Ejercicios Autómatas con Pila

75.579 - Autómatas y gramáticas

Grado en Ingeniería Informática

Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicación

Ejercicio 1

Definid la **tabla de transiciones** de un autómata con pila que acepte **per pila vacía** el lenguaje formado por las cadenas sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ que tienen doble número de *a* que de *b*, teniendo en cuenta que $\lambda \in L$. Como alfabeto de salida tenéis que emplear el conjunto $\Gamma = \{A, B\}$.

Para resolver este ejercicio tenéis que seguir los siguientes pasos:

1.1 Defina formalmente el lenguaje del enunciado.

$$L = \{w \in (a+b)^* \mid |w|_a = 2|w|_b\}$$

1.2 Determine si las palabras de entrada siguientes pertenecen o no al lenguaje L:

$$\{\lambda, aab, abab, aaabb, bbaaaa, ababaa, \}$$

$$\{\lambda, aab, ababaa, bbaaaa\} \epsilon L$$

$$\{abab, aaabb\} \notin L$$

1.3 Definid las transiciones que deberá realizar el autómata del enunciado cuando se lee el símbolo de entrada "a" (teniendo en cuenta los diferentes símbolos que puede haber en el top de la pila).

Mientras se vayan leyendo "a", si tenemos en el top de la pila una A o el símbolo de pila inicial, sólo será necesario que las vayamos empilando:

$\sigma(q_0, a, z_0) = (q_0, Az_0)$
$\sigma(q_0, a, A) = (q_0, AA)$

Si leemos una "a" y tenemos una B en el top, sólo será necesario desempilarla.

$\sigma(q_0, a, B) = (q_0, \lambda)$

Ved el resultado final en la tabla de transiciones de la sub-pregunta 1.5.

1.4 Definid las transiciones que deberá realizar el autómata del enunciado cuando se lee el símbolo de entrada "b" (teniendo en cuenta los diferentes símbolos que puede haber en la cima de la pila).

Si leemos una "b" y el símbolo que hay en el top es una B (o el símbolo de pila inicial), se empilan 2 B:

$\sigma(q_0, b, z_0) = (q_0, BBz_0)$
$\sigma(q_0, b, B) = (q_0, BBB)$

Si leemos una "b" y el símbolo que hay en el top es una A, el algoritmo se complica porque las acciones a realizar dependerán del símbolo que haya en la pila, una vez hayamos eliminado el símbolo A.

Necesitaremos un nuevo estado (q1) para controlar las acciones que deben llevarse a cabo. La condición de entrada al nuevo estado es, como ya hemos dicho, leer una "b" cuando en el top de la pila hay una A:

$\sigma(q_0, b, A) = (q_1, \lambda)$

Hay tres posibilidades distintas:

– Una vez eliminado el símbolo A haya una segunda A en el top, con lo cual la desempilaremos y volveremos al estado inicial:

$\sigma(q_1, \lambda, A) = (q_0, \lambda)$

– Una vez eliminado el símbolo A haya una B en el top, con lo cual empilaremos una B y volveremos al estado inicial:

$\sigma(q_1, \lambda, B) = (q_0, BB)$

– Una vez eliminado el símbolo A encontramos el símbolo de pila inicial, con lo cual empilaremos una B y volveremos al estado inicial:

$\sigma(q_1, \lambda, z_0)) = (q_0, Bz_0)$

Ved el resultado final en la tabla de transiciones de la sub-pregunta 1.5.

1.5 A partir de las dos subpreguntas anteriores, **definid la tabla de transiciones** del autómata con pila, aceptador por pila vacía, del enunciado.

$$M = (Q, \Sigma, Z, q_0, z_0, \delta)$$

On: $Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{a, b\}, Z = \{A, B, z_0\}$

Y la función de transición viene determinada por la siguiente tabla:

	a/z_0	b/z_0	λ/z_0	a/A	b/A	a/B	b/B	λ/A	λ/B
q_0	(q_0, Az_0)	(q_0, BBz_0)	(q_0, λ)	(q_0, AA)	(q_1, λ)	(q_0, λ)	(q_0, BBB)	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	(q_0, Bz_0)	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	(q_0, λ)	(q_0, BB)

Observemos que la palabra vacía también pertenece al lenguaje:

$\sigma(q_0, \lambda, z_0) = (q_0, \lambda)$

Además, esta transición es también la condición de salida del algoritmo.

1.6 A partir de la tabla anterior encontrad las secuencias de descripciones instantáneas que demuestran que las palabras {aba, aab, baa, ababaa} son aceptadas por el autómata, y la palabra {BAAB} no es aceptada.

- Para la palabra $w = aab$ tenemos:
  $(q_0, aab, z_0) \vdash (q_0, ab, Az_0) \vdash (q_0, b, AAz_0) \vdash (q_1, \lambda, Az_0) \vdash (q_0, \lambda, z_0) \vdash (q_0, \lambda, \lambda)$
- Para la palabra $w = aba$ tenemos:
  $(q_0, aba, z_0) \vdash (q_0, ba, Az_0) \vdash (q_1, a, z_0) \vdash (q_0, a, Bz_0) \vdash (q_0, \lambda, z_0) \vdash (q_0, \lambda, \lambda)$
- Para la palabra $w = baa$ tenemos:
  $(q_0, baa, z_0) \vdash (q_0, aa, BBz_0) \vdash (q_0, a, Bz_0) \vdash (q_0, \lambda, z_0) \vdash (q_0, \lambda, \lambda)$
- Para la palabra $w = ababaa$ tenemos:
  $(q_0, ababaa, z_0) \vdash (q_0, babaa, Az_0) \vdash (q_1, abaa, z_0) \vdash (q_0, abaa, Bz_0) \vdash (q_0, baa, z_0) \vdash (q_0, aa, BBz_0) \vdash (q_0, a, Bz_0) \vdash (q_0, \lambda, z_0) \vdash (q_0, \lambda, \lambda)$
- Para la palabra $w = baab$ tenemos:
- $(q_0, baab, z_0) \vdash (q_0, aab, BBz_0) \vdash (q_1, ab, Bz_0) \vdash (q_0, ab, BBz_0) \vdash (q_1, b, Bz_0) \vdash (q_0, \lambda, BBz_0)$
  ... i a partir de aquí ya no podemos continuar.

1.7 ¿El autómata de pila que has diseñado es determinista? Justificad la respuesta.

No es determinista ya que tiene definidas transiciones como las siguientes:

$$\delta(q_0, a, z_0) = (q_0, Az_0)\ , \delta(q_0, \lambda, z_0) = (q_0, \lambda)$$

Y por lo tanto no se satisface la siguiente condición:

Si $\delta(q, \lambda, z) \neq \emptyset, llavors\ \delta(q, a, z) = \emptyset\ \forall a \in \Sigma$

Ejercicio 2

Encontrad un autómata con pila que reconozca el lenguaje por **estado final**:

$$L = \{w \in a^+b^+c^+ \mid |w|_b = |w|_c \wedge |w|_c\ senar\}$$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_f\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \{a, b, c\}$

– Z_0

	a/Z_0	b/Z_0	λ/Z_0	b/b	c/b	λ/b
q_0	(q_1, Z_0)	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	(q_1, Z_0)	(q_2, bZ_0)	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	(q_2, bb)	(q_3, λ)	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$(q_f, -)$	$\emptyset$	(q_4, λ)	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	(q_3, λ)	$\emptyset$

Observaciones:

- q_0: En este estado registramos que, como mínimo, hemos leído una "a". Si nos llega cualquier otro símbolo, la transición no debe estar definida.
- q_1 : Mientras leemos "a"s no hay que hacer nada (no hay que almacenar las "a" porque no tienen ninguna relación con el número de "b" o de "c"). Al leer una "b" sí la debemos almacenar (hay que comparar el número de "b" con el de "c") y pasaremos al estado siguiente.
- q_2: En este estado acumularemos las "b" hasta que leamos una "c".
- q_3 memoriza el número impar de "c" (si estamos en q3, entonces es que hemos leído un número impar de "c")
- q_4 memoriza el número par de "c".
- q_f : Es el estado final. Una vez llegamos a él es indiferente si eliminamos el símbolo de pila inicial o no

Ejercicio 3

Sea el autómata con pila siguiente:

$$M = (Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{A, Z_0\}, \sigma, q_0, Z_0, F = \emptyset)$$

con la tabla de transiciones siguiente:

δ	$0/Z_0$	$0/A$	$1/Z_0$	$1/A$	λ/Z_0
q_0	(q_0, AZ_0)	(q_1, λ)	$\emptyset$	(q_1, λ)	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	(q_1, Z_0)	$\emptyset$	(q_1, λ)

- Determinad el lenguaje aceptado (puede ser una expresión regular) por $N(M)$.

$$N(M) = 0(0+1)1^* = 001^* + 011^*$$

- ¿El autómata es determinista? Justificad la respuesta.

No es determinista ya que:

$$\delta\ (q_1, 1, z_0) \neq \emptyset\ i\ \delta\ (q_1, \lambda, z_0) \neq \emptyset$$

Ejercicio 4

Determina si los enunciados son **verdaderos o falsos**, justificando la respuesta.

4.1 El lenguaje $L = \{a^i b^j c^i | i \geq 1, j \geq 1\}$ es incontextual.

Cierto. El lenguaje $L' = \{a^i c^i | i \geq 1\}$ es claramente incontextual y es fácil encontrar una gramática o un autómata de pila que lo reconozca. El hecho de añadir en la parte media de la palabra un número indeterminado de "b", que no tiene ninguna relación con el índice "y", hace que la gramática o el autómata de pila que reconoce L no sea muy diferente de L'. Por ejemplo, en el caso del autómata de pila, si partiéramos de L' para obtener L, tendríamos suficiente añadiendo un estado para lectura de las "b" hasta que se lea la primera "c".

4.2 Todo autómata de pila no determinista tiene un equivalente determinista con la misma capacidad de representación o moldeado.

Falso. Basta con encontrar un contraejemplo. El autómata de pila que representa el lenguaje $L = \{ww^R | w \in (a+b)^*\}$ es no determinista i no tiene ninguna versión determinista equivalente.