TEMA 6 APLICACIONES LINEALES

Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicacion $f: V \longrightarrow V'$ es lineal (ó un homomorfismo de espacios vectoriales) si verifica lo siguiente:

1) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$

2) $f(a \cdot \vec{v}) = a \cdot f(\vec{v})$ para todo $a \in \mathbb{K}$ y para todo $\vec{v} \in V$.

EJERCICIO

Demostrar que la aplicacion $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x+y, x+z)$ es una aplicacion lineal.

-D-

1) Sean $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2+z_1+z_2)$$

$$= (x_1+y_1, x_1+z_1) + (x_2+y_2, x_2+z_2) = f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2).$$

2) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(a(x,y,z)) = f(ax,ay,az) = (ax+ay, ax+az) = a(x+y, x+z) =$$

$$= a f(x,y,z).$$

EJERCICIO.

¿Es lineal la aplicacion $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x+y+1, x+z)$.

-D-

No ya que $f((1,0,0)+(0,1,0)) = f(1,1,0) = (3,1)$ y $f(1,0,0)+f(0,1,0) = (2,1)+(2,0) = (4,1)$.

PROPOSICION

Si $f: V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal, entonces:

1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$

2) $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$

3) $N(f) = \{\vec{v} \in V \text{ tq } f(\vec{v}) = \vec{0}\}$ es un subespacio vectorial de V al que llamaremos núcleo de f.

4) $Im(f) = \{f(\vec{v}) \text{ tq } \vec{v} \in V\}$ es un subespacio de V' al que llamaremos imagen de f.

EJEMPLO

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_5^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^2$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y+z,\ x+y+z)$. Calcular todos los elementos de $N(f)$.

-D-

$N(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } f(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } (2x+y+z,\ x+y+z) = (0,0)\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3 \text{ tq } \begin{matrix} 2x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{matrix}\right\}.$

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=0 \\ y+z=0 \end{matrix}\right\}$$

$N(f) = \{(0,0,0),\ (0,1,4),\ (0,2,3),\ (0,3,2),\ (0,4,1)\}.$

Tipos especiales de aplicaciones lineales

1) Un monomorfismo es una aplicación lineal inyectiva.
2) Un epimorfismo es una aplicación lineal sobreyectiva.
3) Un isomorfismo es una aplicación lineal bijectiva.

PROPOSICION

Sea $f: V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal.

1) Si f es un isomorfismo entonces f^{-1} es también un isomorfismo
2) f es un monomorfismo si y sólo si $N(f)=\{\vec{0}\}$
3) Si $V=\langle\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}\rangle$ entonces $Im(f)=\langle\{f(\vec{v}_1),\dots,f(\vec{v}_n)\}\rangle$.
4) Si f es un monomorfismo y $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ es un conjunto de vectores L.I. de V entonces $\{f(\vec{v}_1),\dots,f(\vec{v}_n)\}$ es un conjunto de vectores L.I. de V'.

EJERCICIO

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{Z}_5^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^4$ definida por

$f(x,y,z)=(x+y,\ x+z,\ 2x+y+z,\ y+4z)$.

a) Calcular una base de $Im(f)$
b) ¿Es f un epimorfismo?
c) ¿Es f un monomorfismo?

-D-

a) Como $\mathbb{Z}_5^3=\langle\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\rangle$, entonces por el punto 3) de la Proposición anterior tenemos que

$\mathrm{Im}(f) = \langle \{ f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) \} \rangle =$

$= \langle \{ (1,1,2,0), (1,0,1,1), (0,1,1,4) \} \rangle$. Para calcular una base de $\mathrm{Im}(f)$ triangularizaremos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_{\mathrm{Im}(f)} = \{ (1,1,2,0), (0,4,4,1) \}$.

b) Como $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \Rightarrow \mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{Z}_5^4 \Rightarrow f$ no es sobreyectiva $\Rightarrow f$ no es epimorfismo.

c) $N(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3$ tq $f(x,y,z) = (0,0,0,0) \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}_5^3$ tq $\left. \begin{array}{l} x+y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x+y+z = 0 \\ y+4z = 0 \end{array} \right\}$.

$$\left. \begin{array}{l} x+y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x+y+z = 0 \\ y+4z = 0 \end{array} \right\} \sim \left. \begin{array}{l} x+y = 0 \\ 4y+z = 0 \\ 4y+z = 0 \\ y+4z = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x+y = 0 \\ 4y+z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$$

$(4,1,1) \in N(f) \Rightarrow N(f) \neq \{(0,0,0)\} \Rightarrow f$ no es monomorfismo.

TEOREMA

Sea $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V y $\{\vec{v}_1', \dots, \vec{v}_n'\} \subseteq V'$. Entonces existe una única aplicación lineal $f: V \longrightarrow V'$ verificando que $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1', \dots, f(\vec{v}_n) = \vec{v}_n'$. Además, f es un isomorfismo si y solo si $\{\vec{v}_1', \dots, \vec{v}_n'\}$ es una base de V'.

NOTA

El teorema anterior nos dice que una aplicación lineal queda perfectamente determinada conociendo las imágenes de los vectores de una base de V. Además, la aplicación lineal es un isomorfismo si y solo si dichas imágenes forman una base de V'.

- Dos espacios vectoriales V y V' son isomorfos si existe un isomorfismo $f: V \longrightarrow V'$.

COROLARIO

Dos espacios vectoriales V y V' sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ son isomorfos si y solo si $\dim(V) = \dim(V')$.

EJEMPLO

- Los espacios vectoriales $\mathbb{Z}_5^2$ y $\mathbb{Z}_7^2$ no son isomorfos ya que no son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo.
- Los espacios vectoriales $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$ y $\mathbb{Z}_5^4$ son isomorfos ya que los dos son espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de dimensión 4.

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(1,2,3), (0,1,2), (1,3,0)\}$. Calcular el cardinal de U.

-D-

Vamos a calcular una base de U, para ello triangularizamos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Una base de U es $\{(1,2,3),(0,1,2)\}$. Por tanto U es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de dimensión 2. Por consiguiente U es isomorfo a $\mathbb{Z}_5^2$. Entonces existe un isomorfismo $f: U \longrightarrow \mathbb{Z}_5^2$. Como f es biyectiva deducimos que $\# U = \# \mathbb{Z}_5^2$. Es claro que $\# \mathbb{Z}_5^2 = 25$ y por tanto $\# U = 25$.

Ecuaciones de una aplicación lineal

Sea $f: V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V y $B' = \{\vec{v}_1', \dots, \vec{v}_m'\}$ una base de V'. Supongamos que $f(\vec{v}_1) \equiv_{B'} (a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, f(\vec{v}_n) \equiv_{B'} (a_{n1}, \dots, a_{nm})$. Sea $\vec{x} \in V$ tq $\vec{x} \equiv_B (x_1, \dots, x_n)$ y $f(\vec{x}) \equiv_{B'} (x_1', \dots, x_m')$. Entonces

$$(x_1', \dots, x_m') = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

A la expresion anterior la llamaremos la expresion matricial de f respecto de la base B de V y la base B' de V'. A la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

la llamaremos la matriz asociada a f respecto de las bases B de V y B' de V'.

De la expresion matricial de f obtenemos que

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n \\ \vdots \\ x_m' = a_{1m}x_1 + \cdots + a_{nm}x_n \end{array}}$$

← Ecuaciones de f respecto de la base B de V y la base B' de V'.

NOTA

1) f es isomorfismo si y solo si su matriz asociada es regular

2) Cuando nos pidan o nos den la expresion matricial de una aplicacion lineal y no nos digan respecto de que bases supondremos que es respecto de la canonica de V y la canonica de V'.

EJERCICIO

Sea $f: \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ la aplicacion lineal definida por $f(x,y) = (x, x+y, x-y)$. Calcular la expresion matricial de f respecto de las bases $B = \{(1,1),(1,2)\}$ y $B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Vamos a calcular $f(1,1) \equiv_{B'} (\quad)$ y $f(1,2) \equiv_{B'} (\quad)$.

- $f(1,1) = (1,2,0)$

$$a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1) = (1,2,0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b = 1 \\ a +c = 2 \\ b+c = 0 \end{array}\right\}.$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2},\ b = \frac{-1}{2},\ c = \frac{1}{2}$$

$$f(1,1) \equiv_{B'} \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- $f(1,2) = (1,3,-1)$

$$a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1) = (1,3,-1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b = 1 \\ a +c = 3 \\ b+c = -1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{2},\ b = \frac{-3}{2},\ c = \frac{1}{2}$$

$$f(1,2) \equiv_{B'} \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

La expresion matricial de f respecto de las bases B y B' es

$$(x', y', z') = (x, y) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO

Sea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a una aplicacion lineal $f: \mathbb{Z}_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$ respecto de las bases $B = \{(2,1),(3,1)\}$ y $B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$. Calcular $f(2,3)$.

-D-

La expresion matricial de f respecto de las bases B y B' es:

$$(x', y', z') = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La interpretacion que tiene es la siguiente: si $\vec{v} \equiv_B (x, y)$ entonces $f(\vec{v}) \equiv_{B'} (x', y', z')$.

• Vamos a calcular $(2,3) \equiv_B (\quad)$.

$$a(2,1) + b(3,1) = (2,3) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a + 3b = 2 \\ a + b = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 2,\ b = 1$$

$$(2,3) \equiv_B (2,1).$$

$$(2,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (4, 0\ 0)$$

Entonces $f(2,3) \equiv_{B'} (4,0,0) \Rightarrow f(2,3) = 4(1,1,0) + 0(1,0,1) + 0\cdot(0,1,1) \Rightarrow f(2,3) = (4,4,0)$.

EJERCICIO

Calcula una aplicacion lineal $f: \mathbb{Z}_7^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_7^3$ verificando que $f(1,2) = (2,3,1)$ y $f(2,5) = (3,4,2)$.

-D-

Como $\{(1,2), (2,5)\}$ es una base de $\mathbb{Z}_7^2$ entonces sabemos que existe una unica aplicacion lineal f verificando lo que queremos.

Supongamos que $(x', y', z') = (x, y)A$ es la expresion matricial de f (respecto de las bases canonicas). Entonces

$$(1,2)A = (2,3,1) \quad y \quad (2,5)A = (3,4,2).$$

Por tanto, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y por consiguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto $f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x,y) = (4x+6y, 5y, x)$.

EJERCICIO

Calcula una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ verificando que $(1,0,0) \in N(f)$ e $Im(f) = \langle \{(2,3)\} \rangle$.

-D-

Vamos a construir la única aplicación lineal f que verifica que
$$\left. \begin{array}{l} f(1,0,0) = (0,0) \\ f(0,1,0) = (2,3) \\ f(0,0,1) = (4,6) \end{array} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (2y+4z, 3y+6z).$$

TEOREMA.

Si $f: V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal, entonces
$$\dim(V) = \dim(N(f)) + \dim(Im(f)).$$

EJERCICIO

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y, 3x+z)$. Calcular una base de $Im(f)$ y una base de $N(f)$.

-D-

- $\mathbb{R}^3 = \langle \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \rangle \Rightarrow Im(f) = \langle \{ f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\} \rangle \Rightarrow Im(f) = \langle \{(2,3),(1,0),(0,1)\} \rangle$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_{Im(f)} = \{(1,0),(0,1)\}.$$

- $N(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \begin{matrix} 2x + y & = 0 \\ 3x \quad + z & = 0 \end{matrix} \right\}$.

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} = \dim(N(f)) + \underbrace{\dim(Im(f))}_{2} \Rightarrow \dim(N(f)) = 1.$$

$$B_{N(f)} = \{(1,-2,-3)\}.$$

TEOREMA

Si U y W son subespacios vectoriales de V, entonces $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$.

EJERCICIO

Sean U y W los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$ generados por $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$ y $\{(1,0,0),(2,1,3)\}$ respectivamente. Calcular la dimensión de $U \cap W$.

-D-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(W) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U+W) = 3.$$

Por tanto $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 2+2-3 = 1$.

EJERCICIO

Sean U y W los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^4$ generados por

$\{(1,2,3,4),(1,0,4,1),(2,2,2,0)\}$ y

$\{(1,2,1,1),(1,2,3,3),(2,4,2,2)\}$ respectivamente.

¿Es $\mathbb{Z}_5^4 = U \oplus W$?

-D-

Recordemos que $\mathbb{Z}_5^4 = U \oplus W$ si y solo si $\mathbb{Z}_5^4 = U + W$ y

$U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_U = \{(1,2,3,4),$$

$(0,3,1,2)\} \Rightarrow \dim(U) = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_W = \{(1,2,1,1),(0,0,2,2)\} \Rightarrow \dim(W) = 2$$

Como $\mathcal{U}+\mathcal{W}=\langle B_{\mathcal{U}} \cup B_{\mathcal{W}} \rangle$ y

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$ entonces $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W})=4$.

- Como $\mathcal{U}+\mathcal{W}$ es un subespacio de $\mathbb{Z}_5^4$ y $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W})=4$ entonces $\mathbb{Z}_5^4=\mathcal{U}+\mathcal{W}$.

- $\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W})=\dim(\mathcal{U})+\dim(\mathcal{W})-\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W})=2+2-4=0$

  $\Rightarrow \mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{(0,0,0,0)\}$.

Podemos concluir que $\mathbb{Z}_5^4=\mathcal{U}\oplus\mathcal{W}$.

EJERCICIO

¿Existe una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ verificando que $(1,0)\in N(f)$ y $\{(1,2,3),(2,1,2)\}\subseteq \operatorname{Im}(f)$?

-D-

Como $(1,0)\in N(f) \Rightarrow \dim(N(f))\geq 1$.

Como $\{(1,2,3),(2,1,2)\}\subseteq \operatorname{Im}(f)$ y $\{(1,2,3),(2,1,2)\}$ L. I $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(f))\geq 2$.

Si f es lineal $\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim(\mathbb{R}^2)}=\underset{\substack{\vee| \\ 1}}{\dim(N(f))}+\underset{\substack{\vee| \\ 2}}{\dim(\operatorname{Im}(f))}$

absurdo. Por tanto no existe una aplicación lineal con esas características.

EJERCICIO

Dada la aplicación lineal $f : M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5) \longrightarrow \mathbb{Z}_5[x]_2$ definida por $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b)x^2 + (c+d)x + d$.

a) Calcular una base de $Im(f)$.

b) Calcular una base de $N(f)$.

-D-

a) $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow Im(f) = \left\langle \left\{ f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

$\Rightarrow Im(f) = \langle \{ x^2, x^2, x, x+1 \} \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{Im(f)} = \{ x^2, x, 1 \}.$$

b) $N(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5) \text{ tq } \begin{matrix} a+b = 0 \\ c+d = 0 \\ d = 0 \end{matrix} \right\}$

$\dim(N(f)) = \dim\left(M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)\right) - \dim\left(Im(f)\right) = 4 - 3 = 1.$

$B_{N(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$

EJERCICIO

Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5[x]_3$ generado por $\{2x^3 + 3x^2 + 2x + 1, 3x^3 + 2x^2 + 3x + 4, x^2 + x + 1, 2x^3 + x^2 + 4\}$.

Calcular el cardinal de U.

-D-

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow B_U = \{2x^3+3x^2+2x+1, x^2+x+1\}$.

U es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ de dimension 2. Por tanto U es isomorfo a $\mathbb{Z}_5^2$. Por consiguiente

$$\# U = \# \mathbb{Z}_5^2 = 25.$$

EJERCICIO

Sea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a una aplicacion lineal

$f: M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5) \longrightarrow \mathbb{Z}_5[x]_2$ respecto de las bases $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B' = \{x^2+x+1, 2x+3, 4\}$. Calcular $f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

-D-

La expresion matricial de f respecto de las bases B y B' es

$$(x', y', z') = (x, y, z, t) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Recuerdese que la interpretacion que tiene es la siguiente: si (x, y, z, t) son las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B entonces (x', y', z') son las coordenadas de $f(\vec{v})$ respecto de la base B'.

Vamos a calcular $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \equiv_B (- \cdots)$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} a+b+c+d & = 1 \\ a+b+c & = 2 \\ a+b & = 3 \\ a & = 4 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a=4 \quad b=4 \quad c=4 \quad d=4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \equiv_B (4,4,4,4).$$

$$(4,4,4,4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,1,4) \Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \equiv_{B'} (1,1,4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot(x^2+x+1) + 1\cdot(2x+3) + 4\cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = x^2+3x$$