SEGUNDA ENTREGA

Matrices. Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales

Ejercicio 1. Sea $P \in M_{3\times 7}(\mathbb{Z}_2)$ la matriz cuyas columnas son los números del 1 al 7 escritos en binario.

1. Calcula el rango de P.
2. Calcula una matriz $G \in M_{4\times 7}(\mathbb{Z}_2)$, de rango cuatro, y tal que $G \cdot P^t = 0$.
3. Calcula la forma escalonada reducida de G, y llámala H_G. Comprueba que $H_G \cdot P^t = 0$.
4. Elige $m \in M_{1\times 4}(\mathbb{Z}_2)$, $m \neq 0$ y calcula $c = m \cdot G$.
5. Sea $v = P \cdot c^t$. Comprueba que $v = 0$.
6. Toma c, y modifica un coeficiente (cambia un 1 por un 0 o al revés). Llama c' al resultado de la modificación. Intenta determinar el bit modificado a partir del valor de $v' = P \cdot (c')^t$ (Indicación: considera el vector v' como un número escrito en binario).
7. Repite los apartados 4, 5 y 6 pero tomando, en lugar de la matriz G la matriz H_G. Encuentra una forma de determinar m a partir de c.
8. Realiza operaciones elementales por columas en la matriz P^t hasta obtener una matriz de la forma $\left(\frac{B}{\mathrm{Id}}\right)$.

Ejercicio 2. Sean $B_1 = \{(2,3,2),\ (3,3,4),\ (4,0,0)\}$ y $B_2 = \{(1,0,3),\ (1,2,1),\ (1,1,4)\}$ dos subconjuntos de $(\mathbb{Z}_5)^3$.

1. Comprueba que B_1 y B_2 son bases.
2. Calcula la matriz del cambio de base de B_1 a B_2.
3. Sea u el vector cuyas coordenadas en B_1 son $(1,3,4)$. Calcula el vector u y sus coordenadas en B_2.
4. Calcula todos los vectores $u \in (\mathbb{Z}_5)^3$ que tienen las mismas coordenadas en B_1 y en B_2.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ la única aplicación lineal que verifica que

$$\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= (4,7,2) \\ f(1,1,0,0) &= (-1,3,9) \\ f(1,1,1,0) &= (0,1,2) \\ f(1,1,1,1) &= (2,-1,8) \end{aligned}$$

Se pide:

1. Escribe la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{Q}^4$ y $\mathbb{Q}^3$.
2. Da una expresión para $f(x,y,z,t)$.
3. Calcula la dimensión de los subespacios núcleo e imagen de f.

Ejercicio 4. Sean $U = L[(1,2,3),(2,3,4),(3,4,0)]$, $W \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x+2y+z=0 \\ 4x+3y+3z=0 \end{array} \right.$ y $V_3 \equiv \left\{ \begin{array}{l} 4x+2y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{array} \right.$ tres subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^3$.

1 Calcula una base de cada uno de ellos.

2 Calcula una base de $V_2 = U \cap W$.

3 Compureba que $(\mathbb{Z}_5)^3 = V_2 \oplus V_3$.

Sea A la matriz 3×3 con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ que tiene dos valores propios 2 y 3, y cuyos subespacios propios correspondientes son V_2 y V_3.

4 Calcula las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios 2 y 3.

5 Calcula la matriz A.

6 Calcula A^{20}.