TEMA 8

Diagonalización

Ejercicio 1. Para las siguientes matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$ calcula sus valores propios y los subespacios propios correspondientes:

1. $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. $$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Encuentra $A \in M_3(\mathbb{R})$ con autovalores 1,2 y -1 y autovectores $(1,-1,1)$, $(4,-5,3)$ y $(-3,5,2)$.

Ejercicio 3. En $\mathbb{R}^4$ se considera el endomorfismo que, respecto de la base canónica, viene dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Prueba que es diagonalizable.
2. Calcula una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios del endomorfismo.

Ejercicio 4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(K),$$

1. Estudia si A es diagonalizable en los casos $K = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$, calculando la matriz de paso cuando sea diagonalizable.
2. Calcula A^{227} en los casos en los que A es diagonalizable.

Ejercicio 5. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(K),$$
Estudia si A es diagonalizable en los casos $K = \mathbb{Z}_3, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Ejercicio 6. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ es un endomorfismo con valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$. Supongamos que la ecuación cartesiana de V_2 es $x + y + 4z = 0$, y que V_4 está generado por $(1, 1, 0)$. Calcula la matriz de f en la base canónica.

Ejercicio 7. Estudia para qué valores de los parámetros a y b es diagonalizable la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Calcula los valores propios de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} p/2 & (p-q)/4 & q/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ q/2 & (q-p)/4 & p/2 \end{pmatrix}$$
en función de los parámetros que aparecen. ¿Para qué valores de p y q la matriz tiene un único valor propio?

Ejercicio 9. Calcula los valores propios de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ (2b+a)/2 & a & b & b \\ a/2 & 0 & a & 0 \\ -a/2 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
y calcula para qué valores de los parámetros a y b la matriz es diagonalizable.

Ejercicio 10. Sea $f : (\mathbb{Z}_{13})^3 \to (\mathbb{Z}_{13})^3$ la aplicación lineal dada por:
$$f(x, y, z) = (7x + 12y + 4z, x + 6y + 3z, 5x + 6y + 12z)$$

1. Halla la matriz de f en la base canónica.
2. Estudia si f es diagonalizable, y en caso afirmativo halla una base de vectores propios.
3. Calcula A^{2431}.
4. Calcula $f^{2432}(1, 2, 3)$.

Ejercicio 11. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. Estudia si es posible encontrar una matriz regular P de forma que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea una matriz diagonal, y en caso afirmativo, da una.

Ejercicio 12. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_5)^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x, y, z) = (4z, 2x + 2y + z, x)$$

1. Halla la matriz de f en la base canónica (llamémosla A)
2. Estudia si f es diagonalizable, y en caso afirmativo hallar una base de vectores propios.
3. Calcula A^{703}.
4. Halla $f^{704}(1, 2, 3)$.

Ejercicio 13. Dada la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_7)^4 \longrightarrow (\mathbb{Z}_7)^4$ que, respecto de la base canónica, viene dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calcula la imagen del vector $v = (1, 1, 1, 1)$ por f. ¿Es un vector propio de A?
2. Calcula las dimensiones del núcleo y la imagen de f, así como una base de cada uno de estos subespacios.
3. Calcula los valores propios de A.

Ejercicio 14. De una matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ sabemos que tiene dos valores propios 1 y -2, y que los correspondientes subespacios propios son $V_1 \equiv x + 2y - z = 0$ y $V_{-2} = L[(1, 1, 1)]$.

Calcula la matriz A.

Ejercicio 15. Sea $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal diagonalizable cuyos valores propios son 1 y 0.

Comprueba que $V = N(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ y que f es la proyección sobre $\mathrm{Im}(f)$ en la dirección de $N(f)$.

Preguntas test.

Ejercicio 16. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes en $\mathbb{R}$ y con determinante igual a cero. Entonces:

a) A no es diagonalizable.

b) A sólo es diagonalizable si es simétrica.

c) El producto de los valores propios de A vale cero.

d) $\lambda = 0$ es el único valor propio de A.

Ejercicio 17. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$$

Sea α la multiplicidad algebraica y d la multiplicidad geométrica del valor propio 3. Entonces

a) $d = 2$ y $\alpha = 2$

b) $d = 1$ y $\alpha = 1$

c) $d = 1$ y $\alpha = 2$

d) $d = 2$ y $\alpha = 1$

Ejercicio 18. Sea A la matriz asociada a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica. Supongamos que existe un número real a tal que $f(2u+v) = a^2u + f(v)$ para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces

a) la matriz A es diagonalizable independientemente del valor de a.

b) la matriz A no es diagonalizable, sea cual sea el valor de a.

c) la matriz A es diagonalizable solamente para un número finito de valores de a.

d) los datos del enunciado no permiten decidir si la matriz A es o no diagonalizable.

Ejercicio 19. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = 0$. Entonces:

a) $A = 0$

b) A es regular.

c) 0 es el único valor propio de A.

d) todos los valores propios de A son estrictamente positivos.

Ejercicio 20. Los valores propios de la matriz en $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) son $\{0, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$.

b) son $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

c) son $\{0, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$.

d) son $\{1, 2\}$.

e) no son números raeles.

Ejercicio 21. De una matriz A de orden 4 sobre $\mathbb{Z}_5$ sabemos que tiene dos subespacios propios dados por

$$V_1 = \begin{cases} x+y+z=0 \\ t=0 \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$$

señala la respuesta correcta:

1. No es diagonalizable puesto que sólo tiene dos subespacios propios y A es de orden 4.

2. No podemos asegurar que sea diagonalizable puesto que no conocemos los valores propios.

3. Es diagonalizable y una matriz de paso es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Es diagonalizable y una matriz de paso es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 22. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5),$$

a) A tiene dos valores propio de multiplicidades algebraicas 1 y 2 respectivamente.

b) A tiene tres valores propios.

c) A tiene un único valor propio de multiplicidad algebraica 3.

d) A tiene un único valor propio de multiplicidad algebraica 1.

Ejercicio 23. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$$

representa un endomorfismo de $\mathbb{Q}^3$ en $\mathbb{Q}^3$. Una base de $\mathbb{Q}^3$ formada por vectores propios de A es

a) $\{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (4, -3, 1)\}$

b) $\{(0, 4, 1), (1, -1, 1), (4, -3, 1)\}$

c) $\{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 2)\}$

d) $\{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, -1, 1)\}$

Ejercicio 24. Los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son

a) $\{1, 3, 0\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ c) $\{0, 1, 2, 3\}$ d) No tiene valores propios

Ejercicio 25. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)$$

una matriz cuyos valores propios son 0 y 1. Los espacios propios de A tienen por ecuaciones

a) $V_0 = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x + y + 2z = 0\right\}$

b) $V_0 = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x + 2y = 0\right\}$ y $V_1 = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x + y + 2z = 0\right\}$

c) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid {\scriptstyle \begin{array}{r} x+2y=0 \\ x+y+2z=0 \end{array}}\right\}$ y $V_1 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+y+2z=0\}$

d) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid {\scriptstyle \begin{array}{r} x+2y=0 \\ z=0 \end{array}}\right\}$ y $V_1 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid {\scriptstyle \begin{array}{r} x+y=0 \\ z=0 \end{array}}\right\}$

Ejercicio 26. Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_p)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_3$ (p es un número primo). Entonces

a) A es diagonalizable y la base canónica es una base de vectores propios.

b) A es diagonalizable y todos los vectores de $(\mathbb{Z}_p)^3$ son propios.

c) A no es diagonalizable.

d) A es diagonalizable si y sólo si $\lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_3 = 0$.

Ejercicio 27. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes en $\mathbb{R}$ y con determinante igual a cero. Entonces:

a) A no es diagonalizable.

b) A sólo es diagonalizable si es simétrica.

c) El producto de los valores propios de A vale cero.

d) $\lambda = 0$ es el único valor propio de A.

Ejercicio 28. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$$

Sea α la multiplicidad algebraica y d la multiplicidad geométrica del valor propio 3. Entonces

a) $d = 2$ y $\alpha = 2$

b) $d = 1$ y $\alpha = 1$

c) $d = 1$ y $\alpha = 2$

d) $d = 2$ y $\alpha = 1$

Ejercicio 29. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$.

Entonces:

(a) A tiene tres valores propios distintos, y por tanto es diagonalizable.

(b) A tiene dos valores propios distintos, y no es diagonalizable.

(c) A tiene dos valores propios distintos, y es diagonalizable.

(d) A tiene un único valor propio.

Ejercicio 30. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$. Entonces A^{105} vale

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(c) A.

(d) La matriz identidad.

Ejercicio 31. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$.

1. A tiene tres valores propios distintos, por tanto es diagonalizable.
2. A tiene dos valores propios distintos y es diagonalizable.
3. A tiene dos valores propios distintos y no es diagonalizable.
4. A no tiene valores propios.

Ejercicio 32. Sea $A \in M_4(\mathbb{Z}_5)$ una matriz con dos valores propios, 1 y 3 y tal que los subespacios propios son $V_1 = L[(1,2,1,1)]$ (es decir, el subespacio generado por el vector $(1,2,1,1)$) y $V_3 \equiv x + y + z + 2t = 0$. Entonces, el polinomio característico de A vale:

a) $\lambda^2 + \lambda + 3$.

b) $\lambda^4 + \lambda^2 + \lambda + 2$.

c) $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3$

d) Los datos que tenemos no nos permiten determinar cuál es el polinomio característico de A, pues nos falta la multiplicidad algebraica de los valores propios.

Ejercicio 33. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. Entonces:

a) A tiene tres valores propios distintos, y por tanto es diagonalizable.

b) A tiene dos valores propios distintos y es diagonalizable.

c) A tiene dos valores propios distintos y no es diagonalizable.

d) A tiene un único valor propio.

Ejercicio 34. Sean $U = L[(2,1,3),(4,3,5)]$ y $W \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array} \right.$ dos subespacios de $(\mathbb{Z}_7)^3$. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_7)$ una matriz que tiene a U como subespacio propio de valor propio 3 y a W como subespacio propio de valor propio 5. Entonces A es la matriz:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 6 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 35. ¿Cuál de las siguientes matrices de $M_3(\mathbb{R})$ no es diagonalizable?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 36. Sea $U = L[(1,2,1)]$ y $V \equiv x + 2y + z = 0$ dos subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^3$. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_5)$ una matriz para la que U es el subespacio propio de valor propio 3, y V el subespacio propio de valor propio 4. Entonces:

a) A no es diagonalizable.

b) A es diagonalizable, y una matriz de paso a una forma diagonal es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

c) A es diagonalizable, y una matriz de paso a una forma diagonal es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

d) A es diagonalizable, y una matriz de paso a una forma diagonal es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.