TEMA 2

Números naturales y números enteros

Ejercicio 1. Da la expresión en base 2, 8, 10 y 16 de los siguientes números naturales:

1. $10110110001001101011 1)_2$.
2. $3750)_8$.
3. 28452.
4. $8D5)_{16}$.
5. $10110100101011)_2 + 110101001)_2$.
6. $7225)_8 - 3456)_8$.
7. $48572)_{16} + 95883)_{16}$.

Ejercicio 2. Encuentra los sistemas de numeración, si existe alguno, para los que se verifica cada una de las siguientes igualdades:

1. $3 \times 4 = 22$,
2. $41 \times 14 = 1224$,
3. $52 \times 25 = 1693$,
4. $25 \times 13 = 51$,
5. $13^4 = 14641$

Ejercicio 3. Un número escrito en base b tiene 64 cifras. ¿Cuántas cifras tiene el mismo número expresado en base b^3?.

Ejercicio 4. Sean $x = 321$, $y = -83$, $z = 3A1)_{16}$.

1. Expresa estos tres números en complemento a 2.
2. Realiza los siguientes cálculos trabajando con los números en complemento a 2:
$$-x;\ -y;\ -z;\ x+y;\ y+z;\ 2x-z;\ y-x;\ y+z;\ 3x$$
3. Expresa los resultados obtenidos en el apartado anterior en base 10.

Ejercicio 5. Sea $x = 3311)_4$ e $y = 142)_8$. Calcula la expresión en hexadecimal de $x + 2y$, xy y $x - y$ (no se puede realizar ningún cálculo en base 10).

Ejercicio 6. Calcula todos los números de dos y de tres cifras que al escribirlos en hexadecimal se escriben con las mismas cifras (que en decimal) pero en orden inverso.

Ejercicio 7. Un número entero n se dice que está escrito en *forma ternaria equilibrada* si lo tenemos expresado como

$$n = e_n \cdot 3^n + e_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \cdots + e_1 \cdot 3 + e_0$$

donde e_i vale $-1, 0$ ó 1.

1. Calcula una expresión ternaria equilibrada de los números 5, −12, 35, 121, 123456.
2. Demuestra que todo número entero distinto de cero admite una única expresión ternaria equilibrada en la que $e_n \neq 0$.

Ejercicio 8. ¿En qué sistema de numeración se expresa el número $3F)_{16}$ con tres cifras iguales?

Ejercicio 9. Sea $b \geq 2$. Expresa el número $2 \cdot (1 + 2 + \cdots + b)$ en base b.

Ejercicio 10. Sea x un número real entre 0 y 1 (es decir, $x \in [0, 1[$), y sea $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Entonces existe una sucesión $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ de números naturales menores que b con la siguiente propiedad:

Si x_n es la sucesión definida como $x_0 = 0$, $x_n = x_{n-1} + a_n \cdot b^{-n}$ para $n \geq 1$ entonces:

- $x_n \leq x < x_n + b^{-n}$.
- $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

En tal caso, diremos que $0'a_1a_2 \cdots a_n \cdots$ es la expresión en base b del número x.

Con esto, y puesto que todo número real positivo es la suma de un número natural y un número en el intervalo $[0, 1[$, entonces todo número real positivo puede expresarse en base b (de la misma forma que podemos expresarlo en base 10).

Calcula la expresión en binario, en hexadecimal y en base 3 de los números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $0'235$, $\sqrt{2}$, π.

Ejercicio 11. Enumera los divisores positivos de 120, y calcula cuántos divisores tiene el número 118800.

Ejercicio 12. Encuentra el valor máximo de n tal que 2^n divide a 25!.

Ejercicio 13. Encuentra todas las soluciones enteras de $x^2 - y^2 = 32$.

Ejercicio 14. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que b es divisor de a y $a + 2$. Demuestra que $b = 1$ ó $b = 2$.

Ejercicio 15. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ primos relativos. Demuestra que si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$. Estudia que pasa si $\mathrm{mcd}(a, b) \neq 1$.

Ejercicio 16. Dado un número entero n, demuestra que $\mathrm{mcd}(8n + 3, 5n + 2) = 1$.

Ejercicio 17. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Demuestra que el máximo común divisor de $35a + 57$ y $45a + 76$ vale 1 ó 19. ¿Para que valores de a es este máximo común divisor igual a 19?.

Ejercicio 18. Demuestra que si p es un número primo, entonces $\sqrt{p}$ es un número irracional. Concluye que $\sqrt{75}$ es irracional.

Ejercicio 19. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En ellas, a y b denotan un número entero cualquiera, y p un número primo. Razona la respuesta.

1. Si $\mathrm{mcd}(a, p^2) = p$ entonces $\mathrm{mcd}(a^2, p^2) = p^2$.
2. Si $\mathrm{mcd}(a, p^2) = p$ y $\mathrm{mcd}(b, p^2) = p^2$ entonces $\mathrm{mcd}(ab, p^4) = p^4$.
3. Si $\mathrm{mcd}(a, p^2) = p$ y $\mathrm{mcd}(b, p^2) = p$ entonces $\mathrm{mcd}(ab, p^4) = p^2$.

4. Si $\mathrm{mcd}(a, p^2) = p$ entonces $\mathrm{mcd}(a + p, p^2) = p$.

Ejercicio 20. En $\mathbb{Z}_{300}$ realiza, si es posible, los siguientes cálculos:

- $25 \cdot 60$.
- $127 \cdot (-100)$.
- 237^{-1}.
- $13 - 50 \cdot 101^{-1}$.
- Encuentra $x \neq 0$ tal que $111 \cdot x = 0$.
- Encuentra x tal que $13x + 25 = 32x - 50$.
- Encuentra x tal que $11x - 100 = 45x + 12$.

Ejercicio 21. Calcula, si es posible, 1392^{-1} en $\mathbb{Z}_{7585}$.

Ejercicio 22. Demuestra que:

1. Un número escrito en base 10 es par si, y sólo si, su última cifra es par.
2. Un número escrito en base 10 es un múltiplo de 3 si, y sólo si, la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
3. Un número escrito en base 10 es múltiplo de 4 si, y sólo si, su última cifra más dos veces la penúltima es múltiplo de 4.
4. Un número escrito en base 10 es un múltiplo de 9 si, y sólo si, la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.
5. Un número escrito en base 10 es un múltiplo de 5 si acaba en 0 o en 5.
6. Si $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ es la expresión decimal de un número x, entonces x es múltiplo de 7 si, y sólo si, el número $y = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 - 2 \cdot a_0$ es múltiplo de 7 (es decir, x es múltiplo de 7 si, y sólo si, $(x \text{ div } 10) - 2 \cdot (x \text{ mód } 10)$ es múltiplo de 7). Comprueba que $x \equiv 3y (\text{mód } 7)$.
7. Un número escrito en hexadecimal es múltiplo de 4 si, y sólo si, termina en 0, 4, 8 ó C.
8. Un número escrito en base 10 es múltiplo de 11 si, y sólo si, la suma de las cifras que ocupan un lugar par menos la suma de las cifras que ocupan posiciones impares es un múltiplo de 11
9. Un número escrito en base 8 es un múltiplo de 7 si, y sólo si, la suma de sus cifras es un múltiplo de 7.

Ejercicio 23. Sin realizar el cálculo, halla las cifras que faltan en los siguientes números:

1. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 = 61 - 4 - 0$
2. $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 = -07 - 84 - 00$
3. $17! = 35 - 6874 - 8096000$

Ejercicio 24. Prueba que dado un número entero cualquiera m se verifica una de las siguientes posibilidades:

1. $m^2 \equiv 0 \pmod{8}$,

2. $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$,

3. $m^2 \equiv 4 \pmod{8}$

Concluye que si m es impar, entonces $m^2 - 1$ es múltiplo de 8.

Ejercicio 25. Tres granjeros dividen en partes iguales el arroz que han cultivado en común. Fueron a mercados diferentes en los que se usaban medidas de peso diferentes: en un lugar era de 7 kilos, en otro de 15 kilos y en el último de 19 kilos. Cada uno vendió todo lo que pudo en medidas enteras en sus respectivos mercados y a la vuelta al primer granjero le sobraban 6 kilos, al segundo 11 y al tercero 14. ¿Cuánto arroz habían cultivado?

Ejercicio 26. Un cocinero de un barco pirata relató cómo había conseguido las dieciocho monedas de oro que llevaba: *Quince piratas atacaron un barco francés. Consiguieron un cofre lleno de monedas de oro. Las repartieron en partes iguales y me dieron las cinco que sobraban. Sin embargo, tras una tormenta murieron dos de ellos, por lo que los piratas juntaron todas sus monedas y las volvieron a repartir. A mí me dieron las diez que sobraban. Por último, tras una epidemia de peste murieron cinco de los piratas que aún quedaban en pie, por lo que los supervivientes repitieron la misma operación.* Sabiendo que en el cofre no caben más de dos mil quinientas monedas, ¿cuántas monedas contenía el cofre?

Ejercicio 27 (El problema del mono y los cocos)**.** Cinco hombres y un mono naufragan en una isla desierta. Durante el primer día los hombres se dedican a recoger cocos. Al final del día deciden dejar el reparto para el día siguiente. Por la noche, uno de ellos despierta y, desconfiado, decide separar su parte. Divide los cocos en cinco montones, toma su parte y, como sobra un coco, se lo da al mono. Poco después, un segundo náufrago se despierta y hace lo mismo. Al dividir los cocos en cinco montones, vuelve a sobrar un coco y también se lo da al mono. Uno tras otro, el tercero, cuarto y quinto náufragos hacen lo mismo. Al día siguiente por la mañana, dividen los cocos en cinco montones sin que sobre ninguno. ¿Cuántos cocos se habían recolectado inicialmente?

Ejercicio 28. Calcula los números que hay entre 20000 y 30000 que terminen en 39, al escribirlos en base 4 terminan en 33, y al escribirlos en base 8 acaban en 37.

Ejercicio 29. Resuelve las siguientes congruencias:

1. $3x \equiv 2 \pmod{5}$,

2. $7x \equiv 4 \pmod{10}$,

3. $6x \equiv 3 \pmod{4}$.

Ejercicio 30. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en congruencias:

1.
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ 6x \equiv 3 \pmod{9} \\ 3x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ 2x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

Ejercicio 31. Resuelve la congruencia $1211^{399} n \equiv 20 \pmod{17}$.

Ejercicio 32. De un número natural x sabemos que:

1. Su triple da resto 9 al dividirlo por 13.
2. Si le restamos 2 es múltiplo de 7 y de 8.
3. Si le sumamos dos, la suma de sus cifras vale 4.
4. Es menor que 8000.

¿Cuál es el número x?

Ejercicio 33. Resuelve el siguiente sistema de congruencias:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 17834x & \equiv & 1870 & \pmod{21989} \\ 89710x & \equiv & 10489 & \pmod{8147} \\ 10022x & \equiv & 81984 & \pmod{20984} \\ 20987x & \equiv & 10002 & \pmod{11090} \\ 4094x & \equiv & n & \pmod{56271} \end{array}\right.$$

Donde n es el número formado por las cinco últimas cifras de tu DNI (es decir, si D es tu DNI, entonces $n = D \bmod 100000$).

Ejercicio 34. Determina el número de enteros entre 1500 y 2500 tales que

(a) sus dos últimas cifras en base dos son 10,

(b) sus dos últimas cifras en base tres son 02 y

(c) sus dos últimas cifras en base cinco son 33.

Ejercicio 35. ¿Cuántos números hay entre 60000 y 90000 que terminen en 45, y que su triple dé resto 97 al dividirlos por 122?

Ejercicio 36. Calcula las soluciones enteras de cada una de las siguientes ecuaciones diofánticas:

1. $2x + 3y = 7$.
2. $6x + 10y = 16$.
3. $10x + 23y = 18$.
4. $21x + 14y = 15$.
5. $232x - 341y = 17$.
6. $6x + 9y + 15z = 7$.
7. $6x + 10y + 15z = 7$.
8. $35x + 45y + 55z = 60$.

Ejercicio 37. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación diofántica

$$210x - 91y = 77$$

que verifiquen que $-500 \leq x, y \leq 500$?

Ejercicio 38. 1. Calcula una solución entera de la ecuación

$$79257x + 78610y = 1$$

2. Encuentra el inverso (para el producto) de 79257 en $\mathbb{Z}_{78610}$.

3. Encuentra 78610^{-1} en $\mathbb{Z}_{79257}$.

4. Calcula todas las soluciones de la ecuación

$$79257x + 78610y = 10$$

Ejercicio 39. Tenemos que ir a una oficina de correos a enviar un total de 17 paquetes. Estos paquetes están divididos en dos tipos, que denominaremos `Tipo A` y `Tipo B`. Mandar un paquete `Tipo B` nos cuesta 35 céntimos más que enviar un paquete tipo A.

El envío total nos cuesta $54'5$ euros. ¿Cuántos paquetes enviamos de cada tipo, y cuál es el precio de cada uno de ellos?

Ejercicio 40. Encuentra $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que 31 sea múltiplo de $5a + 7b + 11c$.

Demuestra que si x, y, z son números enteros tales que $5x + 7y + 11z$ es múltiplo de 31, también lo son $21x + 17y + 9z$ y $6x + 27y + 7z$.

Ejercicio 41. En España, el DNI está formado por un número (menor que 10^8) y una letra al final del número. Esta letra se añade al número para detectar posibles errores al introducir un DNI, y para calcularla, se divide el número del DNI entre 23, se toma el resto (que es un número entre 0 y 22) y a cada resto se le hace corresponder una letra según la siguiente tabla:

Resto	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Letra	T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E

1. Comprueba que tu letra del DNI está calculada según este criterio.

2. Calcula la cifra que falta en el DNI $27 - 82818S$.

3. Calcula los posibles valores de a y b para que $31a1b926L$ sea un número de DNI.

Ejercicio 42. Un número de cuenta bancaria está formado por 20 cifras (lo que se denomina Código Cuenta Corriente -CCC-). Representemos estas cifras como

$$c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_9c_{10}c_{11}c_{12}c_{13}c_{14}c_{15}c_{16}c_{17}c_{18}c_{19}c_{20}.$$

De estas 20 cifras, las 4 primeras ($c_1c_2c_3c_4$) corresponden a la entidad donde está la cuenta, y es un número asignado por el Banco de España. Las cuatro siguientes cifras ($c_5c_6c_7c_8$) se corresponden con la sucursal donde se ha abierto la cuenta, y son asignados por la entidad. Las 10 últimas cifras $c_{11}c_{12}c_{13}c_{14}c_{15}c_{16}c_{17}c_{18}c_{19}c_{20}$ es el número de cuenta que asigna la entidad. Quedan dos cifras (c_9c_{10}) denominadas dígitos de control y que se calculan como siguen:

- Calculamos
$$\begin{aligned} x &= (2^2c_1 + 2^3c_2 + 2^4c_3 + 2^5c_4 + 2^6c_5 + 2^7c_6 + 2^8c_7 + 2^9c_8) \text{ mód } 11 \\ &= (4c_1 + 8c_2 + 5c_3 + 10c_4 + 9c_5 + 7c_6 + 3c_7 + 6c_8) \text{ mód } 11. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y &= (2^0c_{11} + 2^1c_{12} + 2^2c_{13} + 2^3c_{14} + 2^4c_{15} + 2^5c_{16} + 2^6c_{17} + 2^7c_{18} + 2^8c_{19} + 2^9c_{20}) \text{ mód } 11 \\ &= (c_{11} + 2c_{12} + 4c_{13} + 8c_{14} + 5c_{15} + 10c_{16} + 9c_{17} + 7c_{18} + 3c_{19} + 6c_{20}) \text{ mód } 11. \end{aligned}$$

- Se tiene que:

$$c_9 = \begin{cases} x & \text{si } \; 0 \le x \le 1 \\ 11 - x & \text{si } \; 2 \le x \le 10 \end{cases} \qquad c_{10} = \begin{cases} y & \text{si } \; 0 \le y \le 1 \\ 11 - y & \text{si } \; 2 \le y \le 10 \end{cases}$$

El Código Internacional de Cuenta Bancaria (IBAN de sus siglas en inglés) es una combinación de caracteres alfanuméricos para identificar internacionalmente una cuenta bancaria. En España consta de 24 caracteres (aunque puede llegar a tener hasta 34). Los dos primeros son los caracteres ES, los dos siguientes son dos dígitos de control y los veinte restantes son las cifras del CCC. Es decir, el IBAN de una cuenta española se obtiene añadiendo, delante del CCC, la cadena ES y dos cifras que vamos a explicar a continuación cómo se calculan.

A cada letra del abecedario se le asigna un número de dos cifras. Se hace siguiendo el orden alfabético, asignándole 10 a la letra A, 11 a la letra B y así hasta 35 que se le asigna a la Z (no está incluida la Ñ). A la letra E se le asigna entonces el 14 y a la S el 28. Escribimos el número de 26 cifras:

$$x = c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_9c_{10}c_{11}c_{12}c_{13}c_{14}c_{15}c_{16}c_{17}c_{18}c_{19}c_{20}1\,4\,2\,8\,0\,0.$$

Las dos cifras de control que se añaden son las que resultan de la operación $98 - x \bmod 97$ (si este número tuviera una sola cifra, se completa con un 0 a la izquierda).

1. Calcula los dígitos de control de la siguiente cuenta bancaria:

   $$3127\ 5210\ xx\ 2891248159.$$

2. En los siguientes números de cuentas faltan algunos dígitos. Determina, cuando sea posible, los dígitos que faltan. Cuando no sea posible, calcula todas las posibilidades que den un número de cuenta correcto:

   a) $8342\ 24-5\ 35\ 5829590283.$

   b) $14-8\ 2856\ 10\ 4920293849.$

   c) $7483\ 1823\ 55\ 38-382-909.$

3. Calcula el IBAN de las cuentas del apartado anterior.

4. Con los siguientes datos, que se corresponden con números de cuentas bancarias españolas, calcula los dígitos que faltan:

a)	ES58	3127	5412	1391	725	78 3.
b)	ES27	1525	3 81	1715	2 47	46 9.
c)	ES51	8 9	8744	728	3973	4 23.

Preguntas test

Ejercicio 43. Dado el sistema de congruencias

$$\begin{cases} 23x \equiv 54 \pmod{60} \\ 12x \equiv 21 \pmod{35} \end{cases}$$

a) Tiene una solución en el intervalo $[1000, 2000]$.

b) Tiene más de una solución en el intervalo $[1000, 2000]$.

c) Tiene infinitas soluciones, pero ninguna en el intervalo $[1000, 2000]$.

d) No tiene solución, pues $\mathrm{mcd}(60, 35) \neq 1$.

Ejercicio 44. La clase del 28 módulo 75

a) Tiene un inverso.

b) No tiene inverso porque ni 4 ni 15 son primos.

c) Tiene dos inversos.

d) Es un divisor de cero.

Ejercicio 45. Las dos últimas cifras del número $37129373222227^{524525273010}$ son

a) 27.

b) 49.

c) 91.

d) 63.

Ejercicio 46. Sea p un número primo. La congruencia $ax \equiv 1 (\text{mód } p^2)$

a) No tiene solución, pues p^2 no es primo.

b) Tiene solución si, y sólo si, $ax \equiv 1 (\text{mód } p)$ tiene solución.

c) Tiene solución, ya que $\mathrm{mcd}(a, 1) | p^2$.

d) Tiene solución salvo que a sea múltiplo de p^2.

Ejercicio 47. El número de unidades de $\mathbb{Z}_{123}$ es

a) 0

b) 40

c) 80

d) 122

Ejercicio 48. Disponemos de 45 billetes de 20 euros, y 18 billetes de 50 euros. ¿De cuántas formas distintas podemos conseguir 1110 euros?

(a) 7.

(b) 11.

(c) 9.

(d) 5.

Ejercicio 49. Sea $a = 24^{1234}$. La congruencia $ax \equiv 6$ mód 11 tiene como solución a:

1. $x = 3$.
2. $x = 7$.
3. $x = 10$.
4. $x = 2$.