Capítulo 7

Aplicaciones Lineales

Un espacio vectorial sabemos que es un conjunto con una estructura que viene dada por dos operaciones. Una interna (la suma) y otra externa (el producto por escalares). Una aplicación entre espacios vectoriales puede preservar esa estructura o no hacerlo. Las que la preservan reciben el nombre de *aplicaciones lineales.*

7.1. Definición y ejemplos.

Sean V y V' dos K-espacios vectoriales. Una aplicación lineal de V a V' es una aplicación $f : V \to V'$ que preserva la estructura de espacio vectorial, en el sentido de que para cualesquiera $u, v \in K$ y cualquier $a \in K$ se verifica que:

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
- $f(a \cdot u) = a \cdot f(u)$.

Dicho coloquialmente, da lo mismo primero sumar y después aplicar f que primero aplicar f y después sumar (y lo mismo para el producto por escalares)

Ejemplo 7.1.1.

1. *Tomamos los espacios vectoriales* $V = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ *y* $V' = \mathbb{R}$. *La aplicación* $f : V \to V'$ *dada por* $f(x) = 7x$ *es lineal, ya que:*
   - $f(x + y) = 7(x + y) = 7x + 7y = f(x) + f(y)$.
   - $f(a \cdot x) = 7ax = a \cdot (7x) = a \cdot f(x)$.

   La aplicación $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = x^2$ *no es lineal, pues:*
   - $g(x + y) = (x + y)^2$.
   - $g(x) + g(y) = x^2 + y^2$.

   Y como sabemos, no tienen porqué coincidir. Por ejemplo, $g(2 + 3) = 5^2 = 25$*, mientras que* $g(2) + g(3) = 4 + 9 = 13$.

   La aplicación $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $h(x) = x + 3$ *tampoco es lineal, ya que* $h(2 + 3) = 8$ *mientras que* $h(2) + h(3) = 5 + 6 = 11$.

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la aplicación dada por* $f(x, y) = (y, x)$. *Entonces* f *es una aplicación lineal, ya que si* $u = (x, y)$ *y* $v = (x', y')$ *son vectores de* $\mathbb{R}^2$, *y* $a \in \mathbb{R}$ *se tiene que:*
   - $f(u+v) = f((x, y)+(x', y')) = f(x+x', y+y') = (y+y', x+x') = (y, x)+(y', x') = f(u)+f(v)$.
   - $f(a \cdot u) = f(a \cdot (x, y)) = f(a \cdot x, a \cdot y) = (a \cdot y, a \cdot x) = a \cdot (y, x) = a \cdot f(u)$.

3. *No es lineal la aplicación* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x,y)=(y,x^2)$. *Para verlo, tomamos* $u=(1,1)$ *y* $a=2$. *Entonces:*

$$f(2\cdot(1,1)) = f(2,2) = (2,4) \quad \textit{mientras que} \quad 2\cdot f(1,1) = 2\cdot(1,1) = (2,2)$$

4. *Dados dos espacios vectoriales* V *y* V', *la aplicación* $f:V\to V'$ *dada por* $f(u)=0$ *(la aplicación constante cero) es una aplicación lineal.*

5. *Si* V *es un espacio vectorial, la aplicación identidad es una aplicación lineal. Más general, si* U *es un subespacio vectorial de* V, *la aplicación* $i:U\to V$ *dada por* $i(u)=u$ *es lineal.*

6. *La aplicación* $f:M_{m\times n}(K)\to M_{n\times m}(K)$ *dada por* $f(A)=A^t$ *es lineal, pues* $(A+B)^t=A^t+B^t$ *y* $(a\cdot A)^t = a\cdot A^t$.

7. *La aplicación derivada* $K_n[x]\to K_n[x]$ *es lineal, pues la derivada de la suma es la suma de las derivadas, y la derivada de una constante por un polinomio es la constante por la derivada del polinomio.*

Es inmediato comprobar que si $f:V\to V'$ es una aplicación lineal entonces:

- $f(0)=0$ (es decir, f preserva el vector cero).
- $f(-u)=-f(u)$ (f preserva opuestos).
- $f(a_1\cdot u_1 + a_2\cdot u_2+\cdots+a_m\cdot u_m) = a_1\cdot f(u_1)+a_2\cdot f(u_2)+\cdots+a_m\cdot f(u_m)$ (f preserva combinaciones lineales).

7.2. Operaciones con aplicaciones lineales.

En esta sección vamos a estudiar que estructura tiene el conjunto de las aplicaciones lineales. Para ello, definimos la suma de aplicaciones lineales, y el producto de una aplicación lineal por un escalar.

Definición 81. *Sean* V *y* V' *dos* K*-espacios vectoriales, y* $f,g:V\to V'$ *dos aplicaciones lineales. Definimos la aplicación* $f+g:V\to V'$ *como sigue:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f+g} & V' \\ u & \mapsto & f(u)+g(u) \end{array}$$

es decir, $(f+g)(u)=f(u)+g(u)$.

Es inmediato comprobar que $f+g$ es lineal. Llamemos h a la aplicación $f+g$ y comprobemos que $h(u+v)=h(u)+h(v)$ para cualesquiera $u,v\in V$ y que $h(a\cdot u)=a\cdot h(u)$ para cualquier $a\in K$ y $u\in V$.

$$\begin{array}{lll} h(u+v) & = (f+g)(u+v) & \\ & = f(u+v)+g(u+v) & \text{por definición de la aplicación } f+g. \\ & = f(u)+f(v)+g(u)+g(v) & \text{pues } f \text{ y } g \text{ son lineales.} \\ & = f(u)+g(u)+f(v)+g(v) & \text{pues la suma en } V' \text{ es conmutativa.} \\ & = (f+g)(u)+(f+g)(v) & \text{por definición de la aplicación } f+g. \\ & = h(u)+h(v) & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} h(a\cdot u) & = (f+g)(a\cdot u) & \\ & = f(a\cdot u)+g(a\cdot u) & \text{por definición de la aplicación } f+g. \\ & = a\cdot f(u)+a\cdot g(u) & \text{pues } f \text{ y } g \text{ son lineales.} \\ & = a\cdot(f(u)+g(u)) & \text{pues en } V' a\cdot x + a\cdot y = a\cdot(x+y) \\ & = a\cdot(f+g)(u) & \text{por definición de la aplicación } f+g. \\ & = a\cdot h(u) & \end{array}$$

Definición 82. *Sean* V *y* V' *dos* K*-espacios vectoriales,* $f:V\to V'$ *una aplicación lineal y* $a\in K$ *un escalar. Definimos la aplicación* $a\cdot f:V\to V'$ *como sigue:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{a\cdot f} & V' \\ u & \mapsto & a\cdot f(u) \end{array}$$

es decir, $(a \cdot f)(u) = a \cdot f(u)$.

La comprobación de que $a \cdot f$ es lineal es similar a la que hemos hecho para la suma.

Dados dos K-espacios vectoriales $V \to V'$, vamos a denotar por $Hom_K(V, V')$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales $V \to V'$.

Lo que hemos hecho ha sido definir dos operaciones en $Hom_K(V, V')$. Una suma y un producto por escalares.

De esta forma, el conjunto $Hom_K(V, V')$ tiene estructura de espacio vectorial sobre K. Habría que comprobar que estas operaciones satisfacen las ocho propiedades que definen a un espacio vectorial. La comprobación es sencilla.

Si ahora tenemos tres espacios vectoriales V, V' y V'', y dos aplicaciones lineales $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$, entonces podemos componer las aplicaciones, y tenemos una nueva aplicación $g \circ f : V \to V''$.

Esta aplicación resultante es también lineal, pues

$$\begin{array}{lll} (g\circ f)(u+v) & = g(f(u+v)) & \text{por la definición de la composición de aplicaciones.} \\ & = g(f(u)+f(v)) & \text{pues } f \text{ es lineal.} \\ & = g(f(u))+g(f(v)) & \text{pues } g \text{ es lineal.} \\ & = (g\circ f)(u)+(g\circ f)(v) & \text{por la definición de } g\circ f. \end{array}$$

y $(g \circ f)(a \cdot u) = a \cdot (g \circ f)(u)$, como puede también comprobarse fácilmente.

Ejemplo 7.2.1. *Sean* $f, g : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^2$ *y* $h : (\mathbb{Z}_5)^2 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ *las aplicaciones lineales dadas por*

$$f(x,y,z) = (3x+y+2z, 4x+3y+z); \quad g(x,y,z) = (x+3z, 2x+4y+3z); \quad h(x,y) = (3x+4y, x+2y, 3x+3y, 2x)$$

Entonces, dado $(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_5)^3$ *se tiene que*

$f(x,y,z) + g(x,y,z) = (3x+y+2z, 4x+3y+z) \ + \ (x+3z, 2x+4y+3z) = (4x+y, x+2y+4z)$, *luego* $f + g : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^2$ *es la aplicación lineal*

$$(x,y,z) \mapsto (4x+y, x+2y+4z)$$

y la aplicación $3 \cdot f$ *es la aplicación* $(x,y,z) \mapsto (4x+3y+z, 2x+4y+3z)$. *La aplicación* $-f$ *viene dada por* $(x,y,z) \mapsto -(3x+y+2z, 4x+3y+z) = (2x+4y+3z, x+2y+4z)$.

Vamos a calcular la composición $h \circ f$

$$\begin{array}{ll} (h\circ f)(x,y,z) & = h(f(x,y,z)) \\ & = h((3x+y+2z, 4x+3y+z)) \\ & = (3(3x+y+2z)+4(4x+3y+z), 3x+y+2z+2(4x+3y+z), 3(3x+y+2z)+3(4x+3y+z), 2(3x+y+2z)) \\ & = (4x+3y+z+x+2y+4z, 3x+y+2z+3x+y+2z, 4x+3y+z+2x+4y+3z, x+2y+4z) \\ & = (0, x+2y+4z, x+2y+4z, x+2y+4z) \end{array}$$

es decir, $(h \circ f)(x,y,z) = (0, x+2y+4z, x+2y+4z, x+2y+4z)$, *que es una aplicación lineal.*

7.3. Aplicaciones lineales y matrices.

7.3.1. Determinación de una aplicación lineal.

Apoyándonos en una propiedad que vimos sobre aplicaciones lineales, concretamente que una aplicación lineal preserva combinaciones lineales, vamos a ver cómo podemos determinar una aplicación lineal. Analizamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 7.3.1.

1. *Supongamos que de una aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *conocemos que* $f(1,0) = (3,-1)$ *y* $f(0,1) = (-2,3)$.

   Si tomamos un vector de $\mathbb{R}^2$, *por ejemplo* $u = (4,2)$ *tenemos que*

   $f(u) = f(4,2) = f(4 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1)) = 4 \cdot f(1,0) + 2 \cdot f(0,1) = 4 \cdot (3,-1) + 2 \cdot (-2,3) = (8,2)$.

Si tomamos $v = (1,-2)$ *se tiene que* $f(v) = f(1\cdot(1,0) - 2\cdot(0,1)) = f(1,0) - 2\cdot f(0,1) = (3,-1)-(-4,6)) = (7,-7)$.

Y si tomamos un vector (x,y) *cualquiera:*

$f(x,y) = f(x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)) = x\cdot f(1,0)+y\cdot f(0,1) = x\cdot(3,-1)+y\cdot(-2,3) = (3x-2y,-x+3y)$.

Vemos como el conocimiento de $f(1,0)$ *y* $f(0,1)$ *nos determina la aplicación* f. *Podríamos haber dicho:*

- *Sea* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *la aplicación lineal dada por* $f(x,y) = (3x-2y,-x+3y)$.
- *Sea* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *la aplicación lineal definda por* $f(1,0) = (3,-1)$ *y* $f(0,1) = (-2,3)$.

Y en ambos casos estamos diciendo lo mismo.

2. *Supongamos que ahora tenemos una aplicación lineal* $f:(\mathbb{Z}_5)^2\to(\mathbb{Z}_5)^3$ *de la que conocemos que* $f(2,1) = (1,2,3)$ *y* $f(3,2) = (4,2,2)$.

   Entonces, por ejemplo $f(1,1)$ *podemos calcularlo, pues* $(1,1) = 4\cdot(2,1)+(3,2)$, *luego* $f(1,1) = 4\cdot(1,2,3)+(4,2,2) = (3,0,4)$.

   En general, dado $(x,y)\in(\mathbb{Z}_5)^2$ *se tiene que* $(x,y) = (2x+2y)\cdot(2,1)+(4x+2y)\cdot(3,2)$. *Por tanto*

$$\begin{aligned} f(x,y) = f((2x+2y)\cdot(2,1)+(4x+2y)\cdot(3,2)) &= (2x+2y)\cdot f(2,1)+(4x+2y)\cdot f(3,2) = \\ &= (2x+2y)\cdot(1,2,3)+(4x+2y)\cdot(4,2,2) = (3x,2x+3y,4x) \end{aligned}$$

3. *Si tenemos* $f:(\mathbb{Z}_5)^2\to(\mathbb{Z}_5)^2$ *tal que* $f(1,1) = (2,4)$, $f(3,2) = (1,0)$ *y* $f(1,3) = (3,3)$, *entonces puesto que* $(1,2) = 2\cdot(1,1)+(3,2)+(1,3)$ *tendríamos que* $f(1,2) = 2\cdot(2,4)+(1,0)+(3,3) = (3,1)$.

   Pero también se tiene que $(1,2) = (1,1)+2\cdot(3,2)+4\cdot(1,3)$, *luego* $f(1,2) = (2,4)+2\cdot(1,0)+4\cdot(3,3) = (1,1)$.

   Vemos por tanto que no puede haber una aplicación f *con esas condiciones, pues de haberla se tendría que* $f(1,2) = (3,1)$ *y que* $f(1,2) = (1,1)$.

   El motivo es que los vectores $(1,1)$, $(3,2)$, $(1,3)$ *son linealmente dependientes, lo que nos dice que hay una relación entre ellos. Y esta relación no es satisfecha por sus imágenes.*

   Precisando un poco, se tiene que $3\cdot(1,1)+2\cdot(3,2)+(1,3) = (0,0)$, *y sin embargo,* $3\cdot(2,4)+2\cdot(1,0)+(3,3) = (1,0)\neq(0,0)$.

   O si queremos verlo de otra forma, $(1,3) = 2\cdot(1,1)+3\cdot(3,2)$, *luego si tenemos una aplicación* f *que cumple las dos primeras condiciones (*$f(1,1) = (2,4)$ *y* $f(3,2) = (1,0)$*) entonces también debe cumplir que* $f(1,3) = 2\cdot f(1,1)+3\cdot f(3,2) = (2,3)$, *luego* $f(1,3)$ *no puede valer* $(3,3)$, *como habíamos dicho al principio.*

A la vista de estos ejemplos vemos que para determinar una aplicación lineal $f:V\to V'$ nos basta con conocer la imagen de los elementos de una base de V. Conocido esto, puesto que cualquier vector se expresa como combinación lineal de los vectores de la base, podemos calcular la imagen de cualquier vector. La unicidad en esta expresión nos evita que ocurran situaciones como las que hemos visto en el ejemplo precedente.

Proposición 7.3.1. *Sean* V *y* V' *dos* K*-espacios vectoriales. Sea* $B = \{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ *una base de* V *y* $v_1,v_2,\cdots,v_n$ *vectores de* V'.

Entonces existe una única aplicación lineal $f:V\to V'$ *tal que* $f(u_i) = v_i$.

La idea de la demostración es lo que hemos hecho en el ejemplo anterior. No obstante quedan algunos detalles sueltos. La demostración se deja como ejercicio.

7.3.2. Matriz de una aplicación lineal.

Supongamos que tenemos una aplicación lineal $f : V \to V'$ y fijamos una base $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de V. El conocimiento de los vectores $f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)$ nos determina la aplicación f. Si ahora expresamos estos vectores en una base B' de V' entonces la aplicación lineal f la tenemos determinada con las matrices columna $(f(u_1))_{B'}, (f(u_2))_{B'}, \cdots, (f(u_n))_{B'}$. Esto da pie a la siguiente defnción.

Definición 83. *Sean V y V' dos K-espacios vectoriales, $f : V \to V'$ una aplicación lineal, y $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ y $B' = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ bases de V y V' respectivamente.*

Se define la matriz de f en las bases B y B', y la representaremos como $M(f; B, B')$ o como $M_{B,B'}(f)$ a la matriz cuyas columnas son las coordenadas, en la base B' de las imágenes de los vectores de la base B. Es decir,

$$M_{B,B'}(f) = M(f; B, B') = \big((f(u_1))_{B'} \ (f(u_2))_{B'} \ \cdots \ (f(u_n))_{B'}\big)$$

Cuando los espacios vectoriales V y V' coincidan, así como las bases que elegimos ($B = B'$), escribiremos $M(f; B)$ (o $M_B(f)$) en lugar de $M(f; B, B)$ (o $M_{B,B}(f)$).

Ejemplo 7.3.2.

1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la única aplicación lineal que verifica que $f(1,0) = (3,-1)$ y $f(0,1) = (-2,3)$. En el ejemplo 7.3.1 vimos que esta aplicación es la definida por $f(x, y) = (3x - 2y, -x + 3y)$.*

   Si tomamos $B_c = \{(1,0);\ (0,1)\}$ la base canónica, entonces

$$M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. *Sea la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_5)^2 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ que verifica que $f(2,1) = (1,2,3)$ y $f(3,2) = (4,2,2)$.*

   Si $B = \{(2,1);\ (3,2)\}$ y $B'_c = \{(1,0,0);\ (0,1,0);\ (0,0,1)\}$ entonces

$$M_{B,B'_c}(f)) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   Sabemos que para cualquier vector $(x, y) \in (\mathbb{Z}_5)^2$ se tiene que $f(x, y) = (3x, 2x + 3y, 4x)$, luego $f(1,0) = (3,2,4)$ y $f(0,1) = (0,3,0)$. Por tanto

$$M_{B_c,B'_c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Sea $V = K_4[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 4 con coeficientes en K, y sea $D : V \to V$ la aplicación que lleva cada polinomio en su derivada.*

   Consideramos la base $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Entonces

$$M_B(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.3.3. Expresión matricial de una aplicación lineal.

Hemos visto cómo una aplicación lineal podemos determinarla a partir de la imagen de los elementos de una base, y que esta información podemos recogerla en una matriz. Lo que vamos a ver a continuación es, cómo a partir de la matriz de una aplicación linea podemos recuperar la aplicación lineal.

Proposición 7.3.2 (Expresión matricial de una aplicación lineal.). *Sean V y V' dos K-espacios vectoriales, para los que hemos elegido bases B y B' respectivamente. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, y sea $u \in V$. Entonces*

$$(f(u))_{B'} = M_{B,B'}(f) \cdot (u)_B$$

Es decir, para calcular la imagen de un vector, $f(u)$ (o mejor dicho, sus coordenadas en la base B') basta multiplicar la matriz de la aplicación f por las coordenadas del vector u.

Demostración:

Vamos a ponerle nombre a todos los elementos que intervienen, y entonces será casi trivial la expresión que queremos demostrar.

Supongamos que $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, y que $B' = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$, y que

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto significa que

$$\begin{array}{l} f(u_1) = a_{11} \cdot v_1 + a_{21} \cdot v_2 + \cdots + a_{m1} \cdot v_m \\ f(u_2) = a_{12} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \cdots + a_{m2} \cdot v_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(u_n) = a_{1n} \cdot v_1 + a_{2n} \cdot v_2 + \cdots + a_{mn} \cdot v_m \end{array}$$

Supongamos también que $(u)_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y que $(f(u))_{B'} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, es decir, que $u = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_n \cdot u_n$ y que $f(u) = b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + \cdots + b_m \cdot v_m$. Entonces:

$$f(u) = f(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n) = a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + \cdots + a_nf(u_n) =$$

$$= a_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{m1}v_m) + a_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{m2}v_m) + \cdots + a_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{mn}v_m) =$$

$$= (a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + \cdots + a_{1n}a_n)v_1 + (a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + \cdots + a_{2n}a_n)v_2 + \cdots + (a_{m1}a_1 + a_{m2}a_2 + \cdots + a_{mn}a_n)v_m$$

Y como la expresión de un vector en función de una base es única, tenemos que

$$\begin{array}{l} b_1 = a_{11} \cdot a_1 + a_{12} \cdot a_2 + \cdots + a_{1n} \cdot a_n \\ b_2 = a_{21} \cdot a_1 + a_{22} \cdot a_2 + \cdots + a_{2n} \cdot a_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_m = a_{m1} \cdot a_1 + a_{m2} \cdot a_2 + \cdots + a_{mn} \cdot a_n \end{array}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Ejemplo 7.3.3.

1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por $f(x, y) = (3x - 2y, -x + 3y)$. Sabemos que la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es*

$$M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si tomamos el vector $u = (2, -5)$, sus coordenadas en la base canónica son $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Por tanto, podemos calcular las coordenadas de $f(u)$ en la base canónica como sigue:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -17 \end{pmatrix}$$

y por tanto $f(u) = (16, -17)$.

Si tomamos un vector $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $(v)_{B_c} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, luego

$$(f(v))_{B_c} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ -x + 3y \end{pmatrix}$$

es decir, $f(v) = (3x - 2y, -x + 3y)$.

Como vemos, a partir de la matriz de la aplicación lineal hemos recuperado la aplicación.

2. *Sea ahora la aplicación $f : (\mathbb{Z}_5)^2 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ que verifica que $f(2, 1) = (1, 2, 3)$ y $f(3, 2) = (4, 2, 2)$. Consideramos la base de $(\mathbb{Z}_5)^2$ $B = \{(2, 1);\ (3, 2)\}$, y la base canónica de $(\mathbb{Z}_5)^3$, B'_c. Vimos que la matriz de F en las bases B y B'_c es $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. El vector $u = (1, 1)$ tiene coordenadas 4, 1 en la base B, luego*

$$(f(u))_{B'_c} = M_{B,B'_c}(f) \cdot (u)_B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, $M_{B_c \to B} = (M_{B \to B_c})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces si $v = (x, y) \in (\mathbb{Z}_5)^2$ se tiene que

$$(v)_B = M_{B_c \to B} \cdot (v)_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

luego

$$(f(v))_{B'_c} = M_{B,B'_c}(f) \cdot (v)_B = M_{B,B'_c}(f) \cdot M_{B_c \to B} \cdot (v)_{B_c}$$

y por otra parte,

$$(f(v))_{B'_c} = M_{B_c,B'_c}(f) \cdot (v)_{B_c}$$

Por lo que $M_{B_c,B'_c}(f)$ debe ser igual a $M_{B,B'_c}(f) \cdot M_{B_c \to B}$, lo que es cierto, pues

$$M_{B_c,B'_c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = M_{B,B'_c}(f) \cdot M_{B_c \to B}$$

3. *Sea $D : K_4[x] \to K_4[x]$ la aplicación derivada. Si $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ y $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ entonces*

$$(D(p(x))_B = M(D;B) \cdot (p(x))_B \ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 4a_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego $D(p(x)) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$.

7.3.4. Operaciones con aplicaciones lineales y matrices.

Dados dos espacios vectoriales V y V' sabemos que el conjunto de las aplicaciones lineales $V \to V'$ es un espacio vectorial que llamamos $Hom_K(V, V')$

Por otra parte, si $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ es una base de V, y $B' = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ es una base de V', hemos definido una aplicación

$$\begin{array}{ccc} Hom_K(V, V') & \stackrel{M(-;B,B')}{\longrightarrow} & M_{m\times n}(K) \\ f & \mapsto & M_{B,B'}(f) \end{array}$$

que a cada aplicación lineal le hace corresponder la matriz que la representa en las bases B y B'.

Esta aplicación que hemos definido es lineal, es decir, dadas $f, g : V \to V'$ lineales y $a \in K$, $M_{B,B'}(f + g) = M_{B,B'}(f) + M_{B,B'}(g)$ y $M_{B,B'}(a \cdot f) = a \cdot M_{B,B'}(f)$.

Ejemplo 7.3.4.
Sean $f, g : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^2$

$$f(x, y, z) = (3x + y + 2z, 4x + 3y + z); \quad g(x, y, z) = (x + 3z, 2x + 4y + 3z)$$

Entonces, si $B_c = \{(1, 0, 0);\ (0, 1, 0);\ (0, 0, 1)\}$ y $B'_c = \{(1, 0);\ (0, 1)\}$ son respectivamente las bases canónicas de $(\mathbb{Z}_5)^3$ y $(\mathbb{Z}_5)^2$ se tiene que

$$M_{B_c,B'_c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_{B_c,B'_c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, vimos (ejemplo 7.2.1) que $(f + g)(x, y, z) = (4x + y, x + 2y + 4z)$ y $(3 \cdot f)(x, y, z) = (4x + 3y + z, 2x + 4y + 3z)$, por lo que

$$M_{B_c,B'_c}(f + g) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = M_{B_c,B'_c}(f) + M_{B_c,B'_c}(g)$$
$$M(3 \cdot f; B_c, B'_c) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot M_{B_c,B'_c}(f)$$

La demostración de esto es sencilla. Algo más complicado de probar es lo siguiente.

Si V, V' y V'' son tres K-espacios vectoriales, $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ son aplicaciones lineales, entonces dadas bases B, B' y B'' de V, V' y V' respectivamente, se tiene que

$$M_{B,B''}(g \circ f) = M_{B',B''}(g) \cdot M_{B,B'}(f)$$

En primer lugar, veamos que lo que está escrito es coherente en relación al tamaño de las matrices que intervienen.

Supongamos que $dim(V) = n$, $dim(V') = m$ y $dim(V'') = k$. Entonces
$M_{B',B''}(g) \in M_{k\times m}(K)$; $M_{B,B'}(f) \in M_{m\times n}(K)$. Luego pueden multiplicarse, y el resultado es una matriz de tamaño $k \times n$, que es justo el tamaño de $M_{B,B''}(g \circ f)$.

Supongamos también que $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $B' = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ y $B'' = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$.

Vamos a llamar C_i a la columna i-ésima de la matriz $M_{B,B''}(g \circ f)$, y C'_i a la columna i-ésima de la matriz $M_{B,B'}(f)$. Entonces

$$
\begin{array}{l}
C_1 = ((g\circ f)(u_1))_{B''} = ((g(f(u_1))))_{B''} = M_{B',B''}(g)\cdot (f(u_1))_{B'} = M_{B',B''}(g)\cdot C'_1 \\
C_2 = ((g\circ f)(u_2))_{B''} = ((g(f(u_2))))_{B''} = M_{B',B''}(g)\cdot (f(u_2))_{B'} = M_{B',B''}(g)\cdot C'_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_n = ((g\circ f)(u_n))_{B''} = ((g(f)(u_n))))_{B''} = M_{B',B''}(g)\cdot (f(u_n))_{B'} = M_{B',B''}(g)\cdot C'_n
\end{array}
$$

es decir, las columnas de la matriz $M_{B,B''}(g\circ f)$ se obtienen multiplicando la matriz $M_{B',B''}(g)$ por las columnas de la matriz $M_{B,B'}(f)$. Por tanto, se tiene que $M_{B,B''}(g\circ f) = M_{B',B''}(g)\cdot M_{B,B'}(f)$.

Ejemplo 7.3.5.

En el ejemplo 7.2.1 calculamos la composición de las aplicaciones lineales $f:(\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^2$ *y* $h:(\mathbb{Z}_5)^2 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ *definidas como* $f(x,y,z) = (3x+y+2z, 4x+3y+z)$ *y* $h(x,y) = (3x+4y, x+2y, 3x+3y, 2x)$. *El resultado es la aplicación* $(h\circ f)(x,y,z) = (0, x+2y+4z, x+2y+4z, x+2y+4z)$.

Sean B_c, B'_c *y* B''_c *las bases canónicas de* $(\mathbb{Z}_5)^3$, $(\mathbb{Z}_5)^2$ *y* $(\mathbb{Z}_5)^4$ *respectivamente. Entonces:*

$$
M_{B'_c,B''_c}(h)\cdot M_{B_c,B'_c} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = M_{B_c,B''_c}(h\circ f)
$$

7.3.5. Matriz de una aplicación lineal y cambio de bases.

En el capítulo anterior estudiamos cómo varían las coordenadas de un vector al cambiar la base en que lo expresábamos. Vimos que si tenemos dos bases B y B' de un espacio vectorial V, y $v\in V$ un vector, entonces las coordenadas del vector v en la base B y las coordenadas del mismo vector en la base B' estaban relacionados por la matriz del cambio de base. En concreto, teníamos que $(v)_{B'} = M_{B\to B'}\cdot (v)_B$.

Con lo que hemos visto en este capítulo vamos a dar otra interpretación de esta fórmula.

Consideramos la aplicación identidad $Id_V : V\to V$, que claramente es lineal. Entonces, para cualquier $v\in V$ se tiene que $Id_V(v) = v$, y

$$(v)_{B'} = (Id_V(v))_{B'} = M_{B,B'}(Id_V)\cdot (v)_B$$

Y si comparamos con la anterior fórmula, vemos que la única diferencia es que donde antes aparecía $M_{B\to B'}$ ahora nos aparece $M_{B,B'}(Id_V)$.

Si $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, las columnas de $M(Id_V; B, B')$ son las coordenadas, en la base B', de los vectores $Id_V(u_1), Id_V(u_2), \cdots, Id_V(u_n)$, es decir, las coordenadas de los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ en la base B'. Y esas son justo las columnas de la matriz $M_{B\to B'}$.

Por tanto, tenemos que $M_{B\to B'} = M_{B,B'}(Id_V)$.

Proposición 7.3.3. *Sean* V *y* V' *dos* K*-espacios vectoriales, y* $f : V\to V'$ *una aplicación lineal.*

Supongamos que elegimos dos bases B_1 *y* B_2 *de* V *y otras dos bases* B'_1 *y* B'_2 *de* V'.

Entonces

$$M_{B_1,B'_1}(f) = M_{B'_2\to B'_1}\cdot M_{B_2,B'_2}(f)\cdot M_{B_1\to B_2}$$

Demostración: Nos fijamos en el siguiente esquema.

$$
\begin{tikzcd}
V_{B_2} \arrow[r, "f"] & V'_{B'_2} \arrow[d, "Id_{V'}"] \\
V_{B_1} \arrow[u, "Id_V"] \arrow[r, "f"] & V'_{B'_1}
\end{tikzcd}
$$

Es claro que $f = Id'_V \circ f \circ Id_V$. Por tanto

$$M_{B_1,B'_1} = M_{B_1,B'_1}(Id'_V \circ f \circ Id_V) = M_{B'_2,B'_1}(Id'_V) \cdot M_{B_2,B'_2}(f) \cdot M_{B_1,B'_1}(Id_V)$$

Y ahora sólo hay que tener en cuenta que $M_{B'_2,B'_1}(Id'_V) = M_{B'_2 \to B'_1}$ y $M_{B_1,B_2}(Id_V) = M_{B_1 \to B_2}$. ■

Ejemplo 7.3.6.

1. *En el ejemplo 7.3.3 teníamos la aplicación lineal* $f : (\mathbb{Z}_5)^2 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ *dada por* $f(x,y) = (3x, 2x + 3y, 4x)$. *Calculamos* $M_{B,B'_c}(f)$ *(donde* $B = \{(2,1);\ (3,2)\}$ *y* $M_{B_c,B'_c}(f)$*, y comprobamos que* $M_{B_c,B'_c}(f) = M_{B,B'_c}(f) \cdot M_{B_c \to B}$*, que se corresponde con la fórmula que acabamos de ver. Notemos que no aparece* $M_{B'_c \to B'_c}$*, pues esa matriz es la identidad.*

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *la aplicación lineal*

$$f(x,y,z,t) = (2x - y + 3z + 2t, 3x - y + 5z - 3t, -2x + y - t)$$

y sean $B = \{(1,2,-1,0);\ (2,1,1,3);\ (3,1,-2,1);\ (1,0,1,1)\}$ *y* $B' = \{(1,1,1);\ (2,1,2);\ (-1,3,-2)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^4$ *y* $\mathbb{R}^3$ *respectivamente. Vamos a calcular* $M_{B,B'}(f)$*. Para ello, hacemos:*

$$M_{B \to B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B'_c \to B'} = (M_{B' \to B'_c})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c,B'_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$M_{B,B'}(f) = M_{B'_c \to B'} \cdot M_{B_c,B'_c}(f) \cdot M_{B \to B_c} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -136 & -60 & -67 \\ -11 & 83 & 34 & 42 \\ -3 & 18 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

También podíamos haber calculado la matriz como sigue:

Hallamos $f(1,2,-1,0) = (2 - 2 - 3, 3 - 2 - 5, -2 + 2 + 0) = (-3,-4,0)$

Buscamos $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tales que* $a \cdot (1,1,1) + b \cdot (2,1,2) + c \cdot (-1,3,-2) = (-3,-4,0)$*, que nos da el sistema*

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2b & - & c & = & -3 \\ a & + & b & + & 3c & = & -4 \\ a & + & 2b & - & 2c & = & 0 \end{array}$$

que tiene como solución $a = 16$*,* $b = -11$ *y* $c = -3$*. Eso nos da la primera columna de la matriz.*

7.4. Núcleo e imagen de una aplicación lineal.

7.4.1. Imagen directa e inversa de subespacios vectoriales.

En primer lugar vamos a ver cómo, dada una aplicación lineal $f : V \to V'$, podemos pasar de subespacios de V a subespacios de V' y viveversa.

Proposición 7.4.1. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, y sean $U \subseteq V$ y $U' \subseteq V'$ subespacios vectoriales. Entonces:*

- *El conjunto $f_*(U) = \{f(u) : u \in U\}$ es un subespacio vectorial de V'.*
- *El conjunto $f^*(U') = \{v \in V : f(v) \in U'\}$ es un subespacio vectorial de V.*

Demostración:

Tenemos que comprobar que tanto $f_*(U)$ como $f^*(U')$ son cerrados para sumas y producto por escalares.

- $f_*(U)$ es cerrado para sumas.

  Sean $v_1, v_2 \in f_*(U)$. Por tanto, existen $u_1, u_2 \in U$ tales que $f(u_1) = v_1$ y $f(u_2) = v_2$. Al ser U un subespacio, $u_1+u_2 \in U$, y por ser f lineal $f(u_1+u_2) = f(u_1)+f(u_2) = v_1+v_2$, luego $v_1+v_2 \in f_*(U)$ (es imagen de un vector de U).

- $f_*(U)$ es cerrado para producto por escalares.

  Sea $v \in f_*(U)$ y $a \in K$. Entonces $v = f(u)$ para algún $u \in U$, y $a \cdot v = a \cdot f(u) = f(a \cdot u)$. Y puesto que $a \cdot u \in U$ deducimos que $a \cdot v \in f_*(U)$.

- $f^*(U')$ es cerrado para sumas.

  Sean $u_1, u_2 \in f^*(U')$. Entonces $f(u_1), f(u_2) \in U'$, luego $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) \in U'$ (pues es suma de dos elementos de U'). Por tanto, $u_1 + u_2 \in f^*(U')$.

- $f^*(U')$ es cerrado para producto por escalares.

  Sea $u \in f^*(U')$ y $a \in K$. Por pertenecer u a $f^*(U')$ se tiene que $f(u) \in U'$, luego $a\cdot f(u) = f(a\cdot u) \in U'$. Pero esto significa exactamente que $a \cdot u \in f^*(U')$.

■

Para calcular $f_*(U)$ lo más sencillo es tomar un sistema de generadores de U. Entonces las imágenes de estos vectores forman un sistema de generadores de $f_*(U)$. Esto es así, porque si $S_U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ es ese sistema de generadores, todo vector de U se expresa como $u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m$.

Si ahora tomamos $v \in f_*(U)$ entonces v es de la forma $f(u)$ para algún $u \in U$, luego $v = f(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m) = a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + \cdots + a_mf(u_m)$. Vemos que v se expresa como combinación lineal de $\{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_m)\}$. Por tanto, ese conjunto es un sistema de generadores.

Ejemplo 7.4.1.

Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ la aplicación lineal dada por $f(x, y, z) = (3x + 4y + 2z, 5x + y + 3z, 4y + 6z)$.

1. *Si $U = L[(1, 1, 1);\ (1, 3, 0)]$ vamos a calcular una base y las ecuaciones de $f_*(U)$*

   Puesto que $\{(1, 1, 1);\ (1, 3, 0)\}$ es una base de U, $\{f(1, 1, 1);\ f(1, 3, 0)\} = \{(2, 2, 3);\ (1, 1, 5)\}$ es un sistema de generadores de $f_*(U)$.

   Ambos son linealmente dependientes (el primero es el doble del segundo). Por tanto, una base de $f_*(U)$ es $B_{f_*(U)} = \{(1, 1, 5)\}$. Viene dado entonces por dos ecuaciones cartesianas, que podrían ser

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \right.$$

2. *Vamos a calcular $f^*(U)$. Para esto, en primer lugar calculamos las ecuaciones cartesianas de U. Como U tiene dimensión 2, viene dado por una ecuación.*

$$0 = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = 4x + y + 2z$$

   Entonces tenemos que $(x, y, z) \in f^*(U)$ si, y sólo si, $f(x, y, z) \in U$, si, y sólo si, $(3x+4y+2z, 5x+y+3z, 4y+6z) \in U$. Por tanto, este vector debe satisfacer la ecuación de U. Tenemos entonces:

$$4(3x+4y+2z)+(5x+y+3z)+3(4y+6z)=0 \Longleftrightarrow 3x+y+z=0$$

Por tanto $f^*(U)$ es el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^3$ que tiene ecuación $3x+y+z=0$. Una base podría ser $\{(2,0,1);\ (2,1,0)\}$.

3. *Sea $W \equiv 2x+3y+6z=0$. Entonces $f^*(W)$ viene dado por la ecuación*

$$2(3x+4y+2z)+3(5x+y+3z)+6(4y+6z)=0$$

que después de reducirla queda $0x+0y+0z=0$. Como todos los vectores cumplen esa ecuación tenemos que $f^*(W)=(\mathbb{Z}_7)^3$.

7.4.2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal.

Tomando en la proposición anterior como subespacios $U=V$ y $U'=\{0\}$ tenemos la imagen y el núcleo de una aplicación lineal.

Definición 84. *Sea $f: V \to V'$ una aplicación lineal.*

- *La imagen de f es el subespacio $f_*(V)$, es decir, todos los vectores de V' que son imagen de algún vector de V. Este espacio será denotado como $Im(f)$.*
- *El núcleo de f es el subespacio $f^*(\{0\})$, es decir, todos los vectores de V cuya imagen por f es el vector cero. Este subespacio será denotado como $N(f)$.*

Ejemplo 7.4.2.

Dada la aplicación del ejemplo anterior, vamos a calcular el núcleo y la imagen. La aplicación estaba definida entre los espacios vectoriales $(\mathbb{Z}_7)^3$, y venía dada por la expresión $f(x,y,z)=(3x+4y+2z, 5x+y+3z, 4y+6z)$

Para calcular la imagen, tomamos una base de $(\mathbb{Z}_7)^3$, por ejemplo la base canónica, y calculamos las imágenes de los vectores que la forman.

$f(1,0,0)=(3,5,0)$; $f(0,1,0)=(4,1,4)$; $f(0,0,1)=(2,3,6)$.

A partir de ellos, podemos obtener una base

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, una base de la imagen es $B_{Im(f)}=\{(1,0,2);\ (0,1,3)\}$. Como su dimensión es 2 viene dada por una ecuación, que sería $z=2x+3y$, o mejor $2x+3y+6z=0$.

Notemos que la matriz de la que hemos calculado la forma normal de Hermite por columnas es $M_{B_c}(f)$.

Para calcular el núcleo, necesitamos resolver el sistema $f(x,y,z)=(0,0,0)$. La matriz de coeficientes del sistema es justamente $M_{B_c}(f)$. Calculamos su forma normal de Hermite por filas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego las ecuaciones del núcleo quedan $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & & + & z = & 0 \\ & y & + & 5z = & 0 \end{array}\right.$ *Una base del núcleo es entonces $B_{N(f)}=\{(1,5,6)\}$.*

Hemos visto en este ejemplo que si A es la matriz de f en la base canónica, entonces $dim(Im(f))=rg(A)$, mientras que $dim(N(f))=3-rg(A)$. Esto último es así porque el núcleo de f viene dado por las soluciones de un sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes es A. El número de incógnitas principales es igual al rango de A, mientras que el número de incógnitas libres es 3 (número de columnas que es igual al número de incógnitas) menos el rango de A.

Por tanto, tenemos que $dim(N(f))+dim(Im(f))=3$. Para otra aplicación lineal $f:(\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ el resultado sería el mismo. El número 3 viene del número de columnas de la matriz A, que se corresponde con la dimensión del espacio de partida de la aplicación.

Proposición 7.4.2. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces $dim(N(f))+dim(Im(f)) = dim(V)$.*

Justo antes de enunciar la proposición hemos visto una justificación de ella. Vamos a hacer una demostración un poco más rigurosa.

Demostración:

Sea $n = dim(V)$ y $r = dim(N(f))$.

Tomamos una base del núcleo $B_{N(f)} = \{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$, y la ampliamos a una base de V. $B_V = \{u_1, u_2, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n\}$.

Entonces el conjunto $\{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_r), f(u_{r+1}), \cdots, f(u_n)\} = \{0, 0, \cdots, 0, f(u_{r+1}), \cdots, f(u_n)\}$ es un sistema de generadores de $Im(f)$. Por tanto, también lo es $\{f(u_{r+1}), \cdots, f(u_n)\}$. Vamos a ver que estos vectores son linealmente independientes, en cuyo caso formarán una base de $Im(f)$.

Supongamos que tenemos una combinación lineal de ellos igualada a cero, es decir, supungamos que tenemos $a_{r+1}, \cdots, a_n \in K$ tal que $a_{r+1}f(u_{r+1}) + \cdots + a_nf(u_n) = 0$. Por ser f lineal, lo que tenemos es $f(a_{r+1}u_{r+1} + \cdots + a_nu_n) = 0$, luego $a_{r+1}u_{r+1} + \cdots + a_nu_n \in N(f)$. Es por tanto combinación lineal de los vectores de $B_{N(f)}$, es decir, $a_{r+1}u_{r+1} + \cdots + a_nu_n = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ru_r$, o lo que es lo mismo

$$-a_1 \cdot u_1 - a_2 \cdot u_2 - \cdots - a_r \cdot u_r + a_{r+1} \cdot u_{r+1} + \cdots + a_n \cdot u_n = 0$$

y como B_V es una base de V, los vectores son linealmente independientes, luego todos los coeficientes son nulos. En particular, $a_{r+1} = \cdots = a_n = 0$. ■

Ejemplo 7.4.3. *Vamos a dar, si es posible, una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_3)^3 \to (\mathbb{Z}_3)^2$ de forma que $(1, 2, 1) \in N(f)$ y $(2, 1) \in Im(f)$.*

En primer lugar, veamos si es posible con las condiciones que nos dan. Puesto que $(1, 2, 1) \in N(f)$ sabemos que $dim(N(f)) \geq 1$, y dado que $(2, 1) \in Im(f)$ la dimensión de la imagen debe ser mayor o igual que 1 también.

Por tanto, las condiciones que nos dan nos dicen que $dim(N(f)) + dim(Im(f)) \geq 2$. Puesto que esa suma debe valer 3, sí es posible dar la aplicación.

Tomamos una base de $(\mathbb{Z}_3)^3$ que contenga al vector $(1, 2, 1)$. Por ejemplo, $B = \{(1, 2, 1);\ (0, 1, 0);\ (0, 0, 1)\}$

Para dar una aplicación lineal, basta con dar la imagen de los elementos de una base. Pues lo hacemos con la base B.

La imagen de $(1, 2, 1)$ debe valer $(0, 0)$, pues $(1, 2, 1) \in N(f)$.

Elegimos la imagen de $(0, 1, 0)$ como el vector $(2, 1)$. Así nos aseguramos que pertenece a la imagen.

Para el $(0, 0, 1)$ podemos elegir el que queramos. Por ejemplo, $(1, 1)$.

La aplicación f que nos piden es la única que verifica que $f(1, 2, 1) = (0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (2, 1)$ y $f(0, 0, 1) = (1, 1)$.

Vamos a dar explícitamente f. Para ello, vamos a calcular la matriz de f en las bases canónicas.

Sabemos que $M_{B,B'_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde $B'_c = \{(1, 0);\ (0, 1)\}$.

Si $B_c = \{(1, 0, 0);\ (0, 1, 0);\ (0, 0, 1)\}$ entonces

$$M_{B_c,B'_c}(f) = M_{B,B'_c}(f) \cdot M_{B_c \to B} = M_{B,B'_c}(f) \cdot (M_{B \to B_c})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la aplicación lineal viene dada por $f(x, y, z) = (x + 2y + z, y + x)$.

Notemos como $f(1, 2, 1) = (1 + 4 + 1, 2 + 1) = (0, 0)$, luego $(1, 2, 1) \in N(f)$ y $f(0, 1, 0) = (0 + 2 + 0, 1 + 0) = (2, 1)$, luego $(2, 1) \in Im(f)$.

7.4.3. Aplicaciones lineales inyectivas y sobreyectivas.

En el capítulo primero estudiamos las aplicaciones entre conjuntos, y distinguimos las que son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Vamos aquí a relacionar lo que es una aplicación lineal inyectiva o sobreyectiva con los subespacios que hemos definido en la sección precedente.

En primer lugar, se tiene que una aplicación lineal $f : V \to V'$ es sobreyectiva si, y sólo si, $Im(f) = V'$. Eso no es más que la defnción de aplicación sobreyectiva y del subespacio $Im(f)$.

Ya no tan trivial es que una aplicación lineal $f : V \to V'$ es inyectiva si, y sólo si, $N(f) = \{0\}$.

Es claro que si f es inyectiva, el núcleo de f es $\{0\}$, pues si $u \in N(f)$ entonces $f(u) = 0 = f(0)$, y por ser inyectiva, $u = 0$.

Supongamos ahora que $N(f) = \{0\}$, y sean $u, v \in V$ tales que $f(u) = f(v)$. Por ser f lineal, $f(u-v) = 0$, luego $u - v \in N(f)$. Es decir, $u - v = 0$, luego $u = v$.

En resumen. Dada $f : V \to V'$ lineal

f es sobreyectiva si, y sólo si, $Im(f) = V'$.
f es inyectiva si, y sólo si, $N(f) = \{0\}$.

Ejemplo 7.4.4.
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *la aplicación lineal*

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, x - y + 2z, x + z, -y - z)$$

Calculamos el núcleo de f*. Escribimos la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones correspondiente y hallamos su forma de Hermite por filas.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $N(f) = \{(0, 0, 0)\}$*, y* f *es inyectiva.*
No es sobreyectiva, pues $dim(Im(f)) = 3 - dim(N(f)) = 3 - 0 = 3$*, luego* $Im(f) \neq \mathbb{R}^4$*.*

Proposición 7.4.3. *Sean* V *y* V' *dos* K*-espacios vectoriales, y* $f : V \to V'$ *una aplicación lineal. Sea* $B_V = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ *una base de* V*, y* $X = \{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)\}$ *el conjunto formado por las imágenes de los elementos de* B_V*. Entonces:*

- f *es inyectiva si, y sólo si, los vectores de* X *son linealmente independientes.*
- f *es sobreyectiva si, y sólo si,* X *es un sistema de generadores de* V'*.*
- f *es biyectiva si, y sólo si,* X *es una base de* V'*.*

Demostración:
Notemos en primer lugar que X es un sistema de generadores de $Im(f)$.

Supongamos que f es inyectiva. En ese caso, $dim(N(f)) = 0$, luego $dim(Im(f)) = dim(V) = n$. Como X es un sistema de generadores de $Im(f)$, y X tiene n elementos X tiene que ser una base de X, luego los elementos de X son linealmente independientes.

Recíprocamente, si los elementos de X son linealmente independientes, forman una base de $Im(f)$, luego $dim(Im(f)) = n$, de donde $dim(N(f)) = 0$. Por tanto, f es inyectiva.

Que f es sobreyectiva si, y sólo si, X es un sistema de generadores de V' es trivial, pues X es un sistema de generadores de $Im(f)$ y f es sobreyectiva si, y sólo si, $Im(f)) = V'$.

Juntando estos dos resultados tenemos que f es biyectiva si, y sólo si, X es una base de V'. ■

A partir de este resultado es inmediato comprobar el siguiente corolario.

Corolario 7.4.1. *Sean* V *y* V' *dos* K*-espacios vectoriales de dimensiones* n *y* m *respectivamente,* $f : V \to V'$ *una aplicación lineal, y* B_V*,* $B_{V'}$ *bases de* V *y* V'*.*
Sea $A = M_{B,B'}(f)$ *(se tiene que* $A \in M_{m\times n}(K)$*). Entonces:*

- f *es inyectiva si, y sólo si,* $rg(A) = n$*.*
- f *es sobreyectiva si, y sólo si,* $rg(A) = m$*.*
- f *es biyectiva si, y sólo si,* $rg(A) = m = n$*, si, y sólo si,* A *es regular.*
  En este caso, $f^{-1} : V' \to V$ *es lineal y* $M_{B',B}(f^{-1}) = A^{-1}$*.*

Supongamos que V es un K-espacio vectorial de dimensión n, y V' es un K-espacio vectorial de dimensión m, y $f : V \to V'$ es una aplicación lineal. Si A es la matriz de f en alguna pareja de bases, entonces $A \in M_{m\times n}(K)$.

Entonces si $m < n$ la aplicación no puede ser inyectiva, pues el rango no puede valer n. Es decir, no hay aplicaciones lineales inyectivas de un espacio vectorial en otro de dimensión menor.

Pero sí podemos definir aplicaciones lineales sobreyectivas de un espacio vectorial en otro de dimensión más pequeña (o igual)

Si $m > n$ la aplicación no puede ser sobreyectiva, pues el rango de A no puede valer m. Es decir, no hay aplicaciones lineales sobreyectivas de un espacio vectorial en otro de dimensión mayor.

Pero sí podemos definir aplicaciones lineales inyectivas de un espacio vectorial en otro de dimensión más grande.

Ejemplo 7.4.5. *Vamos a dar una aplicación lineal inyectiva* $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^4$.

Como una aplicación lineal podemos darla a partir de su matriz asociada, y la matriz de la aplicación f *será una matriz de tamaño* 4×3 *lo que necesitamos es* $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$ *cuyo rango sea igual a 3.*

Por ejemplo, tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. *Como* $rg(A) = 3$, *la aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas es* A *es inyectiva. Esta aplicación es*

$$f(x, y, z) = (x + 3y + 2z, 2x + y + z, x + y + 4z, 4x + 3y + 2z)$$

También podríamos haber elegido la aplicación con la condición de que los vectores $f(1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0)$ *y* $f(0, 0, 1)$ *fueran tres vectores de* $(\mathbb{Z}_5)^4$ *linealmente independientes. Tomando* $f(1, 0, 0) = (1, 2, 1, 4)$, $f(0, 1, 0) = (3, 1, 1, 3)$ *y* $f(0, 0, 1) = (2, 1, 4, 2)$ *obtenemos la aplicación anterior.*