TEMA 5 ESPACIOS VECTORIALES

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Diremos que un conjunto V tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ si verifica lo siguiente:

1) En V hay una operación $+$ de forma que $(V,+)$ es un grupo abeliano. Denotaremos por $\vec{0}$ al elemento neutro y por $-\vec{v}$ al inverso de $\vec{v}$.

2) Existe una aplicación $\mathbb{K}\times V \longrightarrow V$ verificando:
$$(a,\vec{v}) \longrightarrow a\vec{v}$$

i) $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ $\quad \forall a\in\mathbb{K}$ y $\forall \vec{u},\vec{v}\in V$

ii) $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ $\quad \forall a,b\in\mathbb{K}$ y $\forall \vec{v}\in V$.

iii) $a(b\vec{v}) = (ab)\cdot\vec{v}$ $\quad \forall a,b\in\mathbb{K}$ y $\forall v\in V$

iv) $1\cdot\vec{v} = \vec{v}$ $\quad \forall \vec{v}\in V$.

A los elementos de V los llamaremos vectores, a los elementos de $\mathbb{K}$ escalares y la aplicación $\mathbb{K}\times V \longrightarrow V$ es un producto por escalares.

Ejemplos de espacios vectoriales

1) Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, entonces $\mathbb{K}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ definiendo la suma como $(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n) = (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$ y definiendo el producto por escalares como $a\cdot(a_1,\dots,a_n) = (a\cdot a_1,\dots,a\cdot a_n)$.

2) Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, entonces $\mathbb{K}[x]_n = \{a(x) \in \mathbb{K}[x]$ tq $gr(a(x)) \leq n\}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ definiendo la suma $a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 + b_nx^n + \dots + b_1x + b_0 = (a_n+b_n)x^n + \dots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$ y el producto por escalares $a.(a_nx^n + \dots + a_1x + a_0) = (a.a_n)x^n + \dots + (a.a_1)x + aa_0$.

3) Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y $\{m,n\} \subseteq \mathbb{N}\setminus\{0\}$ entonces $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ con la operación suma de matrices y con producto escalar $a.\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.a_{11} & \dots & a.a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a.a_{m1} & \dots & a.a_{mn} \end{pmatrix}$.

EJEMPLO

$\mathbb{Z}_3^4$, $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$ y $\mathbb{Z}_3[x]_3$ son espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$. Además los tres tienen cardinal 81.

PROPOSICION

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $\{a,b\} \subseteq \mathbb{K}$, $\{\vec{u},\vec{v}\} \subseteq V$.

1) $0.\vec{v} = \vec{0}$
2) $a.\vec{0} = \vec{0}$
3) si $a.\vec{v} = \vec{0}$ entonces $a=0$ ó $\vec{u} = \vec{0}$
4) $-(a\vec{v}) = (-a)\vec{v} = a.(-\vec{v})$.
5) $a(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v}$
6) $(a-b)\vec{v} = a\vec{v} - b\vec{v}$
7) si $a\vec{u} = a\vec{v}$ y $a \neq 0$ entonces $\vec{u} = \vec{v}$
8) si $a\vec{v} = b.\vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$ entonces $a=b$.

Para no ser muy repetitivos en lo que sigue $\mathbb{V}$ denotara un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$

Un subconjunto no vacio $\mathbb{U}$ de $\mathbb{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si verifica lo siguiente:

1) si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{U}$ entonces $\vec{u} - \vec{v} \in \mathbb{U}$.

2) si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{u} \in \mathbb{U}$ entonces $a.\vec{u} \in \mathbb{U}$.

Proposicion

Si $\mathbb{U}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$, entonces $\mathbb{U}$ es tambien un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

EJERCICIO

Sabiendo que $\mathbb{Q}^3$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$. Demostrar que $\mathbb{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \text{ tq } x+y+z=0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^3$.

-D-

1) si $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{U}$ entonces $a_1+a_2+a_3=0$ y $b_1+b_2+b_3=0$. Como $(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3) =$
$= (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$ y $a_1-b_1+a_2-b_2+a_3-b_3 =$
$= a_1+a_2+a_3-(b_1+b_2+b_3) = 0-0=0$, entonces
$(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{U}$.

2) si $a \in \mathbb{Q}$ y $(x,y,z) \in \mathbb{U}$ entonces $x+y+z=0$. Como
$a(x,y,z) = (ax, ay, az)$ y $ax+ay+az = a(x+y+z) = a.0 = 0$.
Entonces $a(x,y,z) \in \mathbb{U}$.

EJERCICIO

¿Que cardinal tiene $U = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_3^2 \text{ tq } x+y=0\}$.

-D-

$U = \{(0,0), (1,2), (2,1)\}$. $\Rightarrow \# U = 3$.

PROPOSICION

La interseccion de subespacios vectoriales de V es un subespacio vectorial de V.

Sea S un subconjunto no vacio de V. el subespacio vectorial de V generado por S es la interseccion de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a S. A dicho subespacio lo denotaremos por $\langle S \rangle$. Notese que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S.

PROPOSICION

Si $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, entonces $\langle S \rangle = \{a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n \text{ tq } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}$.

EJERCICIO

Calcular todos los elemento del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_2^3$ generado por $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$.

-D-

$\langle \{(1,1,0), (0,1,1)\} \rangle = \{a(1,1,0) + b(0,1,1) \text{ tq } a, b \in \mathbb{Z}_2\} =$

$= \{ \underset{a=0\ b=0}{(0,0,0)}, \underset{a=0\ b=1}{(0,1,1)}, \underset{a=1\ b=0}{(1,1,0)}, \underset{a=1\ b=1}{(1,0,1)} \}$.

Si $U_1, U_2, \dots, U_n$ son subespacios vectoriales de V, entonces el subespacio vectorial suma de todos ellos es

$U_1 + \dots + U_n = \{\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_n \text{ tq } \vec{u}_1 \in U_1, \dots, \vec{u}_n \in U_n\}$.

PROPOSICION.

Si $U_1, \dots, U_n$ son subespacios vectoriales de V, entonces:

1) $U_1 + \dots + U_n = \langle U_1 \cup \dots \cup U_n \rangle$

2) si $U_1 = \langle S_1 \rangle, \dots, U_n = \langle S_n \rangle$, entonces

$$U_1 + \dots + U_n = \langle S_1 \cup \dots \cup S_n \rangle.$$

EJERCICIO

Sean U_1 y U_2 los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_3^3$ generados por $\{(1,2,0)\}$ y $\{(0,1,2)\}$ respectivamente. Calcular todos los elementos de $U_1 + U_2$.

-D-

$U_1 = \langle \{(1,2,0)\} \rangle$ y $U_2 = \langle \{(0,1,2)\} \rangle$, entonces

$U_1 + U_2 = \langle \{(1,2,0),(0,1,2)\} \rangle = \{a(1,2,0) + b(0,1,2) \text{ tq } a,b \in \mathbb{Z}_3\}$

$= \{\underset{a=0\,b=0}{(0,0,0)}, \underset{a=0\,b=1}{(0,1,2)}, \underset{a=0\,b=2}{(0,2,1)}, \underset{a=1\,b=0}{(1,2,0)}, \underset{a=1\,b=1}{(1,0,2)}, \underset{a=1\,b=2}{(1,1,1)},$

$\underset{a=2\,b=0}{(2,1,0)}, \underset{a=2\,b=1}{(2,2,2)}, \underset{a=2\,b=2}{(2,0,1)}\}$.

Sean U y W subespacios vectoriales de V. Diremos que V es suma directa de U y W, y lo denotaremos $V = U \oplus W$, si todo vector de V se puede poner de forma única como suma de un vector de U y un vector de W. En dicho caso diremos que los subespacios U y W son complementarios.

PROPOSICION

Sean U y W subespacios vectoriales de V. Entonces $V = U \oplus W$ si y solo si $V = U + W$ y $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

EJERCICIO

Sean $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x+y=0\}$ y $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x-y=0\}$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$. Demostrar que $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

-D-

- Veamos que $\mathbb{R}^2 = U + W$. Para ello deberemos de probar que si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces existen $\vec{u} \in U$ y $\vec{w} \in W$ tq $(x,y) = \vec{u} + \vec{w}$.

Nótese que los elementos de U son de la forma $(a,-a)$ tq $a \in \mathbb{R}$ y que los elementos de W son de la forma (b,b) tq $b \in \mathbb{R}$.

$$(x,y) = (a,-a) + (b,b) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=x \\ -a+b=y \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{x+y}{2} \qquad a = \frac{x-y}{2}$$

$$(x,y) = \underbrace{\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)}_{\in U} + \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in W}.$$

- Veamos que $U \cap W = \{(0,0)\}$. En efecto, si $(x,y) \in U \cap W$ entonces

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0 \quad y=0.$$

Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ es linealmente dependiente si existe $(a_1, \dots, a_n) \in K^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tq $a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$. En caso contrario diremos que los vectores son linealmente independientes.

EJERCICIO

¿Son los vectores $(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ L.I.?

-D-

$a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow$

$$(a+c, a+b, b+c) = (0,0,0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \quad +c = 0 \\ a+b \quad = 0 \\ \quad b+c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=b=c=0.$$

Por tanto, los vectores son L.I.

EJERCICIO

¿Son los vectores $(2,3,4)$ y $(4,1,3)$ de $\mathbb{Z}_5^3$ L.I?

-D-

$a(2,3,4) + b(4,1,3) = (0,0,0) \Rightarrow (2a+4b, 3a+b, 4a+3b) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+4b=0 \\ 3a+b=0 \\ 4a+3b=0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ (A la segunda ecuación le sumo la primera y a la tercera ecuación le sumo la primera multiplicada por 3) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+4b=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+4b=0$

$\Rightarrow (a=0$ y $b=0)$ ó $(a=1, b=2)$ ó $(a=2$ y $b=4)$ ó $(a=3$ y $b=1)$ ó $(a=4$ y $b=3)$. Por tanto los vectores no son L.I.

PROPOSICION

Sea S un subconjunto de V.

1) S es L.D si y sólo si existe $\vec{v} \in S$ tq $\vec{v} \in \langle S \setminus \{\vec{v}\} \rangle$.

2) si $\vec{0} \in S$ entonces S es L.D.

3) si S es L.D y $\vec{v} \in V$ entonces $S \cup \{\vec{v}\}$ es L.D.

4) si S es L.I y $\vec{v} \in S$ entonces $S \setminus \{\vec{v}\}$ es L.I.

- Una base de V es un subconjunto B de V que verifica las siguientes condiciones:

  1) B es L.I.

  2) $V = \langle B \rangle$.

EJERCICIO

Demostrar que $B = \{(1,2),(1,3)\}$ es una base de $\mathbb{Z}_5^2$.

-D-

1) Veamos que B es L.I.

$$a(1,2)+b(1,3)=(0,0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ 2a+3b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (E_2+3E_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=0 .$$

2) Veamos que $\mathbb{Z}_5^2 = \langle B \rangle$. Es claro que $\langle B \rangle \subseteq \mathbb{Z}_5^2$. Veamos que $\mathbb{Z}_5^2 \subseteq \langle B \rangle$. Recuérdese que $\langle B \rangle = \{a(1,2)+b(1,3) \text{ tq } a,b \in \mathbb{Z}_5\}$.

Para demostrar que $\mathbb{Z}_5^2 \subseteq \langle B \rangle$ tendremos que ver que si $(x,y) \in \mathbb{Z}_5^2$ entonces existe $a,b \in \mathbb{Z}_5$ tq $(x,y) = a(1,2)+b(1,3)$.

si $(x,y)=a(1,2)+b(1,3) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=x \\ 2a+3b=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=x \\ b=y+3x \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow b=y+3x$ y $a=x-b=x-y-3x=3x+4y$.

si $(x,y)\in \mathbb{Z}_5^2$ entonces $3x+4y$, $3x+y\in \mathbb{Z}_5$ y

$(x,y)=(3x+4y)\cdot(1,2)+(3x+y)\cdot(1,3)$. Por tanto,

$(x,y)\in \langle B\rangle$.

PROPOSICION

si $B=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ es una base de V y $\vec{v}\in V$ entonces existe un unico $(a_1,\dots,a_n)\in \mathbb{K}^n$ tq $\vec{v}=a_1\vec{v}_1+\dots+a_n\vec{v}_n$.

- A la n-tupla $(a_1,\dots,a_n)$ de la proposicion anterior se le llama las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B y lo denotaremos $\vec{v}\equiv_B(a_1,\dots,a_n)$.

EJERCICIO

Dada la base $B=\{(1,2),(1,3)\}$ de $\mathbb{Z}_5^2$. Calcular las coordenadas del vector $(2,4)$ respecto de la base B.

-D-

$a(1,2)+b(1,3)=(2,4) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=2 \\ 2a+3b=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=2 \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow b=0$ y $a=2$. Por tanto $(2,4)\equiv_B(2,0)$.

TEOREMA DE LA BASE

Todo espacio vectorial V distinto de $\{\vec{0}\}$ tiene al menos una base. Además, todas las bases de V tienen el mismo cardinal.

- Al cardinal de una base de V lo llamaremos dimensión de V y lo denotaremos $\dim(V)$. Por definición $\dim(\{\vec{0}\})=0$.

EJEMPLO

En un ejercicio anterior hemos visto que $\{(1,2),(1,3)\}$ es una base de $\mathbb{Z}_5^2$. Por tanto $\dim(\mathbb{Z}_5^2)=2$.

PROPOSICIÓN

1) $\dim(\mathbb{K}^n)=n$ y además $\{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$. A dicha base la llamaremos base canónica.

2) $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{K}))=m.n$ y además $\left\{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. A dicha base la llamaremos base canónica.

3) $\dim(\mathbb{K}[x]_n)=n+1$ y además $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ es una base de $\mathbb{K}[x]_n$. A dicha base la llamaremos base canónica.

EJEMPLO

1) $\dim(\mathbb{Z}_5^4)=4$ y $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{Z}_5^4$.

2) $\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)) = 4$ y $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$.

3) $\dim(\mathbb{Z}_5[x]_3) = 4$ y $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $\mathbb{Z}_5[x]_3$.

TEOREMA DE AMPLIACION DE LA BASE

Si $\dim(V) = n$ y B es un conjunto de vectores L.I de V entonces $\# B \leq n$. Además, existe $A \subseteq V$ tq $A \cup B$ es una base de V.

COROLARIO

Si $\dim(V) = n$, entonces n vectores L.I de V son una base de V.

EJERCICIO

¿ Es $\{(1,2,1), (1,1,1), (1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{Z}_5^3$?

-D-

$\dim(\mathbb{Z}_5^3) = 3$ y por tanto el conjunto es una base si y solo si los vectores son L.I.

$$a(1,2,1) + b(1,1,1) + c(1,0,0) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 2a+b \quad\;\; =0 \\ a+b \quad\;\;\; =0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{Resolvemos el sistema}) \Rightarrow a=b=c=0.$$

Por tanto los vectores son L.I y en consecuencia el conjunto es una base.

EJERCICIO

Amplía $\{(1,1,1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$.

-D-

Tengo que añadir dos vectores de forma que los tres sean L.I. Hay dos vectores en la base canónica que seguro que me sirven. Tomo por ejemplo $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$. Veamos que $\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ es una base o no.

$$a(1,1,1)+b(1,0,0)+c(0,1,0)=(0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b \quad\; = 0 \\ a \quad +c = 0 \\ a \qquad\;\; = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=b=c=0$$

Por tanto $\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO

Demostrar que $B=\{x^2+x,\ x^2+1,\ x+1\}$ es una base de $\mathbb{R}[x]_2$ y calcular las coordenadas del vector $3x^2+2x+3$ respecto de la base B.

-D-

Como $\dim(\mathbb{R}[x]_2)=3$, entonces para probar que B es una base bastará ver que B es L.I. $a(x^2+x)+b(x^2+1)+c(x+1)=0$

$$\Rightarrow (a+b)x^2+(a+c)x+b+c=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b \quad\; = 0 \\ a \quad +c = 0 \\ \quad b+c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=b=c=0.$$

Por tanto B es una base.

$$a(x^2+x)+b(x^2+1)+c(x+1)=3x^2+2x+3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b \quad\; = 3 \\ a \quad +c = 2 \\ \quad b+c = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=1,\ b=2,\ c=1. \text{ Por tanto } 3x^2+2x+3 \equiv_B (1,2,1).$$

Métodos para calcular una base de un subespacio vectorial a partir de un sistema de generadores de dicho subespacio

Primer metodo: Se quitan los vectores que son combinacion lineal de los anteriores. Los vectores que quedan son una base del subespacio.

Segundo metodo: Triangularizando la matriz cuyas filas son los vectores del sistema de generadores del subespacio. Las filas distintas de cero de la matriz resultante son una base del subespacio.

EJERCICIO

Utilizando el primer método calcular una base del subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,2,1),(2,4,2),(1,3,2),(2,5,3)\}$.

-D-

$(2,4,2)=2(1,2,1)$ luego suprimo $(2,4,2)$.

$a(1,2,1)=(1,3,2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \\ 2a=3 \\ a=2 \end{array}\right\}$ No tiene solucion y por tanto

$(1,3,2)$ no es combinacion lineal de $(1,2,1)$.

$$a(1,2,1)+b(1,3,2)=(2,5,3) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=2 \\ 2a+3b=5 \\ a+2b=3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=b=1.$$

Por tanto $(2,5,3)$ es combinacion lineal de $(1,2,1)$ y $(1,3,2)$.

En consecuencia $\{(1,2,1),(1,3,2)\}$ es una base de U.

EJERCICIO

Utilizando el segundo método, calcular una base del subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,2,1),(2,4,2),(1,3,2),(2,5,3)\}$

-D-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2+(-2)F_1 \\ F_3+(-1)F_1 \\ F_4+(-2)F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3+(-1)F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una base de U es $\{(1,2,1),(0,1,1)\}$.

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por $\{(1,2,3,4),(2,1,3,2),(1,2,1,1),(4,0,2,2)\}$. Calcular una base de U.

-D-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_U = \{(1,2,3,4),(0,2,2,4),(0,0,3,2)\}$.

PROPOSICION

Sea U un subespacio vectorial de V. Entonces $U=V$ si y solo si $\dim(U) = \dim(V)$.

EJERCICIO

Sean $U=\langle\{(1,1,1),(1,2,1)\}\rangle$ y $W=\langle\{(1,2,3),(0,0,2)\}\rangle$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$. ¿ Es $\mathbb{Z}_5^3=U+W$?

-D-

$U+W=\langle\{(1,1,1),(1,2,1),(1,2,3),(0,0,2)\}\rangle$.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\\0&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$B_{U+W}=\{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,2)\}$. Por tanto $U+W$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ y $\dim(U+W)=\dim(\mathbb{Z}_5^3)$.
Aplicando la proposicion anterior $U+W=\mathbb{Z}_5^3$.

Método para calcular el complementario de un subespacio

Sea U un subespacio vectorial de V. Para calcular un complementario de U haremos lo siguiente:

1) Calculamos una base B_U de U.

2) Ampliamos B_U a una base B de V.

3) $W=\langle B\setminus B_U\rangle$ es un complementario de U.

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^3$ generado por $\{(1,1,1),(2,1,3),(4,3,5)\}$. Calcular un complementario de U.

-D-

Vamos a calcular una base de U. Para ello triangulizaremos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Una base de U es $B_U = \{(1,1,1), (0,-1,1)\}$. Ampliamos B_U a una base $B = \{(1,1,1), (0,-1,1), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{Q}^3$. Entonces $W = \langle \{(0,0,1)\} \rangle$ es un complementario de U.

EJERCICIO

Sean $B = \{(1,1,0), (1,2,1), (1,1,2)\}$ y $B' = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ dos base de $\mathbb{Z}_5^3$. Si las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B son $(1,2,3)$, calcular las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B'.

-D-

$$\vec{v} \equiv_B (1,2,3) \Rightarrow \vec{v} = 1\cdot(1,1,0) + 2(1,2,1) + 3(1,1,2) =$$

$$= (1,1,0) + (2,4,2) + (3,3,1) = (1,3,3).$$

$$a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (1,3,3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b = 1 \\ a +c = 3 \\ b+c = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=3,\ b=3,\ c=0$$

Por tanto $\vec{v} \equiv_{B'} (3,3,0)$.

Ecuaciones del Cambio de base

Sean $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ y $B' = \{\vec{v}_1', \ldots, \vec{v}_n'\}$ dos bases de V.

Supongamos que $\vec{v}_1 \equiv_{B'} (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, \vec{v}_n \equiv_{B'} (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$.

Sea $\vec{x} \in V$ y supongamos que $\vec{x} \equiv_B (x_1, \ldots, x_n)$ y $\vec{x} \equiv_{B'} (x_1', \ldots, x_n')$.

Entonces $(x_1', \ldots, x_n') = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

A dicha expresion se le llama expresion matricial del cambio de base de B a B'. A la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se le denomina matriz del cambio de base de B a B'. Dicha matriz es siempre regular y su inversa es justamente la matriz del cambio de base de B' a B.

De la expresion matricial del cambio de base de B a B' deducimos que

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{1n}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}}$$

y a dicha expresion se le llama ecuaciones del cambio de base de B a B'.

EJERCICIO

Sean $B=\{(1,1,0),(1,2,1),(1,1,2)\}$ y $B'=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ dos bases de $\mathbb{Z}_5^3$.

a) Calcular las ecuaciones del cambio de base de B a B'.

b) Si las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B son $(1,2,3)$, calcula las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B'.

-D-

a) Calculamos las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B'.

$$(1,1,0) \equiv_{B'} (1,0,0)$$

$$(1,2,1) \equiv_{B'} (1,0,1)$$

$$(1,1,2) \equiv_{B'} (0,1,1).$$

Entonces la expresion matricial del cambio de base de B a B' es

$$(x_1', x_2', x_3') = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto las ecuaciones del cambio de base de B a B' son

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_2 + x_3 \end{aligned}\right\}$$

b)

$$(1,2,3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (3,3,0)$$

Por tanto $\vec{v} \equiv_{B'} (3,3,0)$.

Ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial.

Sea U un subespacio vectorial de V, $B=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ una base de V y $B_U=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_r\}$ una base de U. Supongamos que $\vec{u}_1 \equiv_B (a_{11},\dots,a_{1n}),\dots,\vec{u}_r \equiv_B (a_{r1},\dots,a_{rn})$. Sea $\vec{x}\in V$ y supongamos que $\vec{x}\equiv_B (x_1,\dots,x_n)$. Entonces $\vec{x}\in U$ si y solo si existen $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in K$ tq $(x_1,\dots,x_n)=\lambda_1(a_{11},\dots,a_{1n})+\dots$ $\dots+\lambda_r(a_{r1},\dots,a_{rn})$. Por tanto $\vec{x}\in U$ si y solo si

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}\lambda_1+\dots+a_{r1}\lambda_r \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n = a_{1n}\lambda_1+\dots+a_{rn}\lambda_r \end{array}\right\} \text{ para algún } \lambda_1,\dots,\lambda_r\in K.$$

Ecuaciones paramétricas de U respecto de la base B.

NOTA

Cuando nos den ó nos pidan las ecuaciones paramétricas de un subespacio y no nos digan respecto de qué base supondremos que es respecto de la base canónica.

EJERCICIO

Sea $B=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ una base de $\mathbb{Q}^3$ y U el subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^3$ generado por $\{(1,2,1),(1,3,2),(2,5,3)\}$. Calcular las ecuaciones paramétricas de U respecto de la base B.

-D-

calculamos una base de U. Para ello triangularizamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base de U es $B_U = \{(1,2,1), (0,1,1)\}$.

Calculamos las coordenadas de los vectores ~~de la base~~ de B_U respecto de la base B.

$(1,2,1) \equiv_B (1,0,1)$ $\qquad$ $(0,1,1) \equiv_B (0,0,1)$.

Entonces $(x,y,z) = \lambda(1,0,1) + \mu(0,0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \end{array}\right\}$$

EJERCICIO

Calcular las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial U de $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(2,3,5), (3,1,4), (2,3,1)\}$.

-D-

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_U = \{(2,3,5), (0,0,3)\}.$$

$B_{canonica} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$(2,3,5) \equiv_{B_{canonica}} (2,3,5)$ $\qquad$ $(0,0,3) \equiv_{B_{can}} (0,0,3)$

$(x,y,z) = \lambda(2,3,5) + \mu(0,0,3)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 5\lambda + 3\mu \end{array}\right\}.$$