TEMA 7

Aplicaciones lineales

Ejercicio 1. De las siguientes aplicaciones decide cuáles son lineales y cuáles no.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_1(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_2(x, y, z) = (xy, yz, -zx)$$
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_3(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 2y)$$
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_4(x, y) = (x + 1, y, x)$$
5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_5(x, y, z) = (x + 1, x + 2, x + 3)$$
6. $f_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$f_6(x, y, z) = (x, z)$$
7. $f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f_7(x) = (x, 2x, 3x)$$
8. $f_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f_8(x, y) = x^2 + y^2$$

Ejercicio 2. Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

1. $f : (\mathbb{Z}_3)^2 \to (\mathbb{Z}_3)^2$, $f(x, y) = (x + 1, y + 2)$.
2. $f : V \to V'$, $f(v) = 0$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(r) = r^2$.
4. $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^2$, $f(x, y, z) = (x + y + z, 28x + 92z)$.

Ejercicio 3. Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 4 y V' un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 3. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $B' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ bases de V y V'. Se considera la única aplicación lineal $f : V \to V'$ que verifica:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 4v'_1 + 7v'_2 + 2v'_3 \\ f(v_2) &= -v'_1 + 3v'_2 + 9v'_3 \\ f(v_3) &= v'_2 + 2v'_3 \\ f(v_4) &= 2v'_1 - v'_2 - 8v'_3 \end{aligned}$$

Se pide:

1. Escribe la matriz asociada a f respecto de las bases B y B'.

2. Calcula la dimensión de los subespacios núcleo e imagen de f.

3. ¿Es f una aplicación lineal inyectiva?¿Y sobreyectiva? Justifica las respuestas.

Ejercicio 4. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (3x + 2y - z, 5x - 2y, -9x + 10y - 2z)$$

1. ¿Pertenece el vector $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ a la imagen de f?

2. ¿Existe algún vector de la forma $(2, 5, \lambda)$ que pertenezca al núcleo de f?

3. ¿Es f un isomorfismo de espacios vectoriales?

Ejercicio 5. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^2$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2z)$. Calcula las ecuaciones implícitas y paramétricas de $N(f)$ y de $\text{im}(f)$.

Ejercicio 6. Calcula la matriz asociada respecto de las bases canónicas de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que lleva

$$\begin{array}{lcl} u_1 = (1, 1, 2) & \text{en} & v_1 = (1, 0, 1, 2) \\ u_2 = (0, 1, 1) & \text{en} & v_2 = (0, 1, -1, 1) \\ u_3 = (1, 1, 0) & \text{en} & v_3 = (0, 1, 1, 0) \end{array}$$

Calcula el núcleo y la imagen.

Ejercicio 7. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ que verifica

$$\begin{array}{l} (1, 1, 1) \in N(f) \\ f(1, 2, 1) = (1, 1, 2) \\ f(1, 2, 2) = (0, 1, 1) \end{array}$$

1. Calcula la matriz de f en la base canónica.

2. Calcula las dimensiones del núcleo y la imagen de f.

Ejercicio 8. Construye una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ de forma que $f(0, 1) = (28, 92)$ y $f(1, 0) = (92, 28)$.

Ejercicio 9. Construye una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_3)^3 \to (\mathbb{Z}_3)^4$ de forma que

$$\text{im}(f) = L\big((1, 2, 0, 2), (2, 0, 2, 0)\big).$$

Ejercicio 10. Construye una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_2)^3 \to (\mathbb{Z}_2)^3$ de forma que el vector $(1, 0, 1)$ pertenezca al núcleo de f y los ectores $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ a la imagen.

Ejercicio 11. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$, $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y, 3x + 2y + z)$. Calcula una base de $N(f)$ y una base de $\text{im}(f)$.

Ejercicio 12. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_3)$. Encuentra la matriz de f respecto de la base canónica y respecto de la base $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$. Halla la imagen mediante f de los siguientes subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^3$:

1. $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

2. $V_2 = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_5\}$

3. $V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) = t(1, -1, 1) \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$

Ejercicio 13. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z, 2x, y + z)$$

1. Calcula una base del núcleo de f.
2. Calcula ecuaciones implícitas (o cartesianas) de la imagen de f.
3. Calcula la expresión matricial de f respecto de las bases

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)\}$$

$$B' = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

Ejercicio 14. Da una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^4$ tal que $(1, -1) \in N(f)$ y $f(3, 2) = (2, -1, 3, -2)$. Describe explícitamente cuanto vale $f(x, y)$ para cualquier vector $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

Ejercicio 15. Da una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ que verifique que el vector $(1, 2, -1)$ pertenezca al núcleo de f, que $f(1, -1, 0) = (3, 1, 2)$ y que $\mathrm{Im}(f)$ sea el subespacio de ecuación $x - y - z = 0$.

Calcula la matriz de f en la base $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

Ejercicio 16. Prueba que las siguientes aplicaciones son lineales.

1. $D : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dada por
$$D(p(x)) = p'(x)$$
2. $S : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por
$$S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$$
3. $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por
$$T(A) = \frac{1}{2}(A - A^t)$$
4. $I_{[0,1]} : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ dada por
$$I_{[0,1]}(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$$
5. $P : M_2(\mathbb{R}) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ dada por
$$P(A) = PA \text{ con } P \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Ejercicio 17. Para las aplicaciones lineales del ejercicio anterior calcula:

1. La matriz asociada respecto de las bases estándar adecuadas.
2. El núcleo y la imagen.

Ejercicio 18. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados. Halla las matrices respecto de las bases estándar de las que lo sean:

1. $M_B : M_2(\mathbb{Z}_3) \to M_{2\times 1}(\mathbb{Z}_3)$ dada por $M_B(A) = AB$ con $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $S_B : M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$ dada por $S_B(A) = A + B$ con $B \in M_2(\mathbb{Q})$ fija.
3. $C_B : M_2(\mathbb{Z}_5) \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ dada por $C_B(A) = AB - BA$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ dada por $A(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$

Ejercicio 19. Se considera la aplicación $\det : M_2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ que asocia a cada matriz su determinante. Responde a las siguientes cuestiones y justifica la respuesta:

1. ¿Es $\det$ una aplicación lineal?
2. ¿Es f una aplicación inyectiva?
3. ¿Es f una aplicación sobreyectiva?

Ejercicio 20. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z, 2x, y + z)$$

1. Calcula una base del núcleo de f
2. Calcula las ecuaciones cartesianas de la imagen de f
3. Calcula la expresión matricial de f respecto de las bases B y B', donde

$$\begin{aligned} B &= \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)\} \\ B' &= \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Ejercicio 21. Sea $V = (\mathbb{Z}_7)^3$. Sea $U = \{(x, y, z) \in V : 2x + 4y + 5z = 0\}$ y $W = L[(1, 1, 1)]$.

1. Comprueba que $V = U \oplus w$.
2. Escribe el vector $(3, 4, 5)$ como suma de un vector de U y un vector de W.
3. Sea $f : V \to V$ la proyección sobre U según la dirección de W. Calcula una expresión explícita para $f(x, y, z)$.
4. Sea $g = \mathrm{Id} - f$. Comprueba que g es la proyección sobre W en la dirección de U.

Ejercicio 22. Para la aplicación lineal $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{array}{rcl} f_a(1, 1, 1) & = & (a, a, a) \\ f_a(0, 1, 1) & = & (-a, 0, 0) \\ f_a(1, 0, 1) & = & (1, 1 - a, 0) \end{array} \qquad \text{para un parámetro } a \in \mathbb{R}$$

se pide:

1. La matriz de f_a respecto de la base canónica.
2. Según los valores de a, estudia las dimensiones del núcleo y la imagen de f_a.
3. La matriz de f_a respecto de la base $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

Ejercicio 23. Dadas $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 0)$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2)$ calcular $f^n = f \circ \overset{n}{\cdots} \circ f$ y $g \circ f$. [Sugerencia: calcula las matrices de f y g].

Ejercicio 24. Construye una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de manera que $(0, 1, 0) \in N(f)$ y que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Ejercicio 25. Se consideran los subespacios de $(\mathbb{Z}_3)^4$

$$U = \left\{ \begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right. \qquad W = \langle (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$$

1. Da una aplicación lineal no nula f de W en U y calcula $f(1,0,1,0)$.
2. ¿Cuántas aplicaciones lineales sobreyectivas hay de W a $U+W$?

Ejercicio 26. Sabiendo que la aplicación f lleva los vectores

$$B_1 = \{u_1 = (1,0,0), \quad , u_2 = (1,1,0), \quad u_3 = (1,1,1)\}$$

de $\mathbb{Z}_7^3$ en los vectores

$$B_2 = \{w_1 = (2,1,2), \quad , w_2 = (3,1,2), \quad w_3 = (6,2,3)\}$$

relativamente, encontrar las matrices $M(f;B_c)$, $M(f;B_1B_2)$, $M(f;B_1)$, $M(f;B_2,B_c)$, donde B_c es la base canónica.

Ejercicio 27. Prueba que si $\dim(V) > \dim(V')$, entonces no existe ninguna aplicación lineal inyectiva de V en V'.

Preguntas test.

Ejercicio 28. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (x+y, x+z, 2x+y+z)$. Entonces

a) La dimensión de la imagen de f es 2.

b) La dimensión del núcleo de f es 2.

c) f es sobreyectiva.

d) f es inyectiva.

Ejercicio 29. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z) = (x+y, 2x+2y)$. La dimensión del núcleo de f es

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Ejercicio 30. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ que tiene como matriz asociada en la base canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces:

a) una base de la imagen de f es $\{(1,3,0),(4,3,2)\}$ y una base del núcleo de f es $\{(2,-1,1),(-6,2,9)\}$.

b) una base de la imagen de f es $\{(1,4,2),(3,3,-3)\}$ y una base del núcleo de f es $\{(2,-1,1),(-6,2,9)\}$.

c) una base de la imagen de f es $\{(1,3,0),(4,3,2)\}$ y una base del núcleo de f es $\{(2,-1,1)\}$.

d) una base de la imagen de f es $\{(1,3,0),(4,3,2)\}$ y una base del núcleo de f es $\{(-6,2,9)\}$.

Ejercicio 31. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (3x+2y, x-y, x+2y)$. Entonces la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas es

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 32. Sea la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_5)^2 \to \mathbb{Z}_5$ determinada por $f(2,0) = 3$ y $f(1,3) = 1$. Entonces

a) $f(1,1) = 2$,

b) $f(1,1) = 3$,

c) para tener una aplicación lineal necesitamos que el dominio y el codominio sean espacios vectoriales, cosa que no ocurre con $\mathbb{Z}_5$,

d) las condiciones del enunciado no determinan ninguna aplicación lineal, así que no puede calcularse $f(1,1)$.

Ejercicio 33. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ definida por $f(x,y) = (x+y, -x-y, 0)$. Entonces la dimensión de la imagen de f es:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Ejercicio 34. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ definida por $f(x,y) = (x+y, -x-y, 0)$. Entonces la dimensión del núcleo de f es:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Ejercicio 35. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal inyectiva y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para V. Entonces $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$

a) es una base para V'.

b) es un sistema de generadores para V'.

c) es un conjunto de vectores linealmente independientes.

d) es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

Ejercicio 36. Sea $f : (\mathbb{Z}_3)^4 \to (\mathbb{Z}_3)^2$ una aplicación lineal **no sobreyectiva** tal que $(1,0,0,0) \in N(f)$, $(0,1,2,0) \in N(f)$ y $(1,1) \in Im(f)$. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente falsa.

a) $\dim Im(f) = 1$

b) $\dim(N(f)) = 3$

c) $(0,0,1,1) \in N(f)$ y $(0,0,0,2) \in N(f)$

d) $(2,2,1,0) \in N(f)$ y $(0,0,0,1) \in N(f)$

Ejercicio 37. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (x-y+2z, x+y-z, 4x-2y+5z)$. Entonces

a) los subespacios núcleo e imagen de f son iguales,

b) $f^*(\{(-1,1,-2)\}) = \emptyset$

c) el subespacio núcleo de f tiene dimensión 0,

d) el subespacio imagen de f tiene dimensión 2.

Ejercicio 38. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$. Entonces una base de $\mathrm{Im}(f)$ es

a) $\{(1, 1, 2), (0, 0, 1)\}$

b) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$

c) $\{(1, 1, 2), (2, 1, 3)\}$

d) $\{(1, 1, 2)\}$

Ejercicio 39. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $\dim(N(f)) = 1$. Entonces:

a) f es inyectiva,

b) f es sobreyectiva,

c) f es biyectiva,

d) f es un isomorfismo.

Ejercicio 40. Sea $V = (\mathbb{Z}_{11})_2[x]$, es decir, el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_{11}$, y sea $D : V \to V$ la aplicación derivada. Entonces:

(a) $\{7\}$ es una base del núcleo de D y $\{6 + 3x, 9 + 10x\}$ una base de la imagen.

(b) $\{1\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x\}$ una base de la imagen.

(c) $\{0\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x, x^2\}$ una base de la imagen.

(d) $\{x\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x^2\}$ una base de la imagen.

Ejercicio 41. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + 3y, 7x + z)$

(a) Una base de la imagen es $\{(1, 0);\ (0, 1)\}$.

(b) f es inyectiva.

(c) f no es sobreyectiva.

(d) El núcleo de f tiene dimensión 2.

Ejercicio 42. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$. Las ecuaciones cartesianas del subespacio $\mathrm{Im}(f)$ son:

1. $x + y - z = 0$.
2. $\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{array}$.
3. $\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}$.
4. Puesto que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$, no tiene ecuaciones cartesianas.

Ejercicio 43. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^4$ la aplicación lineal definida por las condiciones $f(1,0) = (1,2,0,5)$ y $f(0,1) = (2,2,4,2)$, y sea $g : (\mathbb{Z}_7)^4 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ la aplicación lineal dada por $g(x,y,z,t) = (x+4y+z+3t, 2x+y+5t)$. Sea U el núcleo de g y V la imagen de f. Una base de $U+V$ es

1. $\{(1,0,4,4),\ (1,0,3,1),\ (0,1,5,4)\}$.
2. $\{(1,2,0,5),\ (2,2,4,2),\ (1,0,3,1),\ (0,1,5,4)\}$.
3. $\{(1,2,0,5),\ (2,2,4,2),\ (1,4,1,3),\ (2,1,0,5)\}$.
4. $\{(1,2,0,5),\ (2,2,4,2),\ (1,1,2,3)\}$.

Ejercicio 44. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal tal que $\dim(N(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Entonces podemos asegurar que:

1. $V = V'$.
2. $\dim(V)$ es par.
3. $\dim(V')$ es par.
4. $\dim(V+V')$ es par.

Ejercicio 45. Sea $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ la aplicación lineal cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, y $g : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ la única aplicación lineal que verifica que $g(1,1) = (0,-2)$ y $g(1,-1) = (2,4)$. Entonces:

a) $f+g$ es inyectiva.

b) El núcleo de $f+g$ está generado por el vector $(-2,2)$.

c) $f+g$ es sobreyectiva.

d) La imagen de $f+g$ está generada por el vector $(-2,2)$.

Ejercicio 46. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ la aplicación lineal $f(x,y) = (3x+5y, x+y)$, y sea $B = \{(1,2);\ (1,1)\}$ una base de $(\mathbb{Z}_7)^2$. Entonces la matriz de f en la base B es:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 47. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ al aplicación lineal $f(x,y,z) = (x+y, y+z, x+4z, 2x+3y+z)$. Entonces:

a) $N(f) = L[(3,2,3)]$ e $\mathrm{Im}(f) = L[(1,1,1,1),(2,1,3,4)]$.

b) $N(f) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(f) \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ 2x & + & y & & & + & 3t & = & 0 \end{array} \right.$.

c) $N(f) = L[(2,3,2)]$ e $\mathrm{Im}(f) \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 4y & + & 4z & & & = & 0 \\ 2x & + & y & & & + & 4t & = & 0 \end{array} \right.$.

d) $N(f) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = (\mathbb{Z}_5)^4$.

Ejercicio 48. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ la aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas de $(\mathbb{Z}_5)^4$ y $(\mathbb{Z}_5)^3$ es la matriz A. Entonces:

a) El núcleo de f es el subespacio de ecuación $x + y + 2z + t = 0$.

b) f es sobreyectiva.

c) La imagen de f es el subespacio generado por $(2, 3, 2)$ y $(3, 1, 2)$.

d) f es inyectiva.

Ejercicio 49. Sea $f : (\mathbb{Z}_3)^3 \to (\mathbb{Z}_3)^4$ al aplicación lineal $f(x, y, z) = (x+y+z, 2x+z, x+2y+4z, y+z)$. Entonces:

a) $N(f) \equiv x + y + z = 0$ e $\mathrm{Im}(f) \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} & & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & & & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right.$.

b) $N(f) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = L[(1, 2, 1, 0), (1, 0, 2, 1), (2, 2, 1, 1)]$.

c) $N(f) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(f) \equiv y + z + t = 0$.

d) $N(f) = L[(1, 1, 1)]$ e $\mathrm{Im}(f) = L[(1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 1)]$.

Ejercicio 50. Sea A el conjunto de todas las aplicaciones lineales $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ que verifican que $N(f) = \mathrm{Im}(f)$. Entonces el cardinal del conjunto A es:

a) 1.

b) 7.

c) 49.

d) 0.