Autómatas y Gramáticas

Grado de Ingeniería Informática

PEC1

Universitat Oberta
de Catalunya

Nombre estudiante

Apellidos, Nombre

Presentación

En esta Prueba de Evaluación Continuada se trabajan los conceptos básicos de la asignatura sobre alfabetos, palabras y lenguajes, así como diferentes conceptos sobre autómatas finitos y lenguajes regulares.

Competencias

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuado a cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlo.

Objetivos

- Saber definir los conceptos de alfabeto, palabra y lenguaje.
- Conocer las operaciones sobre lenguajes y palabras (concatenación, clausuras) y saber utilizarlas para describir lenguajes complejos.
- Saber construir expresiones regulares independientes del contexto para describir un lenguaje dado.
- Saber construir autómatas finitos para reconocer las palabras de un lenguaje dado.
- Conocer las relaciones entre autómatas y expresiones regulares y saber pasar de una representación a la otra con destreza.

Recursos de aprendizaje

Los siguientes recursos son de utilidad para la realización de la PEC:

Básicos

- Módulo didáctico 1. Alfabetos, palabras y lenguajes.
- Módulo didáctico 2. Autómatas finitos y lenguajes regulares.

Complementarios

- Documentos de ayuda, como exámenes, pruebas de validación y PECs de semestres anteriores publicados en el aula por el profesorado colaborador.
- Los recursos de aprendizaje que aparecen en la bibliografía de estos dos módulos.

Criterios de valoración

La ponderación de los ejercicios es la siguiente:

- Ejercicio 1: 20%
- Ejercicio 2: 20%
- Ejercicio 3: 20%
- Ejercicio 4: 20%
- Ejercicio 5: 20%

El uso de recursos externos (Internet, material bibliográfico, etc.) ha de estar referenciado en la bibliografía. https://biblioteca.uoc.edu/es/pagina/Como-citar/. La PEC se tiene que realizar de manera **individual** y el trabajo entregado tiene que ser original citando adecuadamente las fuentes bibliográficas utilizadas

La copia o plagio en la realización de la PEC comportará que la prueba sea evaluada con un suspenso (D). En caso de que se haga uso de algún tipo de herramienta que utilice inteligencia artificial, habrá que especificarlo explícitamente, y en el caso de que los contenidos introducidos en la práctica no hayan sido adecuadamente adaptados a la situación propuesta por el enunciado, la prueba será evaluada con una D.

De otra parte, y siempre a criterio de los Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicaciones, la reincidencia en el incumplimiento de este compromiso puede comportar que no se permita al estudiante superar ninguna otra asignatura mediante la evaluación continua ni en el semestre en curso ni en los siguientes.

Formato y fecha de entrega

- La PEC1 con todas las actividades claramente diferenciadas se tiene que entregar en un único documento Word, Open Office o PDF con las respuestas a las preguntas.
- El nombre del fichero tiene que ser: Apellido1-Apellido2-Nombre-PEC1.ext donde “ext” hace referencia a la extensión del fichero.
- Este documento se debe de entregar en el espacio de Entrega PEC1 del aula antes de las **23:59 del miércoles 2 de abril de 2025.**
- **No se aceptarán entregas fuera de la fecha límite.**

Enunciado

Nombre y Apellidos: ____________________

Observación: Las definiciones y la notación formal empleadas en la resolución de los ejercicios tienen que ser los mismos que los empleados en los materiales de la asignatura (a no ser que el enunciado del ejercicio especifique lo contrario).

Ejercicio 1 (20%)

Considerar el autómata finito determinista (AFD) definido por:

- **Estados**: Q={q0,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9}
- **Alfabeto**: Σ={a,b}
- **Estados finales**: F={q2,q5,q7}
- **Función de transición**:

δ	a	b
q_0	q_1	q_6
q_1	q_2	q_3
q_2	q_2	q_4
q_3	q_2	q_5
q_4	q_6	q_7
q_5	q_5	q_8
q_6	q_9	q_0
q_7	q_7	q_7
q_8	q_5	q_9
q_9	q_9	q_9

a) Hallar la tabla de transiciones del autómata mínimo, mostrando las clases inducidas que aparecen en cada paso del algoritmo de minimización.

Solución:

Conjunto de clases inducidas por $\equiv_0$

C0={q2,q5,q7}

C1={q0,q1,q3,q4, q6, q8,q9}

Conjunto de clases inducidas por $\equiv_1$

δ	a		b	
q_0	q_1	C1	q_6	C1

q_1	q_2	C0	q_3	C1
q_2	q_2	C0	q_4	C1
q_3	q_2	C0	q_5	C0
q_4	q_6	C1	q_7	C0
q_5	q_5	C0	q_8	C1
q_6	q_9	C1	q_0	C1
q_7	q_7	C0	q_7	C0
q_8	q_5	C0	q_9	C1
q_9	q_9	C1	q_9	C1

Se generan las clases:

C0={ q7}

C1={ q0, q6, q9}

C2={ q2,q5}

C3={ q1, q8}

C4={ q3 }

C5={ q4}

Conjunto de clases inducidas por $\equiv_2$

δ	a		b	
q_0	q_1	C3	q_6	C1
q_1	q_2	C2	q_3	C4
q_2	q_2	C2	q_4	C5
q_3	q_2	C2	q_5	C2
q_4	q_6	C1	q_7	C0
q_5	q_5	C2	q_8	C3
q_6	q_9	C1	q_0	C1
q_7	q_7	C0	q_7	C0
q_8	q_5	C2	q_9	C1
q_9	q_9	C1	q_9	C1

Se generan las clases:

C0={ q7}

C1={ q0 }

C2={ q2 }

C3={ q1 }

C4={ q3 }

C5={ q4}

C6={ q6, q9}

C7={q5}

C8={q8}

Conjunto de clases inducidas por $\equiv_3$

δ	a		b	
$\mathbf{q_0}$	q_1	C3	q_6	C6
$\mathbf{q_1}$	q_2	C2	q_3	C4
$\mathbf{q_2}$	q_2	C2	q_4	C5
$\mathbf{q_3}$	q_2	C2	q_5	C7
$\mathbf{q_4}$	q_6	C6	q_7	C0
$\mathbf{q_5}$	q_5	C7	q_8	C8
$\mathbf{q_6}$	q_9	C6	q_0	C1
$\mathbf{q_7}$	q_7	C0	q_7	C0
$\mathbf{q_8}$	q_5	C7	q_9	C6
$\mathbf{q_9}$	q_9	C6	q_9	C6

Se generan las clases:

C0={ q7}

C1={ q0 }

C2={ q2 }

C3={ q1 }

C4={ q3 }

C5={ q4}

C6={ q6}

C7={q5}

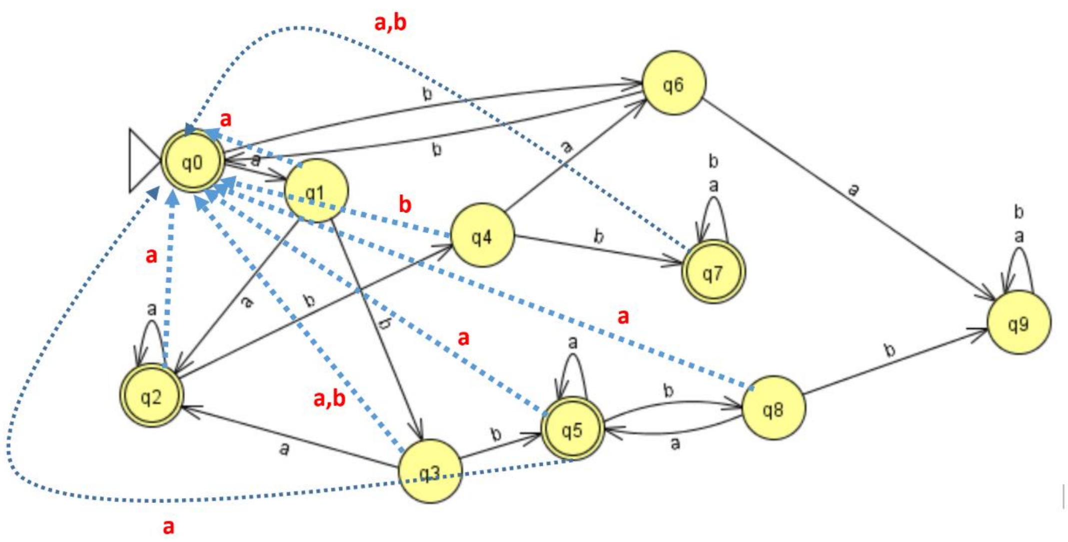
C8={q8}

C9={q9}

Por tanto, el autómata original coincide con el autómata mínimo.

b) Obtener el cierre de Kleene del AFD del ejercicio ¿El autómata resultante es determinista? Justificad la respuesta.

Para determinar el cierre de Kleene tenemos que añadir las transiciones indicadas mediante las líneas discontinuas, y convertir al estado inicial en estado final (observar que los estados finales se representan con un doble círculo).



El autómata resultante no es determinista ya que tiene transiciones definidas de forma múltiple. Por ejemplo:

$$\delta(q_5, a) = \{q_0, q_5\}$$

Ejercicio 2 (20%)

Considerar el autómata finito determinista (AFD) definido por:

- **Estados**: Q={q0,q1,q2,q3,q4,q5}
- **Alfabeto**: Σ={a,b}
- **Estados finales**: F={q3}
- **Función de transición**:

δ	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_3	q_4
q_2	q_4	q_5
q_3	q_3	q_3
q_4	q_3	q_2
q_5	q_4	q_0

a) Hallar la expresión regular que describe el lenguaje reconocido por el autómata resolviendo el sistema de ecuaciones y aplicando el lema de Arden.

Solución:

Se tienen las ecuaciones:
L0=aL1+bL2
L1=aL3+bL4
L2=aL4+bL5
L3=aL3+bL3+ λ
L4=aL3+bL2
L5=aL4+bL0

Se resuelve L3:

L3=aL3+bL3+ λ= (a+b)L3+ λ= $(a+b)^*$

Sustituimos L3:

L0=aL1+bL2
L1=$a(a+b)^*$+bL4
L2=aL4+bL5
L4=$a(a+b)^*$+bL2
L5=aL4+bL0

Sustituimos L5:
L0=aL1+bL2
L1=$a(a+b)^*$+bL4
L2= aL4+bL5= aL4+b(aL4+bL0)= aL4+baL4+ b^2L0=(a+ba)L4+ b^2L0
L4=$a(a+b)^*$+bL2

Sustituimos L4:

L0=aL1+bL2
L1= $a(a+b)^*$+bL4= $a(a+b)^*$+b($a(a+b)^*$+bL2)= $a(a+b)^*$+$ba(a+b)^*$+b^2L2
L2= (a+ba)L4+ b^2L0= (a+ba)($a(a+b)^*$+bL2)+ b^2L0=(a+ba)$a(a+b)^*$+ (a+ba)bL2 + b^2L0

Sustituimos L1:
L0=aL1+bL2=a($a(a+b)^*$+$ba(a+b)^*$+b^2L2)+ bL2=$a^2(a+b)^*$+a $ba(a+b)^*$ +ab^2L2+ bL2=
= $a^2(a+b)^*$+a $ba(a+b)^*$ +(ab^2+ b)L2
L2= (a+ba)$a(a+b)^*$+ (a+ba)bL2 + b^2L0

Sustituimos L0:
L2= (a+ba)$a(a+b)^*$+ (a+ba)bL2 + b^2L0=(a+ba)a(a+b)*+ (a+ba)bL2 + b^2($a^2(a+b)^*$+a $ba(a+b)^*$ +(ab^2+ b)L2)= (a+ba)a(a+b)*+ (a+ba)bL2 + $b^2a^2(a+b)^*$+ b^2a $ba(a+b)^*$ + b^2 (ab^2+ b)L2=((a+ba)a(a+b)*+ $b^2a^2(a+b)^*$+ b^2a $ba(a+b)^*$)+ (b^2 (ab^2+ b)+ (a+ba)b)L2

$=(b^2\ (ab^2+ b)+ (a+ba)b)^{*}((a+ba)a(a+b)^*+ b^2a^2(a+b)^{*}+ b^2a\ ba(a+b)^{*})$

Por tanto la expresión regular equivalente sería:

$$(b^2\ (ab^2+ b)+ (a+ba)b)^{*}((a+ba)a(a+b)^*+ b^2a^2(a+b)^{*}+ b^2a\ ba(a+b)^{*})$$

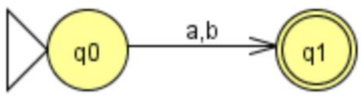
b) Hallar un autómata finito equivalente a la expresión regular siguiente:

(((a+b)c*(a+b))+((ac+ab)*))*

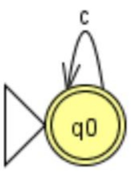
Mostrar los pasos para su obtención.

Solución:

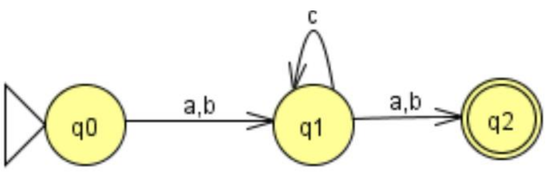
Se construye a+b:



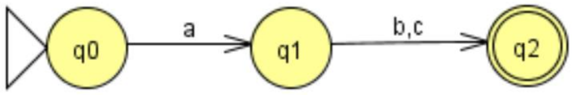
Se construye c*



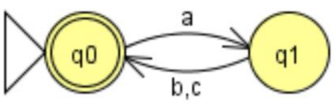
Se construye ((a+b)c*(a+b))



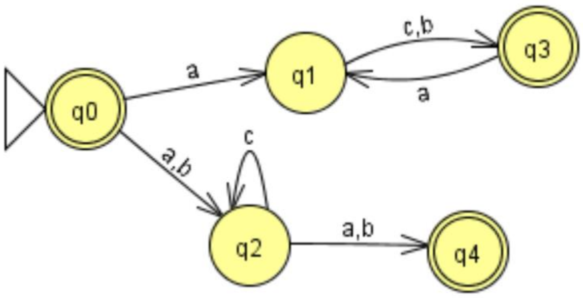
Se construye ac+ab:



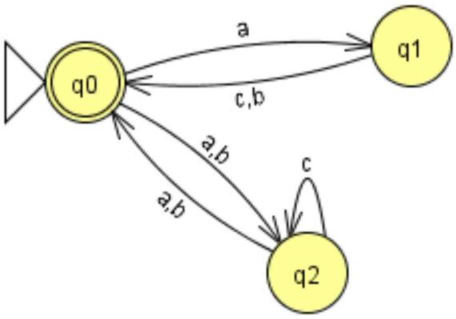
Se construye (ac+ab)*:



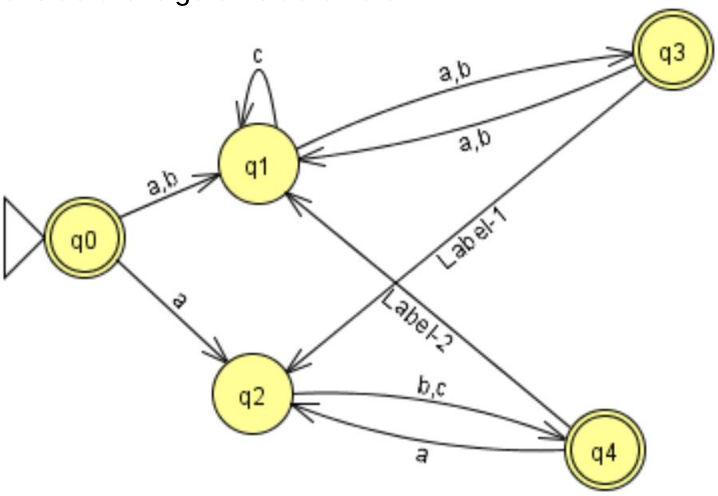
Se construye ((a+b)c*(a+b))+((ac+ab)*)



Se construye ((a+b)c*(a+b))+((ac+ab)*)*



c) Considera el siguiente autómata:



¿Razonar qué valores deben tomar Label-1 y Label-2 para que el autómata reconozca el mismo lenguaje que la expresión regular del apartado anterior?

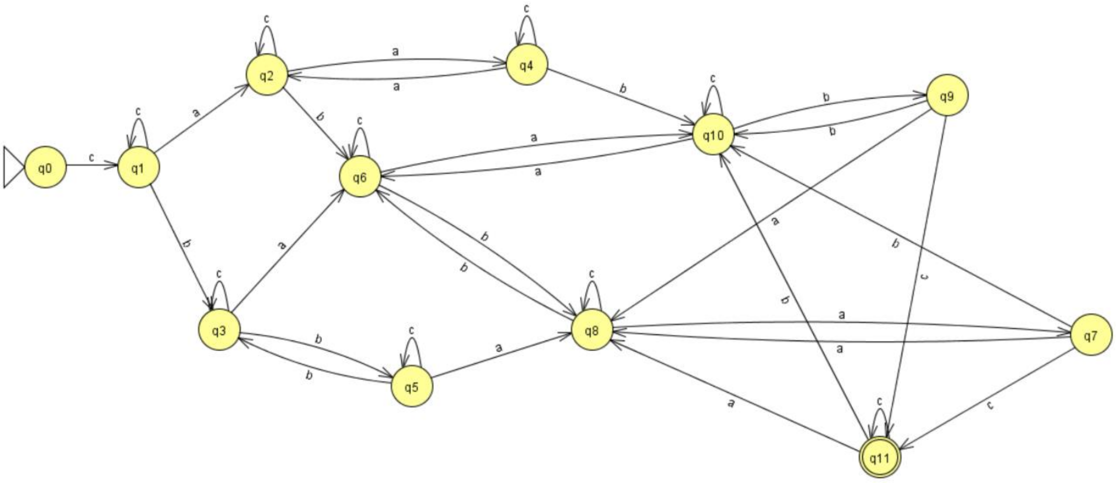
Solución:

Label-1=a y Label-2=a,b

Ejercicio 3 (20%)

Considerar el alfabeto ∑= {a, b, c} y sea L el lenguaje compuesto por todas aquellas cadenas que tienen una longitud mayor que 2 y que empiezan por c y terminan por c. Además deben tener un número par de a's y un número par de b's (al menos dos). Se pide construir un autómata finito que reconozca L

Solución:



Ejercicio 4 (20%)

Dado el alfabeto ∑= {a, b} considerar el lenguaje L formado por todas las cadenas que empiezan y terminan con el símbolo a y tienen un número par de b's (incluido el caso en que no tengan b's. Se pide:

a) Razonar si el siguiente autómata reconoce dicho lenguaje:

$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_2\})$

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_3
q_3	q_3	q_2

b) Obtener el autómata complementario del lenguaje L. Si el autómata del apartado a) no fuera correcto habría que definir primero un autómata adecuado para L y después obtener el complementario a partir del mismo.

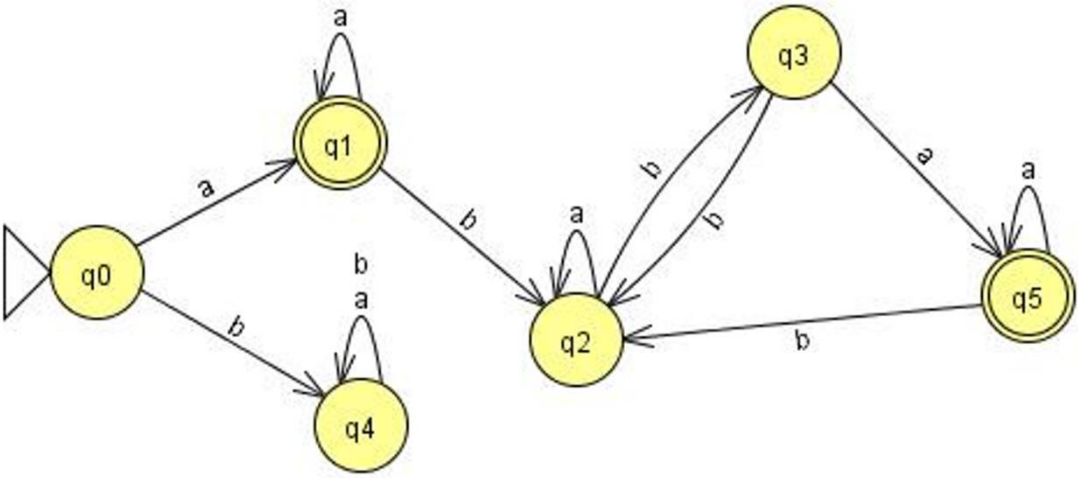
Solución:

Apartado a)

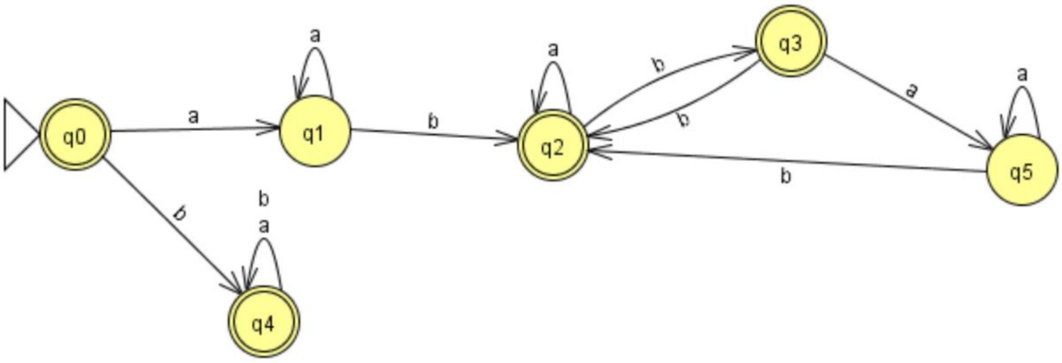
No es correcto pues acepta cadenas que no contienen símbolos a, por lo que incumple la definición de L

Apartado b)

En primer lugar se define un autómata que reconozca L. Sea M=({ q0, q1, q2, q3, q4, q5},{a,b}, δ, q0,{ q1, q5})



A continuación, se obtiene el complementario:



Ejercicio 5 (20%)

a) Considerad el lenguaje siguiente, definido sobre $\Sigma = \{x, y\}$:

$$L = \{x^n y^m | n + m \text{ es par}\}$$

Analizad si es regular o no. Si lo es indicad un AF que lo reconozca y si no lo es demostrarlo usando el lema de bombeo

Solución:

El lenguaje es regular y se puede construir un AF que lo reconozca. Hay tres casos:

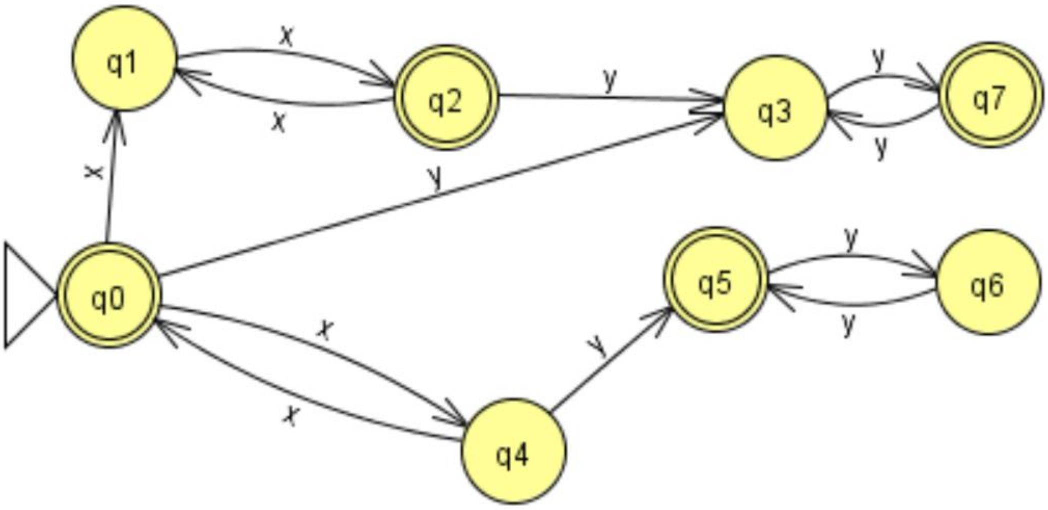
a) La cadena vacía

b) Número par de x y número par de y

c) Número impar de x y número impar de y

d) Número par de x

e) Número par de y



b) Considerad el lenguaje siguiente, definido sobre $\Sigma = \{x, y\}$:

$$L = \{x^n y^m | n \neq m\}$$

Analizad si es regular o no. Si lo es indicad un AF que lo reconozca y si no lo es demostrarlo usando el lema de bombeo

Solución:

El lenguaje no es regular y se va a demostrar usando el lema del bombeo

Supongamos que L es regular. Sea p la constante del lema y sea z la cadena $x^n y^m$ tal que n=p! y m=(p+1)!. Se cumple que z pertenece al lenguaje y que además la longitud de la cadena es mayor que p. Así pues, por las condiciones del lema se verifica que:

z=uvw tal que:

- La longitud de uv debe ser menor que p
- La longitud de v debe ser diferente de cero
- $\forall\, k \geq 0$ se cumple que $uv^k w$ pertenece al lenguaje

De acuerdo a las condiciones y forma de la cadena se cumplirá que:

$v=x^s$, $u=x^t$ $w=x^{p!-s-t}y^{(p+1)!}$

Consideremos un bombeo de $k \geq 0$ entonces se tendría:

$uv^k w= x^t(x^s)^k\, x^{p!-s-t}y^{(p+1)!}= x^{t+ks+p!-s-t}y^{(p+1)!}= x^{t+ks+p!-s-t}y^{(p+1)!}=x^{p!+(k-1)s}\, y^{(p+1)!} \in L$??

Se tiene que analizar los exponentes para ver si la cadena obtenida pertenece o no a L:

p!+(k-1)s =(p+1)! ; (k-1)s =(p+1)!-p!; (k-1)s =(p+1)p!-p! ; (k-1)s = pp! ;

$s=\frac{pp!}{k}$ +1

Ahora bien como k < p sabemos que k debe dividir a p! y por tanto $\frac{pp!}{k}$ es un entero.

Así pues se da la igualdad, y por tanto $x^{p!+(k-1)s}\ y^{(p+1)!}$ no es una cadena de L, lo que produce un absurdo debido al hecho de haber supuesto que L era regular. Por lo tanto, L no es regular.