Tarea 5 - Problemas físicos

Angel Daniel Cruz Flores

November 2022

1 Introducción

Resuelvan los siguientes problemas colocando su desarrollo paso a paso. Las ecuaciones, imágenes y tablas deben tener una etiqueta correspondiente, que nos sea la marca por defecto de Latex y deben estar referidas dentro de su documento, éstas dos últimas deberán tener su leyenda correspondiente.

2 Problemas

1. Considerando un sistema en una dimensión y sabiendo que $a = \frac{dv}{dt}$ y $v = \frac{dx}{dt}$ Demuestre que la posición puede verse como:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1}$$

Para un tiempo inicial t_0 y con; x_0 y v_0 la posición y velocidad inicial en el sistema.

Demostración.

Sabemos por hipótesis, que:

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{2}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{3}$$

Integramos 2 para obtener una ecuación para hallar la velocidad teniendo en cuenta la aceleración:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\vec{v}}{dt} = \int_{t_0}^{t} \vec{a_0}\, dt \tag{4}$$

Aplicando el teorema de cambio de variable en 4 tenemos lo siguente:

$$\int_{\vec{v_0}}^{v(\vec{t})} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a_0}\, dt \tag{5}$$

Usando la Regla de Barrow en 5 tenemos que:

$$\vec{v} \,\Big|_{\vec{v_0}}^{v(\vec{t})} = \vec{a}t \,\Big|_{t_0}^{t} \tag{6}$$

Desarrollando 6 obtenemos la siguiente ecuación:

$$\vec{v_{(t)}} - \vec{v_0} = \vec{a_0}(t - t_0) \tag{7}$$

Despejando a $\vec{v_{(t)}}$ de 7 tenemos:

$$\vec{v_{(t)}} = \vec{v_0} + \vec{a_0}(t - t_0) \tag{8}$$

Como sabemos que $t_0 = 0$, sustituimos a t_0 de 8, por lo tanto, nos queda:

$$v_{\vec{(t)}} = \vec{v_0} + \vec{a_0}(t) \tag{9}$$

Sustiyendo 3 en 9 tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = \vec{v_0} + \vec{a_0}(t) \tag{10}$$

Por lo tanto, integrando 10 tenemos:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt}\, dt = \int\limits_{t_0}^{t} [\vec{v_0} + \vec{a_0}(t)]\; dt \tag{11}$$

Aplicando el Teorema de Cambio de Variable en 11 nos queda:

$$\int\limits_{\vec{x_0}}^{\vec{x}} d\vec{x} = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{v_0}\, dt + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a_0}(t)\, dt \tag{12}$$

Usando la Regla der Barrow en 12 tenemos:

$$\vec{x}\,|_{\vec{x_0}}^{\vec{x}} = \vec{v_0}t\,|_{t_0}^{t} + \frac{\vec{a_0}t^2}{2}\,|_{t_0}^{t} \tag{13}$$

Desarrollando 13 tenemos:

$$\vec{x} - \vec{x_0} = \vec{v_0}\,(t - t_0) + \frac{\vec{a_0}\,(t - t_0)^2}{2} \tag{14}$$

Despejamos a $\vec{x}$ de 14:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{v_0}\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a_0}\,(t - t_0)^2 \tag{15}$$

Sin embargo, sabemos que $t_0 = 0$, por lo tanto, sustituyendo ésto en 15 tenemos que:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a_0}t^2 \tag{16}$$

Por lo tanto, ha quedado demostrado, pues notamos que 16 es igual a 1:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a_0}t^2 = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \tag{17}$$

■

2. Considere una carrera entre dos coches, éstos arrancan del reposo pero el coche uno hace trampa (cosa que nunca pasa), saliendo un segundo antes que el segundo, si los autos tienen una aceleración de $3.5\,m/s^2$ y $4.9\,m/s^2$ respectivamente.

   (a) En que momento el auto dos alcanza al auto uno, i.e. $t =$?

   Sabemos que, ambos coches arrancan del reposo, es decir, $\vec{v_0} = 0$, para ambos autos, del mismo modo, tomamos la posición inicial igual a cero, es decir, $\vec{x_0} = 0$ para ambos autos.

   Así mismo, sea t igual al tiempo del primer coche; el tiempo del segundo coche puede ser expresado de la siguiente forma: $t_2 = t - 1$
   Usando la ecuación 16 para ambos coches, tenemos, para el coche 1 que:

$$\vec{x_1} = \vec{x_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a_1}t^2 \tag{18}$$

   Y para el coche 2.

$$\vec{x_2} = \vec{x_0} + \vec{v_0}(t-1) + \frac{1}{2}\vec{a_2}(t-1)^2 \tag{19}$$

   Como el problema nos pregunta en que momento el auto dos alcanza al auto uno, podemos decir entonces que ambas posisciones son iguales, es decir:

$$\vec{x_1} = \vec{x_2}$$

   Igualando a 18 y a 19 tenemos que:

$$\vec{x_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a_1}t^2 = \vec{x_0} + \vec{v_0}(t-1) + \frac{1}{2}\vec{a_2}(t-1)^2 \tag{20}$$

   Como $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$, sustituimos lo anterior en 20:

$$\frac{1}{2}\vec{a_1}t^2 = \frac{1}{2}\vec{a_2}(t-1)^2 \tag{21}$$

   Resolviendo y simplificando la ecuación 20, tenemos:

$$\frac{\vec{a_1}}{2}t^2 = \frac{\vec{a_2}}{2}\left(t^2 - 2t + 1\right) \Longleftrightarrow \frac{\vec{a_1}}{2}t^2 = \frac{\vec{a_2}}{2}t^2 - \frac{\vec{a_2}}{2}2t + \frac{\vec{a_2}}{2} \tag{22}$$

   Finalmente obtenemos la siguiente ecuación igualando a cero la ecuación 22:

$$\frac{\vec{a_1}}{2}t^2 - \frac{\vec{a_2}}{2}t^2 + \frac{\vec{a_2}}{2}2t - \frac{\vec{a_2}}{2} = 0 \tag{23}$$

   Factorizamos a t^2 para poder ver a la ecuación 23 de la forma $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\left(\frac{\vec{a_1}}{2} - \frac{\vec{a_2}}{2}\right) t^2 + \vec{a_2} t - \frac{\vec{a_2}}{2} = 0 \tag{24}$$

Usando la ecuación cuadrática en 24 tenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-\vec{a_2} \pm \sqrt{(\vec{a_2})^2 - 4\left(\frac{\vec{a_1}}{2} - \frac{\vec{a_2}}{2}\right)\left(\frac{\vec{a_2}}{2}\right)}}{2\left(\frac{\vec{a_1}}{2} - \frac{\vec{a_2}}{2}\right)} \tag{25}$$

Una vez obtenida la ecuación 25 sustituimos con valores numéricos:

$$t = \frac{-4.9 \pm \sqrt{(4.9)^2 - 4\left(\frac{3.5}{2} - \frac{4.9}{2}\right)\left(\frac{4.9}{2}\right)}}{2\left(\frac{3.5}{2} - \frac{4.9}{2}\right)} \tag{26}$$

Resolviendo la ecuación, tenemos para t':

$$t' = \frac{-4.9 + \sqrt{(4.9)^2 - 4\left(\frac{3.5}{2} - \frac{4.9}{2}\right)\left(\frac{4.9}{2}\right)}}{2\left(\frac{3.5}{2} - \frac{4.9}{2}\right)} \tag{27}$$

$$t' = \frac{7 - 3\sqrt{7}}{2} \approx -0.4686269666s \tag{28}$$

Resolviendo la ecuación, tenemos para t'':

$$t'' = \frac{-4.9 - \sqrt{(4.9)^2 - 4\left(\frac{3.5}{2} - \frac{4.9}{2}\right)\left(\frac{4.9}{2}\right)}}{2\left(\frac{3.5}{2} - \frac{4.9}{2}\right)} \tag{29}$$

$$t'' = \frac{7 + 3\sqrt{7}}{2} \approx +7.468626967s \tag{30}$$

Notamos entonces, que es imposible que el auto haya alcanzado en t', por lo tanto, el momento en el que el auto dos alcanza al auto uno es en t'' (Ecuación 30.

$\therefore$ El momento en que el auto dos alcanza al auto uno es en $t \approx 7.468626967\,s$.

(b) ¿Cuál será la posición cuanso el inciso (a) ocurra, $x = ?$

Como mencionamos anteriormente, sabemos que $x_1 = x_2$, por lo tanto es valido usar, tanto la ecuación 18 como la ecuación 19, por fines prácticos usaré la ecuación 18:

$$\vec{x_1} = \vec{x_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a_1}t^2$$

Sustituyendo los valores, tenemos:

$$\vec{x_1} = 0 + 0(7.468626967\,s) + \frac{1}{2}\left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(7.468626967\,s)^2 = \vec{x_2}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \approx 97.61568034\,m \tag{31}$$

$\therefore$ La posición cuando el inciso (a) ocurra es $x \approx 97.61568034\,m$.

(c) ¿Cuál será la velocidad que tendrá en ese punto para ambos autos?

Usando la ecuación para calcular la velocidad con un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA):

$$v_f = v_0 + at \tag{32}$$

Usando la ecuación 32, tenemos para el coche uno:

$$v_{f_1} = v_0 + a_1 t \tag{33}$$

Sustituyendo los valores en 33 tenemos que:

$$v_{f_1} = 0 + \left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(7.468626967\,s) \tag{34}$$

Resolviendo la ecuación 34 tenemos:

$$v_{f_1} \approx 26.14019438\frac{m}{s} \tag{35}$$

Usando la ecuación 32, tenemos para el coche dos:

$$v_{f_2} = v_0 + a_2(t - 1) \tag{36}$$

Sustituyendo los valores en 36 tenemos que:

$$v_{f_2} = 0 + \left(4.9\frac{m}{s^2}\right)(7.468626967\,s) \tag{37}$$

Resolviendo la ecuación 37 tenemos:

$$v_{f_2} \approx 36.59627214\frac{m}{s} \tag{38}$$

$\therefore$ la velocidad que tendrá el auto uno en ese punto es de aproximadamente $v_{f_1} \approx 26.14019438\frac{m}{s}$, mientras que la velocidad del auto dos en ese punto es de aproximadamente $v_{f_2} \approx 36.59627214\frac{m}{s}$

(d) Toma 5 tiempos diferentes a partir de que los autos arrancan, sin tomar el tiempo inicial. 3 antes del tiempo donde los autos se encuentran y dos posteriores a ese tiempo, realicen dos tablas, una para cada auto, con la siguiente información; aceleración, tiempo, posición y velocidad como se muestra en el Cuadro 1.

Auto 1			
No dependiente del tiempo	Dependientes del tiempo		
$\vec{a}\,[m/s^2]$	$t\,[s]$	$\vec{x}\,[m]$	$\vec{v}\,[m/s]$
Valor de la aceleración			

Tabelle 1: Cinemática del Auto 1 (Ejemplo)

Nótese que las celdas con la información "No dependiente del tiempo"y "Dependiente del tiempoëstán orientadas a la izquierda.

Intenten comparar las tablas correspondientes pensando que pasaría pasando la posición donde los autos se encuentran.

Consideremos los tiempos $t_2 = 2$, $t_3 = 4$, $t_4 = 6$, $t_5 = 8$ y $t_6 = 10$, notemos que, tanto t_2, t_3 y t_4 suceden antes del tiempo donde los autos se encuentran y que, tanto t_5 y t_6 son tiempos posteriores a ese tiempo.

Notemos que, podemos usar la ecuación 16 para calcular la posición y la ecuación 32 para calcular la velocidad en ambos autos.

Como v_0 tenemos, para el auto 1 las siguientes ecuaciones:

$$\vec{x_1} = \frac{1}{2}\vec{a_1}t^2 \tag{39}$$

$$\vec{v_1} = \vec{a_1}t \tag{40}$$

Como v_0 tenemos, para el auto 2 las siguientes ecuaciones:

$$\vec{x_2} = \frac{1}{2}\vec{a_2}\,(t - 1)^2 \tag{41}$$

$$\vec{v_2} = \vec{a_2}\,(t - 1) \tag{42}$$

Usamos la ecuación 39 para el auto 1 considerando los tiempos $t_2 = 2$, $t_3 = 4$, $t_4 = 6$, $t_5 = 8$ y $t_6 = 10$:

$$\vec{x_{1_2}} = \frac{1}{2}\left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(2\,s)^2 = 7\,m \tag{43}$$

$$\vec{x_{1_3}} = \frac{1}{2}\left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(4\,s)^2 = 28\,m \tag{44}$$

$$\vec{x_{1_4}} = \frac{1}{2}\left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(6\,s)^2 = 63\,m \tag{45}$$

$$\vec{x_{1_5}} = \frac{1}{2}\left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(8\,s)^2 = 112\,m \tag{46}$$

$$\vec{x_{1_6}} = \frac{1}{2}\left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(10\,s)^2 = 175\,m \tag{47}$$

Ahora usamos la ecuación 40 para el auto 1 considerando los mismos tiempos:

$$\vec{v_{1_2}} = \left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(2\,s) = 7\,\frac{m}{s} \tag{48}$$

$$\vec{v_{1_3}} = \left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(4\,s) = 14\,\frac{m}{s} \tag{49}$$

$$\vec{v_{1_4}} = \left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(6\,s) = 21\,\frac{m}{s} \tag{50}$$

$$\vec{v_{1_5}} = \left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(8\,s) = 28\,\frac{m}{s} \tag{51}$$

$$\vec{v_{1_6}} = \left(3.5\frac{m}{s^2}\right)(10\,s) = 35\,\frac{m}{s} \tag{52}$$

Usamos la ecuación 41 para el auto 2 considerando los mismos tiempos:

$$\vec{x_{2_2}} = \frac{1}{2}\left(4.9\frac{m}{s^2}\right)(2\,s - 1\,s)^2 = 2.45\,m \tag{53}$$

$$\vec{x_{2_3}} = \frac{1}{2}\left(4.9\frac{m}{s^2}\right)(4\,s - 1\,s)^2 = 22.05\,m \tag{54}$$

$$\vec{x_{2_4}} = \frac{1}{2}\left(4.9\frac{m}{s^2}\right)(6\,s - 1\,s)^2 = 61.25\,m \tag{55}$$

$$\vec{x_{2_5}} = \frac{1}{2}\left(4.9\frac{m}{s^2}\right)(8\,s - 1\,s)^2 = 120.05\,m \tag{56}$$

$$\vec{x_{2_6}} = \frac{1}{2}\left(4.9\frac{m}{s^2}\right)(10\,s - 1\,s)^2 = 198.45\,m \tag{57}$$

Ahora usamos la ecuación 42 para el auto 2 considerando los mismos tiempos:

$$\vec{v_{2_2}} = \left(4.9\frac{m}{s^2}\right)(2\,s - 1\,s) = 4.9\,\frac{m}{s} \tag{58}$$

$$\vec{v_{2_3}} = \left(4.9\frac{m}{s^2}\right)(4\,s - 1\,s) = 14.7\,\frac{m}{s} \tag{59}$$

$$\vec{v_{2_4}} = \left(4.9\frac{m}{s^2}\right)(6\,s - 1\,s) = 24.5\,\frac{m}{s} \tag{60}$$

$$\vec{v_{2_5}} = \left(4.9\frac{m}{s^2}\right)(8\,s - 1\,s) = 34.3\,\frac{m}{s} \tag{61}$$

$$\vec{v_{2_6}} = \left(4.9\frac{m}{s^2}\right)(10\,s - 1\,s) = 44.1\,\frac{m}{s} \tag{62}$$

Con los datos obtenidos en las ecuaciones 43 a 62 podemos completar las tablas.

Para el Auto 1:

Auto 1			
No dependiente del tiempo	Dependientes del tiempo		
$\vec{a}\,[m/s^2]$	$t\,[s]$	$\vec{x}\,[m]$	$\vec{v}\,[m/s]$
Valor de la aceleración	2	7	7
	4	28	14
	6	63	21
	8	112	28
	10	175	35

Tabelle 2: Cinemática del Auto 1

Para el Auto 2:

Auto 2			
No dependiente del tiempo	Dependientes del tiempo		
$\vec{a}\,[m/s^2]$	$t\,[s]$	$\vec{x}\,[m]$	$\vec{v}\,[m/s]$
Valor de la aceleración	2	2.45	4.9
	4	22.05	14.7
	6	61.25	24.5
	8	120.05	34.3
	10	198.45	44.1

Tabelle 3: Cinemática del Auto 2

Al comparar ambas tablas (Tabla 2 y 3), notamos lo siguiente, en los tres tiempos anteriores a cuando elauto dos alcanza al uno, notamos que la posición del auto dos es menor a la del auto uno, cosa muy similar pasa con el tiempo, pues notamos que, em el segundo dos la velocidad del auto uno es mayor a la del auto dos, sin embargo, notamos que, a partir del segundo 4, la velocidad del auto dos es mayor a la del auto 1, esto debido a que tiene una mayor aceleración, otra cosa que notamos es que, la posición del auto dos a partir del segundo ocho es mayor a la del auto uno, esto también es causado gracias a que el auto dos tiene una mayor aceleración, notamos que esto sucede despues de los 7.47 segundos, en el cual ambos carros tienen la misma posición.

3. Considere al siguiente sistema, dos bloques de masas m_1 y m_2 estan unidos por una cuerda ideal y descansan sobre una superficie horizontal sin roce. Si una fuerza de magnitud A se le aplica al bloque de masa m_2 horizontalmente en la dirección que muestra la Figura 43. Realicen los respectivos diagramas de cuerpos libres (usen powerpoint, paint, dibujenlo, lo que gusten) y anéxelo como una imagen, a partir de ellos determinen la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda entre los bloques.

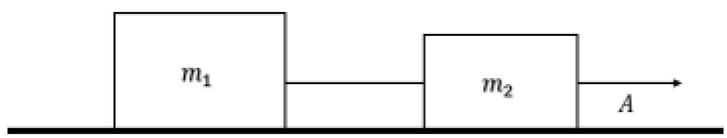

Abbildung 1: Sistema de dos bloques amarrados

Analizando el problema, llegamos al siguiente diagrama de cuerpo libre:

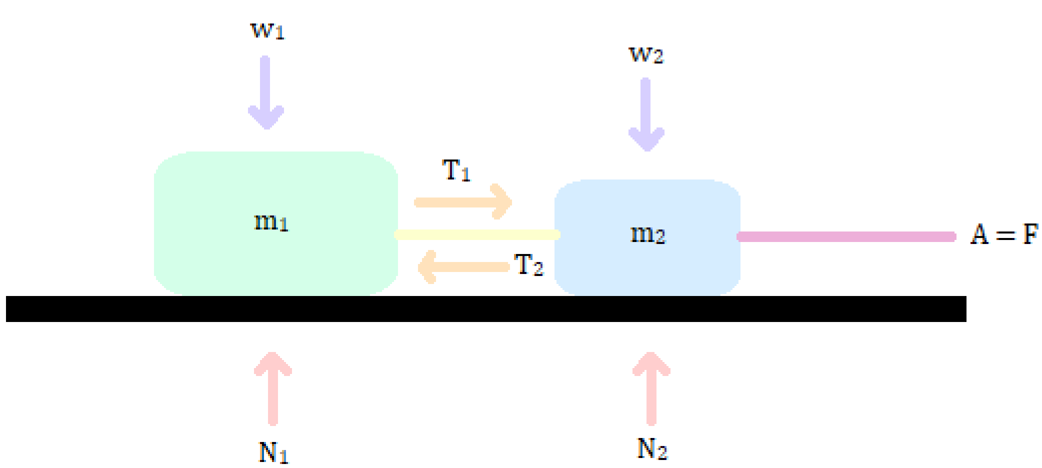

Abbildung 2: Diagrama de cuerpo libre de un Sistema de dos bloques amarrados

Por el diagrama de cuerpo libre notamos que, como el peso de las masas es paralelo a la fuerza normal, es decir, son fuerzas iguales, pero en sentido opuesto, por lo que se cancelan:

$$N_1 + w_1 = 0 \tag{63}$$

$$N_2 + w_2 = 0 \tag{64}$$

Por las ecuaciones 63 y 64 notamos que esas fuerzas no son necesarias tomarlas en cuenta para el calculo final pues se cancelan entre ellas.

Para m_1, tenemos que, las fuerzas que actuan sobre ella son:

$$\vec{T_1} = m_1\vec{a} \tag{65}$$

Del mismo modo, notamos que la fuerza $\vec{A}$ actua sobre el bloque de m_2, por lo tanto, tenemos:

$$\vec{A} - \vec{T_2} = m_2\vec{a} \tag{66}$$

Donde a es la aceleración que experimentan ambos bloques, ya que se mueven a la misma dirección y sentido debido a que están unidos por la cuerda, por lo tanto, al sumas las fuerzas, tenemos que:

$$\vec{T_1} + \vec{A} - \vec{T_2} = m_1\vec{a} + m_2\vec{a} \tag{67}$$

Despejando a de la ecuación 67 tenemos:

$$\vec{a} = \frac{\vec{T_1} + \vec{A} - \vec{T_2}}{m_1 + m_2} \tag{68}$$

$\therefore$ La aceleración del sistema es 68 ($\vec{a} = \frac{\vec{T_1}+\vec{A}-\vec{T_2}}{m_1+m_2}$)

Para calcular la tensión en la cuerda, notemos que, en la imagen 2 las fuerzas que actuan sobre la cuerda son, la tensión uno (T_1) y la tensión dos (T_1), por lo tanto, despejando a T_1 de 65 tenemos:

$$\vec{T_1} = m_1\vec{a} \tag{69}$$

De igual modo, despejando a T_2 de 66 tenemos:

$$\vec{T_2} = \vec{A} - m_1\vec{a} \tag{70}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones 69 y 70 tenemos para T:

$$\vec{T} = \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{a}\,(m_1 - m_2) + \vec{A} \tag{71}$$

$\therefore$ La tensión de la cuerda entre los bloques es 71 ($\vec{T} = \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{a}\,(m_1 - m_2) + \vec{A}$)

3 Punto Extra

$\propto$ Investiguen que hace la paquetería "hyperref"y expliquen que hace, citen su fuente donde fue investigado.

Si queremos añadir links a nuestro documento de pdf, para navegar por las diferentes secciones, referencias y citas, podemos usar el paquete hyperref, que automaticamente ya añade los links.

El paquete hyperref, por hyperref, (\usepackage{hyperref}) es usado para tener un control adecuado de todo tipo de links y referencias a lo largo del texto, siendo esto último gracias a que las referencias previas citadas por el comando $\backslash ref$ se convierten automáticamente en links (que al darles click te llevaran directo a dónde está el objeto al que se hace referencia) al momento de aplicar la paquetería en cuestión.

Esta paquetería nos da los siguientes comandos nuevos:

- \url{link}.

  Este nos permite introducir cualquier link web en su forma "real"para hacerle referencia, y al clicar en él ir a la página de este.

- \href{link/nombre del archivo local}{nombre con el que aparecera en el texto}

  Sirve para lo mismo que el anterior comando, pero tiene la diferencia de que pone el enlace "oculto"y muestra, en su lugar, una palabra o frase que le atribuyamos; además de que con éste también se puede hacer referencia a archivos locales del documento.

- \hyperlink{la palabra/oración}{nombre con el que aparecera en el texto}

  Sirve para "enlazar"cualquier palabra del documento a otra parte usando como "link de referencia"(resaltado de algún color) la palabra que elijamos.

- \hypertarget{la palabra/oración}{nombre con el que aparecera en el texto}

  En palabras simples, funciona para lo mismo que el anterios comando, pero tiene la diferencia de que no resalta el texto de ningún color.

[1]

Literatur

[1] Overleaf. *Hyperlinks*. 2022. URL: https://es.overleaf.com/learn/latex/Hyperlinks (besucht am 07. 11. 2022).