TEMA 8 DIAGONALIZACION DE MATRICES

• Una matriz diagonal es una matriz cuadrada que tiene todas sus entradas iguales a cero, salvo posiblemente algunas de la diagonal principal.

EJEMPLO

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ es una matriz diagonal.

• Una matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ es diagonalizable si existen $P, D \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tq D es diagonal, P es regular y $A = PDP^{-1}$.

NOTA.

La diagonalizacion de matrices es util para el calculo de potencias grandes de una matriz ya que si A es diagonalizable y $A = PDP^{-1}$ entonces $A^r = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \overset{(r}{\cdots} \cdot PDP^{-1} =$

$$= PD^r P^{-1} \quad \text{y} \quad D^r = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} d_1^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^r \end{pmatrix}.$$

• Un elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tq

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

En tal caso diremos que $(x_1, \dots, x_n)$ es un vector propio asociado al valor propio λ.

TEOREMA.

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces λ es un valor propio de A si y solo si $|A-\lambda I_n| = 0$.

• El teorema anterior nos dice que los valores propios de la matriz A son las raíces del polinomio $|A-\lambda I_n| \in \mathbb{K}[\lambda]$. A dicho polinomio lo llamaremos polinomio característico de A y lo denotaremos $P_A(\lambda)$. Nótese que $gr(P_A(\lambda)) = n$.

EJERCICIO

Calcula el polinomio característico y los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

-D-

$$P_A(\lambda) = |A-\lambda I_2| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = -1. \end{cases}$$

• Una matriz cuadrada es triangular superior si todos los elementos que hay por debajo de la diagonal principal son cero. Una matriz cuadrada es triangular inferior si todos los elementos que hay por encima de la diagonal principal son cero. Una matriz es triangular si es triangular superior o triangular inferior.

EJEMPLO

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es triangular inferior y $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es triangular superior.

PROPOSICION

1) Si A es una matriz triangular, entonces sus valores propios son los valores que aparecen en la diagonal principal.

2) Si A es una matriz cuadrada entonces los valores propios de A y los valores propios de A^t coinciden.

3) $|A|=0$ si y solo si 0 es un valor propio de A.

4) Si A es una matriz regular y λ es un valor propio de A entonces λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.

- Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A. Entonces $V(\lambda)=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{K}^n \text{ tq } (A-\lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ al que llamaremos subespacio vectorial propio asociado al valor propio λ.

EJERCICIO

Calcular una base para cada uno de los subespacios vectoriales propios de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

-D-

Por un ejercicio anterior sabemos que -1 y 3 son los valores propios de la matriz A.

$V(-1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } \left(\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}=$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } 2x+2y=0\}.$

$\dim(V(-1))=2-1=1$ y $B_{V(-1)}=\{(1,-1)\}.$

$V(3)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{matrix}-2x+2y=0\\2x-2y=0\end{matrix}\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } -2x+2y=0\}.$

$\dim(V(3))=2-1=1$ y $B_{V(3)}=\{(1,1)\}.$

- Sea λ_1 un valor propio de una matriz $A\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. A la multiplicidad de la raiz λ_1 de $P_A(\lambda)$ la llamaremos la multiplicidad algebraica de λ_1 y a $\dim(V(\lambda_1))$ la llamaremos la multiplicidad geometrica de λ_1.

EJERCICIO

Calcular las multiplicidades algebraicas y geometricas de los valores propios de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

-D-

Sabemos que $P_A(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-3$ y que sus valores propios son 3 y -1. Tambien sabemos que $\dim(V(-1))=\dim(V(3))=1$. Por tanto los dos valores propios tienen multiplicidad geométrica 1.

Como $P_A'(\lambda)=2\lambda-2$, $P_A'(-1)=-4\neq0$ y $P_A'(3)=4\neq0$ entonces los dos valores propios tienen multiplicidad algebraica 1.

PROPOSICION

La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que su multiplicidad algebraica.

CRITERIO DE DIAGONALIZACION

Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Entonces A es diagonalizable si y solo si la suma de las multiplicidades algebraicas de sus valores propios es igual a n y además para todo valor propio coinciden su multiplicidad algebraica y geométrica.

COROLARIO

Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

COROLARIO

Toda matriz cuadrada y simétrica con coeficientes en $\mathbb{R}$ es diagonalizable.

METODO PARA DIAGONALIZAR UNA MATRIZ

Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$.

1) Calculamos $P_A(\lambda)$, sus raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ y sus multiplicidades algebraicas $m_1, \dots, m_k$.
2) Si $m_1 + \dots + m_k \neq n$ entonces A no es diagonalizable.
3) Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ calculamos $\dim(V(\lambda_i))$. Si $\dim(V(\lambda_i)) \neq m_i$ para algún $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces A no es diagonalizable.
4) La matriz A es diagonalizable. Además $A = PDP^{-1}$ donde D es la matriz diagonal que tiene en la diagonal m_1

veces λ_1, m_2 veces λ_2, ..., m_k veces λ_k y P (llamada matriz de paso) se obtiene colocando por columnas una base de $V(\lambda_1)$, una base de $V(\lambda_2)$, ..., una base de $V(\lambda_k)$.

EJERCICIO

Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

-D-

Sabemos que -1 y 3 son los valores propios de A. Además para los dos valores propios sus multiplicidades algebraicas y geométricas valen 1. Por tanto $A = PDP^{-1}$ donde

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recuérdese que $B_{V(-1)} = \{(1,-1)\}$ y $B_{V(3)} = \{(1,1)\}$.

EJERCICIO

Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_7)$

-D-

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 6\lambda^3 + 5\lambda + 5$$

$$6\lambda^3 + 5\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{2, 3\}.$$

$$P_A'(\lambda) = 4\lambda^2 + 5 \qquad P_A'(2) = 0 \quad y \quad P_A'(3) = 6 \neq 0$$

$$P_A''(\lambda) = \lambda \qquad P_A''(2) = 2 \neq 0.$$

Los valores propios son 2 y 3 y tienen multiplicidades algebraicas 2 y 1 respectivamente.

$$V(2)=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5\\ 6 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{matrix} 2x+2y+5z=0\\ 6x+6y+z=0\end{matrix}\right\}=\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } 2x+2y+5z=0\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 0\\ 6 & 6 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\dim(V(2))=3-1=2$, $B_{V(2)}=\{(6,1,0),(1,0,1)\}$.

$$V(3)=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5\\ 6 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{matrix} x+2y+5z=0\\ 6x+5y+z=0\\ 6z=0\end{matrix}\right\}=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{Z}_7^3 \text{ tq } \begin{matrix} x+2y+5z=0\\ 6z=0\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0\\ 6 & 5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\dim(V(3))=3-2=1$, $B_{V(3)}=\{(1,3,0)\}$.

$A=PDP^{-1}$ donde $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

EJERCICIO

Diagonalizar la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

-D-

$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2 \Rightarrow$ 1 es el único valor propio y tiene multiplicidad algebraica 2.

$V(1)=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y=0\}$.

$\dim(V(1))=2-1=1$. La matriz A no es diagonalizable.

EJERCICIO

Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

-D-

Como la matriz A es triangular entonces los valores propios son 1 y 2 y tienen los dos multiplicidad algebraica 2.

$$V(1) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{r} 2y+3z+4t=0 \\ 2z+3t=0 \\ z+t=0 \\ t=0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V(1) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tq } \begin{array}{r} 2y+3z+4t=0 \\ 2z+3t=0 \\ 2t=0 \end{array} \right\}$$

$$\dim(V(1)) = 4-3 = 1.$$

La multiplicidad algebraica y geométrica del valor propio 1 no coincide. Por tanto, la matriz A no es diagonalizable.