TEMA 9 COMBINATORIA

La combinatoria es la tecnica de saber cuantos elementos tiene un conjunto sin necesidad de contarlos uno por uno. Por ejemplo, nosotros sabemos que el cardinal de $\{1,2,3\}\times\{a,b,c,d\}$ es 12.

Principio de inclusion-exclusion para dos conjuntos: Si A_1 y A_2 son dos conjuntos entonces $\#(A_1\cup A_2)=\#A_1+\#A_2-\#(A_1\cap A_2)$.

EJERCICIO

¿Cuantos numeros entre 1 y 100 son multiplos de 2 ó de 3?

-D-

$A_1=\{x\in\{1,\dots,100\}$ tq x es multiplo de $2\}$.

$A_2=\{x\in\{1,\dots,100\}$ tq x es multiplo de $3\}$.

$A_1\cap A_2=\{x\in\{1,\dots,100\}$ tq x es multiplo de $6\}$.

$$\#(A_1\cup A_2)=\#A_1+\#A_2-\#(A_1\cap A_2).$$

$$A_1=\{2\cdot 1,2\cdot 2,\dots,2\cdot 50\}\Rightarrow \#A_1=50$$

$$A_2=\{3\cdot 1,3\cdot 2,\dots,3\cdot 33\}\Rightarrow \#A_2=33$$

$$A_1\cap A_2=\{6\cdot 1,6\cdot 2,\dots,6\cdot 16\}\Rightarrow \#(A_1\cap A_2)=16.$$

$$\#(A_1\cup A_2)=50+33-16=67.$$

Principio de inclusion-exclusion general: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos entonces $\#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots \cdots$

$$\cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n+1} \#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

NOTA

1) $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

2) $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_4) -$

$- \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_4) - \#(A_3 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) +$

$\#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

EJERCICIO

¿Cuantos numeros entre 1 y 100 son multiplos de 2, de 3 ó de 5?

-D-

$A_1 = \{x \in \{1, \ldots, 100\}$ tq x es multiplo de $2\}$.

$A_2 = \{x \in \{1, \ldots, 100\}$ tq x es multiplo de $3\}$

$A_3 = \{x \in \{1, \ldots, 100\}$ tq x es multiplo de $5\}$.

$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$= 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$

Principio del complementario

si $A \subseteq X$, entonces $\#(X \setminus A) = \#X - \#A$.

EJERCICIO

¿Cuántos números de 3 cifras no son múltiplos ni de 3 ni de 7?

-D-

$\mathbb{X} = \{100, \dots, 999\}$ $\quad \#\mathbb{X} = 900$

$A_1 = \{x \in \mathbb{X}$ tq x es múltiplo de $3\}$.

$A_2 = \{x \in \mathbb{X}$ tq x es múltiplo de $7\}$.

$$\#(\mathbb{X} \setminus (A_1 \cup A_2)) = \#\mathbb{X} - \#(A_1 \cup A_2) = 900 - 385 = 515$$

$$\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2) = 300 + 128 - 43 = 385$$

$A_1 = \{3 \cdot 34, \dots, 3 \cdot 333\} \Rightarrow \#A_1 = 300$

$A_2 = \{7 \cdot 15, \dots, 7 \cdot 142\} \Rightarrow \#A_2 = 128$

$A_1 \cap A_2 = \{21 \cdot 5, \dots, 21 \cdot 47\} \Rightarrow \#(A_1 \cap A_2) = 43$

Principio del producto

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son conjuntos, entonces $\#(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \#A_1 \cdot \#A_2 \cdot \dots \cdot \#A_n$.

EJERCICIO

Las placas de matrícula de los vehículos de cierto país, constan de 4 letras (elegidas entre 25) seguidas de 3 números (de 10 posibles). ¿Cuántas placas de matrícula distinta pueden formarse?

-D-

$$\#(L \times L \times L \times L \times N \times N \times N) = 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10.$$

Si $q \in \mathbb{Q}$ entonces $\lfloor q \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \text{ tq } z \leq q\}$ y

$\lceil q \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} \text{ tq } q \leq z\}$.

Principio de las cajas (ó de Dirichlet)

Si se distribuyen m objetos en n cajas, entonces existe una caja que contiene $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ objetos o mas, y otra caja que contiene $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ objetos o menos.

EJERCICIO.

¿Cual es el minimo numero de alumnos que debe tener una asignatura, para poder asegurar que al menos 6 alumnos van a obtener la misma calificacion? (se califica $0, 1, 2, \dots, 10$).

-D-

Repartimos x alumnos en 11 cajas (la caja de 0, la caja de 1, ...). Si $\lceil \frac{x}{11} \rceil \geq 6$ entonces $x \geq 56$.

Variaciones simples

Sea A un conjunto de cardinal m. Una k-tupla $(a_1, \dots, a_k)$ diremos que es simple si $\#\{a_1, \dots, a_k\} = k$.

¿Cuantas k-tuplas simples podemos formar con los elementos de A?

- Si $m < k$ ninguna.
- Si $m \geq k$, entonces $V_{m,k} = \dfrac{m!}{(m-k)!}$

El numero anterior tambien indica el numero de aplicaciones injectivas de un conjunto de k elementos en un conjunto de m elementos.

EJERCICIO

¿Cuantos numeros de 3 cifras distintas podemos formar con los digitos 5, 6, 7, 8 y 9?

-D-

Hay tantos numeros con esas características como 3-tuplas simples podemos formar con los elementos del conjunto $\{5, 6, 7, 8, 9\}$.

$$V_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

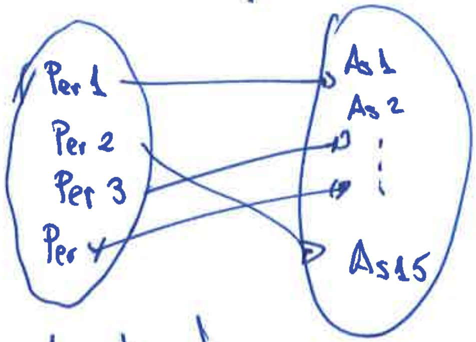
• otra forma de hacer el ejercicio. Tengo que rellenar 3 casillas

— — — a la primera casilla le puedo dar 5 valores, a la segunda 4 y a la tercera 3. Por tanto hay $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ numeros con esas características.

EJERCICIO

¿De cuantas formas se pueden sentar 4 personas en un microbus de 15 plazas?

-D-



Hay tantas formas como aplicaciones inyectivas hay de un conjunto de 4 elementos en un conjunto de 15 elementos

$$V_{15,4} = \frac{15!}{(15-4)!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32.760$$

otra forma de hacer el ejercicio: La Per1 la puedo sentar en 15 sitios, la Per2 en 14, la Per3 en 13 y la Per4 en 12. Por tanto $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32.760$.

EJERCICIO

¿Cuantos numeros de tres cifras distintas podemos formar con los digitos 0, 1, 2, 3 y 4?

-D-

$V_{5,3}$ es el numero de ternas simples. Notese que la terna (0, 1, 3) no da lugar a un numero de tres cifras. Por tanto hay que quitar las ternas que empiezan por 0 que hay $V_{4,2}$.

Solucion del problema $= V_{5,3} - V_{4,2} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 48$

Otra forma de hacer el ejercicio: Tenemos que rellenar tres casillas _ _ _ a la primera le podemos dar 4 valores a la segunda 4 valores y la tercera 3 valores. Por tanto hay $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ posibilidades.

Variaciones con repeticion

Sea A un conjunto de cardinal m. ¿Cuantas k-tuplas podemos formar con los elementos de A?

$$V^R_{m,k} = m^k$$

El numero anterior tambien indica el numero de aplicaciones que hay de un conjunto de k elementos en un conjunto de m elementos.

EJERCICIO

¿Cuantos numeros de 3 cifras podemos construir utilizando los digitos 1 y 2?

-D-

Dar un numero de esas caracteristicas ~~[illegible]~~ es dar una 3-tupla formada por elementos del conjunto $\{1,2\}$. Por tanto hay $V^R_{2,3} = 2^3 = 8$

Otra forma de hacer el ejercicio. Hay que rellenar tres casillas _ _ _ a la primera le puedo dar 2 valores, a la segunda 2 valores y a la tercera 2 valores. Por tanto hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

EJERCICIO

¿Cuantos numeros de 3 cifras podemos construir utilizando los digitos 0, 1 y 2?

-D-

$$V^R_{3,3} - V^R_{3,2} = 3^3 - 3^2 = 27 - 9 = 18.$$

Otra forma: Rellenamos tres casillas _ _ _ a la primera le puedo dar 2 valores, a la segunda 3 y a la tercera 3. Por tanto hay $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

EJERCICIO

¿Cuantos polinomios tiene $\mathbb{Z}_5[x]$ de grado menor o igual que 2?

-D-

Dar un polinomio de grado menor o igual que 2 es dar una 3-tupla formada por elementos del conjunto $\{0,1,2,3,4\}$.

Por tanto hay $V^R_{5,3} = 5^3 = 125$.

Otra forma: Hay que rellenar 3 casillas — — — y a cada casilla le puedo dar 5 valores. Por tanto hay $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

EJERCICIO

¿Cuanto polinomios tiene $\mathbb{Z}_5[x]$ de grado 2?

-D-

$$V^R_{5,3} - V^R_{5,2} = 5^3 - 5^2 = 100$$

Otra forma: Hay que rellenar tres casillas — — — a la primera 4 valores, a la segunda 5 y a la tercera 5. Por tanto $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

EJERCICIO

¿Cuanto polinomios monicos tiene $\mathbb{Z}_5[x]$ de grado menor o igual que 2?

-D-

Monicos de grado 2 $\to 5^2$

Monicos de grado 1 $\to 5$

Monicos de grado 0 $\to 1$

Total $= 25+5+1 = \underline{31}$

Permutaciones simples

Sea A un conjunto de cardinal m. ¿Cuantas m-tuplas simples podemos formar con los elementos de A?

$$P_m = m!$$

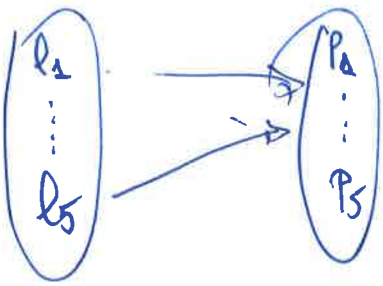
El numero anterior tambien indica el numero de aplicaciones bijectivas que hay de un conjunto de m elementos en un conjunto de m elementos.

Notese que las permutaciones simples son un caso particular de Variacion simple tomando $m = k$, esto es, $P_m = V_{m,m}$.

EJERCICIO

¿De cuantas formas distintas podemos colocar 5 libros en una estanteria?

-D-



Dar una colocacion es dar una aplicacion bijectiva del conjunt de los 5 libros en el conjunt de las 5 posicions. Por tant hay $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

Otra forma: el libro 1 lo puedo colocar en 5 posicions, el libro 2 en 4, ---

--- libro 5 en 1. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Permutaciones con repeticion.

Sea A un conjunto de cardinal r y $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, m\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tq $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = m$. ¿Cuantas m-tuplas podemos formar con los elementos de A de manera que una coordenada se repita α_1 veces, otra α_2 veces, ..., y otra α_r veces?

$$P_m^{\alpha_1, \dots, \alpha_r} = \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_r!}$$

EJERCICIO

¿Cuantos numeros de 16 cifras se pueden formar con 3 unos, 5 doses y 8 treses?

-D-

$$P_{16}^{3,5,8} = \frac{16!}{3!\,5!\,8!} = \frac{\cancel{16} \cdot \cancel{15} \cdot \cancel{14} \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}} =$$

$$= 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 = 720.720.$$

EJERCICIO

¿Cuantos numeros de 16 cifras se pueden formar con 3 unos, 5 doses, 6 treses y 2 ceros?

-D-

$$P_{16}^{3,5,6,2} - P_{15}^{3,5,6,1} = \frac{16!}{3!\,5!\,6!\,2!} - \frac{15!}{3!\,6!\,5!} =$$

$$= \frac{\cancel{16} \cdot \cancel{15} \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} - \frac{\cancel{15} \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{6} \cdot 2 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}$$

$$= 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 - 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 17.657.640.$$

EJERCICIO

¿De cuantas formas podemos ordenar las letras de la palabra CACATUA?

-D-

$$P_7^{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2} = 420.$$

Combinaciones simples

Sea A un conjunto de cardinal m y $k \in \{0, \dots, m\}$.
¿Cuantos subconjuntos de cardinal k tiene A?

$$C_{m,k} = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$$

EJERCICIO

Se extraen 5 cartas de una baraja de 40. ¿Cuantas jugadas diferentes pueden obtenerse?

-D-

$$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!\,35!} = \frac{\cancel{40}\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}} =$$

$$= 39\cdot 38\cdot 37\cdot 12 = 658.008.$$

EJERCICIO

Cierto club deportivo esta formado por 15 mujeres y 12 hombres. Un comite consta de 4 personas. ¿Cuantos comites se pueden formar que contengan exactamente 2 mujeres.

-D-

Formar un comite es rellenar dos casillas _ _, en la primera hay que poner dos mujeres y en la segunda hay que poner dos hombres. La primera casilla la podemos dar $\binom{15}{2}$ valores y a la segunda $\binom{12}{2}$. Por tanto, la solucion del problema es

$$\binom{15}{2}\cdot\binom{12}{2} = \frac{15!}{2!\,13!}\cdot\frac{12!}{2!\,10!} = \frac{15\cdot 14}{2}\cdot\frac{12\cdot 11}{2} =$$

$$= 15\cdot 7\cdot 6\cdot 11 = 6930.$$

EJERCICIO

¿De cuantas formas distintas se pueden acertar exactamente 9 resultados en una quiniela de 14?

-D-

Hay que rellenar 6 casillas _ _ _ _ _ _, en la primera ponemos los 9 resultados que queremos acertar y en las otras como fallamos los 5 partidos restantes. Por tanto, la solucion del problema es $\binom{14}{9}\cdot 2^5$.

Combinaciones con repeticion

Supongamos que disponemos de bolas de m colores (un numero ilimitado de cada una de ellas) y sea $k\in\mathbb{N}$.

¿Cuantas cajas distintas de k bolas podemos formar?

$$C^R_{m,k} = \binom{m+k-1}{k}$$

el numero anterior tambien coincide con $\#\{(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{N}^m$ tq $x_1+\dots+x_m=k\}$.

EJERCICIO

En una heladeria se sirven helados de 20 sabores diferentes. ¿Cuantas compras distintas de 12 helados pueden realizarse?

-D-

$$C^R_{20,12} = \binom{31}{12} = \frac{31!}{12!\,19!} = \frac{31\cdot \cancel{30}\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot \cancel{22}\cdot 21\cdot \cancel{20}}{12\cdot \cancel{11}\cdot \cancel{10}\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}$$

$$= \frac{29\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot 26\cdot 25\cdot \cancel{2}\cdot 23\cdot 21}{\cancel{8}\cdot 6} = 29\cdot 13\cdot 25\cdot 23\cdot 21 = 4.552.275.$$

EJERCICIO

Se lanzan 3 dados simultaneamente ¿Cuantas jugadas distintas podemos obtener?

-D-

Una jugada es una caja con tres numeros

$$C^R_{6,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 56.$$

EJERCICIO

¿Cuantas soluciones enteras tiene la ecuacion $x_1+x_2+x_3+x_4=24$ tq $x_i \geq 2$ para todo $i \in \{1,2,3,4\}$?

-D-

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=24 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \{2,3,\rightarrow\}^4 \end{array}\right\} (1)$$

La solucion del problema coincide con el numero de soluciones de (1).

(1) tiene el mismo numero de soluciones que

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=16 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{N}^4 \end{array}\right| (2)$$

Ya que (s_1,s_2,s_3,s_4) es solucion de (2) si y solo si

$(s_1+2, s_2+2, s_3+2, s_4+2)$ es solucion de (1).

Por tanto la solucion del problema es $C^R_{4,16} = \binom{19}{16} =$

$$= \frac{19!}{16!\,3!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3 \cdot 2} = 19 \cdot 3 \cdot 17 = 969.$$

EJERCICIO

Con los digitos 1,2,3,4,5,6 y 7. ¿Cuantos numeros de tres cifras podemos formar de manera que la suma de sus cifras sea 10?

-D-

La solucion del problema es $\#\{(x_1,x_2,x_3) \in \{1,2,3,4,5,6,7\}^3$ tq $x_1+x_2+x_3 = 10\}$. Este numero coincide con $\#\{(x_1,x_2,x_3) \in \{0,1,2,3,4,5,6\}^3$ tq $x_1+x_2+x_3 = 7\}$.

Como $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{N}^3$ tq $x_1+x_2+x_3=7\} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \{0,\dots,6\}^3$ tq $x_1+x_2+x_3 = 7\} \cup \{(7,0,0), (0,7,0), (0,0,7)\}$, entonces la solucion del problema es $C^R_{3,7} - 3 = \binom{9}{7} - 3 = \frac{9!}{7!\,2!} - 3 =$

$$= \frac{9 \cdot 8}{2} - 3 = 33.$$