TEMA 4 MATRICES CON COEFICIENTES EN UN CUERPO

Sea $I=\{1,2,\dots,m\}$ y $J=\{1,2,\dots,n\}$. Una matriz de orden $m\times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una aplicación

$$A: I\times J \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(i,j) \longrightarrow a_{ij}$$

Normalmente a la matriz A la representaremos de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y diremos que A es una matriz con m filas y n columnas.

Denotaremos por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ al conjunto formado por todas las matrices de ~~orden~~ orden $m\times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

PROPOSICION

$$\# M_{m\times n}(\mathbb{Z}_p) = p^{m\cdot n}.$$

EJEMPLO

$$M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_2)=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\# M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_2) = 2^6 = 64.$$

Suma de matrices

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ son dos

matrices de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ entonces

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

es tambien una matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

PROPOSICION

$M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con la operacion suma tiene estructura de grupo abeliano, esto es, la operacion suma de matrices es conmutativa, asociativa, tiene elemento neutro y todo elemento tiene inverso. El neutro lo denotaremos 0 y $-A$ denota el inverso de la matriz A.

NOTA

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro y

$$-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dos elementos de $M_{2\times3}(\mathbb{Z}_5)$

a) Calcular $A+B$.

b) Quien es el elemento neutro de la suma en $M_{2\times3}(\mathbb{Z}_5)$.

c) Calcular $-A$

-D-

a) $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $-A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Producto de matrices

Si $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B\in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ entonces $A\cdot B\in M_{m\times p}(\mathbb{K})$.

Además, si $(a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in})$ es la fila i de la matriz A y $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j de B, entonces el elemento que ocupa la posición (i,j) en la matriz $A\cdot B$ es

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$$

EJERCICIO

Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$. Calcular $A\cdot B$

-D-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Una matriz de orden $n \times n$ diremos que es una matriz cuadrada de orden n.

PROPOSICION

$(M_{n\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un anillo (no conmutativo). Además, el elemento neutro para el producto es $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$ que la llamaremos la matriz identidad de orden n.

EJERCICIO

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dos elementos de $M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$.

Comprobar que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

-D-

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTES

Dada una matriz cuadrada A, definimos el determinante de A, que denotaremos $|A|$ ó $\det(A)$, de la siguiente forma:

- $|a_{11}| = a_{11}$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$

Ejercicio

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ en $\mathbb{Z}_5$.

-D-

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 1 + \cancel{2} - 3 - 3 - \cancel{2} = 4$

- Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$,

denotaremos por A_{ij} a la matriz que se obtiene a partir de la matriz A quitándole la fila i y la columna j.

Llamaremos adjunto del elemento a_{ij} a

$(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ y lo denotaremos α_{ij}.

Ejercicio

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&1\\3&3&1\end{pmatrix}\in M_{3\times3}(\mathbb{Z}_5)$. Calcular α_{12}.

-D-

$$A_{12}=\begin{pmatrix}\cancel{1}&\cancel{2}&\cancel{1}\\1&\cancel{0}&1\\3&\cancel{3}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}=4(1-3)=4\cdot3=2.$$

Desarrollo de Laplace

Si $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, entonces:

1) (Desarrollo por la fila i) $|A|=a_{i1}\alpha_{i1}+\cdots+a_{in}\alpha_{in}$.

2) (Desarrollo por la Columna j) $|A|=a_{1j}\alpha_{1j}+\cdots+a_{nj}\alpha_{nj}$.

EJERCICIO

Calcular el determinante de $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&0&1&1\\3&1&0&1\\2&0&1&3\end{pmatrix}\in M_{4\times4}(\mathbb{Z}_5)$

-D-

Hacemos el desarrollo de Laplace por la 2ª columna.

$$|A|=2\cdot\alpha_{12}+0\cdot\alpha_{22}+1\cdot\alpha_{32}+0\cdot\alpha_{42}.\underset{1}{=}2\cdot1+1\cdot0=2.$$

$$\alpha_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1&1\\3&0&1\\2&1&3\end{vmatrix}=4(0+2+3-0-4-2)=1$$

$$\alpha_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3&1\\2&1&1\\2&1&3\end{vmatrix}=4(3+1+2-2-3-1)=0$$

• Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ entonces llamaremos matriz transpuesta de A a la matriz $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$

• Una matriz cuadrada A diremos que es simétrica si $A = A^t$.

<u>Propiedades de los determinantes</u>

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Entonces:

1) $|A| = |A^t|$

2) Si intercambiamos dos filas (ó dos columnas) de A obtenemos una nueva matriz cuyo determinante es $-|A|$.

3) Si multiplicamos todos los elementos de una fila (ó de una columna) de A por $\alpha \in \mathbb{K}$, obtenemos una nueva matriz cuyo determinante es $\alpha \cdot |A|$.

4) Si a una fila de A le sumamos otra fila distinta multiplicada por un elemento de $\mathbb{K}$ obtenemos una nueva matriz cuyo determinante coincide con el determinante de A (lo mismo ocurre si esta operacion la hacemos por columnas)

5) Si $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, entonces $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

EJERCICIO

Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$

-D-

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Hacemos el desarrollo de Laplace} \\ \text{por la primera columna} \end{array} \right\} =$$

A la segunda fila le sumo la primera
A la tercera fila le sumo la primera multiplicada por 3
A la cuarta fila le sumo la primera multiplicada por 4

$$= 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(0+0+1-0-1-4) = 2.$$

EJERCICIO

Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{Z}_7)$.

-D-

$$|A| \overset{F_2+5F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 + \cancel{6} + 5 - \cancel{6} - 4 - 2 = 2.$$

- Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ es regular si tiene inversa para el producto, esto es, si existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tq $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. En dicho caso diremos que B es la inversa de A y la denotaremos A^{-1}.

- La matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ es la matriz $\bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ donde α_{ij} es el adjunto del elemento a_{ij}.

TEOREMA

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Entonces A es regular si y solo si $|A| \neq 0$. Además, en dicho caso $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot (\bar{A})^t$.

EJERCICIO

Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$.

-D-

$|A| = 4 - 2 = 2$.

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad (\bar{A})^t = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = 2^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO

Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$.

-D-

$|A| = 2+\cancel{2}+4-\cancel{2}-\cancel{3}-\cancel{1} = 2.$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{A})^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Otra forma de calcular inversas (operaciones por filas)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar todos los elementos de una fila por $\lambda \in K \setminus \{0\}$
- Sumarle a una fila otra multiplicada por un elemento de K

EJERCICIO

Resuelve en el anillo $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$ la ecuacion

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

-D-

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en el anillo $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$.

$$\left.\begin{aligned} A + 2B &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 2A + B &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

-D-

$$\left.\begin{aligned} 3A + B &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 2A + B &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B = 2^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$