

# הסקה סטטיסטית

# מהי הסקה סטטיסטית

מושגי יסוד

p-value

טעות תקן

רווח סמך

## שלבי עבודה

השערת אפס

השערה חלופית

## סוגי טעויות

type 1

type 2

## מבחנים לבדיקת הטענה

z-test

t-test

# הסקה סטטיסטית מאפשרת לטעון טענות לגבי האוכלוסייה כולה, על אף שיש מידע רק על חלק ממנה (מדגם)

היא תהליך שבו מסיקים מסקנות על התכונות של התפלגות כלשהי, על בסיס ניתוח של מידע אמפירי.

בעוד הסטטיסטיקה התיאורית עוסקת בתכונות של המדגם עצמו, ואינה מניחה שבהכרח האוכלוסייה גדולה מהמדגם, ההנחה במסגרת הניתוח של הסטטיסטיקה ההיסקית היא שהאוכלוסייה גדולה יותר (בדרך כלל הרבה יותר) מכמות הפרטים שלגביהם בפועל נאסף המידע.

**מדגם מקרי** – מדגם מקרי  $x_1, \dots, x_n$  מאוכלוסייה מסוימת הוא אוסף אקראי של פריטים שנאספו מאוכלוסייה זו.

**פרמטר לא ידוע** – פרמטר של האוכלוסייה שאיננו יודעים מהו ערכו. לדוגמא,  $\mu$ ,  $2\sigma$

**סטטיסטי** – סטטיסטי הוא פונקציה של נתוני המדגם, שאינה תלויה בפרמטרים של ההתפלגות ממנה נלקח המדגם. במילים אחרות, הסטטיסטי הוא פונקציה של המדגם שאותה ניתן לחשב, כי איננה תלויה בפרמטרים לא ידועים של ההתפלגות.

# הסקה סטטיסטית - מושגי יסוד

$$\frac{100}{100} = 36.6\%$$

$$\frac{99}{100} = 37.0\%$$

$$\frac{98}{100} = 18.5\%$$

$$\frac{97}{100} = 6\%$$

$$\frac{96}{100} = 1.5\%$$

$$\frac{95}{100} = 0.3\%$$

**ידוע** שבדיקת צפיפות עצם מסויימת מדוייקת ב-99% מהמקרים.

נבדקו 100 אנשים  
מה הסיכוי ש:

**שאלה הפוכה -** יש בדיקת צפיפות עצם חדשה. משערים שהיא מדוייקת ב-99%. היא נבדקה על 100 אנשים ודייקה ב-X מהמקרים,

האם סביר להניח שהתוצאה מקרית?

36.6%  $\frac{100}{100}$

37.0%  $\frac{99}{100}$

18.5%  $\frac{98}{100}$

6%  $\frac{97}{100}$

1.5%  $\frac{96}{100}$

0.3%  $\frac{95}{100}$

**שאלה הפוכה – יש בדיקת צפיפות עצם חדשה. משערים שהיא מדויקת ב 99%. היא נבדקה על 100 אנשים ודייקה ב x מהמקרים,**

**האם סביר להניח שהתוצאה מקרית?**

**מה הסיכוי שזאת התוצאה שתקבל בהנתן שהשערה נכונה?**

$$P_{value} = P(\text{השערה נכונה} \mid \text{תוצאה})$$

**שגיאת תקן** (Standard Error או SE) היא מדד לדיוק הסטטיסטי של הדגימה לעומת האוכלוסיה.

**שגיאת התקן של הממוצע:**

היא **מדד לדיוק** של ממוצע הדגימה,

כלומר, כמה ממוצע הדגימה צפוי להיות שונה (לסטות) מהממוצע האמיתי של האוכלוסייה. המטרה היא לבדוק עד כמה ממוצע הדגימה קרוב או רחוק מהממוצע האמיתי של האוכלוסייה.

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**• חישוב:** טעות התקן (SE) מבוססת על סטיית התקן ( $\sigma$ ) של האוכלוסייה ומספר התצפיות בדגימה ( $n$ ). ככל שהדגימה גדולה יותר, טעות התקן קטנה יותר, כלומר ממוצע הדגימה יותר קרוב לממוצע האוכלוסייה.

אם ידוע שסטיית התקן של האוכלוסייה היא 10, וגודל הדגימה הוא 25, טעות התקן תהיה:

$$2 = \frac{10}{5} = \frac{10}{\sqrt{25}} = SE$$



## שימושים

• **בדיקות השערות:** נשתמש בטעות התקן כדי לקבוע למשל אם ממוצע הדגימה שונה בצורה מובהקת מממוצע האוכלוסייה.

• **רווח סמך:** מאפשר לחשב טווח שמייצג את האוכלוסייה בסבירות מסוימת.

שגיאת התקן עוזרת להבין את **רמת הדיוק** למשל של ממוצע הדגימה ביחס לממוצע האמיתי של האוכלוסייה.



$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

## שגיאת תקן של הממוצע – תרגול

1. במפעל אורז, חבילות האריזה אמורות לשקול 1 ק"ג כל אחת. סטיית התקן של המשקל באוכלוסייה היא 0.05 ק"ג. נלקחה דגימה של 16 חבילות. חשב את שגיאת התקן של ממוצע המשקל בדגימה.

2. במעבדה רפואית נמדדו רמות סוכר בדם אצל אוכלוסייה, עם סטיית תקן של 15 מ"ג/ד"ל. נבחרה דגימה של 49 מטופלים למדידת רמת הסוכר הממוצעת שלהם. חשבי את שגיאת התקן.

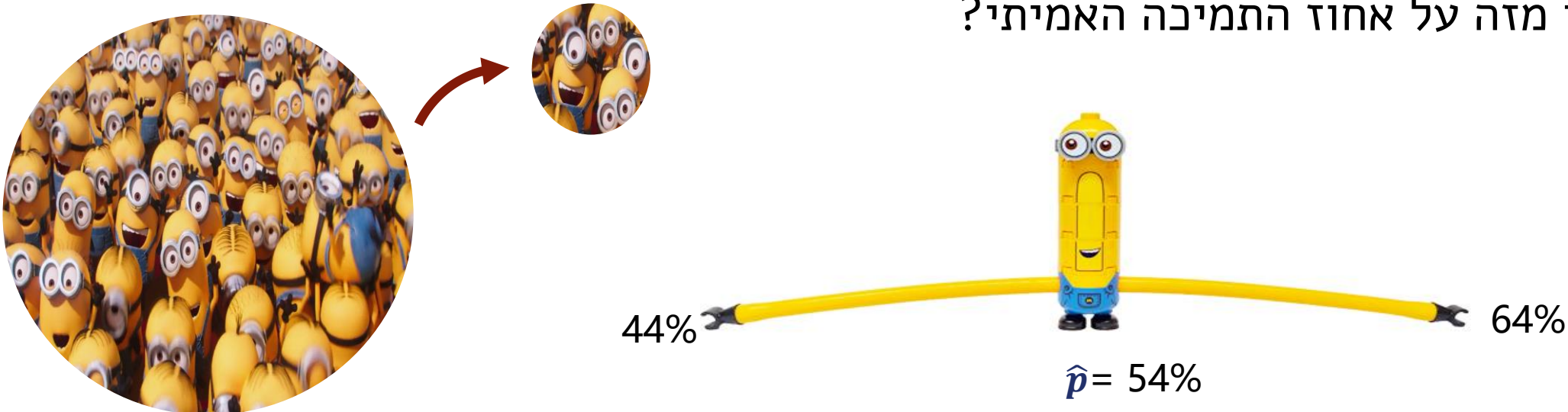
שגיאת תקן (Standard Error או SE) היא מדד לדיוק הסטטיסטי של הדגימה לעומת האוכלוסיה.

שגיאת התקן של פרופורציה:

$$SE = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

היא מדד לדיוק של הפרופוזיה בדגימה לעומת האוכלוסיה

המיניונים צריכים לבחור להם מנהיג חדש. המועמדים הם גרו וסקארלט אוברקיל. בדגימה של 100 מתוך 100,000 מיניונים אחוז התמיכה בגרו הוא 54%, מה אפשר להבין מזה על אחוז התמיכה האמיתי?



רווח סמך- הוא אינטרוול שבהסתברות מסוימת יכיל את הפרמטר הלא ידוע שאותו הוא אומד.  
ההסתברות שרווח הסמך יכיל את הפרמטר הלא ידוע נקראית רמת הסמך, או רמת הביטחון.

### אמד נקודתי $\pm$ טווח טעות

כאשר אנו אומדים פרמטר לא ידוע באמצעות אמד נקודתי, אנו יודעים בוודאות כי האומדן לא שווה לפרמטר שאותו אנו מנסים לאמוד.  
ברצוננו למצוא אינטרוול (רווח) סביב האמד הנקודתי, כך שבהסתברות גבוהה נוכל לומר כי אינטרוול זה מכיל את הפרמטר הלא ידוע.

אינטרוול כזה נקרא בסטטיסטיקה **רווח סמך**.  
רווחי הסמך, כמו האמדים הנקודתיים, ישתנו בהתאם לפרמטר אותו אנו אומדים.

# שלבי עבודה – השערת אפס והשערה אלטרנטיבית

1. קביעת השערת האפס (Null hypothesis-  $H_0$ )
2. קביעת השערה אלטרנטיבית (Alternative Hypothesis-  $H_1$ )
3. ניסוי
4. קבלה או דחיה של השערת האפס

בכל בדיקת השערות מנוסחות שתי השערות הסותרות זו את זו. השערה אחת נקראת השערת האפס, וההשערה השנייה נקראת ההשערה האלטרנטיבית. השערת האפס תמיד מתארת הנחה כלשהי שמהווה נקודת מוצא.

# תרגול - השערת אפס והשערה אלטרנטיבית

1. ממוצע ציוני הבגרות הארצי ב5 יח"ל הוא 84. מר סופר, המורה למתמטיקה, חושד כי ממוצע הציונים בכיתתו שונה.
2. נבדק האם קמפיין פרסומי חדש משפיע על מכירות מוצר. לפני הקמפיין, ממוצע המכירות היה 200 יחידות בחודש.
3. חיסון נגד שפעת יעיל ב80% מהמקרים. חברת FalseFarm פיתחה חיסון חדש, ורוצה לבדוק אם יעילותו גדולה יותר.
4. חברת אלקטרושוק מוכרת אבקת חשמל במחיר 100 שח לחפיסה. עד כה, נמצא כי 75% מהלקוחות היו מרוצים מהמוצר. לכבוד החגים החברה העלתה את מחיר המוצר ל200 שח, והיא לבדוק אם יש ירידה בשיעור הלקוחות המרוצים לאחר עליית המחיר.

$$H_0: \mu \geq 400$$

$$H_1: \mu < 400$$

השערה חד צדדית שמאלית על התוחלת

$$H_0: \mu \leq 400$$

$$H_1: \mu > 400$$

השערה חד צדדית ימנית על התוחלת

$$H_0: \mu = 400$$

$$H_1: \mu \neq 400$$

השערה דו צדדית על התוחלת

$$H_0: \sigma \geq 30$$

$$H_1: \sigma < 30$$

השערה חד צדדית שמאלית על השונות

$$H_0: \sigma \leq 30$$

$$H_1: \sigma > 30$$

השערה חד צדדית ימנית על השונות

$$H_0: \sigma = 30$$

$$H_1: \sigma \neq 30$$

השערה דו צדדית על השונות

$$H_0: p \geq 0.6$$

$$H_1: p < 0.6$$

השערה חד צדדית שמאלית על הפרופורציה

$$H_0: p \leq 0.6$$

$$H_1: p > 0.6$$

השערה חד צדדית ימנית על הפרופורציה

$$H_0: p = 0.6$$

$$H_1: p \neq 0.6$$

השערה דו צדדית על הפרופורציה

## סוגי טעויות

1. קביעת השערת האפס ( $H_0$  - Null hypothesis)
2. קביעת השערה אלטרנטיבית ( $H_1$  - Alternative Hypothesis)
3. ניסוי
4. קבלה או דחיה של השערת האפס

טעות מהסוג הראשון  
Type 1 error

<u>TP</u> קבלת השערה נכונה	<u>FN</u> דחיית השערה נכונה
<u>FP</u> קבלת השערה שגויה	<u>TN</u> דחיית השערה שגויה

טעות מהסוג השני  
Type 2 error



P value – מה הסיכוי שזאת התוצאה שתקבל בהנתן שההשערה נכונה?

$$P_{value} = P(\text{השערה נכונה} \mid \text{תוצאה})$$

רווח סמך – אמד נקודתי  $\pm$  טווח טעות

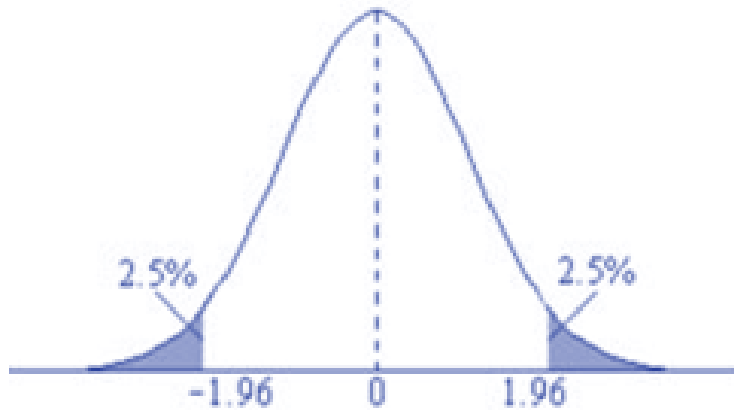
תהליך עבודה:

1. קביעת השערת האפס (Null hypothesis-  $H_0$ )
2. קביעת השערה אלטרנטיבית (Alternative Hypothesis-  $H_1$ )
- 3. ניסוי**
4. קבלה או דחיה של השערת האפס

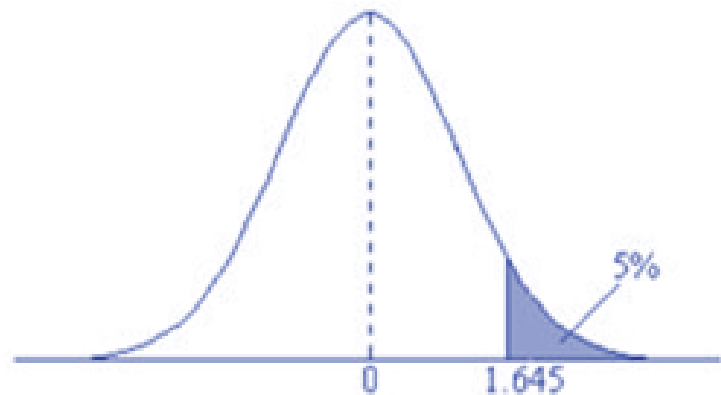
# וקביעת "אזורי דחייה" מבחן דו זנבי \ חד זנבי

בשאלה סימטרית (האם שונה) נקבל מבחן דו זנבי,  
בשאלה חד צדדית (גבוה\נמוך, קטן\גדול) נקבל מבחן חד זנבי

במכללות יש 85% השמה. מכללה חדשה שנפתחה דגמה 150  
בוגרים ומצאה 88% השמה, עם סטיית תקן של 4%  
האם המכללה הזו שונה מאחרות?



(b) Two-tailed test



(a) One-tailed test

האם למכללה זו יש אחוז השמה גבוה מהאחרות?



מתאים כש:

- המדגם גדול (לרוב מעל 30).

- כשסטיית התקן של האוכלוסייה ידועה.

**מטרת הבדיקה:** לבדוק אם הסטטיסטי של המדגם שונה מהסטטיסטי באוכלוסייה

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

$n$  - גודל הדגימה  
 $p_0$  - יחס ההשערה  
 $\hat{p}$  - יחס הדגימה

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$n$  - גודל הדגימה  
 $\mu$  - ממוצע ההשערה  
 $\bar{x}$  - ממוצע הדגימה

בתהליך של בדיקת השערות יש מספר שלבים עיקריים:

1. קביעת ההשערות: בשלב זה ננסח את **השערת האפס** ואת **ההשערה האלטרנטיבית**.

2. בחירת הסטטיסטי המתאים בהתאם לפרמטר שעליו ההשערה.

3. חישוב התפלגות הדגימה תחת ההנחה שהשערת האפס נכונה, וקביעת **"אזורי דחייה"** של השערת האפס, בהתאם ל – **"רמת המובהקות של המבחן"**.

4. חישוב סטטיסטי המבחן והכרעה.

חברה המייצרת לחם נטול גלוטן, מעוניינת לבחון השערה בנוגע לתוחלת כמות הגלוטן בלחמיה. החברה טוענת כי תוחלת הגלוטן בלחמים היא  $10\text{ppm}$  (חלקים למיליון). ידוע כי כמות הגלוטן בלחם מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של  $3\text{ppm}$ . לצורך בקרת האיכות, נדגמו אקראית 10 לחמים. להלן התוצאות: 13.9, 5.5, 10.7, 12.0, 9.6, 8.4, 10.8, 10.0, 8.8, 14.8. אנו מעוניינים לבדוק את השערת החברה.

בשלב הראשון עלינו לנסח את צמד ההשערות. ההשערה שהחברה מבצעת היא על התוחלת. החברה טוענת כי תוחלת הגלוטן שווה 10ppm מכאן נסיק כי ההשערה היא השערה דו צדדית:

$$H_0: \mu = 10$$

$$H_1: \mu \neq 10$$

הסטטיסטי שאיתו נעבוד הוא ממוצע המדגם.

נחשב את סטטיסטי המבחן שהתפלגותו תחת השערת האפס היא נורמלית סטנדרטית.

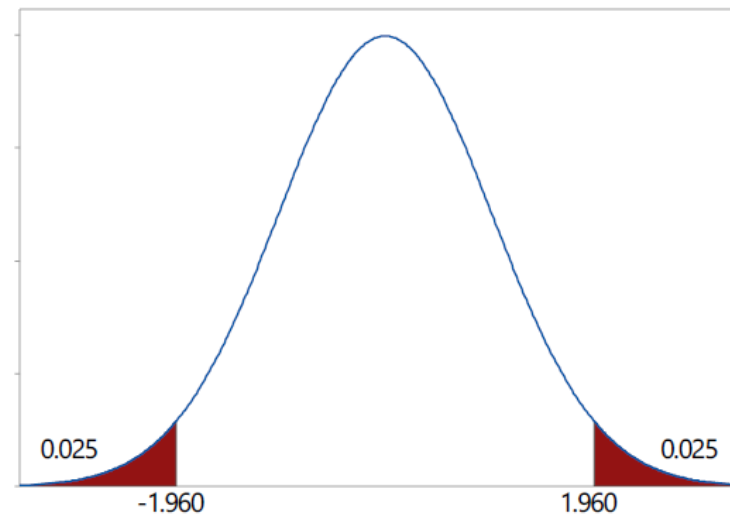
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

אם נקבל במדגם ערך שאינו סביר שיתקבל בהתפלגות נורמלית סטנדרטית, נדחה את השערת האפס. אם נקבל ערך שכן **סביר** לקבל, נאמר כי אין עדות סטטיסטית לדחיית השערת האפס. נשארנו עם השאלה, **מהו ערך סביר** ? פה נכנס המושג של **רמת המובהקות של המבחן**.



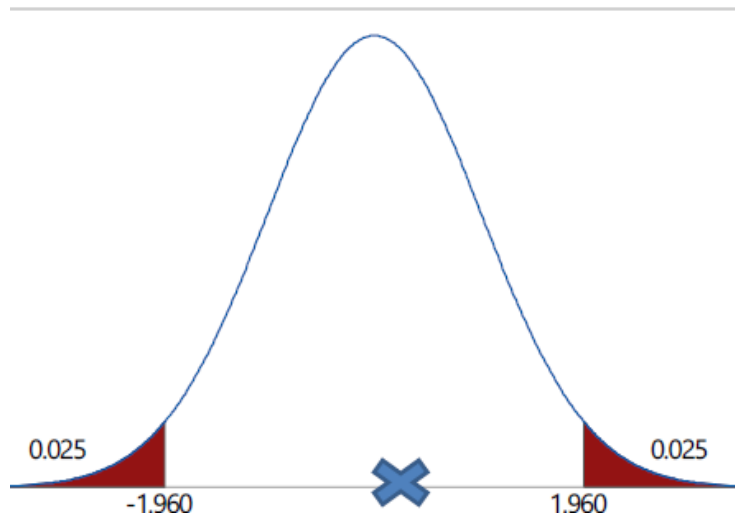
בטרם ביצוע בדיקת ההשערה, על החוקר לקבוע כלל החלטה שבו יהיה תלוי גודל אזור הדחייה של השערת האפס. נניח כי החוקר קבע סף של 5% . פרופורציה זו שתיקרא רמת המובהקות, מסומנת ב-  $\alpha$  .

זהו גודל השטח של אזור הדחייה, בהנחה שהשערת האפס נכונה. במקרה של דוגמא זו, ההשערה היא דו צדדית, ולכן אזור דחייה של 5% מתחלק ל- 2.5% בכל צד של ההתפלגות.



לאחר קביעת ההתפלגות ואזורי הדחייה, נשאר לחשב את  
סטטיסטי המבחן

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{10.45 - 10}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = 0.47$$



מכאן נובע כי אין מספיק עדות סטטיסטית,  $Z = 0.47$ , קיבלנו מספר  
שאינו נמצא באזור הדחייה לכך שתוחלת הגלוטן שונה מ-10.  
במקרה כזה לא נדחה את השערת האפס.

חברת מזון טבעי טוענת כי הממוצע של תכולת החלבון במוצרי השוקולדים שלה הוא 300 גרם לחבילה. כדי לבדוק את טענתם, מדגם של 36 חבילות שוקולד נלקח, ומצא כי הממוצע של תכולת החלבון במדויק הוא 288 גרם, כאשר סטיית התקן של תכולת החלבון בכל החבילות היא 30 גרם. האם יש מספיק ראיות לדחות את ההשערה האפסית ברמת מובהקות של 0.05?

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

א. מה השערת האפס, וההשערה הנגדית?

ב. מה אזור הדחייה

ב. נחשב...

מנהלת של קמפיין למען איכות הסביבה טוענת כי יותר מ-70% מהתושבים תומכים בפעולות לשמירה על הסביבה בעירם. מתוך דגימה של 200 תושבים, 160 מהם ציינו שהם תומכים בפעולות אלו. האם יש מספיק ראיות לדחות את ההשערה ברמת מובהקות של 0.05?

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

א. מה השערת האפס, וההשערה הנגדית?

ב. האם זה מבחן דו זנבי או חד זנבי?

ב. נחשב...

# לסיכום: איך מבצעים מבחן

שלבים עיקריים:

1. קביעת ההשערות: **השערת האפס וההשערה האלטרנטיבית**.
2. בחירת הסטטיסטי המתאים בהתאם לפרמטר שעליו ההשערה.
3. חישוב התפלגות הדגימה תחת ההנחה שהשערת האפס נכונה, וקביעת **"אזורי דחייה"** של השערת האפס, בהתאם ל – **"רמת המובהקות של המבחן"**.
4. חישוב סטטיסטי המבחן והכרעה.