TEMA 1 CONJUNTOS Y APLICACIONES

Un conjunto es una coleccion de objetos a los que llamaremos elementos del conjunto. Si x es un elemento de un conjunto A escribiremos $x \in A$, que se lee "x pertenece a A".

Diremos que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B, y lo denotaremos $A \subseteq B$, si todo elemento de A pertenece a B.

Diremos que dos conjuntos A y B son iguales, y lo denotaremos $A = B$, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Admitiremos la existencia de un conjunto que no tiene elementos, lo denotaremos $\emptyset$ y lo llamaremos conjunto vacio. El vacio es subconjunto de cualquier conjunto.

EJEMPLO

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$.
Entonces $1 \in A$, $6 \notin A$, $B \subseteq A$, $C \nsubseteq A$,

$\emptyset \subseteq A$, $\emptyset \notin A$, $\emptyset \subseteq \emptyset$ y $\emptyset \notin \emptyset$,

$\emptyset \neq \{\emptyset\}$, $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ y $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Sean A y B dos conjuntos.

1) La intersección de A y B es $A \cap B = \{x \text{ tq } x \in A \text{ y } x \in B\}$.

2) La unión de A y B es $A \cup B = \{x \text{ tq } x \in A \text{ ó } x \in B\}$.

3) La diferencia de A y B es $A \setminus B = \{x \in A \text{ tq } x \notin B\}$.

4) El conjunto partes de A es $P(A) = \{X \text{ tq } X \subseteq A\}$.

5) El producto cartesiano de A y B es $A \times B = \{(a,b) \text{ tq } a \in A \text{ y } b \in B\}$. A los elementos de $A \times B$ se les llama pares ordenados.

6) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos entonces el producto cartesiano de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ tq } a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$. A los elementos de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ los llamaremos n-tuplas.

7) Al conjunto $A \times A \times \overset{(n}{\cdots} \times A$ lo denotaremos por A^n.

EJEMPLO

Sea $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ y $C = \{4,5,6\}$. Entonces

$A \cap B = \{2,3\}$, $A \cap C = \emptyset$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$,

$A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4,5\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$, $(1,4) \in A \times B$

$(2,6) \notin A \times B$, $(2,6) \in A \times C$, $(2,2,4) \in A \times B \times C$

$(1,2,3) \notin A \times B \times C$, $(1,2,1) \in A^3$, $(1,2,4) \notin A^3$

el cardinal de un conjunto es el numero de elementos de dicho conjunto. Denotaremos $\# A$ al cardinal del conjunto A.

EJEMPLO

$\#\{1,3,5,7\} = 4$ y $\#\{1,2,3,\dots\} = \infty$

PROPOSICION

1) Si A es un conjunto entonces $\# P(A) = 2^{\# A}$

2) Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son conjunto entonces $\#(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) =$
$= \# A_1 \cdot \# A_2 \cdot \dots \cdot \# A_n$.

EJERCICIO

Sea $A = \{1,2,3,4\}$. Calcular el cardinal de $P(A)$.

-D-

$\# P(A) = 2^{\# A} = 2^4 = 16$.

EJERCICIO

Sea $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ y $C = \{4,5,6\}$. Calcular el cardinal de $A \times B \times C$ y el cardinal de A^4.

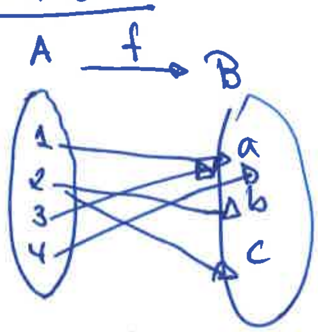
-D-

$\#(A \times B \times C) = \# A \cdot \# B \cdot \# C = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$.

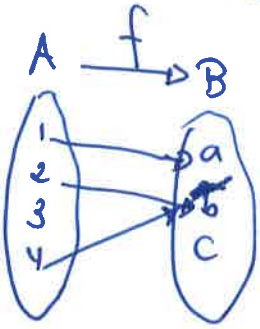
$\# A^4 = \#(A \times A \times A \times A) = \# A \cdot \# A \cdot \# A \cdot \# A = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Sean A y B dos conjuntos. Una aplicacion f de A en B, que denotaremos $f: A \longrightarrow B$, es una correspondencia que a cada elemento del conjunto A le asocia un unico elemento del conjunto B

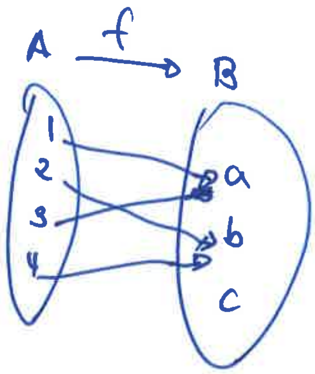
EJEMPLO



No es aplicacion ya que al 2 le asocia dos valores.



No es aplicacion ya que al 3 no le asocia ningun elemento

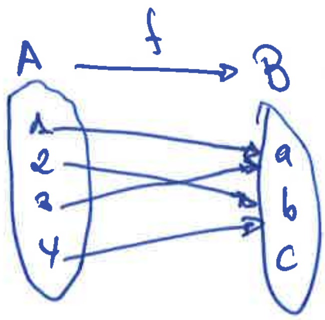


Si es aplicacion.

Sea $f: A \longrightarrow B$ una aplicacion. Si $a \in A$, entonces al elemento que le asocia f en B lo denotaremos $f(a)$ y diremos que es la imagen del elemento a. A los conjuntos A y B los llamaremos el dominio y el codominio de f respectivamente. Llamaremos imagen de f a $Im(f)=\{f(a) \text{ tq } a\in A\}$.

EJEMPLO

Dada la aplicacion



tenemos que

$f(1)=a$ y $Im(f)=\{a,b\}$.

EJERCICIO

Dada la aplicacion $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(n)=2n+1$.
Calcular $Im(f)$.

-D-

$Im(f)=\{f(n) \text{ tq } n\in\mathbb{N}\}=\{2n+1 \text{ tq } n\in\mathbb{N}\}=\{1,3,5,\dots\}$

$=\{n\in\mathbb{N} \text{ tq } n \text{ es impar}\}$.

TIPOS ESPECIALES DE APLICACIONES

Una aplicacion $f: A\longrightarrow B$ diremos que es:

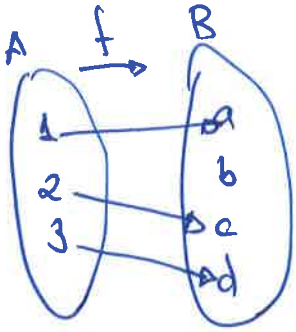
1) Inyectiva si $f(x)=f(y)$ implica que $x=y$.

2) Sobreyectiva si $Im(f)=B$.

3) Biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

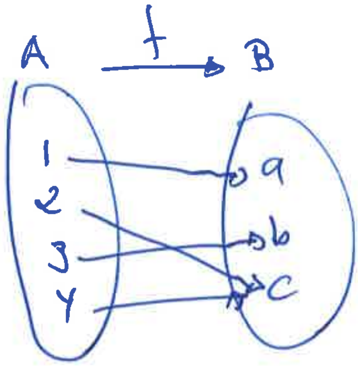
EJEMPLO

• La aplicacion



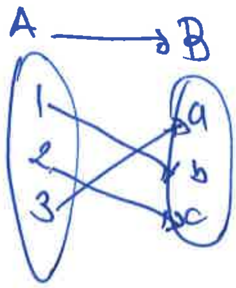
es inyectiva y no es sobreyectiva.

• La aplicacion



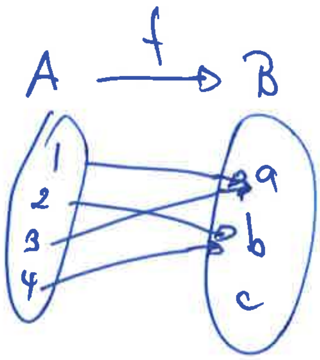
es sobreyectiva y no es inyectiva.

• La aplicacion



es biyectiva.

• La aplicacion



no es inyectiva ni sobreyectiva.

EJERCICIO

Demuestra que la aplicacion $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x-5$ es inyectiva y no es sobreyectiva.

-D-

. Si $f(x) = f(y)$ entonces $x-5 = y-5$. Por tanto $x = y$. Por consiguiente f es inyectiva.

• Si $x \in \mathbb{N}$ entonces $x-5 \neq -7$. Por tanto $-7 \notin \mathrm{Im}(f)$ y en consecuencia $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{Z}$. Podemos afirmar entonces que f no es sobreyectiva.

EJERCICIO

Demuestra que la aplicacion $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva.

-D-

. $f(2) = f(-2)$ y por tanto f no es inyectiva.

• Si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $x^2 \neq 2$. Por tanto $2 \notin \mathrm{Im}(f)$. Por consiguiente $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{N}$. En consecuencia f no es sobreyectiva.

COMPOSICION DE APLICACIONES

Sean $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ dos aplicaciones. La aplicacion composicion de f y g es la aplicacion $g \circ f: A \longrightarrow C$ definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

EJEMPLO.

Sea $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$ y $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $g(n) = \frac{2n+1}{3}$. Entonces

$$g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{2x^2+1}{3}$$

PROPOSICION

La composicion de aplicaciones es asociativa y no es conmutativa.

NOTA

- Decir que la composicion de aplicaciones es asociativa significa lo siguiente: si $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ y $h: C \longrightarrow D$ son aplicaciones entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
- Decir que la composicion de aplicaciones no es conmutativa significa lo siguiente: si $f: A \longrightarrow A$ y $g: A \longrightarrow A$ son aplicaciones entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ no son en general iguales.

Sea A un conjunto. La aplicacion identidad en A es la aplicacion $1_A : A \longrightarrow A$ definida por $1_A(a) = a$.

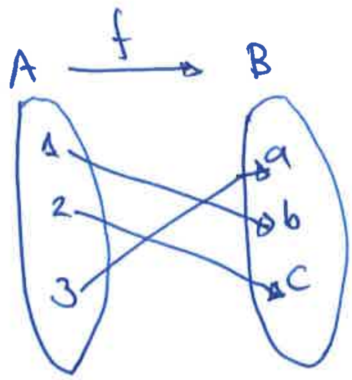
PROPOSICION

Si $f: A \longrightarrow B$ es una aplicacion bijectiva, entonces existe una unica aplicacion $g: B \longrightarrow A$ t.q. $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

A dicha aplicacion la llamaremos la inversa de f y la denotaremos por f^{-1}.

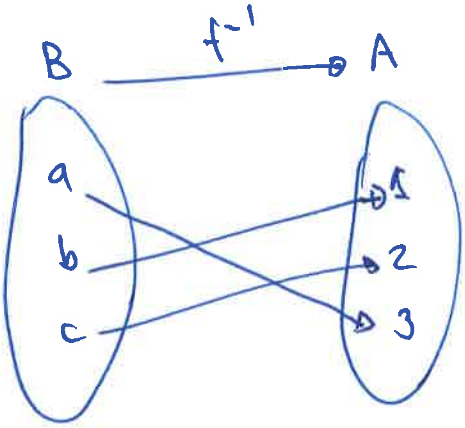
EJEMPLO

Es claro que la aplicacion



es bijectiva

y que su inversa es



EJERCICIO

Demuestra que la aplicacion $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ es bijectiva y calcular f^{-1}.

-D-

- $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = \frac{2y+1}{3} \Rightarrow 2x+1 = 2y+1 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$ por tanto f es inyectiva.

- Es claro que si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $f(x) \in \mathbb{Q}$. Por tanto, $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{Q}$. Si $q \in \mathbb{Q}$ entonces $\frac{3q-1}{2} \in \mathbb{Q}$ y $f\left(\frac{3q-1}{2}\right) = q$. Por consiguiente $\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{Im}(f)$. Como $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{Im}(f)$ entonces $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Q}$ y en consecuencia f es sobreyectiva

- $f^{-1}: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

  $f^{-1}(q) = \frac{3q-1}{2}$.