

## TAREA 1

### *Electrodinámica I*

Daniel Daza Valdebenito 2018429830

Carlos Paredes Gajardo 2017425881

Grupo 17

---

## Problema

Considere una línea de carga muy delgada (1D), de largo  $L$ , que se encuentra sobre el eje  $x$  de un sistema de coordenadas cartesiano, de modo que sus extremos tienen posiciones  $\pm(L/2)\hat{x}$ . La carga total  $Q$  está homogéneamente distribuida, de modo que la densidad de carga por unidad de longitud es constante e igual a  $\lambda = Q/L$ .

### Parte 1

¿Cómo modelaría matemáticamente la función densidad volumétrica de carga  $\rho(\vec{x})$  en esta situación?. Verifique que la función propuesta satisface los requerimientos necesarios del sistema.

### Respuesta

En principio debemos tener en cuenta que considerar una densidad lineal es una idealización para hacer colapsar una densidad volumétrica a una sola dimensión, y en base a esto, poder resolver un problema de manera más simple. Una densidad volumétrica  $\rho(\vec{x})$  la podemos escribir considerando deltas de Dirac como sigue,

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}) &= \int_{\vec{x}'} \rho(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') dx' dy' dz' \\ \rho(\vec{x}) &= \int_{z'} \int_{y'} \int_{x'} \rho(x', y', z') \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') dx' dy' dz'\end{aligned}\quad (1)$$

Ahora, sabiendo que queremos colapsar esta densidad volumétrica al eje  $x$  ya que la línea de carga se encuentra en ese eje, consideramos las divergencias del eje  $y$  y  $z$  cuando estos se evalúan en el un punto  $y' = z' = 0$ . Además, considerando que la delta de Dirac cumple la siguiente relación,

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < 0 < b \quad (2)$$

Y conociendo que el largo de la línea de carga cumple tal condición ya que la situamos en el origen de nuestro sistema coordenado, podemos reescribir (1) y modelar la densidad de carga volumétrica  $\rho(\vec{x})$  como,

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}) &= \int_{z'} \int_{y'} \rho(x, y', z') \delta(y - y') \delta(z - z') dy' dz' \\ \rho(\vec{x}) &= \int_{z'} \int_{y'} \rho(x, 0, 0) \delta(y - 0) \delta(z - 0) dy' dz' \\ \rho(\vec{x}) &= \int_{z'} \int_{y'} \lambda(x) \delta(y) \delta(z) dy' dz'\end{aligned}\quad (3)$$

Donde la densidad de carga se define como,

$$\lambda(x) \begin{cases} \lambda & , -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0 & , x < -\frac{L}{2} \quad \vee \quad x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4)$$

Para verificar nuestra función propuesta, calcularemos si esta cumple con el requerimiento de que la carga en todo el espacio sea igual a la carga de la línea unidimensional,

$$\begin{aligned} dq &= \rho(\vec{x}) dV \\ Q &= \int_x \int_{z'} \int_{y'} \lambda(x) \delta(y) \delta(z) dx dy' dz' \\ Q &= \lambda L \end{aligned} \quad (5)$$

Comprobando que satisface el requerimiento.

## Parte 2

Por integración directa, calcule el potencial en un punto arbitrario sobre el plano  $xy$ , es decir, una expresión para  $\phi(\vec{x})$  con  $\vec{x} = x\hat{x} + y\hat{y}$ .

## Respuesta

Para calcular el potencial por integración directa, resolveremos la expresión para un potencial  $\phi(\vec{x})$  dada por su definición,

$$\phi(\vec{x}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \text{cte} \quad (6)$$

Como estamos considerando una línea de carga, la densidad de carga será lineal. Por lo tanto,

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_C \frac{\lambda(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dl' + \text{cte} \quad (7)$$

Ahora, sabemos por lo anterior que la carga total  $Q$  está distribuida a lo largo del eje  $x$ , por lo que la posición de la densidad de carga y la posición donde queremos calcular el potencial serán, respectivamente,

$$\vec{x}' = x'\hat{x} \quad \wedge \quad \vec{x} = x\hat{x} + y\hat{y} \quad (8)$$

Luego, por conveniencia supondremos que el valor de la constante es 0. Así también, considerando que la línea de carga tiene posiciones  $\pm(L/2)\hat{x}$  tendremos,

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda(\vec{x}')}{|x\hat{x} + y\hat{y} - x'\hat{x}|} dx' \\ \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda(\vec{x}')}{|(x - x')\hat{x} + y\hat{y}|} dx' \end{aligned} \quad (9)$$

Tengamos en cuenta que la densidad lineal es constante, por ende,

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{|(x - x')\hat{x} + y\hat{y}|} dx' \\ \phi(\vec{x}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2}} dx' \end{aligned} \quad (10)$$

La expresión obtenida en (10) es una expresión que puede ser computable. Para ello, utilizamos el software online llamado [Calculadora de Integrales](#). En la sección Anexo 1 se puede ver el procedimiento para hacer el cálculo. En consecuencia, el resultado de esta integral será de la forma,

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} dx' = -\operatorname{arsinh}\left(\frac{x-x'}{y}\right) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \quad (11)$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} dx' = \operatorname{arsinh}\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{y}\right) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{-\frac{L}{2}+x}{y}\right) \quad (12)$$

Usando la relación,

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (13)$$

Podemos reescribir (12) de la forma,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} dx' &= \ln\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{y} + \sqrt{\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{y}\right)^2 + 1}\right) - \ln\left(\frac{-\frac{L}{2}+x}{y} + \sqrt{\left(\frac{-\frac{L}{2}+x}{y}\right)^2 + 1}\right) \\ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} dx' &= \ln\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{y} + \frac{1}{y}\sqrt{\left(\frac{L}{2}+x\right)^2 + y^2}\right) - \ln\left(\frac{-\frac{L}{2}+x}{y} + \frac{1}{y}\sqrt{\left(-\frac{L}{2}+x\right)^2 + y^2}\right) \\ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} dx' &= \ln\left(\frac{\frac{\frac{L}{2}+x}{y} + \frac{1}{y}\sqrt{\left(\frac{L}{2}+x\right)^2 + y^2}}{y}\right) - \ln\left(\frac{\frac{-\frac{L}{2}+x}{y} + \sqrt{\left(-\frac{L}{2}+x\right)^2 + y^2}}{y}\right) \\ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} dx' &= -\ln\left(\frac{L}{2}+x + \sqrt{\left(\frac{L}{2}+x\right)^2 + y^2}\right) + \ln(y) - \ln\left(-\frac{L}{2}+x + \sqrt{\left(-\frac{L}{2}+x\right)^2 + y^2}\right) - \ln(y) \\ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} dx' &= \ln\left(\frac{L}{2}+x + \sqrt{\left(\frac{L}{2}+x\right)^2 + y^2}\right) - \ln\left(-\frac{L}{2}+x + \sqrt{\left(-\frac{L}{2}+x\right)^2 + y^2}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

Entonces, si reemplazamos (14) en la expresión (10) que obtuvimos para nuestro potencial tendremos que el potencial en un punto arbitrario es,

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln\left(-\frac{L}{2}+x + \sqrt{\left(-\frac{L}{2}+x\right)^2 + y^2}\right) - \ln\left(\frac{L}{2}+x + \frac{1}{y}\sqrt{\left(\frac{L}{2}+x\right)^2 + y^2}\right) \right]} \quad (15)$$

### Parte 3

A partir del potencial encontrado, calcule el campo eléctrico sobre el plano  $xy$ .

### Respuesta

Si usamos la identidad,

$$\frac{x_i - x'_i}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \equiv -\partial_i \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \quad (16)$$

En la definición de campo eléctrico podemos deducir que,

$$\vec{E}(x) = -\vec{\nabla}\phi(x) \quad (17)$$

Utilizamos el potencial encontrado en la parte 2,

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \vec{\nabla} \left[ \ln \left( -\frac{L}{2} + x + \sqrt{\left(-\frac{L}{2} + x\right)^2 + y^2} \right) - \ln \left( \frac{L}{2} + x + \sqrt{\left(\frac{L}{2} + x\right)^2 + y^2} \right) \right] \quad (18)$$

Entonces, para encontrar el valor del campo eléctrico en cada componente, deberemos derivar la ecuación (18) respecto a  $x$  e  $y$ . Para hacer esto, utilizaremos un código python con el módulo `sympy`. El código utilizado fue,

```
1 import sympy as sp
2
3 #devinimos las variables simbolicas
4 x = sp.Symbol('x', real=True)
5 y = sp.Symbol('y', real=True)
6 L = sp.Symbol('L', real=True)
7
8 phi = sp.ln((x-(L/2) + ((x-(L/2))**2 + y**2)**(1/2)))\
9       -sp.ln((x+(L/2) + ((x+(L/2))**2 + y**2)**(1/2))) #función de potencial de forma simbólica
10 comp_x=sp.diff(phi,x) #Derivada en x
11 comp_y=sp.diff(phi,y) #Derivada en y
```

Los valores de output de la terminal suelen ser representados en formato text/plain, sin embargo, por medio de jupyter notebooks (ver Anexo 2) podemos obtener estos valores en formato L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Ahora bien, el resultado ‘bruto’ entregado por la terminal para la componente  $x$  del campo eléctrico es,

$$\vec{E}_x(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \left[ \frac{\frac{-0.5L+1.0x}{\left(y^2+\left(-\frac{L}{2}+x\right)^2\right)^{0.5}} + 1}{-\frac{L}{2} + x + \left(y^2 + \left(-\frac{L}{2} + x\right)^2\right)^{0.5}} - \frac{\frac{0.5L+1.0x}{\left(y^2+\left(\frac{L}{2}+x\right)^2\right)^{0.5}} + 1}{\frac{L}{2} + x + \left(y^2 + \left(\frac{L}{2} + x\right)^2\right)^{0.5}} \right] \quad (19)$$

En esta misma línea, para la componente  $y$  del campo eléctrico obtenemos,

$$\vec{E}_y(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \left[ \frac{1.0y}{\left(y^2 + \left(-\frac{L}{2} + x\right)^2\right)^{0.5} \left(-\frac{L}{2} + x + \left(y^2 + \left(-\frac{L}{2} + x\right)^2\right)^{0.5}\right)} - \frac{1.0y}{\left(y^2 + \left(\frac{L}{2} + x\right)^2\right)^{0.5} \left(\frac{L}{2} + x + \left(y^2 + \left(\frac{L}{2} + x\right)^2\right)^{0.5}\right)} \right] \quad (20)$$

Sin embargo, son expresiones que en principio podemos reducir o reescribir para dejarlas de una forma más limpia. En efecto, luego de realizada la simplificación podemos escribir el campo eléctrico  $\vec{E}(x)$  sobre el plano  $xy$  como,

$$\vec{E}(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \left[ \frac{2}{\sqrt{4y^2 - 4Lx + 4x^2 + L^2}} - \frac{2}{\sqrt{4y^2 + 4Lx + 4x^2 + L^2}} \right] \hat{x} + \left[ \frac{y}{y^2 + \left(-\frac{L}{2} + x\right)^2 + \left(-\frac{L}{2} + x\right) \sqrt{y^2 + \left(-\frac{L}{2} + x\right)^2}} - \frac{y}{y^2 + \left(\frac{L}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{L}{2} + x\right) \sqrt{y^2 + \left(\frac{L}{2} + x\right)^2}} \right] \hat{y} \quad (21)$$

## Parte 4

Grafique el campo eléctrico sobre el plano  $xy$  (quiver).

### Respuesta

Para graficar el campo eléctrico utilizamos los resultados obtenidos en la parte anterior. Además, usamos un código modificado de el visto en clases, que ha sido adaptado al caso presente. Antes de presentar el gráfico veamos como es dicho código (ver Anexo 2),

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from scipy.integrate import odeint
4  plt.style.use('dark_background')
5
6  ##CAMPO ELECTRICO##
7
8  n = 40 #nodos de la grilla
9  max = 20 #maximo y minimo del grafico
10
11  X = np.linspace(-max,max,n)
12  Y = np.linspace(-max,max,n)
13  L = 10
14
15  x,y = np.meshgrid(X,Y)
16
17  #Definimos las funciones E_x y E_y del campo vectorial 2D
18
19  def Ex(x,y):
20      return ((-0.5*L + 1.0*x)*(y**2 + (-L/2 + x)**2)**(-0.5) + 1)/(-L/2 + x + (y**2 + \
21          (-L/2 + x)**2)**0.5) - ((0.5*L + 1.0*x)*(y**2 + (L/2 + x)**2)**(-0.5) \
22          + 1)/(L/2 + x + (y**2 + (L/2 + x)**2)**0.5)
23  def Ey(x,y):
24      return 1.0*y*(y**2 + (-L/2 + x)**2)**(-0.5)/(-L/2 + x + \
25          (y**2 + (-L/2 + x)**2)**0.5) - 1.0*y*(y**2 + \
26          (L/2 + x)**2)**(-0.5)/(L/2 + x + (y**2 + (L/2 + x)**2)**0.5)
27  def E(x,y):
28      return np.sqrt((Ex(x,y))**2 + (Ey(x,y))**2)
29
30  plt.figure()
31  plt.quiver(x,y, Ex(x,y)/E(x,y),Ey(x,y)/E(x,y),E(x,y), scale=30, pivot='middle', cmap= 'cividis')
32  plt.xlim(-1.1*max,1.1*max)
33  plt.ylim(-1.1*max,1.1*max)
34  plt.ylabel(r'$y$')
35  plt.xlabel(r'$x$')
36  plt.colorbar()
37  plt.tight_layout()
38  plt.title(r'$\vec{E}(\vec{x})$')
```

Donde se obtiene como resultado el siguiente gráfico para el campo eléctrico en el plano  $xy$ ,

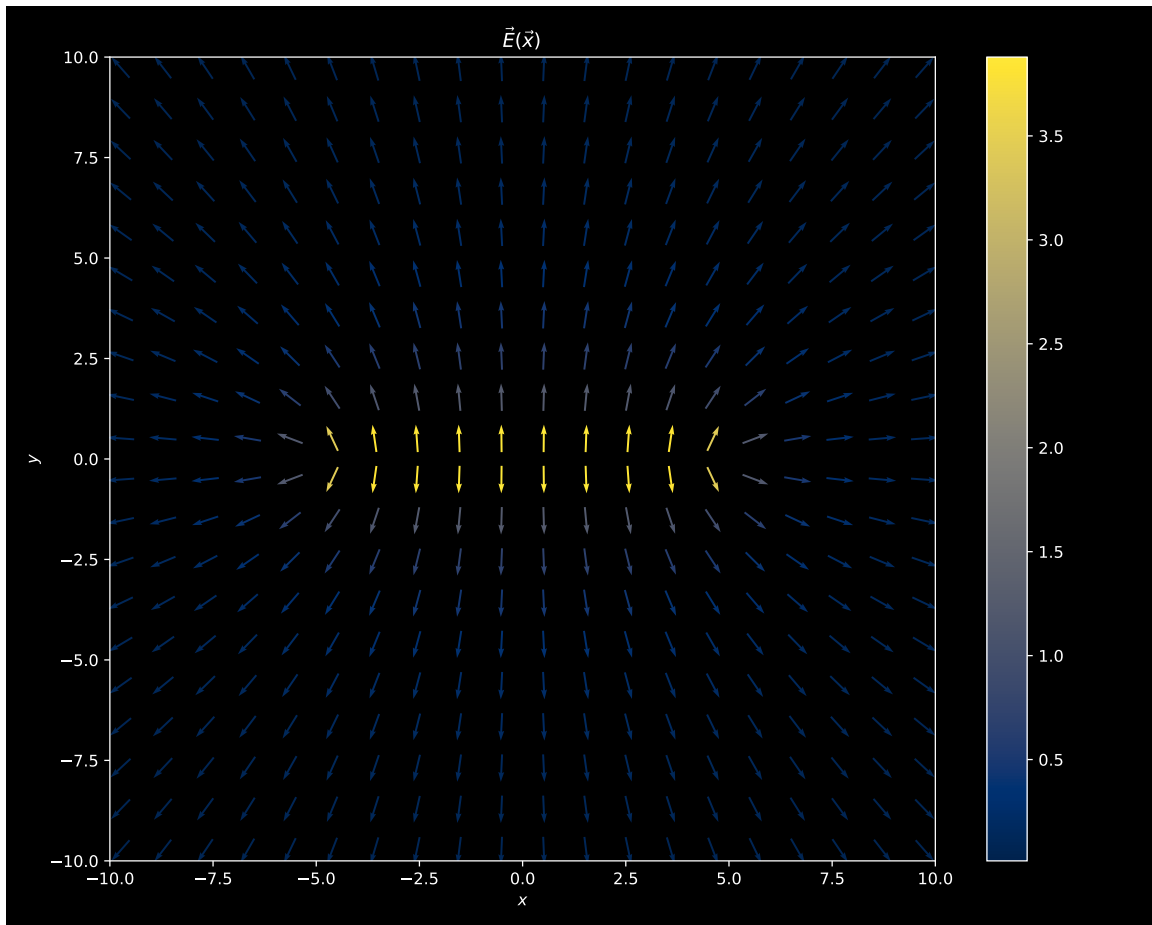


Figura 1: Campo eléctrico de una línea de carga unidimensional de largo  $L$ .

## Parte 5

Agregue algunas líneas de campo representativas (calculadas numéricamente) al gráfico creado en el punto anterior.

## Respuesta

Como continuación del código (ver Anexo 2) presentado anteriormente, podemos calcular las líneas de campo con la tarea `odeint` del módulo `scipy`. Así, modificando la sección de líneas de campo de el código visto en clases para este caso obtuvimos lo siguiente,

```

1  ##LINEAS DE CAMPO##
2
3  def f(XX, t):
4      x, y = XX
5      dxdt = Ex(x,y)
6      dydt = Ey(x,y)
7      return [dxdt, dydt]
8
9  t = np.linspace(0,5000,1000)
10 X0 = [[0,2],[-2,-2],[-4.5,-1],[-2,2],[-4.5,1],[2,-2],[4.5,-1],[2,2],[4.5,1]] #condicion inicial
11

```

```

12 for i in X0:
13     if i != X0[-1]:
14         XSol = odeint(f,i,t) #solucion
15         xsol = XSol[:,0]
16         ysol = XSol[:,1]
17         plt.plot(xsol,ysol,color='peru', lw=0.7)
18     else:
19         XSol = odeint(f,i,t) #solucion
20         xsol = XSol[:,0]
21         ysol = XSol[:,1]
22         plt.plot(xsol,ysol,color='peru', lw=0.7,label='Lineas de Campo')

```

Cuyo resultado es,

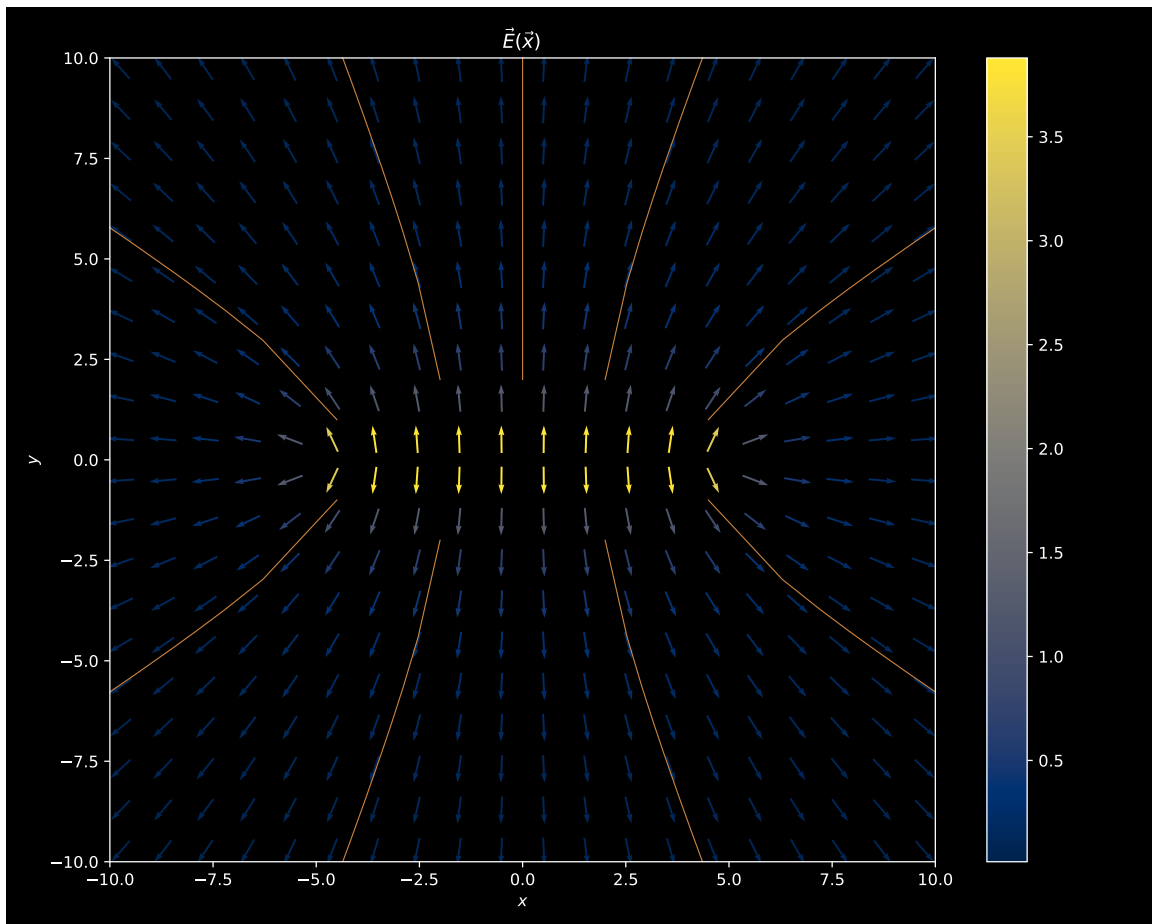


Figura 2: Líneas de campo de un campo eléctrico provocado por una línea unidimensional de largo  $L$ .

## Parte 6

Agregue algunas curvas equipotenciales representativas al gráfico anterior (que logren ilustrar el hecho que el campo eléctrico es normal a las superficies/curvas equipotenciales y que su sentido es en la dirección en el que disminuye el potencial).

## Respuesta

Para agregar las curvas equipotenciales al gráfico anterior utilizamos la tarea **Contour** del módulo matplotlib. Notemos que desde esta parte creamos nuevas líneas de código en comparación al visto en clases. Ahora, continuando con el código (ver Anexo 2) de más arriba tendremos,

```

1  ##CURVAS EQUIPOTENCIALES
2
3  def P(x):#Potencial de nuestra configuración. Obtenido en la parte 1.
4      return np.log(((x-(L/2) + ((x-(L/2))**2 +y**2)**(1/2))))-\
5          np.log(((x+(L/2) + ((x+(L/2))**2 +y**2)**(1/2))))
6
7  #parametros para la grafica de curvas equipotenciales
8  CS=plt.contour(x,y,P(x),levels=5, colors='snow', linestyle='-', linewidths=0.7, alpha=0.8)
9  CS.collections[0].set_label('Curvas Equipotenciales')#label para el plot de contour
10
11  plt.ylim(-10,10)
12  plt.xlim(-10,10)
13  plt.legend(bbox_to_anchor = (0.719, 1.12),fontsize=8)
14  plt.tight_layout()
15  plt.show()

```

Resultando en el siguiente gráfico para el campo eléctrico el cual contiene líneas de campo y las curvas equipotenciales

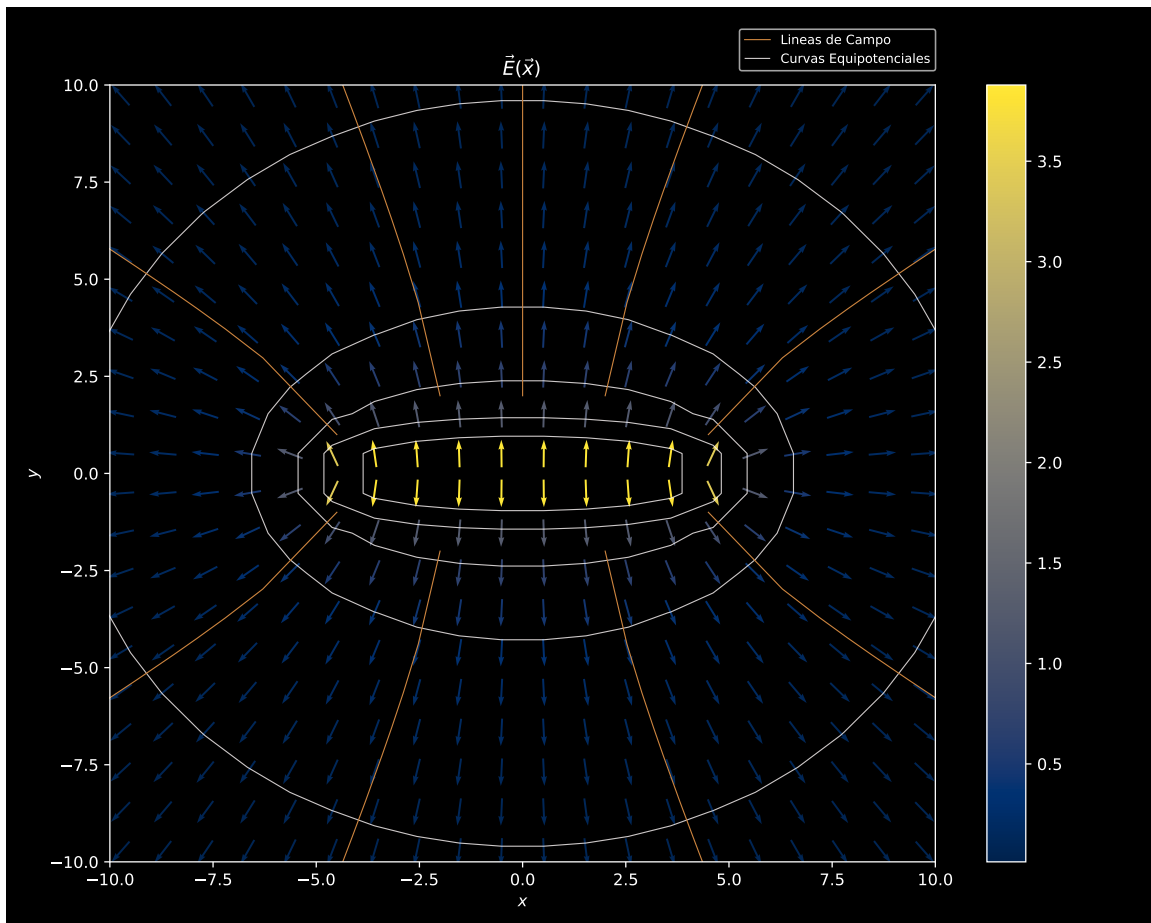


Figura 3: Curvas equipotenciales, líneas de campo y campo eléctrico formado por una línea de carga unidimensional de largo  $L$ .



## Parte 7

Considere el límite  $L \rightarrow \infty$  de la situación anterior. En particular, encuentre los límites a los que tienden las expresiones que encontró antes para el potencial y para el campo eléctrico.

### Respuesta

El límite de  $L$  tendiendo a infinito y considerando que la densidad de carga  $\lambda$  se mantiene constante con un potencial de referencia  $\phi_o(\vec{x}) = 0$  lo podemos expresar de la forma,

$$\begin{aligned}\lim_{L \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \left[ \ln \left( -\frac{L}{2} + x + \sqrt{\left( -\frac{L}{2} + x \right)^2 + y^2} \right) - \ln \left( \frac{L}{2} + x + \sqrt{\left( \frac{L}{2} + x \right)^2 + y^2} \right) \right] \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ \ln \left( \frac{L}{2} + x + \sqrt{\left( \frac{L}{2} + x \right)^2 + y^2} \right) - \ln \left( -\frac{L}{2} + x + \sqrt{\left( -\frac{L}{2} + x \right)^2 + y^2} \right) \right]\end{aligned}\quad (22)$$

Este cálculo del límite lo podemos computar en sympy, dicho calculo aparece en el jupyter notebook adjunto (ver Anexo 2). Por consiguiente, el resultado de este límite será,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) = \infty \quad (23)$$

Sin embargo, este corresponde al límite del potencial en un caso particular. Por ende debemos considerar el caso más general y, por lo tanto, tomar un potencial de referencia  $\phi_o(\vec{x}) \neq 0$ . Esto lo expresamos tal que,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ \ln \left( \frac{\frac{L}{2} + x + \sqrt{y^2 + \left( \frac{L}{2} + x \right)^2}}{-\frac{L}{2} + x + \sqrt{y^2 + \left( -\frac{L}{2} + x \right)^2}} \right) - \ln \left( \frac{\frac{L}{2} + x_o + \sqrt{y_o^2 + \left( \frac{L}{2} + x_o \right)^2}}{-\frac{L}{2} + x_o + \sqrt{y_o^2 + \left( -\frac{L}{2} + x_o \right)^2}} \right) \right] \quad (24)$$

Cuyo resultado, calculado mediante python, es,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \left[ \ln \left( \frac{1}{y^2} \right) - \ln \left( \frac{1}{y_o^2} \right) \right] \quad (25)$$

Escogemos  $y_o = 1$  ya que es un punto del potencial arbitrario. En efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{L \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \ln \left( \frac{1}{y^2} \right) \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \ln(y^{-2}) \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} [-2 \ln(y)]\end{aligned}\quad (26)$$

Por lo que el límite del potencial cuando  $L$  tiende a infinito es,

$$\boxed{\lim_{L \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln(y)} \quad (27)$$

Finalmente, calculamos el límite de  $L \rightarrow \infty$  del campo eléctrico. Para realizar este cálculo, consideraremos este límite para cada componente por separado. Partiendo por la componente  $x$ ,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \vec{E}_x(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ \frac{2}{\sqrt{4y^2 - 4Lx + 4x^2 + L^2}} - \frac{2}{\sqrt{4y^2 + 4Lx + 4x^2 + L^2}} \right] \quad (28)$$

Del cálculo mediante python (ver Anexo 2) obtenemos,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \vec{E}_x(x) = 0 \quad (29)$$

Por otro lado para la componente  $y$  del campo eléctrico podemos ver que,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \vec{E}_y(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ \frac{y}{y^2 + \left(-\frac{L}{2} + x\right)^2 + \left(-\frac{L}{2} + x\right) \sqrt{y^2 + \left(-\frac{L}{2} + x\right)^2}} - \frac{y}{y^2 + \left(\frac{L}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{L}{2} + x\right) \sqrt{y^2 + \left(\frac{L}{2} + x\right)^2}} \right]$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \vec{E}_y(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o y} \quad (30)$$

## Parte 8

Adapte el gráfico del punto 6 para que muestre el caso en que  $L$  es muy grande comparado con el tamaño de la región en el plano  $xy$  en la que se muestran los campos (por ejemplo, grafique los campos en la región  $x \in [-10, 10]$  e  $y \in [-10, 10]$ , mientras elija  $L = 10000$ ).

## Respuesta

Para realizar este gráfico (ver Anexo 2) solo cambiamos los valores pedidos en nuestro código, en específico los parámetros  $L = 10000$  y  $\max = 10$ . Como resultado se obtuvo lo siguiente,

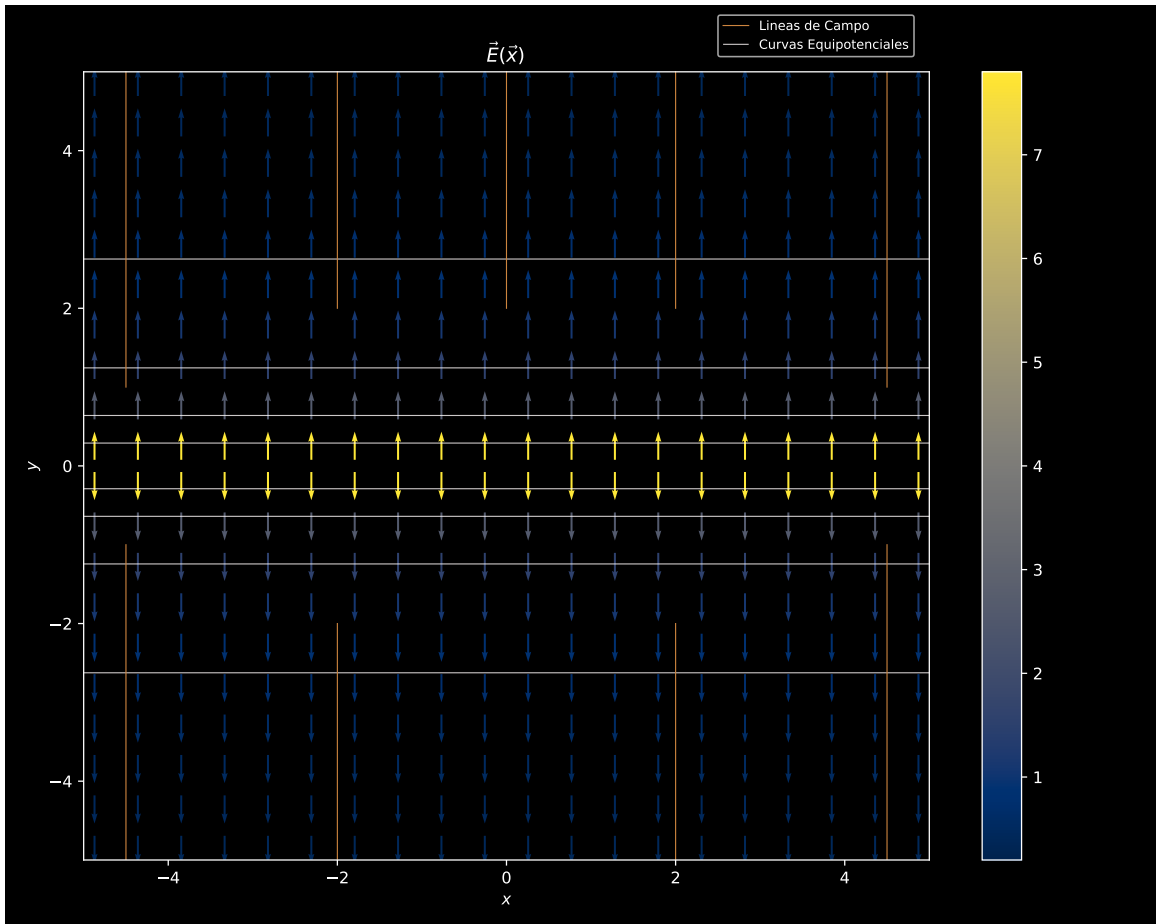


Figura 4: Campo eléctrico de la línea de carga para un largo  $L = 10000$  en una región  $x \in [-10, 10]$  e  $y \in [-10, 10]$ .

# 1. Anexo 1

Utilizamos el software de [Calculadora de Integrales](#) para calcular la integral obtenida en la parte 2 del problema al llegar a una expresión que fuera posible utilizar. A la hora de resolver la integral se consideró  $x' = p$  debido a que no se pueden utilizar las comillas en el software.

Primero ingresamos la integral al programa junto con sus límites inferior y superior de ser necesario, y además escogemos respecto a que variable queremos integrar.

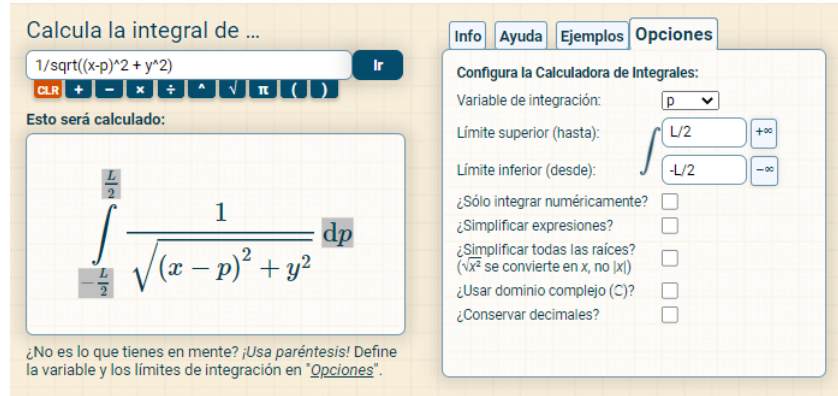


Figura 5: Paso inicial de la resolución de una integral por medio de la [Calculadora de Integrales](#).

Luego, al presionar ‘ir’, la calculadora resolverá la integral y nos dará el resultado, teniendo la opción de ver el paso a paso de este. En este caso solo nos quedamos con el resultado de la integral indefinida (11), el cual se siguió desarrollando en la parte 2 .

Problema:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}} dp$$

Sustituye  $u = \frac{p-x}{y} \rightarrow \frac{du}{dp} = \frac{1}{y}$  (pasos)  $\rightarrow dp = y du$ :

$$= \int \frac{y}{\sqrt{y^2 u^2 + y^2}} du$$

Simplifica:

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} du$$

Realiza sustitución hiperbólica:

Sustituye  $u = \sinh(v) \rightarrow v = \operatorname{arsinh}(u), du = \cosh(v) dv$  (pasos):

$$= \int \frac{\cosh(v)}{\sqrt{\sinh^2(v) + 1}} dv$$

Simplifica usando  $\sinh^2(v) + 1 = \cosh^2(v)$ :

$$= \int 1 dv$$

Aplica la regla de la constante:

$$= v$$

Deshace la sustitución  $v = \operatorname{arsinh}(u)$ :

$$= \operatorname{arsinh}(u)$$

Deshace la sustitución  $u = \frac{p-x}{y}$ :

$$= \operatorname{arsinh}\left(\frac{p-x}{y}\right)$$


---

El problema está resuelto:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}} dp = \operatorname{arsinh}\left(\frac{p-x}{y}\right) + C$$

Figura 6: Resultado de la integral (10)

## 2. Anexo 2

Cabe destacar que los códigos expuestos en las partes 4, 5 y 6 son en base a un único código que imprime solo el gráfico presentado en la parte 6. Este fue realizado en la consola de python normal, es decir, un archivo **.py**, en el programa **VScode**, y fue utilizado aquí para seguir explícitamente la obtención de cada gráfico en este mismo documento. Los gráficos presentados en cada parte fueron realmente obtenidos mediante un **jupyter notebook**, en el cual también se detallan los procedimientos de cálculo de los problemas 3 y 7. Para revisar en mayor detalle este notebook acceda a este [GitHub](#) manejado por Daniel Daza, en el cual se realizan todos los cálculos ‘obviados’ en el presente formato para la tarea.