TEMA 7 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

el rango por filas de la matriz A, que denotaremos RF(A), es la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ generado por las filas de la matriz A. el rango por columnas de la matriz A, que denotaremos RC(A), es la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{K}^m$ generado por las columnas de A.

EJERCICIO

Calcular el rango por filas y el rango por columnas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5).$$

-D-

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por $\{(2,3,4,1),(3,3,2,4),(0,1,1,0)\}$. Entonces $RF(A) = \dim(U)$.

Para calcular $\dim(U)$ triangulizaremos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_U = \{(2,3,4,1),(0,1,1,0)\} \Rightarrow \dim(U) = 2 \Rightarrow RF(A) = 2.$$

Sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(2,3,0),(3,3,1),(4,2,1),(1,4,0)\}$. Entonces $RC(A) = \dim(W)$.

Para calcular $\dim(W)$ triangularizaremos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_W = \{(2,3,0),(0,1,1)\}$$

$$\Rightarrow \dim(W) = 2 \Rightarrow RC(A) = 2.$$

TEOREMA

Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces $RF(A) = RC(A)$.

Al número $RF(A) = RC(A)$ lo llamaremos el rango de A y lo denotaremos $\text{rang}(A)$.

Sea A una matriz y B una matriz que se obtiene a partir de A quitándole algunas filas y columnas. Entonces diremos que B es una submatriz de A.

EJEMPLO

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

es una submatriz de A ya que se ha obtenido quitándole la 2ª fila y las columnas 2 y 3 a A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA

El rango de una matriz es el máximo de los órdenes de sus submatrices cuadradas regulares.

EJERCICIO.

Calcular el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

-D-

Como $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una submatriz de A y $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, entonces $\mathrm{rang}(A) \geq 2$. Veamos si $\mathrm{rang}(A)=3$ ó $\mathrm{rang}(A)=2$.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ la tercera columna de A es combinación lineal de las dos primeras.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ la tercera columna de A es combinación lineal de las dos primeras.

Por tanto $RC(A) = 2 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 2$.

EJERCICIO

¿Es $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ una base de $\mathbb{Z}_5^3$?

-D-

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(\langle\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}\rangle) = 3 \Rightarrow$ el conjunto $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ es L.I $\Rightarrow \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{Z}_5^3$.

EJERCICIO

¿Es el conjunto $\{(1,2,1),(1,3,1)\} \subseteq \mathbb{Z}_5^3$ L.I?

-D-

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ya que } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow RF(A) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{(1,2,1),(1,3,1)\} \text{ L.I}$$

Expresion matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incognitas sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una expresion de la forma

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

donde los a_{ij} y los b_i son elementos de $\mathbb{K}$ y los x_j son incognitas. Una solucion del sistema es una n-tupla $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ tq si $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ..., $x_n = s_n$ entonces se verifican las m igualdades del sistema. Las m igualdades se pueden expresar como una unica igualdad entre matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

a la que llamaremos expresion matricial del sistema.

A las matrices $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ las llamaremos matriz de los coeficientes, matriz incognita y matriz de los terminos independientes respectivamente. La matriz ampliada es $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

Tipos especiales de sistemas

Si un sistema tiene solucion diremos que es compatible, y en caso contrario diremos que es incompatible. Si tiene una unica solucion diremos que es compatible determinado, y si tiene mas de una solucion es compatible indeterminado.

Dos sistemas de ecuaciones sobre el mismo cuerpo son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

PROPOSICION

1) Si intercambiamos de posicion dos ecuaciones de un sistema, obtenemos un sistema equivalente.
2) Si multiplicamos una ecuacion por un elemento del cuerpo distinto de cero obtenemos un sistema equivalente.
3) Si a una ecuacion le sumamos otra ecuacion multiplicada por un elemento del cuerpo obtenemos un sistema equivalente.

METODO DE GAUSS

1) Resolver el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ x+y+2z=0 \\ 2x+y+4z=3 \end{array}\right\}$$

-D-

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ x+y+2z=0 \\ 2x+y+4z=3 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ 6y+6z=6 \\ 4y+5z=1 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ y+z=1 \\ 4y+5z=1 \end{array}\right\}$$

$$\sim \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ y+z=1 \\ z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow z=4,\ y=4,\ x=2.$$

2) Resolver el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y-z=2 \\ 2x+y+4z=0 \end{array}\right\}.$$

-D-

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y-z=2 \\ 2x+y+4z=0 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y-2z=1 \\ -y+2z=-2 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y-2z=1 \\ 0=-1 \end{array}\right\}.$$

el sistema no tiene solución.

3) Resolver el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}/_5$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+3z=0 \\ x+4y+3z=2 \end{array}\right\}.$$

-D-

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+3z=0 \\ x+4y+3z=2 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 4y+z=3 \\ 3y+2z=1 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 4y+z=3 \\ 0=0 \end{array}\right\}$$

$\boxed{z=\lambda}$ $\quad 4y=3+4\lambda \Rightarrow y=4(3+4\lambda) \Rightarrow \boxed{y=2+\lambda}$

$x=1+4y+4z \Rightarrow x=1+4(2+\lambda)+4\lambda \Rightarrow \boxed{x=4+3\lambda}$

Para cada valor que le damos a $\lambda \in \{0,1,2,3,4\}$ obtenemos una solucion. Por tanto el sistema tiene 5 soluciones.

TEOREMA DE ROUCHE-FROBENIUS

Un sistema es compatible si y solo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada. Ademas, es compatible determinado si y solo si dichos rangos coinciden con el numero de incognitas.

EJERCICIO

Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}/_5$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+4y+4z=1 \\ 3x+y+2z=2 \\ 2x+4y\qquad=3 \end{array}\right\}.$$

-D-

Vamos a calcular el rango de la matriz de los coeficientes. Para ello triangularizamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2.

Vamos a calcular el rango de la matriz ampliada. Para ello triangularizamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ el rango de la matriz ampliada es 3.

El sistema es incompatible.

EJERCICIO

Estudiar el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ y que depende del parametro a.

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=a \end{array}\right\}.$$

-D-

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+1-a-a-a = a^3+4a+2.$$

$a^3+4a+2=0 \Leftrightarrow a\in\{1,5\}.$

si $a\in\{0,2,3,4,6\}$ el sistema es compatible determinado

Ya que el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada y con el nº de incognitas.

$\boxed{a=1}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{y} \quad \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$, por tanto si $a=1$ el sistema es incompatible.

$\boxed{a=5}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ya que} \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Por tanto si $a=5$ el sistema es incompatible.

EJERCICIO

Estudiar el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$ y que depende de los parametros a y b.

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z &= 1 \\ x+y+z &= b \\ ax+by+z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \cancel{a} + a + b - \cancel{a} - 1 - ab = a(1-b) + b - 1 = (1-b)(a-1)$$

- si $a \neq 1$ y $b \neq 1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3.

Por tanto el S.C.D

$\boxed{a=1}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } b=1 \\ 2 & \text{si } b \neq 1. \end{cases}$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } b=1 \\ 3 & \text{si } b \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = -(b-1)^2$$

Por tanto si $a=1$ y $b=1$ SCI y si $a=1$ y $b \neq 1$ S.I.

$\boxed{b=1 \text{ y } a \neq 1}$

$$\text{rang}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{y rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

si $b=1$ y $a \neq 1$ S.C.I.

EJERCICIO

estudiar el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ y que depende del parametro a.

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 2 & \text{si } a \neq 1 \end{cases} \qquad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

si $a = 1$ S. I.

Si $a \neq 1$ S. C. I.

EJERCICIO

Estudiar el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$ y que depende del parametro a.

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\}.$$

-D-

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

el sistema es siempre C. I.

EJERCICIO

Estudiar el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ y que depende del parametro a.

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \end{array}\right\}.$$

-D-

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ya que si } \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Downarrow a = 4$$

pero si $a = 4$ $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por tanto siempre S. C. I.

Un sistema es de Cramer si su matriz de coeficientes es regular. Los sistemas de Cramer son siempre compatibles determinados.

FORMULA DE CRAMER

Si $AX = B$ es la expresion matricial de un sistema de Cramer con n incognitas, entonces su unica solucion es

$|A|^{-1}(|M_1|, \dots, |M_n|)$ donde M_i es la matriz que se obtiene a partir de A quitando la columna i y colocando en su lugar B.

EJERCICIO

Probar que el siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ es de Cramer, y calcula su solucion usando la formula de Cramer.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{array}\right\}$$

-D-

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+1+1+1-1+1 = 4 \neq 0$$ y por tanto es de Cramer

$$4^{-1}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = 2(4, 2, 5)$$

$$= (1, 4, 3)$$

$x = 1, \quad y = 4, \quad z = 3.$

Ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial.

Sea U un subespacio vectorial de V, $B=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ una base de V y $B_U=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_r\}$ una base de U. Supongamos que $\vec{u}_1 \equiv_B (a_{11},\dots,a_{1n}),\dots,\vec{u}_r \equiv_B (a_{r1},\dots,a_{rn})$. Sea $\vec{x}\in V$ y supongamos que $\vec{x}\equiv_B (x_1,\dots,x_n)$. Entonces $\vec{x}\in U$ si y solo si

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{rn} & x_n \end{pmatrix} = r.$$

Para que esto ocurra, ciertos determinantes deben de valer cero. El desarrollo de dichos determinantes igualados a cero nos proporciona $n-r$ ecuaciones linealmente independientes de la forma

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}x_1+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ b_{n-r,1}x_1+\cdots+b_{n-r,n}x_n=0 \end{array}\right\}$$

A dichas ecuaciones las llamaremos ecuaciones cartesianas de U respecto de la base B.

NOTA

1) U viene dado por $\dim(V)-\dim(U)$ ecuaciones cartesianas L.I.

2) Si nos dan (o nos piden) las ecuaciones cartesianas de un subespacio y no nos dicen respecto de que base supondremos que es respecto de la base canonica.

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(2,3,4), (1,4,2)\}$. Calcular las ecuaciones cartesianas de U respecto de la base $B=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

-D-

• Calculamos una base de U

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_U=\{(2,3,4)\}.$$

• Calculamos $(2,3,4) \equiv_B (\quad\quad)$

$$a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1) = (2,3,4) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b = 2 \\ a +c = 3 \\ b+c = 4 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow a=3,\ b=4,\ c=0$. Por tanto, $(2,3,4) \equiv_B (3,4,0)$.

• Suponemos que $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & x \\ 4 & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & y \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 0 & z \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{r} x+3y = 0 \\ 3z = 0 \end{array}\right\}}$$

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^4$ generado por $\{(1,2,3,1), (1,1,1,1), (3,5,7,3)\}$. Calcular las ecuaciones cartesianas de U

-D-

- Calculamos una base de U

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_U = \{(1,2,3,1),$$

$$(0,-1,-2,0)\}.$$

- Calculamos $(1,2,3,1) \equiv_{BC} (1,2,3,1)$ y $(0,-1,-2,0) \equiv_{BC} (0,-1,-2,0)$.

- Imponemos $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & -2 & z \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & -2 & z \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 1 & 0 & t \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -x+2y-z &= 0 \\ x \qquad -t &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

EJERCICIO

Sean U y W los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$ generados por $\{(1,1,1),(1,2,1)\}$ y $\{(1,4,3),(0,0,4)\}$ respectivamente. Calcular una base de $U \cap W$.

-D-

- Vamos a calcular las ecuaciones cartesianas de U.

$B_U = \{(1,1,1),(1,2,1)\}$.

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x+z=0$$

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } 4x+z=0\}$.

- Vamos a calcular las ecuaciones cartesianas de W.

$B_W = \{(1,4,3),(0,0,4)\}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 4 & 0 & y \\ 3 & 4 & z \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 4 & 0 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y=0.$$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } x+y=0\}.$

- $U \cap W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{array}{l} 4x + z = 0 \\ x+y = 0 \end{array}\right\}.$

Como las ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 4x + z = 0 \\ x+y = 0 \end{array}\right\}$ son independientes ya que $\text{rang}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, entonces $\dim(U \cap W) = 3-2 = 1$.

$B_{U \cap W} = \{(1,4,1)\}.$

EJERCICIO

Sea $U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ 2x+3y+z+t=0 \\ x+2y = 0 \end{array}\right\}.$

Calcular una base de U.

-D-

- Veamos en primer lugar cuantas ecuaciones hay L.I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ y+4z+4t=0 \end{array}\right\}$

Como las 2 ecuaciones son L.I entonces $\dim(U) = 4-2 = 2$.

• Vamos a tomar dos elementos de $\mathbb{Z}_5^4$ que verifiquen las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ y+4z+4t=0 \end{array}\right\} \text{ y que sean L. I.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=4z+4t \\ y=z+t \end{array}\right\} \text{• si } z=1 \quad t=0 \text{ entonces } \left.\begin{array}{l} x+y=4 \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3 \quad y=1$$

$$(3,1,1,0)$$

• si $z=0$, $t=1$ entonces $\left.\begin{array}{l} x+y=4 \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3 \quad y=1.$

$(3,1,0,1)$.

$B_U = \{(3,1,1,0),(3,1,0,1)\}$.

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^4$ generado por $\{(1,1,1,1),(1,2,3,3)\}$ y $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{Q}^4 \text{ tq } x+y-z-t=0\}$. Calcular una base de $U+W$.

-D-

• Vamos a calcular una base de W. Como W es un subespacio de $\mathbb{Q}^4$ que viene dado por una ecuación L.I entonces $\dim(W)=4-1=3$.

$$x=-y+z+t. \qquad \begin{array}{l} y=1,\ z=0,\ t=0 \Rightarrow x=-1 \\ y=0,\ z=1,\ t=0 \Rightarrow x=1 \\ y=0,\ z=0,\ t=1 \Rightarrow x=1. \end{array}$$

$B_W=\{(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$.

• $U+W = \langle \{(1,1,1,1),(1,2,3,3),(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\} \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_{U+W} = \{(1,1,1,1),(0,1,2,2),(0,0,-3,-3),(0,0,0,-1)\}.$

EJERCICIO

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_5^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$ definida por $f(x,y,z,t) = (x+y+z+t,\ x+y+z+2t,\ x+y+z)$. Calcular una base de $N(f)$.

-D-

$$N(f) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+y+z+2t=0 \\ x+y+z \quad\ \ =0 \end{array} \right\}.$$

Vamos a ver cuantas ecuaciones hay L.I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N(f) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ t=0 \end{array} \right\}. \quad \dim N(f) = 4-2 = 2.$$

$B_{N(f)} = \{(1,4,0,0),(1,0,4,0)\}.$

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(2,3,2),(1,3,3)\}$.

¿Es $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ una base de U?

-D-

$\{(2,3,2),(1,3,3)\}$ es una base de $U \Rightarrow \dim(U)=2$.

Por tanto, $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ es una base de U si y sólo si

$\{(1,1,5),(2,0,5)\} \subseteq U$ y $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ L.I.

Como $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}=2$ entonces $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ L.I.

Para ver si $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ es ó no un subconjunto de U, calculamos las ecuaciones cartesianas de U.

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 3 & y \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix}=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 3 & y \\ 2 & 3 & z \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3x+3y+3z=0$$

$$\Downarrow$$

$$x+y+z=0$$

$$U=\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \ / \ x+y+z=0\}$$

Como los vectores de $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ verifican la ecuación, entonces $\{(1,1,5),(2,0,5)\} \subseteq U$.

Por tanto $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ es una base de U.

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(1,1,1)\}$ y $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_5^3$ tq $x+y+z=0\}$. ¿Es $\mathbb{Z}_5^3 = U\oplus W$?

-D-

- $\dim(W)=3-1=2$. $B_W=\{(1,4,0),(1,0,4)\}$

$U+W=\langle\{(1,1,1),(1,4,0),(1,0,4)\}\rangle$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&4&0\\1&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&4\\0&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&4\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \dim(U+W)=3$$

$$\Downarrow$$

$$U+W=\mathbb{Z}_5^3$$

- Vamos a calcular las ecuaciones cartesianas de U.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&x\\1&y\\1&z\end{pmatrix}=1\Rightarrow \begin{vmatrix}1&x\\1&y\end{vmatrix}=0\Rightarrow 4x+y=0$$

$$\begin{vmatrix}1&x\\1&z\end{vmatrix}=0\Rightarrow 4x+z=0.$$

- $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_5^3$ tq $\left.\begin{matrix}4x+y=0\\4x+z=0\end{matrix}\right\}$.

- $U\cap W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{matrix}x+y+z=0\\4x+y=0\\4x+z=0\end{matrix}\right\}$.

Vamos a ver cuantas ecuaciones hay l.I.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\4&1&0&0\\4&0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&1&0\\0&1&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&1&0\\0&0&4&0\end{pmatrix}$$

Las tres ecuaciones son L.I $\Rightarrow \dim(U\cap W)=0\Rightarrow U\cap W=\{(0,0,0)\}$

Por tanto, $\mathbb{Z}_5^3=U\oplus W$

EJERCICIO

Sea $B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{Z}_5^3$ y sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ cuyas ecuaciones cartesianas respecto de la base B son $\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right\}$. ¿$(0,4,4)\in U$?

-D-

Vamos a calcular $(0,4,4)\equiv_B(\quad)$

$$a(1,1,1)+b(1,1,0)+c(1,0,0)=(0,4,4) \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} a+b+c & =0 \\ a+b & =4 \\ a & =4 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow a=4,\ b=0,\ c=1 \quad \Rightarrow (0,4,4)\equiv_B(4,0,1).$

Como $(4,0,1)$ verifica las dos ecuaciones entonces podemos afirmar que $(0,4,4)\in U$.

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por $\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1)\}$ y $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } x+y+z+t=0\}$. Calcular el cardinal de $U\cap W$.

-D-

· Vamos a calcular las ecuaciones cartesianas de U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_U=\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1)\}.$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}=3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & y-x \\ 1 & 1 & 1 & z-x \\ 1 & 1 & 1 & t-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y-x \\ 1 & 1 & z-x \\ 1 & 1 & t-x \end{vmatrix} = t-x+y-x-y+x-z+x =$$

$= 4z+t.$

$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } 4z+t=0\}.$

$U \cap W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ 4z+t=0 \end{array}\right\}$

Como las dos ecuaciones son L.I $\Rightarrow \dim(U \cap W) = 4-2=2.$

Por tanto, $U \cap W$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de dimension 2. Por consiguiente $U \cap W$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_5^2$ y en consecuencia $\#(U \cap W) = \# \mathbb{Z}_5^2 = 25.$

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$ generado por

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$

- Calcular las ecuaciones cartesianas de U.

-D-

. Vamos a calcular una base de U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \equiv_{B.\text{Canonica}} (1, 2, 3, 4)$

$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \equiv_{B\text{canonica}} (0, 4, 0, 3)$

- $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 4 & y \\ 3 & 0 & z \\ 4 & 3 & t \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 4 & y \\ 3 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 4z = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 4 & y \\ 4 & 3 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y + 4t = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} 3x + 4z = 0 \\ 2y + 4t = 0 \end{array}}$$

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5[x]_3$ generado por $\{2x^3 + 3x^2 + x + 4, x^3 + 4x^2 + 3x + 2\}$. Calcular las ecuaciones cartesianas de U respecto de la base $B = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1, 1\}$.

-D-

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_U = \{2x^3 + 3x^2 + x + 4\}$.

Vamos a calcular $2x^3 + 3x^2 + x + 4 \equiv_B (\qquad)$

$$a(x^3 + x^2 + x + 1) + b(x^2 + x + 1) + c(x + 1) + d \cdot 1 = 2x^3 + 3x^2 + x + 4.$$

$\Rightarrow ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b+c)x + a+b+c+d = 2x^3 + 3x^2 + x + 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= 2 \\ a+b &= 3 \\ a+b+c &= 1 \\ a+b+c+d &= 4 \end{aligned}\right| \Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=3,\ d=3$$

$$\Rightarrow 2x^3+3x^2+x+4 \equiv_{B} (2,1,3,3)$$

$$\text{rang}\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & y \\ 3 & z \\ 3 & t \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = 0 &\Rightarrow 4x+2y=0 \\ \begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & z \end{vmatrix} = 0 &\Rightarrow 2x+2z=0 \\ \begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & t \end{vmatrix} = 0 &\Rightarrow 2x+2t=0 \end{aligned}$$