Capítulo 8

Diagonalización

8.1. Introducción. Matrices semejantes.

Antes de entrar en materia, vamos a analizar el siguiente ejemplo.
Consideramos la aplicación $f : (\mathbb{Z}_{11})^3 \to (\mathbb{Z}_{11})^3$ dada por $f(x, y, z) = (4x+7y+8z, 4y+4z, 9x+10z)$.
Vamos a calcular la matriz de f en la base $B = \{(8, 5, 7);\ (1, 7, 8);\ (1, 1, 1)\}$.
Si llamamos u_1, u_2 y u_3 a los vectores de la base B entonces tenemos que

$f(u_1) = f(8, 5, 7) = (32 + 35 + 56, 20 + 28, 72 + 70) = (123, 48, 142) = (2, 4, 10) = 3 \cdot (8, 5, 7) = 3u_1$.
$f(u_2) = f(1, 7, 8) = (4 + 49 + 64, 28 + 32, 9 + 80) = (117, 60, 89) = (7, 5, 1) = 7 \cdot (1, 7, 8) = 7u_2$.
$f(u_3) = f(1, 1, 1) = (4 + 7 + 8, 4 + 4, 9 + 10) = (19, 8, 19) = (8, 8, 8) = 8 \cdot (1, 1, 1) = 8u_3$.

Es decir:

$$f(u_1) = 3 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3; \qquad f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 7 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3; \qquad f(u_3) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 8 \cdot u_3$$

Luego

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

También podíamos haber obtenido esta matriz a partir de la matriz de f en la base canónica, utilizando luego la expresión del cambio de base.

Sabemos que $M_B(f) = M_{B_c\to B} \cdot M_{B_c}(f) \cdot M_{B\to B_c} = (M_{B\to B_c})^{-1} \cdot M_{B_c}(f) \cdot M_{B\to B_c}$, y puesto que $M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ y $M_{B\to B_c} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$. Vamos a calcular A^8.

Una posibilidad sería multiplicar A consigo misma 8 veces, para así obtener la matriz que buscamos. Pero con lo que hemos hecho, vamos a proceder de otra forma.

Sea $P = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Entonces $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, luego $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Por tanto,

$$A^8 = (PDP^{-1})^8 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^8P^{-1}$$

Y como $D^8 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} 3^8 & 0 & 0 \\ 0 & 7^8 & 0 \\ 0 & 0 & 8^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ tenemos que $A^8 = PD^8P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 8 & 9 & 10 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

A partir de esto, realizamos las siguientes definiciones.

Definición 85. *Sea $A, C \in M_n(K)$. Se dice que A y C son semejantes si existe P regular tal que $P^{-1}AP = C$.*

Notemos que dos matrices A y C son semejantes si, y sólo si, representan el mismo endomorfismo (aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo) en bases distintas.

Dicho de otra forma, si $f : V \to V$ es una aplicación lineal cuya matriz en una base B es A, y C es una matriz semejante a A, entonces existe una base B' tal que $M_{B'}(f) = C$.

La relación de semejanza en el conjunto de las matrices cuadradas es una relación de equivalencia, pues:

- La relación es reflexiva, ya que toda matriz es semejante a ella misma, pues $A = P^{-1}AP$, con $P = Id_n$.
- La relación es simétrica, ya que si A y C son semejantes entonces $C = P^{-1}AP$ para alguna matriz P. En tal caso, $A = Q^{-1}CQ$, donde $Q = P^{-1}$.
- La relación es transitiva, pues si $B = P_1^{-1}AP_1$ y $C = P_2^{-1}BP_2$ entonces $C = P^{-1}AP$, con $P = P_2P_1$.

Definición 86. *Sea $A \in M_n(K)$. Se dice que A es diagonalizable (por semejanza) si existe una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.*

Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal. Se dice que f es diagonalizable si existe una base de V, B, tal que $M_B(f)$ es una matriz diagonal.

Observaciones:

Dada una aplicación lineal $f : V \to V$ y B una base, es lo mismo decir que la aplicación lineal f es diagonalizable a decir que la matriz $M_B(f)$ es diagonalizable.

Resolver el problema de la diagonalización de f supone encontrar una base B' tal que $M_{B'}(f)$ sea diagonal. Esto nos resuelve el problema de diagonalizar A. Basta tomar $P = M_{B' \to B}$.

Recíprocamenhte, resolver el problema de la diagonalización de A supone encontrar una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Hecho esto, basta tomar la base B' formada por los vectores cuyas coordenadas en B son las columnas de P.

Hemos visto que la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_{11})^3 \to (\mathbb{Z}_{11})^3$ dada por $f(x, y, z) = (4x+7y+8z, 4y+4z, 9x+10z)$ es diagonalizable. La matriz de esta aplicación lineal en la base $B = \{(8, 5, 7);\ (1, 7, 8);\ (1, 1, 1)\}$ es una matriz diagonal, como hemos comprobado.

Si $A = M_{B_c}(f)$, entonces $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. La matriz A es diagonalizable, pues hay una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal. Notemos que las columnas de P son las coordenadas de los vectores de B en la base canónica.

Vamos a continuación a tratar de dar respuesta a cuando un endomorfismo, o cuando una matriz cuadrada, es diagonalizable. Para esto vamos a suponer que el problema lo tenemos resuelto, y analizamos lo que ocurre.

Sea $f : V \to V$ lineal, y supongamos que es diagonalizable. Esto significa que existe una base $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ tal que $M_B(f)$ es diagonal. Sea entonces

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = M_B(f)$$

Lo que quiere decir que $f(u_1) = \lambda_1 u_1,\ f(u_2) = \lambda_2 u_2,\ \cdots\ f(u_n) = \lambda_n u_n$.

8.2. Valores y vectores propios.

La última observación nos da pie para la siguiente definición.

Definición 87.

- *Sea V un K-espacio vectorial, y $f : V \to V$ una aplicación lineal. Se dice que $\lambda \in K$ es un valor propio de f si existe $u \in V$, $u \neq 0$ tal que $f(u) = \lambda \cdot u$.*
- *Sea $A \in M_n(K)$. Se dice que $\lambda \in K$ es un valor propio de A si existe $x \in M_{n\times 1}(K)$, $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$.*

Definición 88.

- *Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal, y $u \in V$. Se dice que u es un vector propio de f si existe un escalar $\lambda \in K$ tal que $f(u) = \lambda \cdot u$.*

  En tal caso, se dice que u es un vector propio de valor propio λ.
- *Sea $A \in M_n(K)$, y $x \in M_{n\times 1}(K)$. Se dice que x es un vector propio de la matriz A si existe $\lambda \in K$ tal que $A \cdot x = \lambda \cdot x$.*

  En tal caso se dice que x es un vector propio de valor propio λ.

Dada una aplicación lineal $f : V \to V$, para cualquier $\lambda \in K$ se tiene que $f(0) = \lambda 0$. Por tanto, de acuerdo con la definición 88 dado $\lambda \in K$, 0 es un vector propio de valor propio λ. Sin embargo, si no existe otro vector u para el que $f(u)$ valga λu, entonces, de acuerdo con la definición 87, λ no sería valor propio.

La misma observación vale para matrices.

Es decir, llamaremos valores propios a aquellos escalares para los que haya vectores propios no nulos.

Ejemplo 8.2.1.

1. *Sea $f : (\mathbb{Z}_{11})^3 \to (\mathbb{Z}_{11})^3$ la aplicación dada por $f(x, y, z) = (4x + 7y + 8z, 4y + 4z, 9x + 10z)$.*

   Entonces 7 es un valor propio, pues existe un vector distinto de cero, a saber el vector $u = (1, 7, 8)$ tal que $f(u) = 7u$. El vector u es un vector propio de valor propio 7.

   El vector $v = (1, 2, 5)$ es un vector propio de valor propio 3, ya que

   $$f(1, 2, 5) = (4 + 14 + 40, 8 + 20, 9 + 50) = (58, 28, 59) = (3, 6, 4) = 3 \cdot (1, 2, 5)$$

   Por tanto, 3 es un valor propio. El vector $(1, 2, 3)$ no es un vector propio, pues se tiene que $f(0, 1, 1) = (4, 8, 10)$. Claramente no existe $\lambda \in \mathbb{Z}_{11}$ tal que $\lambda(0, 1, 1) = (4, 8, 10)$.

2. *Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$ (notemos que A es la matriz de la aplicación lineal f en la base canónica).*

   Se tiene que 7 es un valor propio de A, ya que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. La vector (la matriz) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz A de valor propio 7.

   El vector $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector propio de valor propio 8, ya que

   $$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + 14 + 16 \\ 8 + 8 \\ 18 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 16 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El vector $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *no es vector propio, ya que*

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+8 \\ 0+4 \\ 9+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

que no puede escribirse como $\lambda \cdot z$*.*

3. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la aplicación lineal* $f(x, y) = (-y, x)$*. Supongamos que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *es un valor propio, y* $u = (x, y)$ *un vector propio (no nulo) de valor propio* λ*. Entonces* $(-y, x) = f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$*, luego:*

$$\begin{array}{l} \lambda x = -y \\ \lambda y = x \end{array} \implies \begin{array}{l} \lambda^2 x = -\lambda y \\ -\lambda y = -x \end{array} \implies \lambda^2 x = -x \implies \lambda^2 x + x = 0 \implies (\lambda^2 + 1)x = 0$$

Y por tanto, $x = 0$ *ó* $\lambda^2 + 1 = 0$*. Pero si* $x = 0$ *tenemos que* $y = 0$*, lo que supondría que el vector* u *es el vector nulo. Y sabemos que no existe ningún número real* λ *tal que* $\lambda^2 + 1 = 0$*.*

Deducimos que la aplicación f *no tiene valores propios, y no tiene vectores propios no nulos.*

Si u *es un vector propio (no nulo) de una aplicación lineal* f*, entonces los vectores* u *y* $f(u)$ *se encuentran en la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector* u*. La aplicación lineal* f *representa un giro en el plano de 90 grados con centro el origen, y no hay ningún vector que al girarlo 90 grados se quede en la misma recta. Por tanto,* f *no tiene vectores propios.*

4. *De la misma forma, se comprueba que la matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *no tiene valores propios ni vectores propios.*

   Sin embargo, el vector $x = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ *es un vector propio, de valor propio* $\lambda = i$*, de la matriz* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$*.*

5. *Sea ahora* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la aplicación lineal definida por* $g(x, y) = (y, x)$*. Supongamos que* $u = (x, y)$ *es un vector propio de valor propio* λ*. En tal caso, razonando igual que antes tenemos* $(y, x) = g(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$*:*

$$\begin{array}{l} \lambda x = y \\ \lambda y = x \end{array} \implies \begin{array}{l} \lambda^2 x = \lambda y \\ \lambda y = x \end{array} \implies \lambda^2 x = x \implies \lambda^2 x - x = 0 \implies (\lambda^2 - 1)x = 0$$

Ahora la ecuación $\lambda^2 - 1 = 0$ *si tiene solución real. Concretamente,* $\lambda = 1$ *y* $\lambda = -1$*. Tenemos que ambos números son valores propios, y los vectores* $(1, 1)$ *y* $(1, -1)$ *son vectores propios.*

Si tomamos la base $B = \{(1, 1);\ (1, -1)\}$ *podemos ver que* $M_B(g)$ *es una matriz diagonal.*

Esta aplicación g *es una simetría respecto la recta* $y = x$*. Por tanto, los vectores de esa recta se quedan fijos (son vectores propios de valor propio 1), mientras que el vector* $(1, -1)$*, que es perpendicular a esa recta se transforma en su opuesto (y es por tanto un vector propio de valor propio -1).*

8.3. Subespacios propios.

Es inmediato comprobar que una aplicación lineal $f : V \to V$ es diagonalizable (ver definición 86) si, y sólo si, existe una base de V formada por vectores propios (en tal caso, la matriz de f en esa base es diagonal).

Para matrices se tiene lo mismo. Una matriz $A \in M_n(K)$ es diagonalizable si, y sólo si, existe una base de $M_{n\times 1}(K)$ formada por vectores propios. En tal caso, los vectores propios serían las columnas de la matriz P.

Vamos a introducir un poco de nomenclatura.

Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal, y $\lambda \in K$. Vamos a llamar V_λ al conjunto

$$V_\lambda = \{u \in V : f(u) = \lambda \cdot u\}$$

es decir, el conjunto de todos los vectores propios de valor propio λ.

De la misma forma, si $A \in M_n(K)$ y $\lambda \in K$, vamos a denotar por V_λ al conjunto

$$V_\lambda = \{x \in M_{n\times 1}(K) : A \cdot x = \lambda \cdot x\}$$

Como era de esperar, se tiene que:

Proposición 8.3.1.

- *Sea V un K-espacio vectorial, $f : V \to V$ una aplicación lineal y λ un escalar. Entonces V_λ es un subespacio vectorial de V.*
- *Sea $A \in M_n(K)$ y $\lambda \in K$ un escalar. Entonces V_λ es un subespacio vectorial de $M_{n\times 1}(K)$.*

Demostración: La demostración de la proposición es muy sencilla. Vamos a hacerlo en el caso de la aplicación lineal.

Tenemos que comprobar que V_λ es cerrado para sumas y para producto por escalares (bueno, y que es distinto del vacío, lo cual es cierto pues $0 \in V_\lambda$). Sean entoces $u, v \in V_\lambda$ y $a \in K$. Tenemos que $f(u) = \lambda u$ y $f(v) = \lambda v$.

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v = \lambda \cdot (u+v) \implies u+v \in V_\lambda.$$
$$f(a\cdot u) = a \cdot f(u) = a \cdot (\lambda \cdot u) = (a \cdot \lambda) \cdot u = (\lambda \cdot a) \cdot u = \lambda \cdot (a \cdot u) \implies a \cdot u \in V_\lambda.$$

En el caso de matrices se hace de forma análoga. ■

Ejemplo 8.3.1.

1. *Volvemos a la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_{11})^3 \to (\mathbb{Z}_{11})^3$ dada por $f(x, y, z) = (4x+7y+8z, 4y+4z, 9x+10z)$. Vamos a calcular V_3.*

$$\begin{array}{rcl} V_3 & = & \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_{11})^3 : f(x,y,z) = (3x, 3y, 3z)\} \\ & = & \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_{11})^3 : (4x+7y+8z, 4y+4z, 9x+10z) = (3x, 3y, 3z)\} \\ & = & \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_{11})^3 : (4x+7y+8z-3x, 4y+4z-3y, 9x+10z-3z) = (0,0,0)\} \\ & = & \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_{11})^3 : (x+7y+8z, y+4z, 9x+7z) = (0,0,0)\} \end{array}$$

Vemos entonces que V_3 es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 7y & + & 8z & = & 0 \\ & & y & + & 4z & = & 0 \\ 9x & & & + & 7z & = & 0 \end{array}$$

que es un subespacio vectorial. Resolvemos el sistema calculando la forma normal de Hermite de la matriz de coeficientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(8)]{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el subespacio V_3 es el que viene dado por las ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 4z & = & 0 \end{array} \right.$ *o lo que es lo mismo,* $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 8z \\ y & = & 7z \end{array} \right.$ *que tiene dimensión 1, y una base sería $B_{V_3} = \{(8, 7, 1)\}$.*

2. Vamos a calcular los subespacios V_7 y V_6 de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$.

$$\begin{aligned} V_7 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times1}(\mathbb{Z}_{11}) : \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times1}(\mathbb{Z}_{11}) : \begin{pmatrix} 4x+7y+8z \\ 4y+4z \\ 9x \quad +10z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x \\ 7y \\ 7z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times1}(\mathbb{Z}_{11}) : \begin{pmatrix} 8x+7y+8z \\ 8y+4z \\ 9x \quad +3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

y si escribimos la matriz de coeficientes del sistema, y lo resolvemos, nos queda:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego V_7 tiene dimensión 1 *y una base sería* $B_{V_7} = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Notemos que la matriz de coeficientes del sistema podemos obtenerla

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-7 & 7 & 8 \\ 0 & 4-7 & 4 \\ 9 & 0 & 10-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = A - 7 \cdot Id$$

Para V_6 procedemos de forma análoga, y llegamos a que la matriz de coeficientes del sistema que nos determina el subespacio es la matriz $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 4 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. *Como esta matriz es regular (su forma de Hermite es la identidad), la única solución del sistema es $x = y = z = 0$, luego V_6 es el subespacio cero.*

Al igual que antes, la matriz de coeficientes del sistema es la matriz $A - 6 \cdot Id$.

8.4. Polinomio característico.

En general, si A es una matriz cuadrada, y $\lambda \in K$, el subespacio V_λ puede obtenerse como el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo en el que la matriz de coeficientes es $A - \lambda \cdot Id$.

Para ver si una matriz o un endomorfismo es diagonalizable, lo que necesitamos es buscar sus vectores propios y ver si podemos construir una base con ellos.

Dada una matriz (o un endomorfismo), y un escalar λ hemos visto que es sencillo calcular el subespacio V_λ. Basta con resolver el sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes es $A - \lambda \cdot Id$.

El problema es cómo elegir λ para calcular V_λ. Dicho de otra forma, ¿cómo calcular los valores propios de una matriz o un endomorfismo?.

En un ejemplo anterior hemos visto que los valores propios se encontraban entre las soluciones de una ecuación de segundo grado. Vamos a ver como eso nos vale para cualquier matriz.

Sea $A \in M_n(K)$. Entonces $\lambda \in K$ es un valor propio si, y sólo si, el subespacio V_λ es distinto de cero. Pero vimos que este subespacio se calcula como las soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A - \lambda \cdot Id$. Para que este sistema tenga soluciones no triviales (aparte de la $x_1 = \cdots = x_n = 0$) es necesario (y suficiente) que el rango de la matriz $A - \lambda \cdot Id$ sea menor que el número de columnas, es decir, que n. Y puesto que $A - \lambda \cdot Id$ es una matriz cuadrada eso ocurre si la matriz no es regular, o lo que es lo mismo, si su determinante vale cero.

Definición 89. *Sea $A \in M_n(K)$. Se define el polinomio característico de A, $p_A(\lambda)$ como el valor del determinante de la matriz $A - \lambda \cdot Id$. Es decir, $p_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot Id)$.*

Ejemplo 8.4.1.

1. *Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Entonces el polinomio característico de A vale:*

$$p_A(\lambda) = det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

2. *El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ vale*

$$p_A(\lambda) = det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$$

3. *Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$. Entonces su polinomio característico es*

$$p_A(\lambda) = det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 7 & 8 \\ 0 & 4-\lambda & 4 \\ 9 & 0 & 10-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(4-\lambda)(10-\lambda) + 9 \cdot 7 \cdot 4 - 9 \cdot 8(4-\lambda) =$$

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 96\lambda + 160 + 252 - 288 + 72\lambda = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 24\lambda + 124 = 10\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda + 3$$

Hemos visto como al hacer el polinomio característico de matrices 2×2 nos ha dado un polinomio de grado 2, mientras que para una matriz 3×3 nos ha dado un polinomio de grado 3. En general, si $A \in M_n(K)$, el polinomio característico de A es un polinomio de grado n.

Vamos a ver una regla para el cálculo del polinomio característico de una matriz 2×2 y una matriz 3×3. Para esto, dada una matriz cuadrada A definimos su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. La denotaremos como $tr(A)$.

Dicho esto se tiene:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A) \cdot \lambda + det(A)$$

Para comprobarlo no hay más que desarrollar el determinante

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A) \cdot \lambda^2 - tr(Adj(A)) \cdot \lambda + det(A)$$

y esta última expresión desarrollada quedaría

$$-\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

La comprobación de esto es totalmente rutinaria.

Ejemplo 8.4.2.

1. *Si* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *entonces* $tr(A) = 0 + 0 = 0$ *y* $det(A) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$, *luego*

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - 0\lambda + (-1) = \lambda^2 - 1$$

2. *Sea ahora* $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$. *Entonces:*

- $tr(A) = 4 + 4 + 10 = 18 = 7$.
- $\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = (16 - 0) + (40 - 72) + (40 - 0) = 5 + 1 + 7 = 2$
- $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 160 + 0 + 252 - (288 + 0 + 0) = 6 + 10 - 2 = 14 = 3.$

Luego $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 10\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda + 3.$

Vamos ahora a definir el polinomio característico de un endomorfismo. Para eso necesitamos previamente el siguiente resultado.

Proposición 8.4.1. *Sean* $A, C \in M_n(K)$ *dos matrices semejantes. Entonces ambas tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración: Por ser semejantes, existe $P \in M_n(K)$, regular, tal que $P^{-1}AP = C$. Se tiene entonces:

$p_C(\lambda)$	$= det(C - \lambda Id)$	Por definición de polinomio característico.
	$= det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P)$	Pues $C = P^{-1}AP$ y $P^{-1}P = Id$
	$= det(P^{-1}(A - \lambda Id)P)$	Sacando factor común P^{-1} a la izquierda, y P a la derecha.
	$= det(P^{-1})det(A - \lambda Id)det(P)$	El determinante del producto es el producto de los determinantes.
	$= det(P^{-1})det(P)det(A - \lambda Id)$	Pues el producto en K es conmutativo.
	$= det(P^{-1}P)p_A(\lambda)$	El determinante del producto es el producto de los determinantes.
	$= p_A(\lambda)$	Ya que $det(P^{-1}P) = det(Id) = 1$.

■

A partir de esta proposición definimos.

Definición 90. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial, y* $f : V \to V$ *una aplicación lineal. Definimos el polinomio característico de* f *como* $p_f(\lambda) = p_A(\lambda)$, *donde* A *es la matriz de* f *en alguna base de* V.

La proposición anterior nos permite afirmar que la definición que acabamos de hacer es correcta, pues no depende de la base que elijamos para representar f. Y esto es así, porque dos matrices que representen a f en bases diferentes son matrices semejantes, y por tanto tienen el mismo polinomio característico.

Ejemplo 8.4.3.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la aplicación lineal* $f(x, y) = (y, x)$. *Si tomamos* $B_c = \{(1, 0);\ (0, 1)\}$ *se tiene que* $M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *y su polinomio característico es* $\lambda^2 - 1$ *(calculado en un ejemplo precedente).*

Si tomamos la base $B = \{(1, 1);\ (1, -1)\}$ *entonces* $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *y su polinomio característico vale*

$$det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = \lambda^2 - 1$$

que como vemos coincide con el calculado anteriormente.

Por tanto, $p_f(\lambda) = \lambda^2 - 1$.

Con lo dicho hasta ahora, la siguiente proposición es evidente.

Proposición 8.4.2.

- *Sea* $A \in M_n(K)$ *y* $\lambda_0 \in K$. *Entonces* λ_0 *es un valor propio de* A *si, y sólo si,* λ_0 *es una raíz del polinomio característico (es decir, si* $p_A(\lambda_0) = 0$*).*
- *Sea* V *un* K*-espacio vectorial y* $f : V \to V$ *una aplicación lineal. Entonces* λ_0 *es un valor propio de* f *si, y sólo si,* λ_0 *es una raíz del polinomio característico (es decir, si* $p_f(\lambda_0) = 0$*).*

Ejemplo 8.4.4.

1. *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *no tiene valores propios, pues su polinomio característico vale* $\lambda^2 + 1$*, que no tiene raíces reales.*
2. *La aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x, y) = (-y, x)$ *no tiene valores propios, pues su polinomio característico no tiene raíces reales.*
3. *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *tiene dos valores propios, que son* $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = -1$. *Estos números son las raíces del polinomio* $\lambda^2 - 1$*, que es el polinomio característico de* A.

   Esto se traduce en que la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida como* $f(x, y) = (y, x)$ *tiene como valores propios a* $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = -1$.
4. *Vamos a calcular los valores propios de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$.

   Vimos que su polinomio característico es $p_A(\lambda) = 10\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda + 3$. *Vamos a calcular sus raíces usando la regla de Ruffini.*

$$\begin{array}{c|cccc} & 10 & 7 & 9 & 3 \\ 3 & & 8 & 1 & 8 \\ \hline & 10 & 4 & 10 & 0 \\ 7 & & 4 & 1 & \\ \hline & 10 & 8 & 0 & \\ 8 & & 3 & & \\ \hline & 10 & 0 & & \end{array}$$

   Es decir, $p_A(\lambda) = 10(\lambda - 3)(\lambda - 7)(\lambda - 8)$. *Este polinomio tiene tres raíces, que son* $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 7$ *y* $\lambda_3 = 8$. *Luego* A *tiene tres valores propios.*

   Por supuesto que la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_{11})^3 \to (\mathbb{Z}_{11})^3$ *dada por* $f(x, y, z) = (4x + 7y + 8z, 4y + 4z, 9x + 10z)$ *tiene tres valores propios, que son* $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 7$ *y* $\lambda_3 = 8$.

8.5. Multiplicidades algebraica y geométrica.

Una vez visto como calcular los valores propios de una matriz y de un endomorfismo, ya sabemos cómo encontrar los vectores propios. Pero antes de dar el teorema fundamental de diagonalización, necesitamos unos resultados previos.

Comenzamos definiendo la multiplicidad de un valor propio.

Definición 91. *Sea* $A \in M_n(K)$*, y* λ_0 *un valor propio. Se dice que* λ_0 *tiene multiplicidad algebraica* α *(con* $\alpha \in \mathbb{N}$*) si* $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^\alpha q(\lambda)$*, donde* $q(\lambda)$ *es un polinomio tal que* $q(\lambda_0) \neq 0$.

En ocasiones, si λ_0 *no es un valor propio de una matriz se dice que es un valor propio de multiplicidad cero.*

Notemos que la multiplicidad algebraica de un valor propio es el exponente al que aparece elevado el factor $(\lambda - \lambda_0)$ en la descomposición de $p_A(\lambda)$ como producto de irreducibles.

De forma análoga se define la multiplicidad algebraica de un valor propio de un endomorfismo.

Ejemplo 8.5.1.

1. *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *tiene dos valores propios* $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = -1$. *Sus multiplicidades algebraicas son 1 en ambos casos, pues* $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$.

2. *Los valores propios de la matriz* $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$ *tienen todos multiplicidad algebraica igual a uno.*

3. *Vamos a calcular los valores propios, con su multiplicidad algebraica, de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. *Calculamos su polinomio característico.*

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3+(4+0+4)\lambda^2-((0-2)+(16-6)+(0-12))\lambda+(0+12+12)-(0+8+48) = 4\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+3$$

Calculamos sus raíces.

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & & 3 & 2 & 2 \\ \hline & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 4 & 1 & 1 \\ 3 & & 2 & 4 \\ \hline & 4 & 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & 4 & 3 \\ 3 & & 2 \\ \hline & 4 & 0 \end{array}$$

Es decir, $p_A(\lambda) = 4(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$. *Por tanto, tenemos dos valores propios* $\lambda_1 = 2$ *y* $\lambda_2 = 3$. *Las multiplicidades algebraicas valen* $\alpha_2 = 1$ *y* $\alpha_3 = 2$.

4. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_5)$. *Vamos a calcular sus valores propios y sus multiplicidades algebraicas.*

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^4$$

Luego A *tiene un único valor propio* $\lambda = 2$ *con multiplicidad algebraica* $\alpha_2 = 4$.

Definición 92. *Sea* $A \in M_n(K)$ *y* λ_0 *un valor propio de* A. *Se define la multiplicidad geométrica del valor propio* λ_0 *como la dimensión del subespacio* V_{λ_0}.

De la misma forma se define la multiplicidad geométrica de un valor propio de un endomorfismo.

Ejemplo 8.5.2.

1. *La multiplicidad geométrica del valor propio* $\lambda = 3$, *de la aplicación lineal* $f : (\mathbb{Z}_{11})^3 \to (\mathbb{Z}_{11})^3$ *definida como* $f(x, y, z) = (4x+7y+8z, 4y+4z, 9x+10z)$ *es* $d_3 = 1$, *como calculamos en el ejemplo 8.3.1.*

   En ese mismo ejemplo vimos que la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda = 7$ *de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ *es uno.*

2. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. *Calculamos en el ejemplo anterior los valores propios de la matriz y sus multiplicidades algebraicas. Teníamos dos valores propios,* $\lambda_1 = 2$ *y* $\lambda_2 = 3$*, y las multiplicidades algebraicas valían* $\alpha_2 = 1$ *y* $\alpha_3 = 2$*. Vamos a calcular los subespacios propios y las multiplicidades geométricas.*

   - Para el valor propio 2, tomamos la matriz $A - 2Id$ *y hallamos su forma normal de Hermite por filas.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, el subespacio V_2 *viene dado por las ecuaciones* $\left\{ \begin{array}{r} x + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right.$. *Tiene entonces dimensión uno, y una base sería* $B_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   - Para el valor propio 3 procedemos de igual forma, pero con la matriz $A - 3Id$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Y vemos ahora que $dim(V_3) = 2$*, y una base sería* $B_{V_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

   Por tanto tenemos dos valores propios $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$*. Sus multiplicidades algebraicas valen* $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$*, mientras que sus multiplicidades geométricas valen* $d_2 = 1$ *y* $d_3 = 2$.

3. *Vamos a hacer lo mismo pero con la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_5)$*, que sabemos que tiene un único valor propio* $\lambda = 2$ *con multiplicidad algebraica* $\alpha_2 = 4$.

   Calculamos el subespacio V_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Luego $V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + y + 4z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right.$ *Su dimensión vale 2, y una base podría ser* $B_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

   También podríamos haber escrito $B_{V_2} = \{(1\ 0\ 1\ 0)^t;\ (0\ 1\ 1\ 0)^t\}$.

La siguiente proposición nos relaciona las multiplicidades algebraica y geométrica de un valor propio.

Proposición 8.5.1. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial, y* $f : V \to V$ *una aplicación lineal. Sea* λ_1 *un valor propio de* f*, cuya multiplicidad algebraica vale* α_{λ_1} *y su multiplicidad geométrica vale* d_{λ_1}*. Entonces* $1 \leq d_{\lambda_1} \leq \alpha_{\lambda_1}$.

La misma relación vale si hablamos de valores propios de una matriz cuadrada.

Demostración: Por ser λ_1 un valor propio, entonces $\alpha_{\lambda_1} \geq 1$ y $d_{\lambda_1} \geq 1$. Para simplificar la notación, vamos a llamar r a la multipllicidad geométrica.

Vamos a tomar una base del subespacio V_λ, que tendrá exactamente r vectores. Sea esta base $B_{V_\lambda} = \{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$. Ampliamos esta base a una base de V, y nos queda $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n\}$.

Como $u_1, u_2, \cdots, u_r$ son vectores propios de valor propio λ_1 se tiene que $f(u_1) = \lambda_1 u_1,\ f(u_2) = \lambda_1 u_2,\ \cdots\ f(u_r) = \lambda_1 u_r$. Por tanto:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nr+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Para calcular el polinomio característico de f calculamos el polinomio característico de esta matriz, y nos queda:

$$p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^r \cdot \begin{vmatrix} a_{r+1r+1} - \lambda & \cdots & a_{r+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nr+1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)^r \cdot q(\lambda)$$

Dependiendo de que λ_1 sea o no raíz de $q(\lambda)$, la multiplicidad algebraica de λ_1 será mayor o igual que $r = d_{\lambda_1}$. ■

En los ejemplos que hemos hecho hasta ahora hay casos en que las dos multiplicidades coinciden, y otros en que se da la desigualdad estricta.

Ejemplo 8.5.3. *Vamos a repetir los pasos de la demostración con la aplicación lineal* $f : (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ *dada por*

$$f(x, y, z, t) = (3x + y + 4z + 4t, 2y + t, x + y + z + 4t, 2t)$$

La matriz de f *en la base canónica es* $M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vimos en el ejemplo anterior que tiene un único valor propio con multiplicidad algebraica igual a 4 y multiplicidad geométrica igual a 2.

Una base del subespacio propio es $B_{V_2} = \{(1, 0, 1, 0);\ (0, 1, 1, 0)\}$. *La ampliamos a una base de* $(\mathbb{Z}_5)^4$: $B = \{(1, 0, 1, 0);\ (0, 1, 1, 0);\ (0, 0, 1, 1);\ (0, 0, 0, 1)\}$. *Llamamos* u_1, u_2, u_3, u_4 *a los cuatro vectores que forman la base.*

Y ahora calculamos la matriz de f *en la base* B.

- $f(u_1) = (3 + 0 + 4 + 0, 0 + 0, 1 + 0 + 1 + 0, 0) = (2, 0, 2, 0) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4$.
- $f(u_2) = (0 + 1 + 4 + 0, 2 + 0, 0 + 1 + 1 + 0, 0) = (0, 2, 2, 0) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4$.
- $f(u_3) = (0 + 0 + 4 + 4, 0 + 1, 0 + 0 + 1 + 4, 2) = (3, 1, 0, 2) = 3 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 1 \cdot u_4$.
- $f(u_4) = (0 + 0 + 0 + 4, 0 + 1, 0 + 0 + 0 + 4, 2) = (4, 1, 4, 2) = 4 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 4 \cdot u_3 + 3 \cdot u_4$.

Por tanto, $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Su polinomio característico sería

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Y tendríamos $q(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4.$

En este caso, como $q(2) = 0$*, la multiplicidad algebraica es mayor que la geométrica.*

8.6. Teorema fundamental de diagonalización.

Recordemos que el objetivo que perseguimos es, dada una matriz $A \in M_n(K)$, encontrar una base de vectores propios.

Para conseguir la base, vamos a ir tomando el mayor número posible de vectores linealmente independientes de cada subespacio propio (es decir, una base de cada subespacio propio), y vamos a unirlos. Habrá que comprobar si conseguimos n vectores, y si éstos son linealmente independientes.

Sabemos encontrar los valores propios. Supongamos que son $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$. Llamemos α_{λ_i} a la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i. Es claro que $\alpha_{\lambda_1} + \alpha_{\lambda_2} + \cdots + \alpha_{\lambda_r} \leq n$ (¿por qué?)

Para cada valor propio sabemos calcular una base del subespacio propio correspondiente. Llamemos $B_{V_{\lambda_i}}$ a una base del subespacio propio V_{λ_i}. El cardinal de cada una de estas bases es d_{λ_i} (la multiplicidad geométrica). Puesto que $d_{\lambda_i} \leq \alpha_{\lambda_i}$ tenemos que $d_{\lambda_1} + d_{\lambda_2} + \cdots + d_{\lambda_r} \leq n$.

Por tanto, al unir las bases de los subespacios propios tendremos un total de $d_{\lambda_1} + d_{\lambda_2} + \cdots + d_{\lambda_r}$ vectores.

Para obtener una base de V nos hace falta que esta suma valga n, y que los vectores sean linealmente independietes. Vamos a ver que esto último lo tenemos siempre.

Lema 8.6.1. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial, y* $f : V \to V$ *una aplicación lineal. Supongamos que* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ *son* r *valores propios distintos de* f*.*

Sean $u_i \in V_{\lambda_i}$ *(subespacio propio) tales que* $u_1 + u_2 + \cdots + u_r = 0$*.*

Entonces $u_1 = u_2 = \cdots = u_r = 0$*.*

Demostración:

Vamos a hacer la demostración por inducción en r.

Si $r = 1$ el resultado es trivial, pues estamos diciendo que si $u_1 = 0$ entonces $u_1 = 0$.

Supongamos que el resultado es cierto para r valores propios y vamos a comprobarlo para $r + 1$.

Tenemos $u_1 \in V_{\lambda_1},\ u_2 \in V_{\lambda_2}, \cdots, u_r \in V_{\lambda_r},\ u_{r+1} \in V_{\lambda_{r+1}}$ tales que $u_1 + u_2 + \cdots + u_r + u_{r+1} = 0$.

Entonces:

- Aplicamos f, y nos queda que

$$0 = f(u_1+u_2+\cdots+u_r+u_{r+1}) = f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_r)+f(u_{r+1}) = \lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_r u_r+\lambda_{r+1}u_{r+1}$$

- Multiplicamos por λ_{r+1} la primera igualdad.

$$0 = \lambda_{r+1}(u_1 + u_2 + \cdots + u_r + u_{r+1}) = \lambda_{r+1}u_1 + \lambda_{r+1}u_2 + \cdots + \lambda_{r+1}u_r + \lambda_{r+1}u_{r+1}$$

- Restamos ambas expresiones.

$$0 = (\lambda_{r+1} - \lambda_1)u_1 + (\lambda_{r+1} - \lambda_2)u_2 + \cdots + (\lambda_{r+1} - \lambda_r)u_r$$

- Aplicamos la hipótesis de inducción.

  Llamamos v_i al vector $(\lambda_{r+1} - \lambda_i)u_i$. Tenemos entonces r vectores, $v_1, v_2, \cdots, v_r$, de valores propios diferentes, tales que su suma vale cero. Entonces tenemos que $v_1 = v_2 = \cdots v_r = 0$.

  Como $v_1 = (\lambda_{r+1} - \lambda_1)u_1$, y $\lambda_{r+1} - \lambda_1 \neq 0$ (ya que los valores propios eran distintos) deducimos que $u_1 = 0$. De la misma forma vemos que $u_2 = \cdots = u_r = 0$.

Y ahora, como $u_{r+1} = -u_1 - u_2 - \cdots - u_r$ concluimos que u_{r+1} vale también cero. ■

Proposición 8.6.1. *Sea V un K-espacio vectorial, $f : V \to V$ una aplicación lineal, y $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ valores propios de f.*

Para cada valor propio λ_i tomamos una base $B_{V_{\lambda_i}}$ del correspondiente subespacio propio.

Entonces el conjunto $B = B_{V_{\lambda_1}} \cup B_{V_{\lambda_2}} \cup \cdots \cup B_{V_{\lambda_r}}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Demostración: A partir del lema la demostración es muy sencilla. Lo único complicado es la notación. Vamos a llamar d_i a la multiplicidad del valor propio λ_i. Supongamos que

$$B_{V_{\lambda_1}} = \{u_{11}, \cdots, u_{1d_1}\};\ B_{V_{\lambda_2}} = \{u_{21}, \cdots, u_{2d_2}\};\ \cdots; B_{V_{\lambda_r}} = \{u_{r1}, \cdots, u_{rd_r}\}$$

Si tenemos una combinación lineal de estos vectores igualada a cero, es decir,

$$a_{11}u_{11} + \cdots + a_{1d_1}u_{1d_1} + a_{21}u_{21} + \cdots + a_{2d_2}u_{2d_2} + \cdots + a_{r1}u_{r1} + \cdots + a_{rd_r}u_{rd_r} = 0$$

vamos a llamar $u_1 = a_{11}u_{11} + \cdots + a_{1d_1}u_{1d_1}$, $u_2 = a_{21}u_{21} + \cdots + a_{2d_2}u_{2d_2}$ y así hasta $u_r = a_{r1}u_{r1} + \cdots + a_{rd_r}u_{rd_r} = 0$. Entonces $u_i \in V_{\lambda_i}$, pues es combinación lineal de los vectores de una base de ese subespacio, y se tiene que

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_r = 0$$

Por el lema anterior deducimos que $u_1 = u_2 = \cdots = u_r = 0$.

Por tanto, tenemos que $0 = a_{11}u_{11} + \cdots + a_{1d_1}u_{1d_1}$, y como los vectores $u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1d_1}$ son linealmente independientes, deducimos que $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{1d_1} = 0$.

De la misma forma podemos ver que todos los escalares a_{ij} son iguales a cero. ■

Ejemplo 8.6.1. *En el ejemplo 8.5.2 calculamos los valores propios y vectores propios de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$.

Vimos que tenía dos valores propios, $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Sus multiplicidades algebraicas valían 1 y 2 respectivamente, y las geométricas lo mismo que las algebraicas.

Vimos que $\{(2\ 4\ 1)^t\}$ es una base de V_2 y que $\{(1\ 0\ 2)^t;\ (0\ 1\ 2)^t\}$ es una base de V_3.

Si unimos ambas bases tenemos $B = \{(2\ 4\ 1)^t;\ (1\ 0\ 2)^t;\ (0\ 1\ 2)^t\}$. Estos tres vectores son linealmente independientes, como puede comprobarse fácilmente, y como estamos en un espacio de dimensión 3 forman una base de $M_{3\times 1}(\mathbb{Z}_5)$.

Como consecuencia de todo lo dicho hasta ahora tenemos el siguiente teorema.

Teorema 8.6.1. *Sea $A \in M_n(K)$. Entonces son equivalentes:*

- *A es diagonalizable (es decir, existe P regular tal que $P^{-1}AP$ es diagonal).*
- *El polinomio característico de A se descompone totalmente en K, y la multiplicidad geométrica de cada valor propio coincide con la multiplicidad algebraica.*
- *La suma de las multiplicidade geométricas de los valores propios de A vale n.*

Al decir que el polinomio característico de A se descompone totalmente en K queremos decir que en la descomposición de $p_A(\lambda)$ como producto de irreducibles, todos los factores tiene grado 1. Esto significa que la suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios vale n.

El teorema puede enunciarse igualmente para endomorfismos.

Ejemplo 8.6.2.

Vamos a tomar varias matrices, y vamos a calcular los valores propios, multiplicidades algebraicas, geométricas, vectores propios, subespacios propios y a estudiar si son o no diagonalizables.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

- *Cálculo del polinomio característico.*
  $p_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$
- *Cálculo de los valores propios con sus multiplicidades algebraicas (factorización de $p_A(\lambda)$.*
  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.
  Por tanto, A tiene un único valor propio $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$.
- *Cálculo de los subespacios propios y la multiplicidad geométrica.*

  > *En este caso, podemos deducir, sin realizar ningún cálculo, que la multiplicidad geométrica vale 1.*
  > *Por la proposición 8.5.1 sabemos que la multiplicidad geométrica del valor propio 1 está comprendida entre 1 y 2. Si valiera 2, entonces el subespacio V_1 tendría dimensión 2, luego sería $\mathbb{R}^2$. Eso significaría que todo vector sería un vector propio de valor propio 1, luego la matriz A sería igual a la identidad.*

  Para calcular V_1 tomamos la matriz $A - Id$ y calculamos su forma normal de Hermite.

  $$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Luego V_1 tiene ecuación $x + y = 0$. Una base del subespacio sería $B_{V_1} = \{(1 \ \ -1)^t\}$.
- *Conclusión. La matriz no es diagonalizable. El conjunto más grande de vectores propios linealmente independientes que podemos tomar tiene un elemento. Un tal conjunto sería $\{(1, -1)\}$.*

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)$.

- *Cálculo del polinomio característico.*

  $$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= -\lambda^3 + (0+2+2)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)\lambda + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - (0+0+2)\lambda + (0+1+0-0-2-0) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 \end{aligned}$$

- *Cálculo de los valores propios con sus multiplicidades algebraicas.*

  $$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & & 2 & 0 & 1 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 2 & 0 & 1 \\ 1 & & 2 & 2 \\ \hline & 2 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & 2 & 2 \\ 2 & & 1 \\ \hline & 2 & 0 \end{array}$$

  Tenemos entonces dos valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Las multiplicidades algebraicas valen $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 1$.
- *Cálculo de los subespacios propios y las multiplicidades geométricas.*
  Comenzamos con V_1.

  $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Luego las ecuaciones de V_1 son $\left\{ \begin{array}{r} x = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right.$ *Su dimensión vale 1, y una base sería $B_{V_1} = \{(0 \ 1 \ 2)^t\}$.*
  Continuamos con V_2. Aquí, puesto que $\alpha_2 = 1$ sabemos de antemano que $d_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de V_2 son $\left\{ \begin{array}{r} x+z=0 \\ y=0 \end{array} \right.$ *Su dimensión vale 1, y una base sería* $B_{V_1} = \{(1\ 0\ 2)^t\}$

- *Conclusión. La matriz no es diagonalizable. La suma de las multiplicidades geométricas vale 2. Por tanto, 2 es el mayor número de vectores propios que podemos tomar linealmente independientes.*

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)$.

- *Cálculo del polinomio característico.*

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda^2)$$

- *Cálculo de los valores propios y las multiplicidades algebraicas.*
  Se ve claramente que tenemos dos valores propios: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. Las multiplicidades algebraicas son $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_1 = 2$.

- *Cálculo de los subespacios propios y las multiplicidades geométricas.*
  Calculamos en primer lugar V_0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Por tanto, $V_0 \equiv \left\{ \begin{array}{r} x=0 \\ y+z=0 \end{array} \right.$ *Su dimensión vale 1, y una base es* $B_{V_0} = \{(0\ 1\ 2)^t\}$.

  Calculamos V_1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Luego $V_1 \equiv x+z=0$. Su dimensión vale 2, y una base es $B_{V_1} = \{(1\ 0\ 2)^t;\ (0\ 1\ 0)^t\}$.
  Las multiplicidades geométricas valen entonces $d_0 = 1$ y $d_1 = 2$.

- *Conclusión.*
  Puesto que la suma de las multiplicidades geométricas vale 3, la matriz es diagonalizable. De hecho se tiene que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  donde $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.