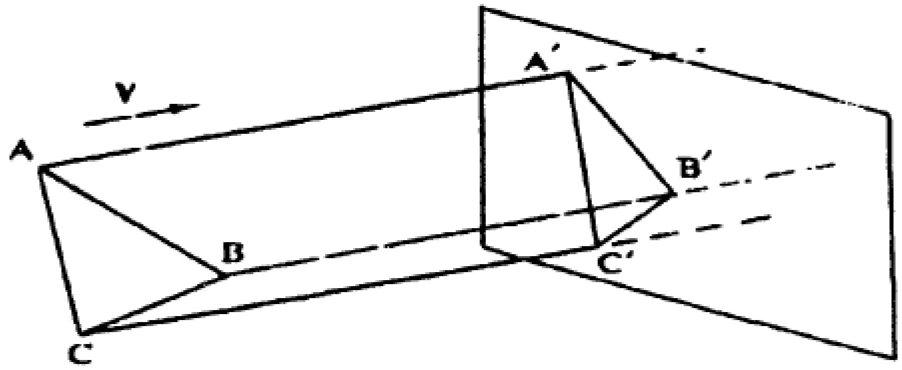
$$(X_A - X_{A'})/V_X = (Y_A - Y_{A'})/V_Y = (Z_A - Z_{A'})/V_Z;$$
$$F(X_{A'}, Y_{A'}, Z_{A'}) = 0, \qquad (1)$$

где X_A, Y_A, Z_A – координаты точки предмета; $X_{A'}, Y_{A'}, Z_{A'}$ – координаты точки изображения; $F(X_{A'}, Y_{A'}, Z_{A'})$ – уравнение поверхности проекции.

Если проецирование осуществляется на плоскость и проектирующие лучи перпендикулярны к ней, то проекция называется *ортогональной* или *перпендикулярной*. Этот вид проекции широко используется в техническом черчении. Если оси X,Y лежат в плоскости проекции, а Z перпендикулярна ей, то при представлении предмета в координатном базисе плоскости проекции, координаты точек изображения можно определить по координатам точек предмета с помощью простого соотношения

$$[X_{A'}\ \ Y_{A'}\ \ Z_{A'}] = [X_A\ \ Y_A\ \ Z_0]\ , \qquad (2)$$

где Z_0=const – координата плоскости проекции по оси Z.



Как следует из (2), для получения ортогональной проекции принципиально достаточно определить координаты XA и YA предмета. Однако этим не ограничивается процедура построения трехмерной модели на экране дисплея. Предмет обычно задается в своей объектной системе координат XYZ, оси которой в исходном состоянии параллельны экранной системе дисплея xyz. Изображение предмета отображается на экране дисплея с некоторым масштабным коэффициентом m, а начало объектной системы координат располагается в точке x_0, y_0, z_0 экрана. Для этого более общего случая можно записать

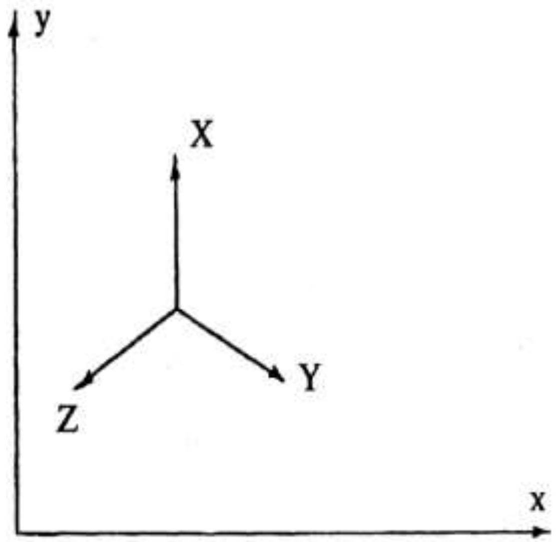
$$\begin{bmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \\ z_{A'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

Выбором значения m можно осуществлять масштабирование изображения объекта.

Чтобы обеспечить наиболее наглядное отображение объемности предмета, обычно выбирается положение предмета относительно плоскости проекции. В техническом черчении положение предмета определяется типом аксонометрической проекции. Чтобы получить аксонометрическую проекцию, предмет вместе со связанной системой координат разворачивается таким образом, что проекции координатных осей получают определенную ориентацию друг относительно друга, а отрезки, взятые по координатным осям, отображаются на проекции с определенным соотношением масштабных коэффициентов.

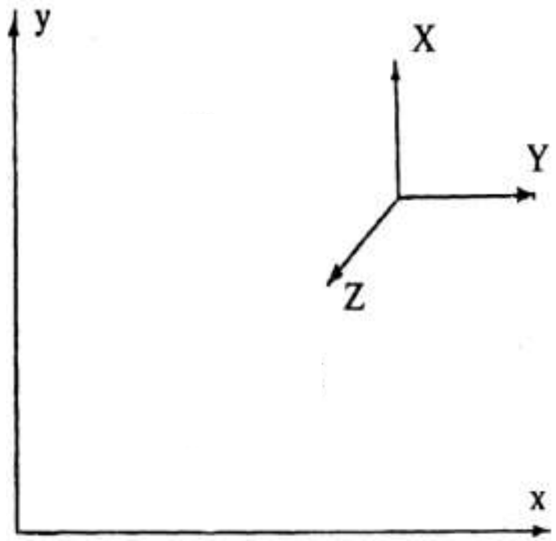
Чтобы в машинной графике воспроизвести предмет в заданной проекции, необходимо определить матрицу преобразования координат. Основой для этого являются принципы построения изображения в данной проекции. В частности, в изометрической проекции координатные оси предмета X, Y, Z отображаются на плоскости экрана дисплея под углом 120°, а масштабные коэффициенты по всем трем осям одинаковы (рис.1.5.2). С учетом этих свойств изометрической проекции получим

$$\begin{bmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \\ z_{A'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{0.5}/2 & 0 & 3^{0,5}/2 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ 3^{-0,5} & 3^{-0.5} & 3^{-0,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}. \qquad (4)$$



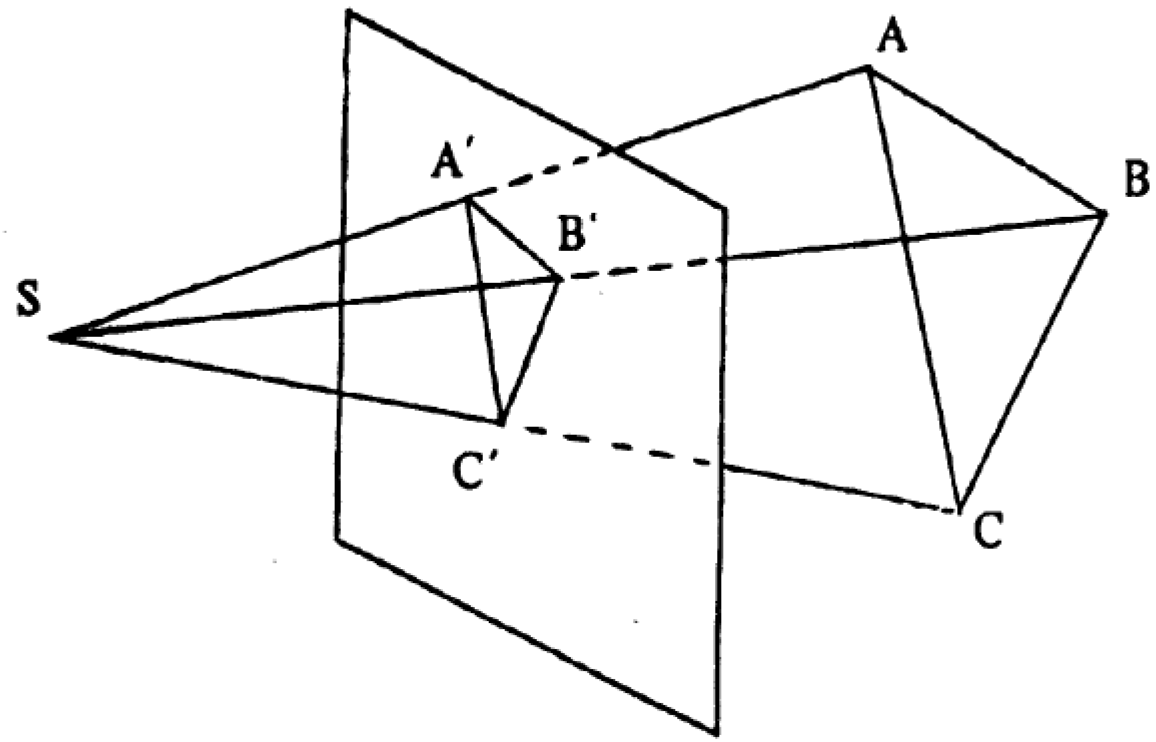
Аналогично можно получить формулу преобразования для фронтальной проекции, при которой оси X, Y проецируются параллельно осям x, y дисплея, а проекция оси Z совпадает с биссектрисой угла между осями x и y В этом случае преобразование координат выполняется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \\ z_{A'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2^{0,5}/4 \\ 0 & 1 & 2^{0,5}/4 \\ 2^{0.5}/4 & 2^{0.5}/4 & (2/3)^{0,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}. \qquad (5)$$



Можно отметить, что фронтальная проекция не является линейным преобразованием пространства предметов.

Центральная (перспективная) проекция



При центральной проекции все проектирующие лучи проходят через определенную точку пространства S – центр проекции. Физическим устройством, реализующим центральную проекцию, является объектив. При визуальном наблюдении роль объектива выполняет глаз. В объективе лучи, соединяющие сопряженные точки в пространстве предметов и изображений, проходят через заднюю главную точку, являющуюся центром проекции Из этого основного свойства центральной проекции вытекает математический метод построения изображения: координаты каждой точки изображения могут быть вычислены путем определения точки пересечения прямой, проходящей через предметную точку A и центр проекции S, с поверхностью проекции (изображения). Если в выбранной объектной системе координат OXYZ известны координаты точек A и S, а также уравнение поверхности изображения $\varphi(X,Y,Z) = 0$, то координаты точки изображения A′ определяются в результате решения системы уравнений

$$\begin{cases} (X_A-X_{A'})/(X_A-X_S)=(Y_A-Y_{A'})/(Y_A-Y_S)=(Z_A-Z_{A'})/(Z_A-Z_S); \\ \varphi(X_{A'},Y_{A'},Z_{A'}) = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Поверхность проекции в большинстве случаев можно считать плоской. Это приближение достаточно точно выполняется и для глаза. Хотя светочувствительная поверхность глаза – сетчатка имеет почти сферическую форму, для области ясного зрения, ограниченной угловым размером в несколько градусов, ее вполне можно считать плоской.

Геометрические преобразования с использованием *однородных координат*

Классические геометрические преобразования (сдвиги, повороты) описываются с помощью математических моделей, основанных на использовании матриц размера 3x3. При классическом подходе каждое из преобразований представляется отдельной матрицей. Для машинной графики это приводит во многих случаях к увеличению объема вычислений. Возникает необходимость в использовании математического аппарата, обеспечивающего более компактное описание геометрических преобразований. Наибольшее распространение для задач машинной графики получил *метод однородных координат*. В основе этого метода лежит представление о том, что каждая точка в N-мерном пространстве может рассматриваться как проекция точки из (N+1)-мерного пространства. В частности, точка в трехмерном пространстве представляется четыремя составляющими wx, wy, wz, w, где w может принимать любое значение. На практике в основном используется w = 1, что соответствует нормализованным координатам (x, y, z, 1).

Свойства однородных координат позволяют выражать с помощью единой матрицы все преобразования: сдвиги, повороты и даже проекции (аксонометрические или центральные), а также любые сочетания преобразований в виде произведения матриц. Использование однородных координат позволяет применять единый математический аппарат для пространственных преобразований (поворотов, масштабирования, переноса) точек, прямых, квадратичных и бикубических поверхностей и линий .

Для трехмерной машинной графики все преобразования могут быть описаны матрицей 4x4 следующего вида:

Классическая матрица поворотов	a_{11}	a_{12}	a_{13}	d	Векторы проекций
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	e	
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	f	
Вектор сдвига (переноса)	x	y	z	S	Общий масштаб

Основные преобразования выражаются с помощью матрицы 4x4 следующим образом:

поворот на угол φ вокруг оси x

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

поворот на угол θ вокруг оси y

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

поворот на угол ψ вокруг оси z

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

сдвиг на вектор (x, y, z)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix}$$

геометрическое преобразование

$$M = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что задано осуществить повороты предмета на угол φ_0 вокруг оси, параллельной оси x, и на угол ψ_0 вокруг оси z, проходящих через точку с координатами (x_0,y_0,z_0). Эта операция будет описываться произведением четырех матриц: матрицы T_1, описывающей сдвиг для совмещения точки (x_0,y_0,z_0) с началом координат; двух матриц R_x и R_z, описывающих повороты вокруг соответствующих осей; матрицы T_2, описывающей сдвиг для возвращения точки (x_0,y_0,z_0) в первоначальное положение.

Результирующая матрица M имеет вид $M= T_1 R_x R_z T_2$.