Ejercicios Gramáticas

75.579 - Autómatas y gramáticas

Grado en Ingeniería Informática

Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicación

Ejercicio 1

Encontrad una gramática incontextual que genere el lenguaje siguiente:

$$L = \{a^i b^j | i, j \geq 0 \wedge i \neq 2j\}$$

$$L = \left\{a^i b^j \middle| i \neq 2j\right\} = L_1 \cup L_2$$

Donde:

$$\boldsymbol{L_1 = \{a^i b^j | i > 2j\}}$$

$$\boldsymbol{L_2 = \{a^i b^j | i < 2j\}}$$

$\boldsymbol{L_1}$:

$\boldsymbol{S_1 \rightarrow A_1 B_1 | A_1}$

$\boldsymbol{A_1 \rightarrow aA_1 | a}$

$\boldsymbol{B_1 \rightarrow aaB_1 b | aab}$

Observaciones:

- La gramática debe poder generar la expresión $\boldsymbol{a^+}$.
- Una vez hemos garantizado que por cada "b" hay dos "a" (la producción B1), el número de "a" puede crecer tanto como queramos, lo que podemos hacer con la producción A1.

$\boldsymbol{L_2}$:

$\boldsymbol{S_2 \rightarrow A_2 B_2 | A_2 | B_2}$

$\boldsymbol{A_2 \rightarrow aA_2 b | aaA_2 b | ab}$

$\boldsymbol{B_2 \rightarrow bB_2 | b}$

Observaciones:

- La gramática debe poder generar la palabra "ab" y la expresiónb^+.
- En este caso debemos tener en cuenta que para cada "b" podemos poner una o dos "a" .
- …y la producción inicial:

$$S \rightarrow S_1 | S_2$$

Ejercicio 2

Definid una gramática incontextual que genere el lenguaje siguiente:

$$L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid |i-j| \, mod \, 2 = 0 \wedge i,j > 0\}$$

Para resolver este ejercicio hay que seguir los siguientes pasos:

2.1 Describid en lenguaje natural el lenguaje del enunciado.

El lenguaje del enunciado está formado por palabras tales que:

- Están formadas por una serie de "a", seguidas por una serie de "b" y, finalmente, una serie de "c", la cantidad de las cuales es la suma de las "a" más las "b". Observemos que a, b y c no pueden ser cero.
- Además, la diferencia de los dos índices ("i" y "j") debe ser par, lo que implica dos posibilidades:
  - Los dos índices son pares.
  - O los dos índices son impares.

2.2 Determinad si las palabras siguientes pertenecen o no al lenguaje L:

$$\{ac, abcc, abbbcccc, abc, aaabcccc, abbccc, aabbcccc, aabbccc, aaaabbcccccc\}$$

$$\{abcc, abbbcccc, aaabcccc, aabbcccc, aaaabbcccccc\} \in L$$

$$\{ac, abc, abbccc, aabbccc\} \notin L$$

2.3 Encontrad una gramática incontextual que genere las palabras del lenguaje L.

Una posible gramática para el lenguaje L la podemos encontrar a partir de la unión entre el lenguaje con "i, j" pares y "i, j" impares.

$$S \rightarrow A|C|abcc$$

"i,j" pares:

$$A \rightarrow aaAcc|aaBcc$$
$$B \rightarrow bbBcc|bbcc$$

"i,j" impares:

$$C \rightarrow aaCcc|aDc$$
$$D \rightarrow bbDcc|bc$$

2.4 Aplicando las producciones de la gramática del apartado 2.3, comprobad los resultados que han obtenido en el apartado 2.2. En cuanto a las palabras que se ha determinado que pertenecen a L, encontrad las derivaciones que las generen.

$S \rightarrow abcc$

$S \rightarrow C \rightarrow aDc \rightarrow abbDccc \rightarrow abbbcccc$

$S \rightarrow C \rightarrow aaCcc \rightarrow aaaDccc \rightarrow aaabcccc$

$S \rightarrow A \rightarrow aaBcc \rightarrow aabbcccc$

$S \rightarrow A \rightarrow aaAcc \rightarrow aaaaBcccc \rightarrow aaaabbcccccc$

Ejercicio 3

Encontrad una gramática incontextual que genere el lenguaje siguiente:

$$L = \{w\#w^R\#|w \in (0+1)^+\}^*$$

$S \rightarrow \lambda|SS|S_1\#$
$S_1 \rightarrow 0S_2 0|1S_2 1$
$S_2 \rightarrow 0S_2 0|1S_2 1|\#$

Observaciones:

- Según la definición del lenguaje, también tenemos que tener en cuenta que lambda pertenece al lenguaje.
- Observemos també que la palabra ## no pertenece al lenguaje.

Ejercicio 4

A partir de la gramática siguiente, efectuad las siguientes operaciones:

$G = (V, T, S, P)$ on $V = \{S, A, B, D, E, F\}, T = \{a, b, d, e, f\}$

$S \rightarrow AB|FE$
$A \rightarrow aB|B|a|\lambda$
$B \rightarrow bA|B|b$
$F \rightarrow fF|AB$
$D \rightarrow dD|AB|SB|bB$
$E \rightarrow eE$

4.1 Encontrad una gramática limpia equivalente a la anterior.

Eliminación de reglas de producción vacías

$S \to AB|B|FE$
$A \to aB|B|a$
$B \to bA|b$
$F \to fF|AB|B$
$D \to dD|AB|B|SB|bB$
$E \to eE$

Eliminación de reglas unitarias

$S \to AB|b|bA|FE$
$A \to aB|b|bA|a$
$B \to bA|b$
$F \to fF|AB|b|bA$
$D \to dD|AB|b|bA|SB|bB$
$E \to eE$

4.2 Encontrad una gramática pelada equivalente a la anterior.

Eliminación de variables que no deriven palabras de símbolos terminales

Se elimina la *E*

$S \to AB|b|bA$
$A \to aB|b|bA|a$
$B \to bA|b$
$F \to fF|AB|b|bA$
$D \to dD|AB|b|bA|SB|bB$

Eliminación de variables que derivan en símbolos imposibles de generar
Se eliminan les variables *D y F*

$S \to AB|b|bA$
$A \to aB|b|bA|a$
$B \to bA|b$

4.3 Encontrad una gramática en Forma Normal de Chomsky equivalente a la anterior.

$S \to AB|b|C_bA$
$A \to C_aB|b|C_bA|a$
$B \to C_bA|b$
$C_a \to a$
$C_b \to b$

Ejercicio 5

Pasad la gramática incontextual siguiente a Forma Normal de Greibach (FNG):

$G = (V = \{A, S\}, T = \{0,1\}, S, P)$

On *P*:

$S \to AA|0$
$A \to SS|1$

La gramática ya se encuentra en FNC. Por lo tanto, podemos empezar a hacer las transformaciones para encontrar la FNG.

Re-etiquetamos las variables: $V = \{A_1, A_2\}$

$A_1 \to A_2A_2|0$
$A_2 \to A_1A_1|1$

Hay una regla que no cumple: $A_i \to A_j\alpha$ amb j>i.
Cuando hacemos la sustitución nos aparece una regla tal que i = j:

$A_2 \to A_2A_2A_1|0A_1|1$

Ahora, para poder eliminar la regla $A_2 \to A_2A_2A_1$ es necesario añadir una nueva variable (Z):

$A_2 \to 0A_1|1$
$A_2 \to 0A_1Z|1Z$
$Z \to A_2A_1$
$Z \to A_2A_1Z$

Las producciones obtenidas hasta ahora son las siguientes:
$A_1 \to A_2A_2|0$
$A_2 \to 0A_1Z|1Z|0A_1|1$
$Z \to A_2A_1|A_2A_1Z$

Ahora ya podemos hacer la sustitución final:

$A_1 \to 0A_1ZA_2|1ZA_2|0A_1A_2|1A_2|0$
$A_2 \to 0A_1Z|1Z|0A_1|1$
$Z \to 0A_1ZA_1|1ZA_1|0A_1A_1|1A_1|0A_1ZA_1Z|1ZA_1Z|0A_1A_1Z|1A_1Z$

Ejercicio 6

6.1 Escoged el enunciado o enunciados correctos:

a) El lenguaje $L = \{x^n y^m | n, m \geq 1\}$ es regular.
b) El orden de aplicación de los algoritmos de simplificación de una gramática es indiferente..
c) Todo lenguaje incontextual (que no contenga la palabra vacía) se puede generar mediante una gramática en Forma Normal de Greibach.
d) Existe un método general para reconocer si un lenguaje es inherentemente ambiguo.

El lenguaje del enunciado "a" es claramente regular (ya que no hay ninguna relación entre los índices "n" y "m") y es muy fácil encontrar un autómata finito que lo reconozca. En cuanto al apartado "c", es uno de los resultados vistos en los materiales de la asignatura.

6.2 Dada la gramática siguiente: $S \to \lambda|(S)|SS$, escoged la respuesta correcta:

a) La gramática se puede simplificar hasta obtener una gramática regular.
b) Existe un autómata finito determinista que es capaz de reconocer las palabras generadas por la gramática.
c) Existe un autómata finito no determinista que es capaz de reconocer las palabras generadas por la gramática.
d) Ninguna de las anteriores.

La gramática del enunciado es claramente incontextual y NO regular, por lo que no se puede expresar en términos de gramática regular, ni como autómata finito (determinista o no).