Exercicis addicionals examen

Autómatas y gramáticas (Universitat Oberta de Catalunya)

Exercici 1

Donat l'autòmat finit determinista A = (Q, Σ , q0,F, δ), on Q = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, Σ = {c, d, m}, q0=1, F={ 2, 3, 4, 5, 6 } i δ definida per la taula següent:

δ	c	d	m
→1	2	5	∅
+2	3	4	4
+3	4	∅	∅
+4	∅	∅	∅
+5	6	∅	∅
+6	3	∅	∅

Determineu una expressió regular que representi el llenguatge L reconegut per aquest autòmat definint els llenguatges associats a cada estat de l'autòmat.

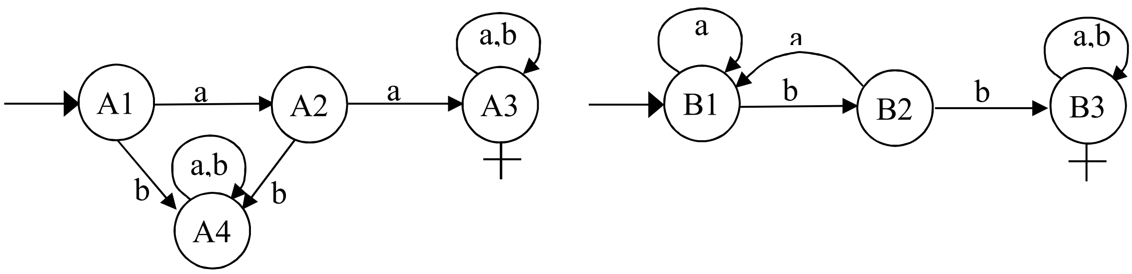
L1 = cL2 + dL5
L2 = cL3 + dL4 + mL4 + λ
L3 = cL4 + λ
L4 = λ
L5 = cL6 + λ
L6 = cL3 + λ

L3 = c (λ) + λ = c + λ
L6 = c(c + λ) + λ = cc + c + λ
L5 = c(cc + c + λ) + λ = ccc + cc + c + λ
L2 = c(c + λ) + d(λ) + m(λ) + λ = cc + c + d + m + λ

L1 = c(cc + c + d + m + λ) + d(ccc + cc + c + λ)
= ccc + cc + cd + cm + c + dccc + dcc + dc + d

Exercici 2

Es vol construir un **autòmat finit determinista (DFA) i mínim** que accepti tots els mots sobre l'alfabet {a,b} del llenguatge format pel mots que comencin amb la seqüència de símbols 'aa' però que no contenen la seqüència de símbols 'bb', a partir dels autòmats següents:



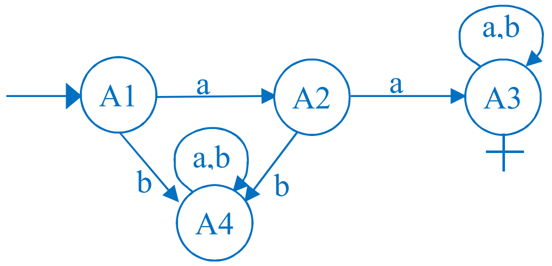
a) Indiqueu quin llenguatge reconeix cada autòmat (doneu la descripció):

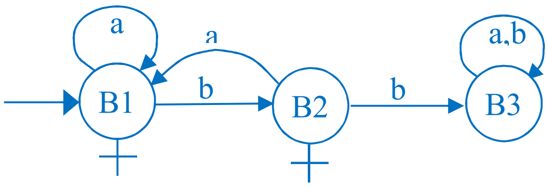
Autòmat A: mots que comencin amb la seqüència de símbols ‘aa’

Autòmat B: mots que contenen la seqüència de símbols ‘bb’.

b) Quines operacions cal fer sobre els autòmats donats per a obtenir l’autòmat que accepti el llenguatge format pel mots que comencin amb la seqüència de símbols ‘aa’ però que no contenen la seqüència de símbols ‘bb’. Indiqueu les operacions a realitzar i dibuixeu els autòmats que s’han d’utilitzar.

L’operació que s’ha de fer és A-B, que és el mateix que fer $A \cap B^C$





c) Doneu la taula de transicions de l’**autòmat finit determinista** (DFA) del llenguatge format pel mots que comencin amb la seqüència de símbols ‘aa’ però que no contenen la seqüència de símbols ‘bb’, segons l’operació definida i a partir dels autòmats dibuixat a l’apartat anterior.

Δ		a		b	
→A1B1	C1	A2B1	C2	A4B2	C3
A2B1	C2	A3B1	C4	A4B2	C3
A4B2	C3	A4B1	C5	A4B3	C6
+A3B1	C4	A3B1	C4	A3B2	C7
A4B1	C5	A4B1	C5	A4B2	C3
A4B3	C6	A4B3	C6	A4B3	C6
+A3B2	C7	A3B1	C4	A3B3	C8
A3B3	C8	A3B3	C8	A3B3	C8

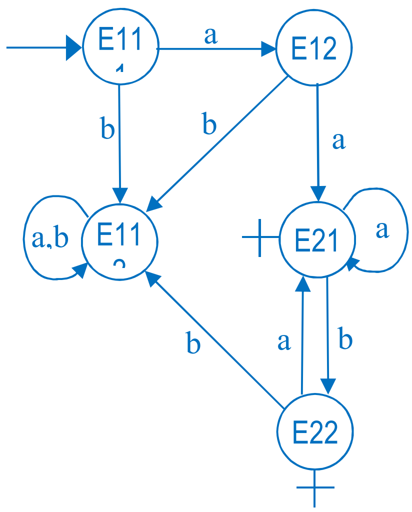
d) Doneu el DFA **mínim** que permeti reconèixer el llenguatge el llenguatge format pel mots que comencin amb la seqüència de símbols ‘aa’ però que no contenen la seqüència de símbols ‘bb’, a partir de la taula de transicions del DFA obtingut a l’apartat anterior.

E1	C1, C2, C3, C5, C6, C7, C8
E2	C4, C7

E11	C1, C3, C5, C6, C7, C8
E12	C2
E21	C4
E22	C7

E11	C1, C3, C5, C6, C7, C8
E12	C2
E21	C4
E22	C7

E111	C1
E112	C3, C5, C6, C7, C8
E12	C2
E21	C4
E22	C7



Exercici 3

Donat el llenguatge següent:

$$L = \{w \in (0+1)^* \mid |w|_1 = 3 \vee (|w|_0 = 2 \wedge |w|_1 \; mod \; 2 = 1)\}$$

Contesteu les preguntes següents:

1.1 Descriviu en llenguatge natural el llenguatge de l'enunciat (observeu que està format per dos subllenguatges diferents).

El llenguatge està format per la unió de dos llenguatges:

- L1 = {Els mots que tenen exactament tres 1}.
- L2 = {Els mots que tenen exactament dos 0 i un nombre senar de 1}.

1.2 Determineu si els mots següents pertanyen o no al llenguatge *L:*

$$\{100,010,001,111,1010,10101,1101011,11000,0101010\}$$

$$\{111,10101,0101010\} \in L_1$$

$$\{100,010,001,10101,1101011\} \in L_2$$

$$\{1010,11000\} \notin L$$

1.3 Els dos subllenguatges són disjunts? Justifiqueu la vostra resposta.

Els dos llenguatges tenen mots en comú, com per exemple, el mot 10101, que pertany a tots dos llenguatges alhora (té tres 1 o dos 0 i un nombre senar de 1). Per tant, no són disjunts.

1.4 Determineu una gramàtica incontextual que generi el llenguatge de l'enunciat.

A partir del símbol inicial, des de X generarem el llenguatge L1 i des de Y el llenguatge L2.

$S \rightarrow X|Y$

L1 (notem que no hi ha cap restricció sobre el nombre de 0):

$X \rightarrow X'1X'1X'1X'$
$X' \rightarrow 0X'|\lambda$

Pel que fa al subllenguatge L2 haurem de tenir en compte que el còmput total de 1 ha de ser senar (com a mínim n'hi ha d'haver 1). Hem de tenir en compte les diferents possibilitats que hi ha:

<nombre senar 1> 0 <nombre senar 1> 0 <nombre senar 1>
<nombre senar 1> 0 <nombre parell 1> 0 <nombre parell 1>
<nombre parell 1> 0 <nombre senar 1> 0 <nombre parell 1>
<nombre parell 1> 0 <nombre parell 1> 0 <nombre senar 1>

Per tant, la nostra gramàtica haurà de tenir en compte totes aquestes possibilitats:

$Y \rightarrow Y_s0Y_s0Y_s|Y_s0Y_p0Y_p|Y_p0Y_s0Y_p|Y_p0Y_p0Y_s$
$Y_p \rightarrow 1Y_p1|\lambda$
$Y_s \rightarrow 1Y_s1|1$

1.5 Comproveu que la vostra gramàtica es comporta segons l'esperat amb els mots de l'apartat 1.2 i trobeu les derivacions corresponents.

L1:

$S \rightarrow X \rightarrow X'1X'1X'1X' \rightarrow 111$
$S \rightarrow X \rightarrow X'1X'1X'1X' \rightarrow 10X'10X'1 \rightarrow 10101$
$S \rightarrow X \rightarrow X'1'X'1X'1X' \rightarrow 0X'10X'10X'10X' \rightarrow 0101010$

L2:

$S \rightarrow Y \rightarrow Y_s0Y_p0Y_p \rightarrow 100$
$S \rightarrow Y \rightarrow Y_p0Y_s0Y_p \rightarrow 010$
$S \rightarrow Y \rightarrow Y_p0Y_p0Y_s \rightarrow 001$
$S \rightarrow Y \rightarrow Y_s0Y_s0Y_s \rightarrow 10101$
$S \rightarrow Y \rightarrow Y_p0Y_s0Y_p \rightarrow 1Y_p10101Y_p1 \rightarrow 1101011$

Notem que no hi ha cap regla de producció que ens permeti generar els mots 101 i 11000.

1.6 La gramàtica que heu trobat és ambigua? Justifiqueu la vostra resposta.

La gramàtica ha de ser forçosament ambigua perquè ja hem vist que els dos subllenguatges no són disjunts. Per exemple, a l'apartat anterior hem vist que hi ha dues derivacions possibles per al mateix mot (10101), les quals donaran lloc a dos arbres de derivacions diferents.

Exercici 4

A partir de la gramàtica següent,

$G = (V, T, S, P)$ on $V = \{S, X, Y\}$ i $T = \{x, y\}$

$S \rightarrow XY|X$
$X \rightarrow Y|xXyx|xyx$
$Y \rightarrow yXx|\lambda$

a) Obtingueu una gramàtica neta i pelada

- Eliminació produccions buides

Conjunt de variables anul·lables=$\{Y, X, S\}$

$S \rightarrow XY|X|Y$
$X \rightarrow Y|xXyx|xyx$
$Y \rightarrow yXx|yx$

- Eliminació produccions unitàries

$S \rightarrow XY|xXyx|yXx|xyx|yx$
$X \rightarrow xXyx|xyx|yXx|yx$
$Y \rightarrow yXx|yx$

- Eliminació de variables que no generen mots: no es produeix cap canvi a la gramàtica.

- Eliminació de símbols impossibles de generar: no es produeix cap canvi a la gramàtica.

b) Obtingueu la gramàtica corresponent en Forma Normal de Chomsky (FNC) a partir de la gramàtica obtinguda a l'apartat anterior.

La gramàtica obtinguda a l'apartat anterior és:

$S \rightarrow XY|xXyx|yXx|xyx|yx$
$X \rightarrow xXyx|xyx|yXx|yx$
$Y \rightarrow yXx|yx$

$S \rightarrow XY|C_xXC_yC_x|C_yXC_x|C_xC_yC_x|C_yC_x$

$X \rightarrow C_x X C_y C_x | C_x C_y C_x | C_y X C_x | C_y C_x$
$Y \rightarrow C_y X C_x | C_y C_x$
$C_x \rightarrow x$
$C_y \rightarrow y$

$S \rightarrow XY | C_x X C_{yx} | C_y C_{Xx} | C_x C_{yx} | C_y C_x$
$X \rightarrow C_x X C_{yx} | C_y C_{yx} | C_y C_{Xx} | C_y C_x$
$Y \rightarrow C_y C_{Xx} | C_y C_x$
$C_x \rightarrow x$
$C_y \rightarrow y$
$C_{Xx} \rightarrow X C_x$
$C_{yx} \rightarrow C_y C_x$

$S \rightarrow XY | C_{xX} C_{yx} | C_y C_{Xx} | C_x C_{yx} | C_y C_x$
$X \rightarrow C_{Xx} C_{yx} | C_y C_{yx} | C_y C_{Xx} | C_y C_x$
$Y \rightarrow C_y C_{Xx} | C_y C_x$
$C_x \rightarrow x$
$C_y \rightarrow y$
$C_{yx} \rightarrow C_y C_x$
$C_{xX} \rightarrow C_x X$
$C_{Xx} \rightarrow X C_x$

Exercici 5

Definiu formalment un autòmat amb pila (per **estat final**) que reconegui el llenguatge següent i trobeu la **taula de transicions**:

$$L = \{a^+(a + b^*)\}$$

Determineu si és o no determinista i justifiqueu la vostra resposta.

$$L = \{a^+(a + b^*)\} = \{a^+a + a^+b^*\}$$

- Notem que hi ha dos tipus de mots, corresponents a dos subllenguatges:
  - El mot més petit del primer subllenguatge és “aa”. Qualsevol mot amb més de dues “a” també formarà part del llenguatge.
  - El mot més petit del segon subllenguatge és “a·lambda”. Qualsevol mot que tingui com a mínim una “a”, seguit de qualsevol nombre de “b” (o de cap), també formarà part del llenguatge (notem que el mot “a” també hi pertany).

Una possible solució és la següent:

	a/z_0	a/a	b/a	b/b
q_0	(q_0, az_0) (q_F, az_0)	(q_0, a) (q_F, a)	(q_1, b) (q_F, b)	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	(q_1, b) (q_F, b)
q_F	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Definició formal de l'autòmat:

$$Q = \{q_0, q_1, q_F\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$Z = \{a, b, z_0\}$$

On q_0 i q_F són, respectivament, l'estat inicial i el final i z_0 el símbol de pila inicial.

La funció de transició ve definida per les transicions de la taula de transicions.

L'autòmat resultant és clarament **no determinista**, ja que, per exemple:

$$|\delta(q_0, a, a)| > 1$$

Exercici 6

Donada la següent taula de transicions d'un autòmat per pila buida i el mot d'entrada $w = ab$, determina si el mot serà acceptat per l'autòmat i quin serà el contingut final de la pila

	a/Z_0	b/Z_0
q_0	(q_0, A)	(q_0, A)

a) El mot és acceptat i la pila quedarà buida.
b) El mot no és acceptat i a la pila hi quedarà una sola A.
c) El mot no és acceptat i a la pila hi quedaran dues As.
d) El mot és acceptat i a la pila hi quedarà una sola A.