TEMA 6

Espacios Vectoriales.

Ejercicio 1. Sean $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (2,0,1)$ y $v_4 = (1,0,2)$ cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$. Comprueba que son linealmente dependientes, y di cuáles de ellos son combinación lineal del resto.

Ejercicio 2. Estudia si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes:

En $M_2(\mathbb{R})$:

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,
2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

En $\mathbb{R}_2[x]$ (polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2):

1. $\{x + x^2,\ -x - x^2\}$,
2. $\{1 + 2x + 3x^2,\ 1 - x + x^2,\ 1 + x - x^2,\ x + 2x^2\}$,
3. $\{x + 2x^2,\ 1 + x + 2x^2,\ 2 + 2x + x^2\}$.

Encuentra en todos los casos un subconjunto con el mayor número posible de vectores linealmente independientes.

Ejercicio 3. Determina si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

1. En $\mathbb{Q}^4$, $(\mathbb{Z}_2)^4$, $(\mathbb{Z}_3)^4$, $(\mathbb{Z}_5)^4$ y $(\mathbb{Z}_7)^4$: $(3,-1,-4,0)$, $(0,1,8,-1)$, $(3,-1,5,4)$, $(0,0,3,3)$.
2. $1 - x$ y x en $\mathbb{R}_2[x]$.
3. En $\mathbb{Q}_3[x]$ y $(\mathbb{Z}_5)_4[x]$: $-x$, $x^2 - 2x$, $3x + 5x^2$.
4. En $(\mathbb{Z}_3)_3[x]$: $2x$, $x^3 - 3$, $1 + x - 4x^3$, $x^3 + 18x - 9$.
5. En $M_2(\mathbb{Z}_7)$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. En un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, tenemos unos vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n, x$ cuyas coordenadas en una cierta base vienen dadas a continuación.

1.
$$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1,0,1) \\ e_2 = (1,2,2) \\ e_3 = (0,1,1) \end{array}\right\} x = (1,0,2)$$

2.
$$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1,1,1,1) \\ e_2 = (0,1,1,1) \\ e_3 = (0,0,1,1) \\ e_4 = (0,0,0,1) \end{array}\right\} x = (1,0,1,0)$$

Comprueba que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base en cada uno de los casos, y halla las coordenadas del vector x en dicha base.

Da también las matrices de cambio de base.

Ejercicio 5. Para las bases de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(4,0,7);\ (2,1,1);\ (3,1,3)\}; \quad B' = \{(1,0,2);\ (4,1,5);\ (1,0,3)\}$$

calcula las matrices de cambio de base.

Ejercicio 6. Sea $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ con

$$w_1 = (1,0,0,-1), w_2 = (0,1,-1,0), w_3 = (0,1,0,-1), w_4 = (0,1,1,1).$$

1. Demuestra que B es una base de $(\mathbb{Z}_{11})^4$.
2. Sea $x = -3(1,2,0,0) + 2(-1,0,1,1) + (0,0,-2,1) - 2(-1,0,-1,0)$. Calcula las coordenadas de x respecto de la base B.
3. Calcula las matrices de cambio de base $M_{B_C \to B}$ y $M_{B \to B_C}$.
4. Si $B' = \{(1,2,0,0), (-1,0,1,1), (0,0,-2,1), (-1,0,-1,0)\}$, demuestra que B' es una base de $(\mathbb{Z}_{11})^4$ y calcula $M_{B \to B'}$.

Ejercicio 7. Estudia si son o no subespacios los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

1. $W = \{(a,b,a+b) \in \mathbb{R}^3 /\ \ a,b \in \mathbb{R}\}$
2. $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 /\ \ a+b+c = 1\}$
3. $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 /\ \ a^2+b^2+c^2 = 0\}$
4. $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 /\ \ a^2-b^2 = 0\}$

Ejercicio 8. Determina si los siguientes conjuntos de $M_n(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales:

1. $H = \{A \in M_n(\mathbb{R}) /\ \ A \text{ tiene inversa }\}$
2. $H = \{A \in M_n(\mathbb{R}) /\ \ A = -2A^t\}$

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos damos un espacio vectorial V y un subconjunto suyo H. Determina en que casos es H un subespacio vectorial de V.

1. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x,y) \mid y \geq 0\}$
2. $V = \mathbb{R}^3$; $H =$ el plano xy
3. $V = M_n(\mathbb{Z}_5)$; $H = \{D \in M_n(\mathbb{Z}_5) \mid D \text{ es diagonal}\}$
4. $V = M_n(\mathbb{Z}_7)$; $H = \{T \in M_n(\mathbb{Z}_7) \mid T \text{ es triangular superior}\}$
5. $V = M_n(\mathbb{Q})$; $H = \{S \in M_n(\mathbb{Q}) \mid S \text{ es simétrica}\}$
6. $V = M_2(\mathbb{Z}_5)$; $H = \left\{A \in M_2(\mathbb{Z}_5) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & c \end{pmatrix}\right\}$.
7. $V = M_2(\mathbb{Z}_2)$; $H = \left\{A \in M_2(\mathbb{Z}_2) \mid A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
8. $V = M_2(\mathbb{R})$; $H = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
9. $V = M_2(\mathbb{Z}_{11})$; $H = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_{11}) \mid \text{rango}(A) = 1\}$
10. $V = (\mathbb{Z}_5)_4[x]$; $H = \{p \in (\mathbb{Z}_5)_4[x] \mid gr(p) = 4\}$.
11. $V = \mathbb{Q}_4[x]$; $H = \{p \in \mathbb{Q}_4[x] \mid p(0) = 0\}$.
12. $V = (\mathbb{Z}_2)_n[x]$; $H = \{p \in (\mathbb{Z}_2)_n[x] \mid p(0) = 1\}$.

Ejercicio 10. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{Q})$ y sea $H_1 = \{x \in M_{n\times 1}(\mathbb{Q}) \mid Ax = 0\}$. Comprueba que H_1 es un subespacio de $M_{n\times 1}(\mathbb{Q})$.

Sea $H_2 = \{x \in M_{n\times 1}(\mathbb{Q}) \mid Ax \neq 0\}$; muestra que H_2 no es un subespacio de $M_{n\times 1}(\mathbb{Q})$.

Ejercicio 11. Halla las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^3$ generado por los vectores $(1,1,0),(0,1,1)$.

Ejercicio 12. Completa $\{(1,1,0),(2,1,1)\}$ a una base de $\mathbb{Q}^3$.

Ejercicio 13. Calcula las ecuaciones cartesianas y paramétricas del subespacio $U_1+U_2 \subseteq (\mathbb{Z}_7)^3$, donde

$$U_1 = L\big((1,1,0),(2,0,0)\big), \quad U_2 = L\big((0,0,1),(2,1,3)\big).$$

¿Es $(\mathbb{Z}_7)^3 = U_1 \oplus U_2$?

Ejercicio 14. Dada la base $B = \{(1,0,1,1);\ (0,1,1,0);\ (1,1,1,1);\ (0,1,0,1)\}$ de $(\mathbb{Z}_2)^4$, calcula las coordenadas del vector $(0,0,0,1)$ en la base B.

Ejercicio 15. Para cada una de las siguientes parejas de subespacios de $\mathbb{R}^4$ calcula $U \cap W$ y $U+W$.

1.
$$U = \{(a,b,-b,a)/\ a,b \in \mathbb{R}\}$$
$$W = \{(a,b,0,c)/\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

2.
$$U \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \lambda + \mu \\ x_4 = \lambda + \mu + \gamma \end{cases}$$
$$W \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda + \mu + \gamma \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \lambda \end{cases}$$

3.
$$U = L((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1))$$
$$W \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 16. Sea U el subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^3$ generado por los vectores $(2,3,1)$ y $(1,4,3)$, y W el subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^3$ de ecuaciones $\left.\begin{matrix} x+2y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{matrix}\right\}$.

Calcula unas ecuaciones cartesianas o implícitas del subespacio $U+W$.

Ejercicio 17. Encuentra la dimensión del subespacio generado por los siguientes conjuntos de vectores:

1. $\{(1,2),(0,1),(-1,3)\}$ en $(\mathbb{Z}_5)^2$
2. $\{1+x+x^2, 2-x^2+x^3, 1-x-2x^2+x^3, 1+3x+4x^2-x^3\}$ en $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ejercicio 18. Sea $V = (\mathbb{Z}_3)^4$ y sean los subespacios vectoriales

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in V \;\middle|\; \begin{matrix} x-y-z=0 \\ t=0 \end{matrix} \right\} \qquad W = \langle (1,1,1,1),(0,1,0,1) \rangle.$$

1. ¿Cuántos elementos hay en W?
2. Calcula bases de $U+W$ y $U \cap W$.
3. Calcula las ecuaciones paramétricas y cartesianas (o implícitas) de $U+W$ y $U \cap W$.

Ejercicio 19. En el conjunto $\mathbb{C}^n$ se considera la suma usual y se define el producto por números reales

$$\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots, \lambda z_n)$$

Estudia si $\mathbb{C}^n$ con estas operaciones tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 20. En el conjunto $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios en una indeterminada de grado menor o igual que n se considera la suma usual y se define el producto por escalares reales

$$ap(x) = \begin{cases} 0 & si \quad a \neq 1 \\ p(x) & si \quad a = 1 \end{cases}$$

Estudia si $\mathbb{R}_n[x]$ con estas operaciones tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 21. Demuestra las siguientes afirmaciones:

1. Un conjunto de vectores que tiene dos vectores iguales es linealmente dependiente.
2. Un conjunto de vectores en el que un vector es múltiplo de otro es linealmente dependiente.

Ejercicio 22. Determina si los siguientes conjuntos de vectores generan al espacio vectorial dado:

1. En $(\mathbb{Z}_5)_2[x]$: $1+4x$, $3+4x^2$.
2. En $(\mathbb{Z}_5)_2[x]$: $1+4x$, $3+4x^2$, x.
3. En $M_2(\mathbb{Z}_7)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 23. Prueba que el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ puede ser generada por matrices regulares.

Ejercicio 24. Los siguientes subconjuntos y familias de vectores de algunos espacios vectoriales son subespacios y bases de estos. Verifica la verdad o falsedad de esta afirmación en los ejemplos siguientes:

1. $\{(a,b) \in (\mathbb{Z}_3)^2 \mid b = 1\}; \{(2,1)\}$
2. $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid (x-1)$ divide a $p(x)\}; \{x-1, x^2-1\}$.

Ejercicio 25. ¿Cuántas bases hay en $(\mathbb{Z}_2)^2$?

Ejercicio 26. En el espacio de las matrices simétricas de orden 2, consideramos las bases

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Calcula las matrices de cambio de base entre ambas.
2. Calcula las coordenadas de la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
en las bases B y B'.

Ejercicio 27. Sea $V = (\mathbb{Z}_7)^4$, y sean U_1 y U_2 los siguientes subespacios vectoriales de V:

$$\begin{aligned} U_1 &= L((1,4,4,0),(2,2,1,2),(0,0,3,6)) \\ U_2 &\equiv \{2x+5y+t=0 \end{aligned}$$

1. Calcula una base de $U_1 \cap U_2$.
2. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $(1,1,0,0)$ en la base anterior?

Ejercicio 28. Determina si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_n[x]$:

1. $P_1 = \{a + bx^2 + cx^3 \in \mathbb{R}_n[x] / \; a,b,c \in \mathbb{R}\}$
2. $P_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] / \; p(x) + p(-x) = 0\}$
3. $P_3 = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] / \; p(x) + p'(x) = 0\}$

Ejercicio 29. Para los subespacios de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$U=\left\{A\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})/\ A\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=A\right\}$$

$$W=\left\{A\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})/\ A\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=A\right\}$$

calcula $U\cap W$ y $U+W$.

Ejercicio 30.

1. Calcula la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\{(b,0,0,0),(0,a,1,1+a),(a,1+a,1+a,2+2a),(b,0,0,1-a)\}$$

según los valores de a y b.

2. ¿Cuál es el número máximo de vectores linealmente independientes en el conjunto

$$\{(b,0,a,b),(0,a,1+a,0),(0,1,1+a,0),(0,1+a,2+2a,1-a)\}$$

según los valores de a y b?

Preguntas test

Ejercicio 31. En $(\mathbb{Z}_7)^4$ consideramos los subespacios vectoriales de ecuaciones

$$V_1=\{x+y+6z+6t=0 \ \text{ y } V_2=\begin{cases}x+6z+t=0\\ \quad y+5t=0\end{cases}$$

Una base de $V_1\cap V_2$ es:

a) $\{(1,1,5,4),(3,3,1,5)\}$

b) $\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,6)\}$

c) $\{(1,0,1,0),(0,1,4,4)\}$

d) $\{(1,0,1,0),(1,1,5,4),(0,0,0,0)\}$

Ejercicio 32. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$. Unas ecuaciones implícitas para U son:

a) $x_1+x_2+x_3+x_4=0$

b) $\begin{cases}x_1+x_3=1\\ x_1+x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_3+x_4=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}x_1+x_3=1\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$

Ejercicio 33. Sean $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ y $B'=\{v_1',v_2',v_3'\}$ donde $v_1'=v_1$, $v_2'=v_1+v_2$, y $v_3'=v_1+v_2+v_3$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Si las coordenadas de x respecto de la base B' son $(1,-1,1)$, entonces las coordenadas de x respecto de B son

a) $(1,0,1)$ b) $(1,0,-1)$ c) $(1,2,-1)$ d) $(0,0,1)$

Ejercicio 34. Sean $B_1=\{u_1,u_2\}$ y $B_2=\{v_1,v_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$ tales que $v_1=-2u_1-u_2$ y $v_2=5u_1+2u_2$. Si w es un vector cuyas coordenadas respecto de B_1 son (a,b), entonces las coordenadas de w respecto de B_2 son

a) $(2a-5b,a-2b)$ b) $(3a,2a-b)$ c) $(3a+b,a-3b)$ d) $(b,-a)$

Ejercicio 35. Consideremos los siguientes subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^4$:

$$U_1 = \langle (1,1,2,0),(3,1,4,1)\rangle; \qquad U_2 = \langle (0,1,0,3),(1,0,1,3)\rangle.$$

Una base de $U_1 \cap U_2$ es

a) $\{(2,0,2,1)\}$

b) $\{(1,1,2,0),(3,1,4,1),(0,1,0,3),(1,0,1,3)\}$

c) $\{(1,1,2,0)\}$

d) $\{(2,0,2,1),(1,0,1,3)\}$

Ejercicio 36. Sea $V = \{a(x) \in \mathbb{Z}_3[x] \mid \text{el grado de } a(x) \text{ es menor o igual que } 2\}$. Entonces

a) V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$ de dimensión 3.

b) V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$ de dimensión 2.

c) V no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$.

d) V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$ de dimensión infinita.

Ejercicio 37. Sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$. Un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$ que verifica que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ es

a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\}$.

b) $W = \{0\}$.

c) $W = \mathbb{R}^3$.

d) $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{smallmatrix} x-y & =0 \\ x-z & =0 \end{smallmatrix}\right\}$.

Ejercicio 38. Sea $V = \{A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid \det(A) = 0\}$. Entonces

a) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 4.

b) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 0.

c) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 3.

d) V no es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

Ejercicio 39. Consideremos los subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^4$ definidos por las ecuaciones

$$U_1 \equiv \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x+y+4z+t=0 \end{cases} \qquad U_2 \equiv \begin{cases} y+3t=0 \\ x+z+3t=0 \end{cases}$$

Una base de $U_1 + U_2$ es

a) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3),(0,1,0,0)\}$

b) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3),(0,0,1,3)\}$

c) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3),(1,1,1,3)\}$

d) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3)\}$

Ejercicio 40. Sean $B = \{v_1,v_2,v_3\}$ y $B' = \{v_1',v_2',v_3'\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ tales que $v_1' = v_1 + 2v_2 + v_3$, $v_2' = -v_2 + v_3$ y $v_3' = -v_1 + v_2 - 5v_3$. Si las coordenadas de x respecto de la base B son $(1,-2,3)$, entonces las coordenadas de x respecto de B' son:

a) $(3,10,2)$ b) $(-2,7,-16)$ c) $(0,5,-18)$ d) $(-9,4,2)$

Ejercicio 41. Dados U y W subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$ con $\dim U = 3$ y $\dim W = 3$, indica cuál de las siguientes situaciones no es posible.

a) $\mathrm{dim}\,(U+W)=6$ y $\mathrm{dim}\,(U\cap W)=0$

b) $\mathrm{dim}\,(U+W)=5$ y $\mathrm{dim}\,(U\cap W)=1$

c) $\mathrm{dim}\,(U+W)=4$ y $\mathrm{dim}\,(U\cap W)=3$

d) $\mathrm{dim}\,(U+W)=3$ y $\mathrm{dim}\,(U\cap W)=1$

Ejercicio 42. Sea $B=\{(1,1),(1,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$, y x el vector cuyas coordenadas respecto de B son $(3,2)$. Entonces x es igual a:

a) $(2,1)$ b) $(7,-4)$ c) $(4,3)$ d) $(-3,2)$

Ejercicio 43. En $\mathbb{Q}^4$ se considera el subespacio vectorial generado por $\{(1,-1,1,1),(1,1,-1,1)\}$. Di cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones corresponde a unas ecuaciones cartesianas de dicho subespacio.

a) $x+y+z-t=0$.

b) $\left\{\begin{array}{l} x+y-z+t=0\\ x+y+z-t=0\end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x+2y+t=0\\ y+z=0\end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} x-y-z-t=0\\ x-t=0\end{array}\right.$

Ejercicio 44. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales

$$U=\{(x,y,z)|x-y+3z=0\} \qquad W=L[(3,0,-1),(2,-1,-1)]$$

Una base de $U\cap W$ es

a) $\{(1,1,0)\}$

b) $\{(5,-1,-2),(1,4,1)\}$

c) $\{(0,0,0)\}$

d) $\{(-1,2,1),(2,-2,-1)\}$

Ejercicio 45. Sean $u=(0,1,3,3)$, $v=(2,2,1,2)$ y $w=(3,4,2,2)$ vectores de $(\mathbb{Z}_5)^4$. El conjunto formado por los vectores $\{2u,v,4w,u+2v\}$

1. es una base de $(\mathbb{Z}_5)^4$.
2. es linealmente dependiente, pues el tercero es combinación lineal de los restantes.
3. es linealmente independiente, pues el tercero no es combinación lineal de los restantes.
4. genera un subespacio vectorial de dimensión 3.

Ejercicio 46. Sea U_1 el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^4$ generado por $\{(1,2,0,2);\ (0,1,4,0)\}$ y U_2 el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^4$ de ecuaciones $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 5t & = & 0\\ 3x & & & & & + & t & = & 0\end{array}\right.$. Una base de U_1+U_2 es

1. $\{(1,2,3,1);\ (2,0,2,5);\ (1,0,0,4)\}$.
2. $\{(1,2,3,1);\ (2,0,2,5)\}$.
3. $\{(1,0,0,0);\ (0,1,0,0);\ (0,0,1,0);\ (0,0,0,1)\}$.
4. $\{(1,0,0,4);\ (0,1,0,6);\ (1,1,0,3)\}$.

Ejercicio 47. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & - & 2z & = & 0\\ 4x & + & y & - & z & = & 0\end{array}\right.$

Entonces $\mathbb{R}^3=U\oplus V$

a) Si V es el subespacio generado por los vectores $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$.

b) Si V es el subespacio de ecuación $2x + 2y + z = 0$.

c) Si V es el subespacio generado por los vectores $(1, -2, 2)$, $(2, 1, 3)$.

d) Si V es el subespacio generado por $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 1)$.

Ejercicio 48. Sean en $\mathbb{R}^3$ los conjuntos $B_1 = \{(1, 0, 1);\ (0, 1, 1);\ (1, 1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, -1, 0);\ (2, 1, 1);\ (1, 1, 2)\}$. Entonces:

a) La matriz del cambio de base de B_2 a B_1 es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) La matriz del cambio de base de B_2 a B_1 es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

c) No existe matriz del cambio de base de B_2 a B_1.

d) La matriz del cambio de base de B_2 a B_1 es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 49. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$, y sea $U = \{B \in M_2(\mathbb{Z}_5) : A \cdot B = B \cdot A\}$. Entonces:

a) U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{Z}_5)$ de dimensión 2.

b) U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{Z}_5)$ de dimensión 1.

c) U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{Z}_5)$ de dimensión 3.

d) U no es subespacio vectorial.

Ejercicio 50. Dados U el subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^3$ generado por los vectores $(3, 1, 4)$ y $(4, 3, 2)$, y V el subespacio de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$, una base de $U + V$ es

a) $\{(1, 0, 0);\ (0, 1, 0);\ (0, 0, 1)\}$.

b) $\{(1, 2, 4);\ (4, 3, 2)\}$.

c) $\{(1, 1, 2)\}$.

d) $\{(4, 2, 1);\ (2, 3, 0)\}$.

Ejercicio 51. Dados los siguientes vectores $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 0, 1)$, $u_4 = (0, 0, 1, 1)$ pertenecientes a $(\mathbb{Z}_2)^4$

(a) Son linealmente independientes.

(b) Son linealmente dependientes, pues el segundo es combinación lineal de los restantes.

(c) Generan un subespacio de dimensión 2.

(d) Son linealmente dependientes, pues el tercero es combinación lineal de los restantes.

Ejercicio 52. Sea $B = \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$. Las coordenadas del vector $(1, 1, 0, 0)$ en la base B son:

(a) $(0, 1, 1, 0)$.

(b) $(1, 1, 0, 0)$.

(c) $(1, 1, 1, 1)$.

(d) $(1, 1, 0, 1)$.

Ejercicio 53. Sean $U_1 = L[(1, 3, 1), (3, 4, 2)]$ y $U_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$ dos subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^3$. Entonces:

(a) $(\mathbb{Z}_5)^3 = U_1 \oplus U_2$.

(b) $U_2 \subseteq U_1$.

(c) $U_1 \cap U_2$ tiene dimensión 1, y $\{(2, 1, 1)\}$ es una base de este subespacio.

(d) $\{(4, 2, 4), (1, 2, 3), (0, 4, 2)\}$ es una base de $U_1 + U_2$.

Ejercicio 54. Sean $U_1 = L[(1, 1, 0, -1),\ (0, 1, 2, 1)]$ y $U_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & & & + & 2t & = & 0 \end{array} \right.$ dos subespacios de $\mathbb{R}^4$, y $u = (1, -1, 1, -1)$. Entonces:

(a) $u \in U_1 + U_2$ y se expresa de forma única como suma de un vector de U_1 y uno de U_2.

(b) $u \notin U_1 + U_2$, pues no pertenece ni a U_1 ni a U_2.

(c) $u \in U_1 + U_2$ y se puede expresar de muchas formas como suma de un vector de U_1 y U_2.

(d) $u \in U_1$ pero $u \notin U_2$, por lo que no pertenece a la suma.

Ejercicio 55. Sean u_1, u_2, u_3, u_4 cuatro vectores de un espacio vectorial V. Supongamos que el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es linealmente dependiente. Entonces:

(a) El conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es linealmente dependiente por contener a un conjunto de vectores linealmente dependientes.

(b) Si u_4 no es combinación lineal de $\{u_1, u_2, u_3\}$ el conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es linealmente independiente.

(c) El conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es linealmente dependiente sólo si contiene al vector cero.

(d) Los datos no nos permiten saber si el conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es linealmente dependiente o independiente.

Ejercicio 56. Sean $U = L[(3, 5, 2, 3), (1, 6, 3, 4), (6, 4, 4, 4)]$ y $W \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & 5z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 6z & + & 5t & = & 0 \end{array} \right.$ dos subespacios de $(\mathbb{Z}_7)^4$.

Entonces una base de $U \cap W$ es:

a) $\{(5, 2, 1, 6)\}$.

b) $\{(6, 1, 1, 1)\}$.

c) $\{(5, 2, 1, 6), (6, 1, 1, 1)\}$.

d) $\{(1, 2, 1, 4), (1, 1, 1, 2)\}$.

Ejercicio 57. Sean $B_1 = \{(1, 0, 1, 0);\ (0, 1, 0, 0);\ (1, 0, 0, 1);\ (1, 1, 1, 1)\}$ y $B_2 = \{(0, 1, 1, 1);\ (1, 0, 1, 0);\ (1, 0, 1, 1);\ (0, 0, 1, 1)\}$ dos bases de $(\mathbb{Z}_2)^4$. Sea u el vector cuyas coordenadas en la base B_1 son $(1, 0, 1, 1)$. Entonces, las coordenadas de u en la base B_2 son:

(a) $(0, 0, 0, 1)$.

(b) $(1, 1, 0, 0)$.

(c) $(1, 0, 1, 0)$.

(d) $(1, 1, 1, 1)$.

Ejercicio 58. Sea $u_1 = (1, 2, 1, 1)$, $u_2 = (4, 2, 2, 1)$, $u_3 = (4, 0, 3, 0)$ y $u_4 = (0, 4, 4, 3)$ cuatro vectores de $(\mathbb{Z}_5)^4$. Entonces:

a) Son linealmente independientes, pues u_3 no es combinación lineal de los restantes.

b) Son linealmente independientes, pues u_4 no es combinación lineal de los restantes.

c) Son linealmente dependientes, pues u_3 es combinación lineal de los restantes.

d) Son linealmente dependientes, pues u_4 es combinación lineal de los restantes.

Ejercicio 59. Sean $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ y $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$. Entonces $U + V$ es igual a:

a) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\}$.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$.

c) $\mathbb{R}^3$.

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

Ejercicio 60. Sea el espacio vectorial $V = (\mathbb{Z}_5)^3$ y sea U el subespacio vectorial de V generado por por $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 1)$. ¿Para cuál de los siguientes subespacios vectoriales W de V se verifica que $V = U \oplus W$?

a) $W = L[(3, 4, 3)]$.

b) $W = L[(2, 1, 3), (3, 4, 2)]$.

c) $W = L[(2, 3, 1), (4, 1, 2)]$.

d) $W = \left\{(x, y, z) \in V : \begin{array}{c} 4x + 2y = 0 \\ x + 4z = 0 \end{array}\right\}$.

Ejercicio 61. Sea U el subespacio de $(\mathbb{Z}_3)^4$ generado por los vectores $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 2, 1)$ y $(2, 1, 0, 1)$; y V el subespacio de $(\mathbb{Z}_3)^4$ generado por $(0, 1, 1, 1)$ y $(2, 2, 1, 2)$. Entonces:

a) $U \subseteq V$ pero $U \neq V$.

b) $V \subseteq U$ pero $U \neq V$.

c) $U = V$.

d) $\dim(U \cap V) = 1$.

Ejercicio 62. Sea $v = (1, 0, 2) \in (\mathbb{Z}_5)^3$, y sea $B = \{(1, 1, 1);\ (0, 3, 1);\ (a, 1, 2)\}$. ¿Para que valor de $a \in \mathbb{Z}_5$ es B una base, y el vector v tiene coordenadas $(3, 2, 1)$ con respecto a la base B?.

a) $a = 4$.

b) $a = 1$.

c) $a = 0$.

d) $a = 3$.

Ejercicio 63. Dado el conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ donde $u_1 = (3, 1, 5, 2)$, $u_2 = (4, 2, 1, 6)$ y $u_3 = (6, 1, 1, 6)$ son tres vectores de $(\mathbb{Z}_7)^4$.

(a) S puede ser ampliado a una base añadiéndole el vector $(1, 1, 1, 1)$.

(b) S no puede ser ampliado a una base pues los vectores de S son linealmente dependientes.

(c) Los vectores $\{u_1, u_2, u_3, u_1 + u_2 + u_3\}$ forman una base de $(\mathbb{Z}_7)^4$.

(d) Los vectores de S son linealmente independientes.

Ejercicio 64. Sea V el conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, con a y b números reales. Entonces V con respecto de las operaciones suma de matrices y producto de un número real por una matriz,

1. es un espacio vectorial sobre R de dimensión dos.
2. es un espacio vectorial sobre R isomorfo a R3.
3. no es un espacio vectorial, ya que la suma de matrices no es una operación binaria en V.
4. no es un espacio vectorial, ya que en V hay matrices no nulas cuyo determinante no es cero.

Ejercicio 65. Sean $B_1 = \{(1,0,1,0);\ (0,1,0,0);\ (1,0,0,1);\ (1,1,1,1)\}$ y $B_2 = \{(0,1,1,1);\ (1,0,1,0);\ (1,0,1,1);\ (0,0,1,1)\}$ dos bases de $(\mathbb{Z}_2)^4$. Sea u el vector cuyas coordenadas en la base B_1 son $(1,0,1,1)$. Entonces, las coordenadas de u en la base B_2 son:

1. $(0,0,0,1)$.
2. $(1,1,0,0)$.
3. $(1,0,1,0)$.
4. $(1,1,1,1)$.

Ejercicio 66. Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y U y W dos subespacios vectoriales distintos, ambos de dimensión $n-1$. Entonces:

1. $\dim(U \cap W) = n-1$.
2. $\dim(U \cap W) = 1$.
3. $\dim(U \cap W) = n-2$.
4. $\dim(U \cap W) = 0$.

Ejercicio 67. Sea $V = \{a(x) \in \mathbb{Z}_2[x] : gr(a(x)) \leq 3\}$, y $p_1(x) = x^3+x+1$, $p_2(x) = x^2+x+1$, $p_3(x) = x^3+x^2+x$ y $p_4(x) = x^2+1$ elementos de V. Entonces:

1. Forman una base de V.
2. Son linealmente dependientes, pues el segundo es combinación lineal del resto.
3. Son un sistema de generadores de V.
4. Son linealmente dependientes, pues el tercero es combinación lineal del resto.

Ejercicio 68. Sean $B_1 = \{(1,1,2),(2,3,4),(3,1,5)\}$ y $B_2 = \{(4,2,1),(5,5,2),(1,6,2)\}$ dos bases de $(\mathbb{Z}_7)^3$. Entonces, la matriz del cambio de base de B_1 a B_2 es:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 69. Sean $U = L[(1,2,1),(a,1,1)]$, $V \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$ dos subespacios de $(\mathbb{Z}_3)^3$, y $W = U \cap V$. Entonces:

1. $W \equiv x + 2y + 2z = 0$.
2. $\mathrm{dim}(W) = 1$ para cualquier valor de a.
3. $\mathrm{dim}(W) = 1$ sólo para $a = 1$.
4. $\mathrm{dim}(W) = 1$ sólo para $a = 2$.