TEMA 6

Cambio de base

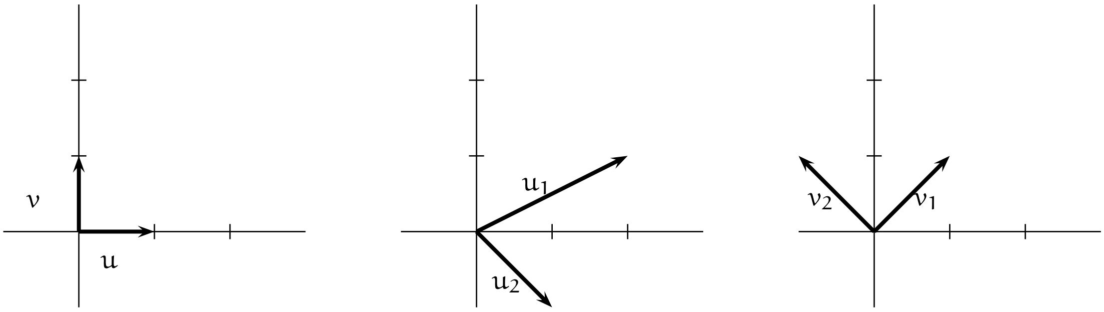
El objetivo de estos apuntes es estudiar las ecuaciones del cambio de base con algunos ejemplos. Trabajaremos fundamentalmente en $\mathbb{R}^2$, pues de esta forma los resultados podremos verlos gráficamente.

Sin embargo, la forma de trabajar es igual en cualquier espacio vectorial.

Para esto vamos a tomar tres bases de $\mathbb{R}^2$. Una de ellas será la base canónica. Las bases que usaremos son las siguientes:

$$B_c = \{(1,0);\ (0,1)\} \qquad B = \{(2,1);\ (1,-1)\} \qquad B' = \{(1,1);\ (-1,1)\}$$

Para abreviar, vamos a llamar u_1, u_2 a los dos vectores de B (es decir, $u_1 = (2,1)$, $u_2 = (1,-1)$); v_1, v_2 a los dos vectores de B' (es decir, $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,1)$). Y llamaremos u, v a los dos vectores de la base canónica.



Recordemos que si $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ y $B' = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ son dos bases de un espacio vectorial V, la matriz del cambio de base de B a B' es una matriz cuadrada, regular, cuyas columnas son las coordenadas en la base B' de los vectores de la base B. A esta matriz la denotaremos como $M_{B\to B'}$.

Calculemos las matrices del cambio de base entre las distintas bases que tenemos:

- Matriz del cambio de base de B a B_c.

  Esta matriz es sencilla, pues se trata de expresar los vectores de la base B en la base canónica. Puesto que $u_1 = 2\cdot u + 1\cdot v$ y $u_2 = 1\cdot u - 1\cdot v$ tenemos que:

$$M_{B\to B_c} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Matriz del cambio de base de B' a B_c.

  Al igual que el caso anterior, este cálculo es fácil pues sabemos que $v_1 = 1\cdot u + 1\cdot v$ y $v_2 = -1\cdot u + 1\cdot v$. La matriz es entonces:

$$M_{B'\to B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz del cambio de base de B_c a B.

  Tenemos aquí dos alternativas para calcular esta matriz:

  - Nos vamos a la definición de matriz del cambio de base. Para obtener la primera columna planteamos la ecuación $u = a\cdot u_1 + b\cdot u_2$, es decir, $(1,0) = a\cdot(2,1) + b\cdot(1,-1)$, mientras que para la segunda columna la ecuación es $(0,1) = a'\cdot(2,1) + b'\cdot(1,-1)$ Esto se traduce en los sistemas:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2a & + & b & = & 1 \\ a & - & b & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcr} 2a' & + & b' & = & 0 \\ a' & - & b' & = & 1 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ para el primer sistema y $a' = \frac{1}{3}$, $b' = \frac{-2}{3}$ para el segundo sistema. Tenemos entonces:

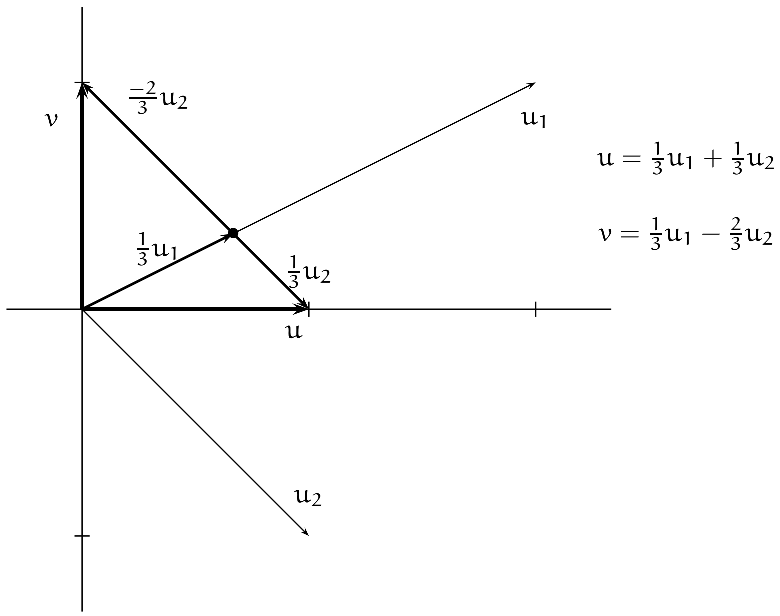
$$M_{B_c \to B} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Utilizamos la relación $M_{B_c \to B} = (M_{B \to B_c})^{-1}$.

$$M_{B_c \to B} = (M_{B \to B_c})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

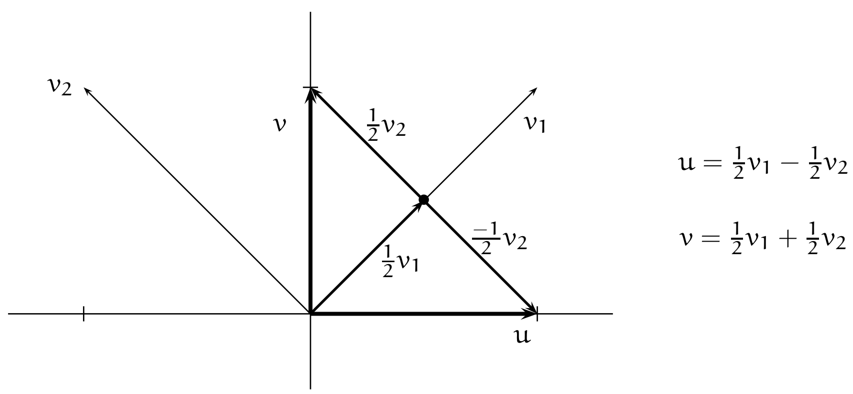
Tenemos las relaciones $(1,0) = \frac{1}{3}(2,1) + \frac{1}{3}(1,-1)$ y $(0,1) = \frac{1}{3}(2,1) + \frac{-2}{3}(1,-1)$.

Para verlo gráficamente aumentamos la escala del dibujo.



- Matriz del cambio de base de B_c a B'.

  Aquí también podemos emplear dos formas de calcularla al igual que en el apartado anterior. Utilizamos la segunda:



$$M_{B_c \to B'} = (M_{B' \to B_c})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz del cambio de base de B a B'.

  Tenemos también dos opciones:

- Plantear y resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes.

  Los sistemas a plantear son $u_1 = a\cdot v_1 + b\cdot v_2$, $u_2 = a'\cdot v_1 + b'\cdot v_2$. Después de sustituir los vectores u_1, u_2, v_1, v_2 por sus valores correspondientes nos queda:

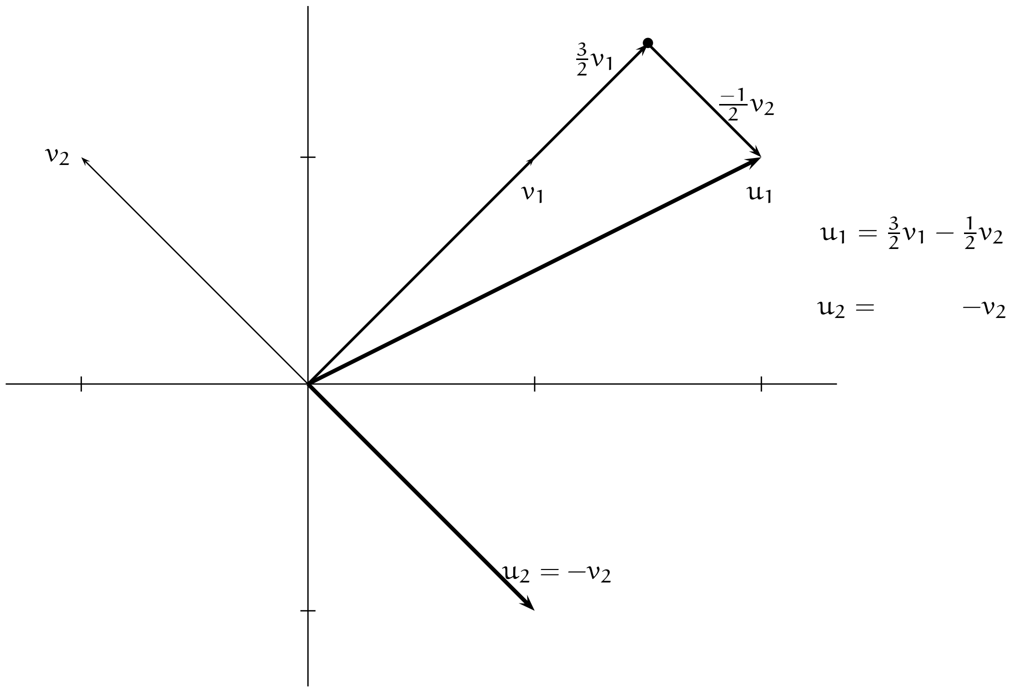
$$\left.\begin{array}{ccccc} a & - & b & = & 2 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ccccc} a' & - & b' & = & 1 \\ a' & + & b' & = & -1 \end{array}\right\}$$

  cuyas soluciones son $a = \frac{3}{2},\ b = \frac{-1}{2}$ y $a' = 0,\ b' = -1$. Por tanto, tenemos que:

$$M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Utilizar las relaciones entre matrices del cambio de base.

$$M_{B\to B'} = M_{B_c\to B'}\cdot M_{B\to B_c} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$



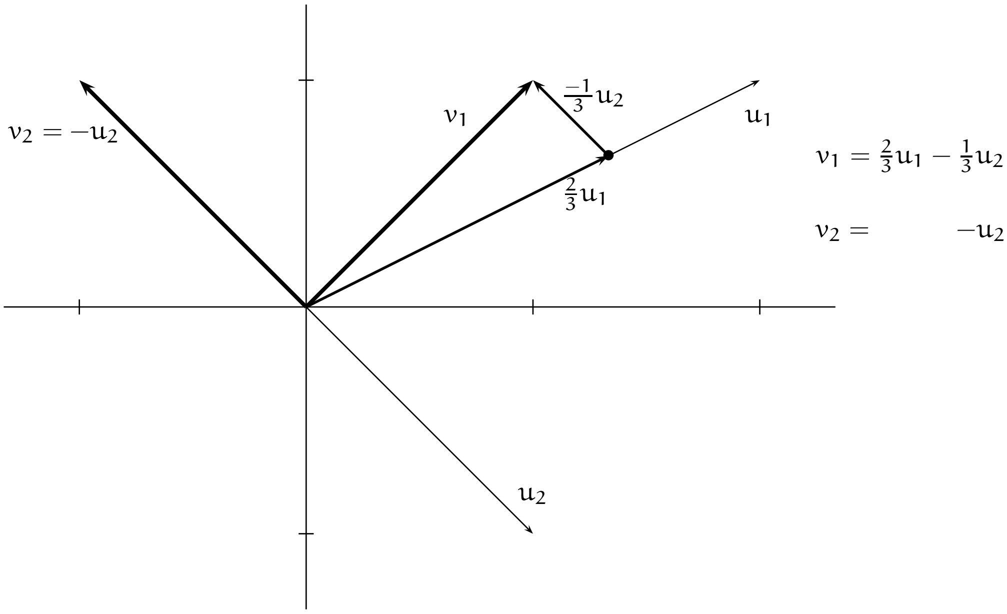
- Matriz del cambio de B' a B.

  Tenemos:

$$M_{B'\to B} = (M_{B\to B'})^{-1} = \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right]^{-1} = 2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = 2\cdot\frac{-1}{6}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

  O si queremos:

$$M_{B'\to B} = M_{B_c\to B}\cdot M_{B'\to B_c} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$



Una vez calculadas todas las matrices de cambio de base vamos a tomar varios vectores y vamos a calcular sus coordenadas en las distintas bases. Recordemos que si $w \in V$, y B y B' son dos bases de V entonces:

$$(w)_{B'} = M_{B\to B'} \cdot (w)_B$$

donde $(w)_B$ representa las coordenadas del vector w en la base B. Es decir, la matriz del cambio de base de B a B' "transforma" las coordenadas de un vector en B en las coordenadas del mismo vector en B'.

1. Nuestro primer vector es $w_1 = (3,5)$. Esto nos dice que las coordenadas de w_1 en la base canónica son (3 5), es decir, $(w_1)_{B_c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   - Calculamos las coordenadas de w_1 en la base B.

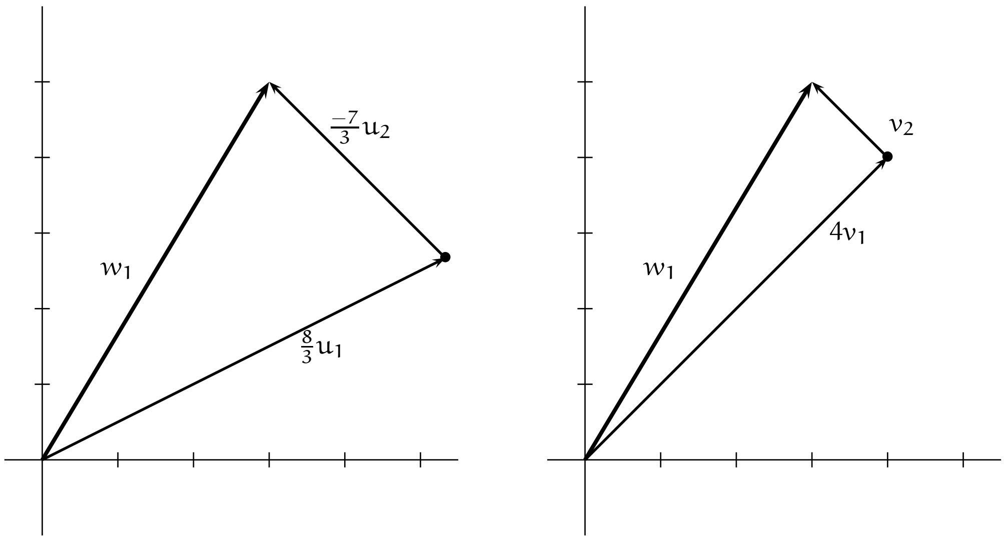
   $$(w_1)_B = M_{B_c\to B} \cdot (w_1)_{B_c} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

   lo que nos dice que $w_1 = \frac{8}{3}u_1 - \frac{7}{3}u_2$, como se puede comprobar fácilmente.

   - Calculamos las coordenadas de w_1 en la base B'.

   $$(w_1)_{B'} = M_{B_c\to B'} \cdot (w_1)_{B_c} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   es decir, $w_1 = 4v_1 + v_2$.



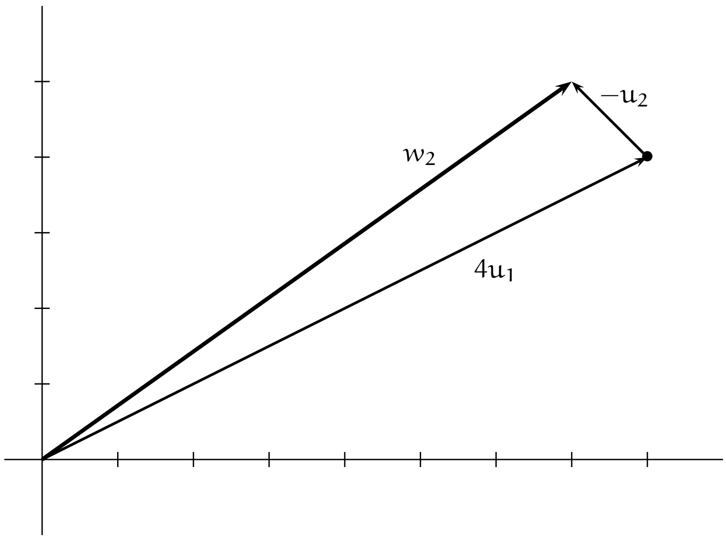
2. Nuestro segundo vector es un vector cuyas coordenadas en la base B son $(4,-1)$. Queremos calcular sus coordenadas en la base B′.

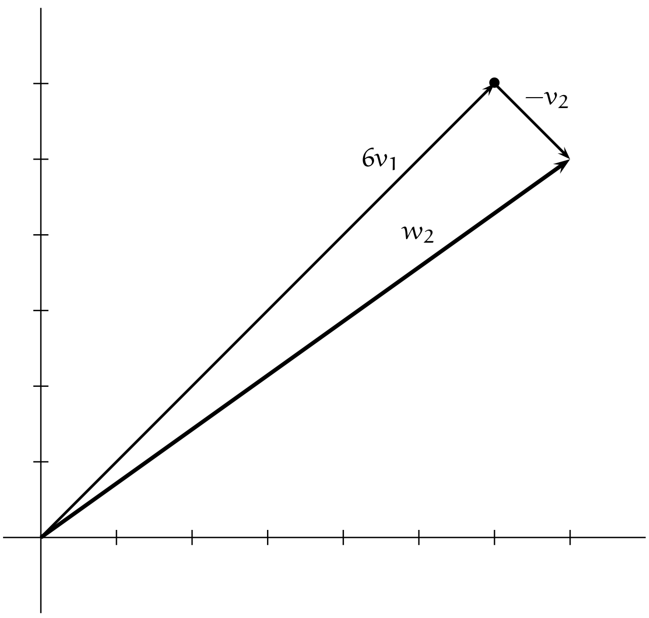
   Lo hacemos de dos formas distintas:

   - Utilizamos la matriz del cambio de base.

   $$(w_2)_{B'} = M_{B\to B'} \cdot (w_2)_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

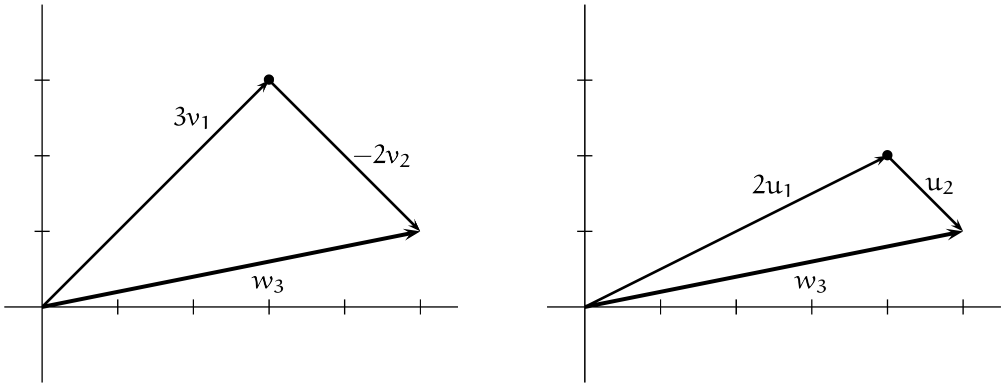
   - Calculamos el vector w_2 y luego lo expresamos en la base B′. Tenemos:
     $w_2 = 4u_1 - u_2 = 4\cdot(2,1) - (1,-1) = (8,4) - (1,-1) = (7,5) = 7u + 5v$.
     $7u+5v = 7\left(\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2\right)+5\left(\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2\right) = \frac{7}{2}v_1 - \frac{7}{2}v_2 + \frac{5}{2}v_1 + \frac{5}{2}v_2 = \frac{7+5}{2}v_1 + \frac{-7+5}{2}v_2 = 6v_1 - v_2$.





3. Sea ahora w_3 el vector cuyas coordenadas en la base B′ son $(3,-2)$. Es decir, $w_3 = 3v_1 - 2v_2$. Vamos a calcular sus coordenadas en la base B.

$$(w_3)_B = M_{B'\to B} \cdot (w_2)_{B'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Vamos a hacer un ejercicio más:

Consideramos las bases de $\mathbb{R}^3$ siguientes: $B = \{(4,0,7),\ (2,1,1),\ (3,1,3)\}$ y $B' = \{(1,0,2),\ (4,1,5),\ (1,0,3)\}$. Vamos a calcular la matriz del cambio de base de B a B' y las coordenadas en B' del vector cuyas coordenadas en B son $(2,3,4)$.

Para calcular esta matriz usamos la base canónica, pues el cálculo de la matriz del cambio de base de una base cualquiera a la base canónica es muy sencillo, como hemos visto en los ejemplos precedentes.

$$\begin{aligned} M_{B\to B'} &= M_{B_c\to B'}\cdot M_{B\to B_c} = (M_{B'\to B_c})^{-1}\cdot M_{B\to B_c} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos comprobar como esta matriz está bien calculada, pues:

- $(4,0,7) = \ \ 5\cdot(1,0,2) + 0\cdot(4,1,5) - 1\cdot(1,0,3)$.
- $(2,1,1) = -2\cdot(1,0,2) + 1\cdot(4,1,5) + 0\cdot(1,0,3)$.
- $(3,1,3) = -1\cdot(1,0,2) + 1\cdot(4,1,5) + 0\cdot(1,0,3)$.

Sea ahora v el vector cuyas coordenadas en B son $(2,3,4)$. Entonces:

$$(v)_{B'} = M_{B\to B'}\cdot(v)_B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

También podemos comprobar que están bien los cálculos, pues:

$$v = 2\cdot(4,0,7) + 3\cdot(2,1,1) + 4\cdot(3,1,3) = (8,0,14) + (6,3,3) + (12,4,12) = (26,7,29).$$
$$0\cdot(1,0,2) + 7\cdot(4,1,5) - 2\cdot(1,0,3) = (28,7,35) + (-2,0,6) = (26,7,29) = v.$$