

Matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes.

Ejercicio 1. Da un ejemplo de dos matrices $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_2)$, distintas de cero, tales que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

Ejercicio 2. Prueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ satisface una ecuación de la forma $A^2 + \alpha A + \beta \text{Id} = 0$. Utiliza este hecho para ver que A es regular y calcular su inversa.

Ejercicio 3. Da un ejemplo de tres matrices A, P, Q , con coeficientes en \mathbb{Z}_2 , de forma que P y Q sean regulares y distintas, A sea distinta de cero y $PA = QA$.

Ejercicio 4. Una matriz se dice idempotente si $A^2 = A$.

1. Prueba que si A es idempotente y regular entonces $A = \text{Id}$.
2. Prueba que si A es idempotente, y $B = \text{Id} - A$ entonces B es idempotente y $AB = 0$.
3. Calcula todas las matrices $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ idempotentes.
4. Encuentra $A \in M_3(\mathbb{Z}_2)$, $A \neq 0$, $A \neq \text{Id}$ que sea idempotente.

Ejercicio 5. Dos matrices se dicen equivalentes por filas cuando se puede obtener una a partir de la otra realizando transformaciones elementales por filas, se dicen equivalentes por columnas cuando se puede obtener una a partir de la otra realizando transformaciones elementales por columnas, y se dice que son equivalentes cuando se puede obtener una a partir de la otra realizando transformaciones elementales por filas y por columnas.

Comprueba que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son equivalentes, pero que no son equivalentes por filas ni equivalentes por columnas.

Ejercicio 6. Calcula la inversa, cuando exista, de las siguientes matrices:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(K)$, donde K es un cuerpo cualquiera.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_2), M_3(\mathbb{Z}_3), M_3(\mathbb{Q})$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_3), M_4(\mathbb{Z}_5)$

Ejercicio 7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en \mathbb{Q} . Determina para que valores de a, b, c, d se verifica que $A \cdot B = B \cdot A$.

Ejercicio 8. Una imagen en blanco y negro se puede almacenar en una matriz $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ con $0 \leq a_{ij} \leq 1$ donde el valor de a_{ij} determina el tono de gris del pixel i, j . Sea t un divisor común de n y m . Seleccionamos un cuadrado de la imagen de tamaño $t \times t$ al que llamamos C . Calcula el producto

$$\frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cómo interpretas el resultado? ¿Qué operación matricial podemos realizar sobre A para que cada pixel de la imagen resultante tenga tamaño $t \times t$?

Ejercicio 9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & a & 2 \\ 3 & 0 & 5 & a+1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$. Estudia para qué valores del parámetro a la matriz A tiene inversa para el producto.

Ejercicio 10. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_p).$$

Encuentra los valores de p para los que la matriz A es singular (es decir, no tiene inversa).

Ejercicio 11. ¿Cómo afecta a un sistema de ecuaciones si en la matriz de coeficientes intercambiamos dos columnas? ¿Y si multiplicamos una columna por un escalar no nulo?

Ejercicio 12. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

1. Encuentra una matriz B tal que $A \cdot B = \text{Id}$.
2. Encuentra todas las matrices B que cumplan la propiedad anterior.
3. ¿Existe una matriz C tal que $C \cdot A = \text{Id}$?

Ejercicio 13. Encuentra, si es posible, $P \in M_4(\mathbb{Z}_3)$, regular, tal que $PA = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = -1 \end{cases}$$

discútelo considerando los coeficientes en \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_7 y \mathbb{Q} . En el caso de que sea compatible, encuentra explícitamente todas las soluciones.

Ejercicio 15. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ x + 2y + az = 4 \\ 3x + (a+2)y + 2z = 2 \end{cases}$$

Discútelo según el valor del parámetro a . Si para $a = 4$ es compatible, resuélvelo.

Ejercicio 16. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Q}

$$\begin{cases} x - ay + (a+1)z = 4 \\ ax + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Discútelo según los valores del parámetro a , y resuélvelo para $a = -1$.

Ejercicio 17. Calcula la forma normal de Hermite por filas y el rango de la siguiente matriz, vista con coeficientes en \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_7 y \mathbb{Q} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 18. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales considerados en \mathbb{Q} .

■

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

■

$$\begin{cases} x - y + z + t + v = 0 \\ x + y + z + t - v = 0 \\ -x - y + z + t - v = 0 \end{cases}$$

■

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

■

$$\begin{cases} x + y + t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

■

$$\begin{cases} x + y - z + t - v = 0 \\ x - y + z + t + v = 1 \\ x + t = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 19. Repite el ejercicio anterior considerando los coeficientes de los sistemas en el cuerpo \mathbb{Z}_5 . Para los sistemas indeterminados calcula el número de soluciones.

Ejercicio 20. Calcula los siguientes determinantes (considerando las matrices con coeficientes en \mathbb{Q}):

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{11}{5} \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{vmatrix}$$

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

5.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

6.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

7.

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 21. Sea K un cuerpo, y $a, b, c, d \in K$. Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 22. Un sistema de cifrado elemental puede obtenerse asignando a cada letra del alfabeto un valor entero positivo, y enviando un mensaje alfabético como una cadena de enteros¹, aunque este sistema no es difícil de “romper”. Sin embargo el sistema puede mejorarse usando multiplicación matricial. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z})$ invertible, tal que $A^{-1} \in M_3(\mathbb{Z})$. Disponemos entonces el mensaje numérico anterior en una matriz B , de orden $3 \times k$, donde k es el menor entero tal que $3k$ es mayor o igual que el número de símbolos del mensaje, y disponemos la cadena numérica rellenando las filas de la matriz B de izquierda a derecha y de arriba a abajo, completando con ceros si fuera necesario. El mensaje cifrado se obtiene leyendo de igual forma los elementos de la matriz AB .

Dada la asignación

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
6	12	16	24	4	19	8	5	20	13	17	7	1
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
21	2	25	10	3	23	14	11	22	15	26	9	18

y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcula el cifrado a enviar correspondiente al mensaje

INTENTALO DE NUEVO

¹cifrado monoalfabético general

2. Hallar A^{-1} y descifrar la cadena:

19, -18, 0, 33, -5, 20, 22, 11, 24, 36, 41, 45, 45, 151,
128, 119, 7, 96, -14, 8, -3, -22, -8, -22, -21, -7, -22

3. ¿Cómo puede obtenerse una matriz distinta, C , con entradas enteras, que pueda sustituir a A ?

Ejercicio 23. En este ejercicio presentamos otro sistema de cifrado elemental derivado del conocido como cifrado de Hill. Comenzamos codificando los caracteres según la tabla siguiente

0	0	8	8	G	16	Ñ	24	V	32
1	1	9	9	H	17	O	25	W	33
2	2	A	10	I	18	P	26	X	34
3	3	B	11	J	19	Q	27	Y	35
4	4	C	12	K	20	R	28	Z	36
5	5	D	13	L	21	S	29		
6	6	E	14	M	22	T	30		
7	7	F	15	N	23	U	31		

Con lo que nuestro texto será una sucesión de valores en \mathbb{Z}_{37} , un cuerpo ya que 37 es primo. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 2 & 34 & 17 & 16 & 4 \\ 17 & 8 & 7 & 27 & 2 & 18 \\ 35 & 25 & 7 & 34 & 6 & 4 \\ 2 & 28 & 3 & 9 & 29 & 27 \\ 9 & 18 & 5 & 14 & 23 & 2 \\ 33 & 9 & 7 & 22 & 8 & 30 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{Z}_{37}).$$

La matriz A se emplea como clave de cifrado en un sistema similar al ejercicio ???. Por ejemplo, para cifrar la cadena ALGEBRA, convertimos la cadena a una sucesión de elementos en \mathbb{Z}_{37} , lo que nos da 10, 21, 16, 14, 11, 28, 10. Añadimos a esa cadena un 0, y a continuación añadimos tantos valores aleatorios no nulos hasta obtener una longitud múltiplo de 6, con lo que obtenemos la cadena 10, 21, 16, 14, 11, 28, 10, 0, 12, 18, 7, 33. Esta cadena la ordenamos en una matriz de 6 filas y tantas columnas como sea necesario, que rellenamos por filas, por lo que obtenemos

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 21 \\ 16 & 14 \\ 11 & 28 \\ 10 & 0 \\ 12 & 18 \\ 7 & 33 \end{pmatrix} \in M_{6 \times 2}(\mathbb{Z}_{37}).$$

El cifrado se produce multiplicando $A \cdot P$, lo que proporciona

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 0 \\ 9 & 4 \\ 18 & 7 \\ 12 & 25 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

que convertido a cadena de caracteres se corresponde con 9AI094I7CO43.

1. Cifra tu nombre completo.
2. Descifra la cadena

QRGLYSEEPBL0YH0RJD4I35M1TPBNOGTHLW0AJ6K2DWM9BK1LFWF8TRBW76PO1D5U1AIVÑ6F4.

Preguntas test

Ejercicio 24. Dadas dos matrices A y B en $M_2(\mathbb{R})$ y tales que

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces $A^2 - B^2$ es igual a

a) $\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 25. Sea $A \in M_3(\mathbb{Q})$ tal que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de A es

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 26. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

vale

a) -9 b) -3 c) 0 d) 3

Ejercicio 27. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sea $X \in M_3(\mathbb{R})$. Entonces

1. $X = B$ es la única solución de la ecuación matricial $AB = AX$.
2. $X = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $AB = AX$.
3. Tanto B como C son soluciones de la ecuación matricial $AB = AX$.
4. La ecuación matricial $AB = AX$ no tiene solución.

Ejercicio 28. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 6 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_p)$$

La matriz A es singular (es decir, no tiene inversa para el producto) para el siguiente valor de p

a) $p = 2$ b) $p = 3$ c) $p = 5$ d) $p = 7$

Ejercicio 29. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en \mathbb{Z}_7 . Entonces $(A \cdot B)^{-1}$

- a) No existe.
- b) vale $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

c) vale $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) vale $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 30. Señala la afirmación verdadera. La matriz en $M_4(\mathbb{Z}_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- a) No tiene inversa para ningún valor de a .
- b) Tiene inversa para todo valor de a .
- c) Sólo tiene inversa para $a = 1$.
- d) Tiene inversa sólo cuando $a \neq 0$.

Ejercicio 31. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_2)$ tal que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- d) Los datos del enunciado no permiten calcular A .

Ejercicio 32. Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$. Entonces:

- a) La matriz $I - A + A^t$ es simétrica².
- b) La matriz $I - (A \cdot A^t)$ es simétrica.
- c) La matriz $I - A^2$ es simétrica.
- d) La matriz $I - 2A$ es simétrica.

Ejercicio 33. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con coeficientes en \mathbb{Z}_p es regular para

- a) $p = 5$.
- b) $p = 7$.
- c) $p = 3$.

²Una matriz $A \in M_n(K)$ se dice simétrica si $A = A^t$

d) $p = 2$.

Ejercicio 34. En el conjunto $M_2(\mathbb{Z}_2)$ definimos la relación de equivalencia $A \sim B \iff A^2 = B^2$. Entonces:

(a) La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pertenece a la clase de equivalencia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) El conjunto cociente está formado por un solo elemento.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$.

(d) La clase $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ tiene cardinal uno.

Ejercicio 35. Sea $X \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

1. $X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-25}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{-23}{11} & \frac{-3}{11} \end{pmatrix}$.

3. $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. La matriz X no es regular.

Ejercicio 36. El determinante de la matriz con coeficientes en \mathbb{Z}_7

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) es 0.

b) es 4!.

c) es congruente con 4^4 módulo 7.

d) es congruente con 3^3 módulo 7.

Ejercicio 37. Si $A \in M_3(\mathbb{R})$ verifica que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces A^{-1} es igual a:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 38. Sea $P \in M_2(\mathbb{Q})$ tal que $P \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces:

- (a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.
- (b) $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- (c) La matriz P no tiene inversa.
- (d) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 39. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 3 & \alpha+1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

Entonces la matriz A es regular:

- a) Para cualquier valor de $\alpha \in \mathbb{Z}_7$.
- b) Para $\alpha = 1, 3, 4, 5, 6$.
- c) Para $\alpha = 3, 4, 5, 6$.
- d) Para $\alpha = 0, 2, 3, 5, 6$.

Ejercicio 40. Sean A y B dos matrices cuadradas 2×2 con coeficientes reales tales que

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

- (a) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$.
- (b) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$.
- (c) No existen matrices con las condiciones que nos da el enunciado.
- (d) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$.