TEMA 7

Espacios vectoriales

En estas notas vamos a trabajar algunos ejemplos de subespacios vectoriales.

Recordamos que si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, un subespacio vectorial es un subconjunto no vacío de V que es cerrado para sumas y producto por escalares (es decir, si sumamos dos vectores del subconjunto el resultado pertenece al subconjunto, y si multiplicamos un vector del subconjunto por un elemento de K el resultado pertenece al subconjunto).

Ejemplo 1:

Vamos a tomar V el espacio vectorial $(\mathbb{Z}_3)^3$, y vamos a analizar varios subconjuntos suyos.

1. $U_1 = \{(0,0,0);\ (0,1,1);\ (0,2,2);\ (1,0,1);\ (1,1,2);\ (1,2,0);\ (2,0,2);\ (2,1,0);\ (2,2,1)\}$. Comprobemos que es subespacio vectorial. Para eso, vamos a ir eligiendo vectores de U_1, los sumamos y comprobamos que el resultado pertenece a U_1; los multiplicaremos por escalares y ocurrirá lo mismo.
   - Suma de vectores:
     - $(0,2,2) + (1,2,0) = (1,1,2) \in U_1$.
     - $(1,0,1) + (2,1,0) = (0,1,1) \in U_1$.
     - $(2,2,1) + (1,1,2) = (0,0,0) \in U_1$.
     - $(0,2,2) + (2,2,1) = (2,1,0) \in U_1$.
     - $(1,1,2) + (1,1,2) = (2,2,1) \in U_1$.
     - $(0,0,0) + (2,0,2) = (2,0,2) \in U_1$.
     - Es claro que si uno de los vectores que elegimos es $(0,0,0)$, el resultado de la suma va a pertenecer a U_1.

     Quedan muchos casos por comprobar. En todos ellos ocurrirá lo mismo que ha pasado en estos ejemplos.
   - Producto por escalares: Aquí, los escalares por los que podemos multiplicar son $0,1,2$. Claramente si multiplicamos un vector de U_1 por cero, el resultado es $(0,0,0)$, que pertenece a U_1. Si lo multiplicamos por 1 el resultado es el mismo vector, que también pertenece a U_1. Si lo multiplicamos por 2 el resultado es el mismo que si le sumamos al vector él mismo, que también pertenece a U_1 (por lo visto en el apartado anterior).

   Por tanto, el subconjunto U_1 es cerrado para sumas y producto por escalares.

   Con este ejemplo vemos que si un subconjunto de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$ es cerrado para sumas, entonces es cerrado para producto por escalares. Esto es cierto si el cuerpo sobre el que está definido el espacio vectorial es $\mathbb{Z}_p$ para algún número primo p. En otros casos, no es verdad, como veremos más adelante.
2. $U_2 = \{(0,0,0);\ (1,0,1);\ (2,0,2);\ (1,1,1);\ (2,2,2);\ (1,2,2);\ (2,2,1);\ (1,2,1);\ (2,1,2)\}$ Ahora podemos ver que U_2 no es cerrado para sumas. Por ejemplo, $(1,1,1) \in U_2$, $(1,2,2) \in U_2$ pero $(1,1,1) + (1,2,2) = (2,0,0) \notin U_2$.

   Esto no quita que en algunos casos, la suma de dos vectores de U_2 sí pertenezca a U_2 ($(1,0,1) + (1,1,1) = (2,1,2) \in U_2$).

   Sí se tiene que U_2 es cerrado para producto por escalares.
3. $U_3 = \{(0,0,1);\ (1,1,2);\ (0,1,0);\ (0,2,2);\ (1,2,1);\ (1,0,0);\ (2,1,1);\ (2,0,2);\ (2,2,0)\}$

   Este claramente no es subespacio vectorial. Si tomamos cualquier vector de U_3, por ejemplo, $(1,2,1)$ se tiene que $0 \cdot (1,2,1) = (0,0,0) \notin U_3$. Por tanto U_3 no es cerrado para producto por escalares.

Con este ejemplo podemos concluir que **si el vector cero no pertenece a un subconjunto, éste no es subespacio vectorial**. El que el cero pertenezca no significa que sí lo sea, como hemos puesto de manifiesto en el ejemplo U_2.

4. Sea U_4 el subconjunto de todos los vectores de $(\mathbb{Z}_3)^3$ tales que la suma de sus coordenadas vale 0. Es decir:
$$U_4 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 : x + y + z = 0\}$$
Entonces U_4 es un subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_3)^3$. Podemos comprobarlo de dos formas:
   - Enumeramos todos los elementos de U_4:
   $$U_4 = \{(0, 0, 0);\ (2, 0, 1);\ (1, 0, 2);\ (2, 1, 0);\ (1, 1, 1);\ (0, 1, 2);\ (1, 2, 0);\ (0, 2, 1);\ (2, 2, 2)\}$$
   y ahora procederíamos como hicimos con U_1.
   - Damos una demostración general. Suponemos que $u_1 = (x, y, z)$ y $u_2 = (x', y', z')$ son elementos de U_4. Esto significa que $x + y + z = 0$ y que $x' + y' + z' = 0$. En tal caso, $(x + x') + (y + y') + (z + z') = (x + y + z) + (x' + y' + z') = 0 + 0 = 0$. Por tanto, $u_1 + u_2 \in U_4$.
   Hemos visto que U_4 es cerrado para sumas. Al estar en un $\mathbb{Z}_3$-espacio vectorial concluimos que es también cerrado para producto por escalares.
5. Sean $u_1 = (1, 2, 1)$ y $u_2 = (2, 0, 1)$. Vamos a calcular todas las combinaciones lineales que podemos formar con estos dos vectores:
$$\begin{array}{lll} 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = (0, 0, 0) & 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 = (2, 0, 1) & 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 = (1, 0, 2) \\ 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = (1, 2, 1) & 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 = (0, 2, 2) & 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 = (2, 2, 0) \\ 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = (2, 1, 2) & 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 = (1, 1, 0) & 2 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 = (0, 1, 1) \end{array}$$
El conjunto U_5 formado por todas estos vectores
$$U_5 = \{(0, 0, 0);\ (2, 0, 1);\ (1, 0, 2);\ (1, 2, 1);\ (0, 2, 2);\ (2, 2, 0);\ (2, 1, 2);\ (1, 1, 0);\ (0, 1, 1)\}$$
es un subespacio vectorial, como puede comprobarse fácilmente. Denotaremos a este conjunto como $L(u_1, u_2)$ (conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores u_1 y u_2).
A este subespacio lo llamaremos *subespacio generado por* u_1 *y* u_2.
Notemos que el conjunto $\{u_1;\ u_2\}$ es un sistema de generadores de U_5, pues todo vector de U_5 se expresa como combinación lineal de los vectores u_1, u_2. Además, estos vectores son linealmente independientes (pues $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$). Por tanto, una base de U_1 es $B_{U_1} = \{(1, 2, 1);\ (2, 0, 1)\}$.
6. Sean ahora $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 2, 1)$ y $v_3 = (1, 1, 1)$. Vamos a calcular $U_6 = L(v_1, v_2, v_3)$ (es decir, vamos a calcular todas las combinaciones lineales de estos tres vectores). En principio tenemos 27 posibilidades, pues tenemos 3 posibilidades para cada uno de los escalares que multiplican a v_1, v_2 y v_3.
$$\begin{array}{lll} 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0, 0, 0) & 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (0, 0, 0) & 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (0, 0, 0) \\ 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (2, 2, 1) & 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (2, 2, 1) & 2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (2, 2, 1) \\ 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (1, 1, 2) & 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (1, 1, 2) & 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (1, 1, 2) \\ 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (1, 1, 0) & 2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (1, 1, 0) & 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (1, 1, 0) \\ 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0, 0, 1) & 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (0, 0, 1) & 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (0, 0, 1) \\ 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (2, 2, 2) & 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (2, 2, 2) & 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (2, 2, 2) \\ 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (2, 2, 0) & 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (2, 2, 0) & 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (2, 2, 0) \\ 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (1, 1, 1) & 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (1, 1, 1) & 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (1, 1, 1) \\ 2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0, 0, 2) & 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (0, 0, 2) & 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = (0, 0, 2) \end{array}$$
$$U_6 = \{(0, 0, 0);\ (2, 2, 1);\ (1, 1, 2);\ (1, 1, 0);\ (0, 0, 1);\ (2, 2, 2);\ (2, 2, 0);\ (1, 1, 1);\ (0, 0, 2)\}$$
Tenemos ahora también que $\{v_1;\ v_2;\ v_3\}$ es un sistema de generadores de U_6. Pero ahora estos vectores son linealmente dependientes (pues $v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$). Por tanto, no forman una base.

Sabemos que si tenemos un sistema de generadores de un espacio vectorial, podemos encontrar una base que esté contenida en él. Para esto, si los vectores son linealmente dependientes buscamos uno que sea combinación lineal del resto. De la relación $v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$ despejamos v_3, y obtenemos $v_3 = 2v_1 + v_2$. Por tanto, el conjunto $\{v_1;\ v_2\}$ sigue siendo un sistema de generadores de U_6 (esto podemos comprobarlo fijándonos en la columna de la izquierda donde vemos como obtenemos los 9 vectores de U_6 como combinación lineal de v_1 y v_2). Como estos vectores son linealmente independientes, forman una base de U_6.

Si tomáramos un vector que fuera combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3, por ejemplo, $u = v_1 + 2v_2 + 2v_3$, podemos sustituir v_3 por $2v_1 + v_2$ y nos queda:

$$u = v_1+2v_2+2v_3 = v_1+2v_2+2(2v_1+v_2) = v_1+2v_2+4v_1+2v_2 = 5v_1+4v_2 = 2v_1+v_2 = (1,1,1)$$

y vemos que lo podemos escribir como combinación lineal de v_1 y v_2. Por este motivo, $L(v_1, v_2, v_3) = L(v_1, v_2)$. De la misma forma, y puesto que $v_1 = v_2+2v_3$, se tiene que $L(v_1, v_2, v_3) = L(v_2, v_3)$ (y también $L(v_1, v_2, v_3) = L(v_1, v_3)$, ya que $v_2 = v_1 + v_3$).

A la luz de estos ejemplos podemos sacar algunas conclusiones generales:

- Si V es un K-espacio vectorial y $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ son vectores de V, entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de S (es decir, $L(S)$) es un subespacio vectorial de V.

  Esto nos da una forma para obtener subespacios vectoriales de un espacio vectorial V. Tomamos un subconjunto cualquiera de V y formamos el subespacio generado por este subconjunto.

  Por la propia definición de $L(S)$, un sistema de generadores de este subespacio vectorial es el conjunto S.

  Si los vectores de S son linealmente independientes, estos vectores forman una base de S. Si no fueran linealmente independientes, podríamos eliminar algunos de ellos para obtener una base de $L(S)$.

- Si V es un K-espacio vectorial y U un subespacio suyo, entonces U puede obtenerse como hemos descrito en el apartado anterior. Basta tomar B_U una base de U, en cuyo caso $U = L(B_U)$.

  Ejemplo 2:

  Continuamos con el espacio vectorial $V = (\mathbb{Z}_3)^3$.

  1. El subespacio U_1 del ejemplo anterior podemos ver que es igual a $L((1,0,1),(0,1,1))$. Puesto que los vectores $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$ son linealmente independientes tenemos que $\{(1,0,1);\ (0,1,1)\}$ es una base de U_1.
     De aquí concluimos que $\mathrm{dim}(U_1) = 2$. Por tanto, dos vectores cualesquiera de U_1 que sean linealmente independientes forman una base de U_1. Los siguientes conjuntos son bases de U_1.

     $\{(1,0,1);\ (0,1,1)\}$ $\{(1,2,0);\ (2,2,1)\}$ $\{(1,1,2);\ (2,1,0)\}$ $\{(1,0,1);\ (1,1,2)\}$ $\{(2,0,2);\ (2,2,1)\}$

  2. El subespacio U_4 podemos verlo como el subespacio generado por los vectores $(2,0,1)$, $(1,1,1)$. Estos dos vectores forman una base de U_4. Otra base sería $\{(1,0,2);\ (0,1,2)\}$.
  3. El subespacio generado por un único vector está formado por todos los múltiplos de este vector. Por ejemplo, $L((1,1,2)) = \{(0,0,0);\ (1,1,2);\ (2,2,1)\}$. Una base de este subespacio es $B = \{(1,1,2)\}$, y su dimensión vale 1.
  4. Sean ahora $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,2,2)$ y $u_3 = (2,2,1)$. Vamos a calcular el subespacio generado por estos tres vectores:

$$\begin{array}{lll}
0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = (0,0,0) & 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = (2,2,1) & 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 2\cdot v_3 = (1,1,2)\\
0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = (1,2,2) & 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = (0,1,0) & 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 2\cdot v_3 = (2,0,1)\\
0\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = (2,1,1) & 0\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = (1,0,2) & 0\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 2\cdot v_3 = (0,2,0)\\
1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = (1,1,1) & 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = (0,0,2) & 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 2\cdot v_3 = (2,2,0)\\
1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = (2,0,0) & 1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = (1,2,1) & 1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 2\cdot v_3 = (0,1,2)\\
1\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = (0,2,2) & 1\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = (2,1,0) & 1\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 2\cdot v_3 = (1,0,1)\\
2\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = (2,2,2) & 2\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = (1,1,0) & 2\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 2\cdot v_3 = (0,0,1)\\
2\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = (0,1,1) & 2\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = (2,0,2) & 2\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 2\cdot v_3 = (1,2,0)\\
2\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = (1,0,0) & 2\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 1\cdot v_3 = (0,2,1) & 2\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 2\cdot v_3 = (2,1,2)
\end{array}$$

Y vemos como $L(u_1, u_2, u_3) = (\mathbb{Z}_3)^3$ (algo que podíamos haber deducido comprobando que los vectores u_1, u_2, u_3 son linealmente independientes y por tanto una base de $(\mathbb{Z}_3)^3$).

5. El conjunto $\{(0,0,0)\}$ es un subespacio vectorial. Su dimensión es cero, y una base es el conjunto vacío.

Hemos visto que el número de vectores de un $\mathbb{Z}_3$-espacio vectorial de dimensión 1 es 3^1. Si el espacio vectorial tiene dimensión 2 su cardinal es 3^2.

En general, el número de vectores de un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial de dimensión n es p^n. Este resultado es coherente con el último ejemplo que hemos puesto.

Vamos a ver algunos ejemplos más de subespacios vectoriales.

Ejemplo 3:

Vimos en el ejemplo 1 que si tenemos un subconjunto de un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial que es cerrado para sumas, entonces es cerrado para producto por escalares. Si el cuerpo K sobre el que está definido el espacio vectorial es otro, esto no es cierto. Como muestra, los siguientes ejemplos:

1. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Sea $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Es decir, los vectores del primer cuadrante (tienen ambas coordenadas positivas o nulas). La suma de dos vectores de U_1 vuelve a ser un vector de U_1, pues si sumamos números mayores o iguales que cero, el resultado es mayor o igual que cero.

   Sin embargo U_1 no es cerrado para producto por escalares, pues $(1,2) \in U_1$ pero $-2 \cdot (1,2) \notin U_1$.

2. Tomamos V también como $\mathbb{R}^2$, y $U_2 = \{(x,y) \in V : x \in \mathbb{Q}\}$ (podríamos haber escrito $U_2 = \mathbb{Q}\times\mathbb{R}$). Entonces U_2 es cerrado para sumas pero no para producto por escalares, pues $(2,1) \in U_2$ pero $\sqrt{2}(2,1) \notin U_2$.

Ejemplo 4:

Sea $V = (\mathbb{Z}_5)^4$ y U el subespacio de V generado por $\{(1,2,1,3);\ (3,1,2,4);\ (1,2,3,3)\}$. Vamos a calcular la dimensión y una base de V.

Sabemos que $\{(1,2,1,3);\ (3,1,2,4);\ (2,4,4,1)\}$ es un sistema de generadores de V. Estudiamos si son linealmente dependientes o independientes. Para eso, calculamos el rango de la matriz cuyas filas (o columnas) son las coordenadas de estos vectores.

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Luego son linealmente dependientes. Además, como el rango vale 2, la dimensión del subespacio U es igual a 2. Podemos comprobar que

$$1 \cdot (1,2,1,3) + 1 \cdot (3,1,2,4) + 3 \cdot (2,4,4,1) = (0,0,0,0)$$

Por tanto, cualquiera de los tres es combinación lineal de los otros dos

$$\begin{aligned} (1,2,1,3) &= 4 \cdot (3,1,2,4) + 2 \cdot (2,4,4,1); \\ (3,1,2,4) &= 4 \cdot (1,2,1,3) + 2 \cdot (2,4,4,1); \\ (2,4,4,1) &= 3 \cdot (1,2,1,3) + 3 \cdot (3,1,2,4). \end{aligned}$$

Podemos eliminar entonces cualquiera de los tres para obtener una base de U.

Ejemplo 5:

Tomamos como V el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Sean $u_1 = (1,1,2,-1)$, $u_2 = (3,1,-1,2)$ y $u_3 = (-1,1,0,1)$. Sea $U = L(u_1,u_2,u_3)$.

- Si intercambiamos dos vectores de orden, el subespacio que generan es el mismo. Por ejemplo, $U = L(u_1,u_3,u_2)$. Esto es claro, pues toda combinación lineal de los vectores u_1,u_2,u_3 es una combinación lineal de los vectores u_1,u_3,u_2.

- Si multiplicamos uno de los vectores por un escalar distinto de cero, el subespacio que generan los vectores que resultan es el mismo. Por ejemplo, tomamos $v_1 = u_1$, $v_2 = 3 \cdot u_2$ y $v_3 = u_3$. En tal caso, $L(v_1, v_2, v_3) = U$. Por ejemplo:

  - Si $u = 3 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 - u_3$ entonces $u = 3 \cdot v_1 + \frac{2}{3} \cdot v_2 - u_3$.
  - Si $u = -u_1 + 3 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3$ entonces $u = -v_1 + v_2 + 2 \cdot v_3$.

  Y así podemos ver que cualquier vector que sea combinación lineal de u_1, u_2, u_3 es combinación lineal de v_1, v_2, v_3.

  Y recíprocamente, cualquier vector que sea combinación lineal de v_1, v_2, v_3 es combinación lineal de u_1, u_2, u_3.

- Si sustituimos un vector por el resultado de sumarle otro vector multiplicado por un escalar, los vectores que resultan generan el mismo subespacio. Por ejemplo, tomamos ahora $v_1 = u_1 + 2u_2 = (7, 3, 0, 3)$, $v_2 = u_2$ y $v_3 = u_3$, y vamos a ver que $L(u_1, u_2, u_3) = L(v_1, v_2, v_3)$.

  Elegimos un vector que pertenezca a $L(u_1, u_2, u_3)$, por ejemplo $u = 3u_1 - 2u_2 + 4u_3 = (-7, 5, 8, -3)$. Podemos ver como $u = 3v_1 - 8v_2 + 4v_3$. Esta relación viene de:

  $$u = 3u_1 - 2u_2 + 4u_3 = 3(v_1 - 2u_2) - 2u_2 + 4u_3 = 3v_1 - 6v_2 - 2v_2 + 4v_3 = 3v_1 - 8v_2 + 4v_3$$

  En general, si $u = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ se tiene que

  $$u = a_1(v_1 - 2u_2) + a_2u_2 + a_3u_3 = a_1v_1 + (a_2 - 2a_1)v_2 + a_3v_3.$$

  Es decir, todo vector de $L(u_1, u_2, u_3)$ es combinación lineal de $L(v_1, v_2, v_3)$.

  Al revés también es cierto. Si $u = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$ entonces

  $$u = b_1(u_1 + 2u_2) + b_2u_2 + b_3u_3 = b_1u_1 + (b_2 + 2b_1)u_2 + b_3u_3.$$

Vemos entonces que si tenemos un espacio vectorial V y un subespacio suyo U generado por un conjunto de vectores $u_1, u_2, \cdots, u_m$, entonces:

- Formamos una matriz cuyas filas (o columnas) sean las coordenadas de los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_m$ en una base B
- Realizamos en esta matriz transformaciones elementales por filas (o columnas).
- Las filas (o columnas) resultantes son las coordenadas (en la base B) de un sistema de generadores de U.

Ejemplo 6:

Vamos a apoyarnos en este último resultado para calcular bases de los subespacios que hemos visto en los dos últimos ejemplos:

1. U es el subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^4$ generado por $\{(1, 2, 1, 3);\ (3, 1, 2, 4);\ (1, 2, 3, 3)\}$. Aunque ya conocemos algunas bases de este subespacio vamos a calcular una nueva tal y como acabamos de describir.

   Para esto, formamos la matriz cuyas filas son los tres vectores y calculamos su forma normal de Hermite por filas (si escribiéramos los vectores por columnas, calcularíamos la forma de Hermite por columnas).

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(4)]{E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(2)]{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Y obtenemos que $\{(1, 2, 0, 3);\ (0, 0, 1, 0)\}$ es una base de U.

2. U es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $S = \{(1, 1, 2, -1);\ (3, 1, -1, 2);\ (-1, 1, 0, 1)\}$. Procedemos igual que en el ejemplo precedente.

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1)]{E_{21}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

   $$\xrightarrow[E_{32}(2)]{E_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{-1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(-1)]{E_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y tenemos que $B = \{(1,0,0,0);\ (0,1,0,1);\ (0,0,1,-1)\}$ es una base de U (también S lo es).

Si a la hora de calcular la forma normal de Hermite, le añadimos previamente la matriz identidad podemos obtener más información. Vamos a verlo con el ejemplo que acabamos de hacer con un subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{21}(2) \\ E_{31}(4)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{12}(1) \\ E_{32}(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que el rango de la matriz formada por los vectores es igual a 2, significa que los tres vectores son linealmente dependientes (esto lo vemos pues la última fila de su forma de Hermite es $(0\ 0\ 0\ 0)$). Nos fijamos en el resto de coeficientes de la última fila, y podemos concluir que:

$$(0,0,0,0) = 3\cdot(1,2,1,3) + 2\cdot(3,1,2,4) + 1\cdot(1,2,3,3)$$

Lo cual nos reafirma en que los tres vectores son linealmente dependientes.

También, si nos fijamos en las otras filas podemos deducir que:

$$\begin{array}{l} (1,2,0,3) = 3\cdot(1,2,1,3) + 1\cdot(3,1,2,4) + 0\cdot(1,2,3,3) \\ (0,0,1,0) = 3\cdot(1,2,1,3) + 4\cdot(3,1,2,4) + 0\cdot(1,2,3,3) \end{array}$$

Lo que nos preguntamos ahora es si, dado un espacio vectorial V, un subespacio U y un vector $u \in V$, el vector u pertenece o no a U.

En el caso de que tengamos explícitamente todos los vectores del subespacio U (como en los primeros ejemplos) únicamente hay que comprobar si el vector u es uno de ellos. Sin embargo, normalmente el subespacio nos vendrá dado de otra forma.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 7:

1. Sea $U = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 : x+y+z=0\}$. En el ejemplo 1 vimos que U es un subespacio vectorial (en aquel momento lo llamamos U_4).

   En este caso, comprobar si un vector pertenece o no a U es sencillo, pues basta comprobar si satisface o no si sus coordenadas satisfacen o no la ecuación $x+y+z=0$.

   Por ejemplo, $(1,1,2) \notin U$, ya que $1+1+2=1\neq 0$, mientras que $(1,2,0)\in U$ pues $1+2+0=0$.

2. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $u_1 = (1,1,2,-1)$, $u_2 = (3,1,-1,2)$, y $u_3 = (-1,1,0,1)$. Vamos a comprobar si el vector $u=(1,1,1,1)\in U$.

   Para que este vector pertenezca a U tiene que ser combinación lineal de los vectores u_1, u_2 y u_3. Es decir, deben existir $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tales que $u = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$. Planteamos las ecuaciones:

   $$(1,1,1,1) = a_1(1,1,2,-1) + a_2(3,1,-1,2) + a_3(-1,1,0,1)$$

   $$\begin{array}{rcrcrcl} a_1 & + & 3a_2 & - & a_3 & = & 1 \\ a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 1 \\ 2a_1 & - & a_2 & & & = & 1 \\ -a_1 & + & 2a_2 & + & a_3 & = & 1 \end{array}$$

   Calculamos la forma de Hermite de la matriz ampliada:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Y vemos que $rg(A) = 3$ mientras que $rg(A|b) = 4$, luego el sistema es incompatible. Por tanto, $u \notin U$.

En el ejemplo 6 vimos que $\{(1,0,0,0);\ (0,1,0,1);\ (0,0,1,-1)\}$ es una base de U. Podríamos entonces comprobar si $u \in U$ viendo si u es combinación lineal de estos tres vectores. En tal caso, el sistema que habría que resolver es:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_1 & & & & & = & 1 \\ & & a_2 & & & = & 1 \\ & & & & a_3 & = & 1 \\ & & a_2 & - & a_3 & = & 1 \end{array}$$

Y se ve fácilmente que no tiene solución.

Sea ahora $v = (9,1,-5,6)$. Comprobemos si pertenece o no a U. Planteamos el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_1 & & & & & = & 9 \\ & & a_2 & & & = & 1 \\ & & & & a_3 & = & -5 \\ & & a_2 & - & a_3 & = & 6 \end{array}$$

que tiene como solución $a_1 = 9$, $a_2 = 1$, $a_3 = -5$.

Si nos fijamos con más detalle vemos que lo que ha hecho posible que el sistema tenga solución es que la cuarta coordenada sea igual a la segunda menos la tercera.

De hecho, se tiene que un vector $(x,y,z,t) \in U$ si, y sólo si, existen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tales que $(x,y,z,t) = a_1(1,0,0,0)+a_2(0,1,0,1)+a_3(0,0,1,-1)$. Visto de otra forma, $(x,y,z,t) \in U$ si, y sólo si, existen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x = a_1$, $y = a_2$, $z = a_3$, $t = a_2 - a_3$. Y esto ocurre si, y sólo si, $t = y - z$.

En otras palabras, se tiene que $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y - z - t = 0\}$.

Descrito así el subespacio U es fácil comprobar cuando un vector pertenece o no al subespacio.

3. Sea ahora U el subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^4$ generado por $\{(1,2,1,3);\ (3,1,2,4);\ (1,2,3,3)\}$. En el ejemplo 6 calculamos una base de este subespacio. Dicha base es $\{(1,2,0,3);\ (0,0,1,0)\}$.

   Tenemos entonces que $(x,y,z,t) \in U$ si, y sólo si, existen $a, b \in \mathbb{Z}_5$ tales que

$$\begin{array}{rcrr} x & = & a & \\ y & = & 2a & \\ z & = & & b \\ t & = & 3a & \end{array}$$

   En este caso, x y z pueden tomar cualquier valor de $\mathbb{Z}_5$ (son libres), mientras que y debe valer $2x$ y z debe valer $3x$. En tal caso, se tiene que

$$U = \left\{(x,y,z,t) \in (\mathbb{Z}_5)^4 : \begin{array}{c} y = 2x \\ t = 3x \end{array}\right\} = \left\{(x,y,z,t) \in (\mathbb{Z}_5)^4 : \begin{array}{c} 2x + 4y = 0 \\ 3x + 4t = 0 \end{array}\right\}.$$

En estos dos últimos ejemplos hemos visto que el subespacio U puede describirse como el conjunto de vectores cuyas coordenadas son soluciones de un sistema homogéneo.

Este hecho es completamente general. Dado un espacio vectorial V (y fijada una base B de dicho espacio), y un subespacio U, el subespacio U puede describirse con los vectores cuyas coordenadas en B son soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo. A tales ecuaciones las llamaremos ecuaciones cartesianas del subespacio U (en la base B).

Ejemplo 8:

Vamos a calcular las ecuaciones cartesianas de los distintos subespacios vectoriales con los que hemos trabajado.

1. $U_1 = \{(0,0,0);\ (0,1,1);\ (0,2,2);\ (1,0,1);\ (1,1,2);\ (1,2,0);\ (2,0,2);\ (2,1,0);\ (2,2,1)\}$. En el ejemplo 1 vimos que es un subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_3)^3$. Podemos comprobar que

$$U_1 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 : x + y + 2z = 0\}$$

2. Sea $U_2 = L((1,2,1),(2,0,1)) \subseteq (\mathbb{Z}_3)^3$ (este es el subespacio U_5 del primer ejemplo).

   En este caso, se tiene que $U_2 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 : x + 2y + z = 0\}$.

3. Sea $U_3 = L((1,1,0),(2,2,1),(1,1,1)) \subseteq (\mathbb{Z}_3)^3$ (el subespacio U_6 del primer ejemplo). En este caso, U_3 vendría dado por la ecuación $x + 2y = 0$.

Si V es un espacio vectorial de dimensión n, y U es un subespacio vectorial de dimensión m, entonces necesitamos un sistema $n - m$ ecuaciones lineales homogéneas para determinar el subespacio U. A estas ecuaciones se les conoce como *ecuaciones cartesianas* del subespacio U.

Tenemos ahora dos formas de determinar un subespacio vectorial: mediante un sistema de generadores o mediante las ecuaciones cartesianas.

Hemos visto como obtener las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial a partir de un sistema de generadores.

Si lo que tenemos son las ecuaciones cartesianas, lo que hemos de hacer es resolver el sistema correspondiente.

Ejemplo 9:

1. Sea U el subespacio de $(\mathbb{Z}_7)^4$ de ecuaciones:

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & 5y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ 2x & + & 6y & + & 4z & + & 4t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & + & 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

Vamos a calcular una base de U. Para eso resolvemos el sistema que define las ecuaciones de U, y esto lo hacemos calculando la forma normal de Hermite de la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego U viene dado por dos ecuaciones (de las tres que teníamos hay una que es redundante, pues es combinación lineal de las otras dos). Despejamos x e y, mientras que z y t quedan libres. Entonces, $\dim(U) = 4 - 2 = 2$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 6t & = & 0 \\ & y & + \; 3z & + & t & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{rclcl} x & = & & & t \\ y & = & 4z & + & 6t \\ z & = & z & & \\ t & = & & & t \end{array}$$

Y ahora, elegimos $z = 1,\ t = 0$ y $z = 0,\ t = 1$ para obtener una base de U.
$B_U = \{(0,4,1,0);\ (1,6,0,1)\}$.