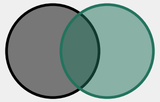
הטכניון
היחידה ללימודי המשך
ולימודי חוץ ע"ש עזריאלי

מבוא להסתברות

TECHNION
Azrieli Continuing Education and
External Studies Division

הגדרות יסוד

- ניסוי מקרי
- מרחב מדגם
- מאורע
- נוסחא לחישוב הסתברות

פעולות על סטים (נוסחאות ודיאגרמות וֶן) 

- חיתוך
- איחוד
- הפרש
- מאורע משלים

הגדרות יסוד

ניסוי מקרי – ניסוי שתוצאותיו האפשריות ידועות מראש, אך לא ניתן לדעת אילו מהתוצאות תתממש בפועל.

מרחב מדגם – אוסף התוצאות האפשריות של ניסוי מקרי.

מאורע– מאורע הוא קבוצה חלקית של מרחב המדגם. מאורעות נסמן באותיות גדולות.

דוגמא:
מטילים קוביית משחק הוגנת. זהו ניסוי מקרי משום שאנו יודעים מהן התוצאות האפשריות של הטלת הקובייה, אך איננו יודעים מהי התוצאה שתתממש. מרחב המדגם הוא אוסף התוצאות האפשריות של הניסוי. את איברי מרחב המדגם נציג באמצעות אובייקט מתמטי הנקרא קבוצה:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

הגדרות יסוד

מאורע– מאורע הוא קבוצה חלקית של מרחב המדגם. מאורעות נסמן באותיות גדולות.

דוגמא:

בדוגמא של הטלת הקובייה, נגדיר לדוגמא את המאורעות הבאים:

A– ייצא 4 בהטלת הקובייה

B– ייצא מספר זוגי בהטלת הקובייה

C– ייצא מספר הגדול מ – 7 בהטלת הקובייה

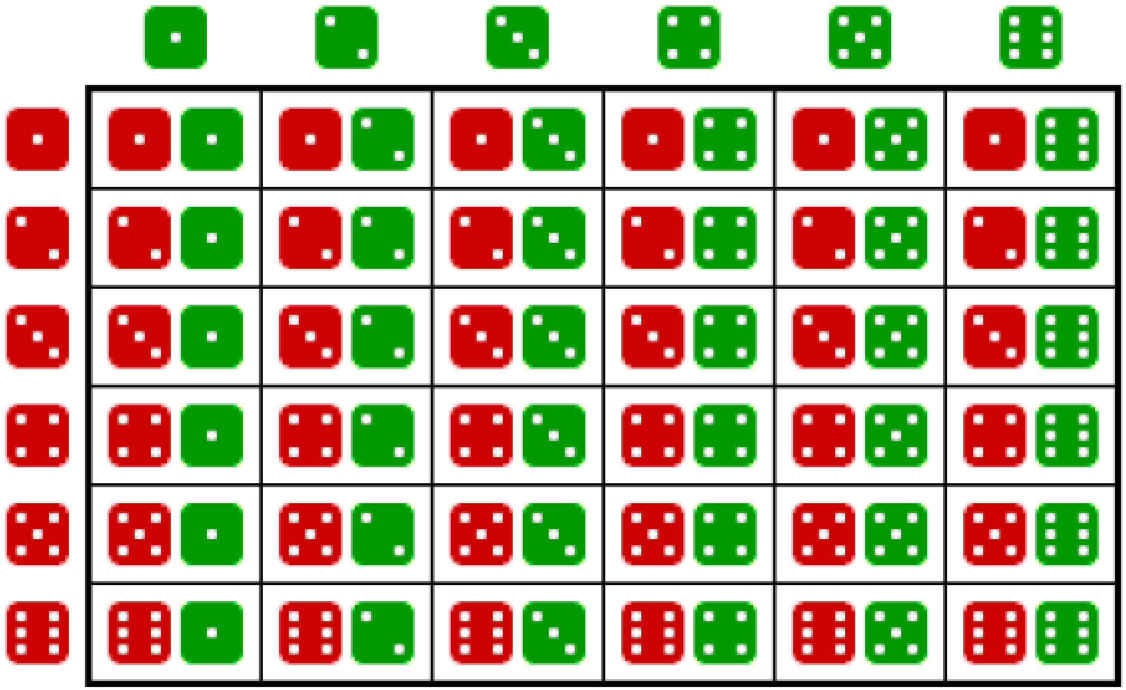
D– ייצא מספר בין 1 ל – 6 בהטלת הקובייה

המאורע A נקרא **מאורע יסודי**, המאורע C נקרא **מאורע בלתי אפשרי**, והמאורע D נקרא **מאורע ודאי**.

סיכוי ינוע תמיד בין 0 ל1 , או בין 0% ל 100%

TECHNION
Azrieli Continuing Education and External Studies Division

הגדרות יסוד



דוגמא:

מטילים שתי קוביות משחק הוגנות, אדומה וירוקה.
מרחב המדגם הוא כל הזוגות האפשריים. כלומר
במרחב המדגם יש 36 תוצאות אפשריות (ראו ציור).
אם נגדיר את A בתור המאורע שנקבל סכום של 8
בהטלת הקוביות, הרי ש – A הוא המאורע הבא:

$A=\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$

בעיית מונטי הול

במשחק טלוויזיה, יש שלוש דלתות: מאחורי אחת מהן יש מכונית, ומאחורי השתיים האחרות יש עיזים. המתמודד בוחר דלת אחת, והמנחה (שכבר יודע מה מאחורי כל דלת) פותח דלת אחרת, שמאחוריה עז.לאחר מכן, ניתנת למתמודד האפשרות להחליף את הבחירה שלו לדלת הנותרת או להישאר עם הבחירה הראשונה. האם כדאי להחליף דלת?

1) בביתה יש 27 תלמידים. 3 מתוכם הן בנות. מה הסיכוי שתלמיד שיבחר באקראי יהיה בן?

2) מה הסיכוי שיצא דאבל בהטלת שתי קוביות הוגנות בנות 6 פאות?

3) עמי ותמי משחקים במשחק אבן נייר ומספריים כל משתתף בוחר אלמנט אחד (אבן, נייר או מספריים). אבן מנצחת מספריים. מספריים מנצחים נייר. נייר מנצח אבן.

א- מה הסיכוי שהמשחק יסתיים בתיקו (שני המשתתפים יבחרו באותו אלמנט)

ב- מה הסיכוי שתמי תנצח ?

ג- מה הסיכוי שעמי לא יפסיד?

ד- מה הסיכוי שעמי ינצח באמצעות מספריים?

4) בשק אטום יש גולות בעלות משקל ומרקם זהה. 3 גולות הן אדומות, 5 גולות הן כחולות ו14 גולות צהובות. מטילדה מוציאה גולה אחת.

א- מה הסיכוי להוציא גולה צהובה?

ב- מה הסיכוי להוציא גולה לא צהובה?

5) בשק יש שני כדורים שחורים ואחד לבן. מוציאים בבת אחת שני כדורים מהשק.

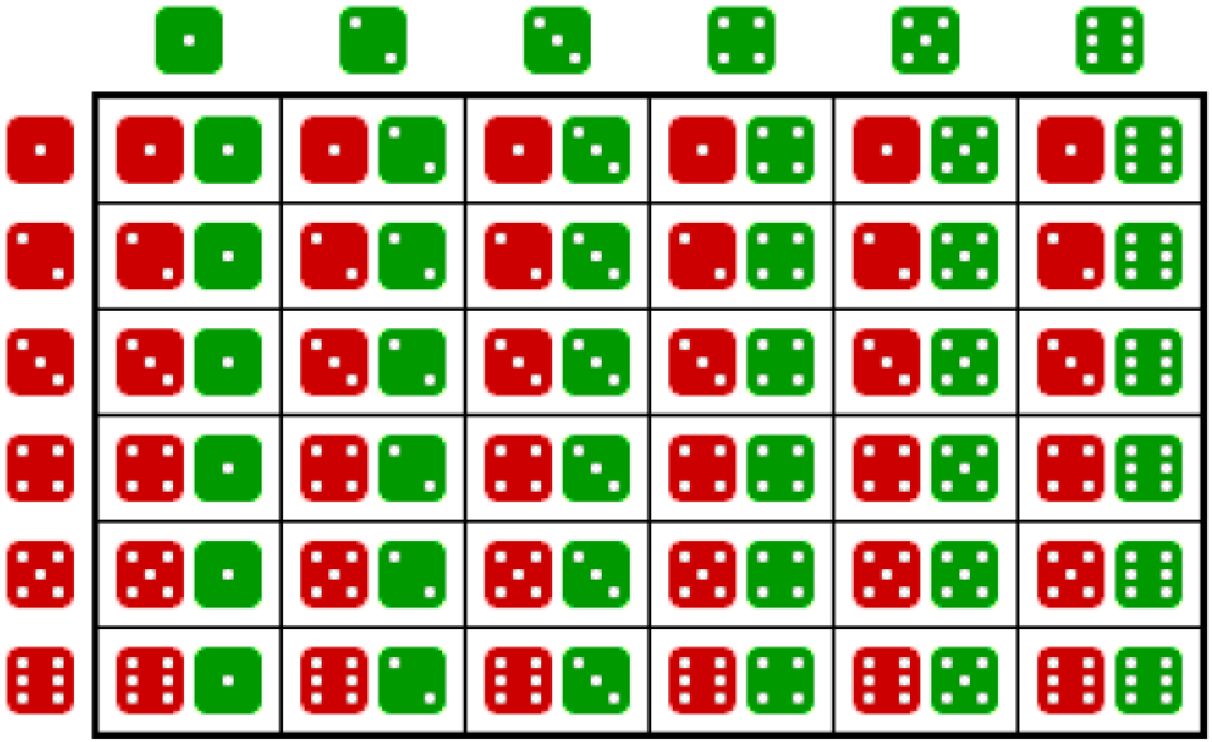
א- מה הסיכוי ששני הכדורים באותו צבע?

ב- איזה צבע כדור צריך להוסיף כדי שהסיכוי להוציא שני כדורים בעלי צבע זהה יהיה שווה לסיכוי להוציא שני כדורים בעלי צבעים שונים

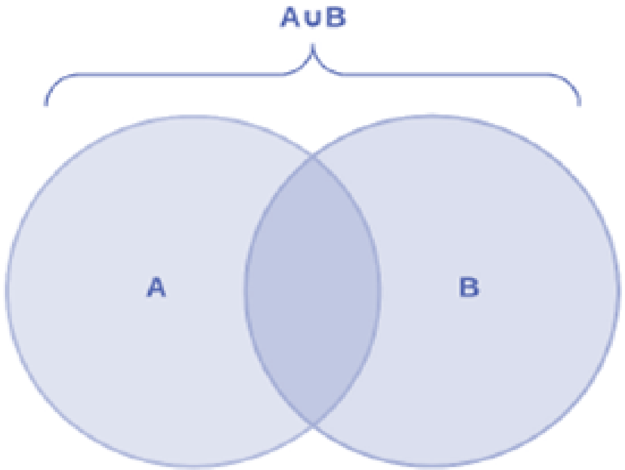
תרגול

פעולות על מאורעות ∪

נתונים שני מאורעות A ו – B.
המאורע לפיו A יתרחש, או B יתרחש,
או שניהם (לפחות אחד מהמאורעות A או
Bיתרחש),
נקרא **האיחוד** של A ו – B
ומסומן: $A \cup B$.



$A \cup B = \{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,4),(5,5),(5,6)\}$

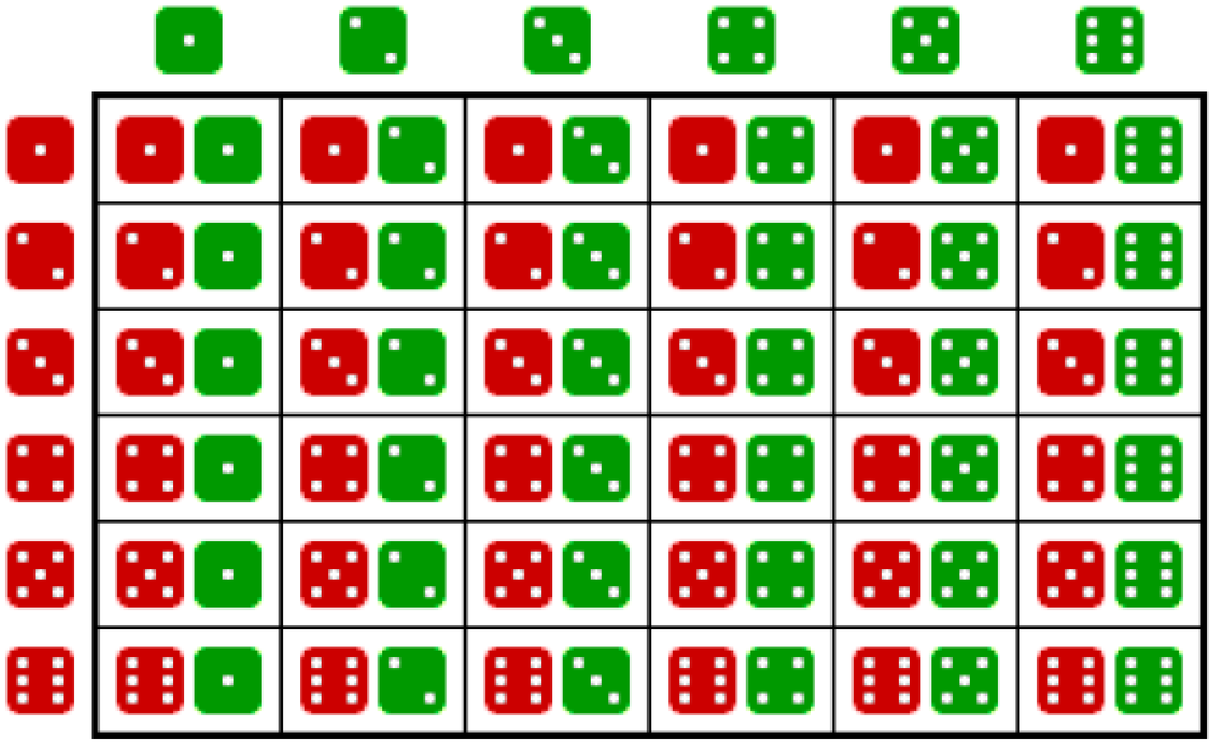


דוגמא:
בהטלת שתי קוביות נגדיר:
A - הסיכוי שייצא סכום של 8
B – הסיכוי שבקובייה האדומה נקבל 5
האיחוד של A ו– Bהוא לפיכך

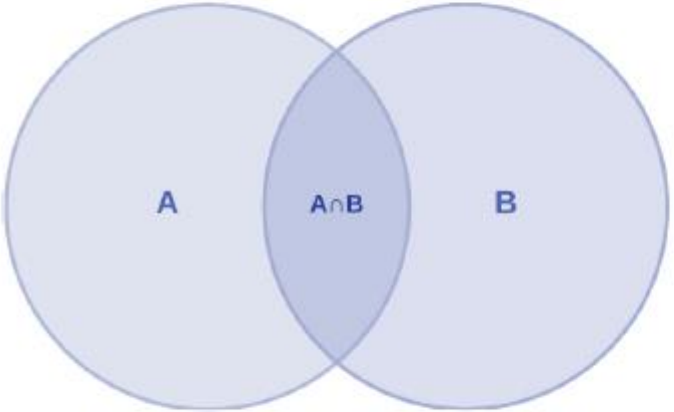
פעולות על מאורעות ∩

נתונים שני מאורעות A ו– B. המאורע לפיו גם A יתרחש וגם B יתרחש (בדיוק שניהם), נקרא **החיתוך** של A ו– B ומסומן: $B\cap A$.

דוגמא:
בהטלת שתי קוביות נגדיר:
A - הסיכוי שייצא סכום של 8
B – הסיכוי שבקובייה האדומה נקבל 5
החיתוך של A ו– B הוא לפיכך:



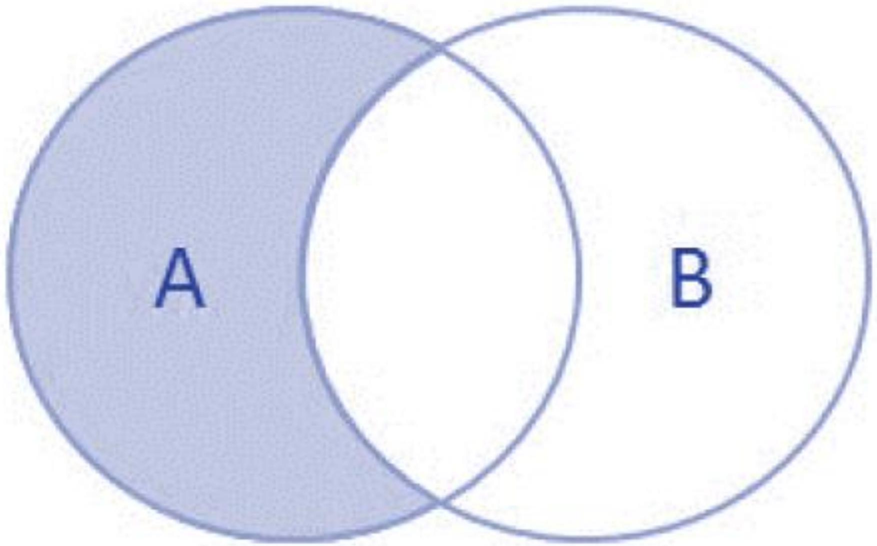
$$A\cap B=\{(5,3)\}$$



פעולות על מאורעות הפרש

ההפרש: מאורע A פחות מאורע B, הוא המאורע לפיו A יתרחש, אבל B לא.
את מאורע זה נסמן על ידי:
$A\backslash B$ או $B-A$ (לא להתבלבל עם חיסור מספרים).

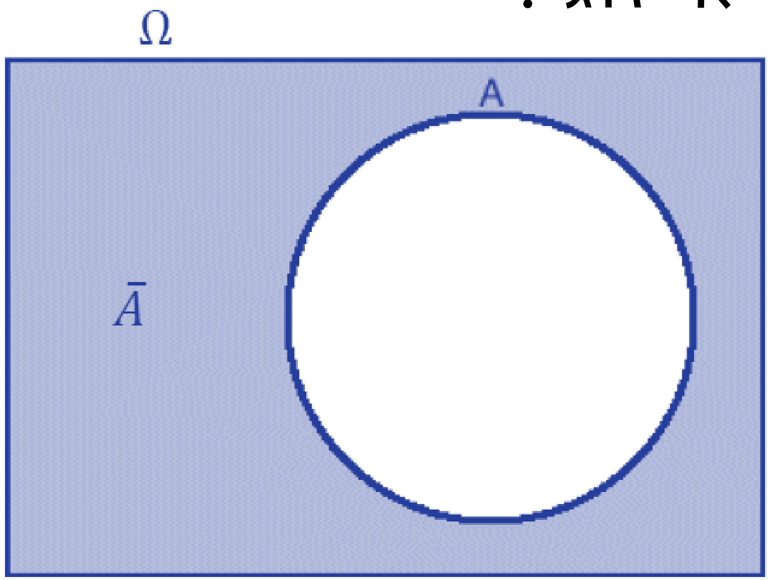
דוגמא: בהטלת קובייה בודדת, נגדיר את A בתור המאורע שייצא מספר זוגי, ואת B בתור המאורע שייצא 4 .
לפיכך $A\backslash B = \{2,6\}$



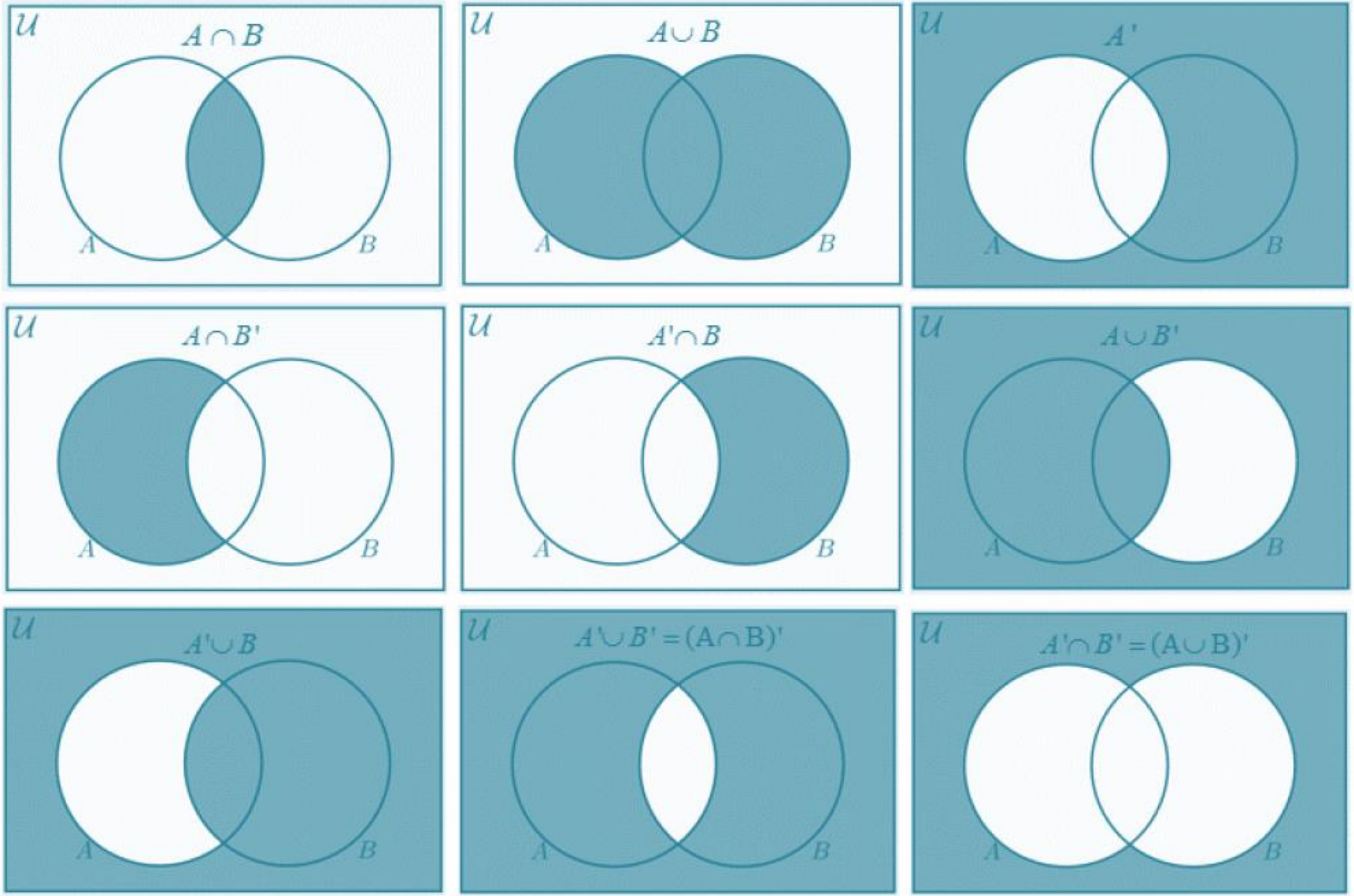
פעולות על מאורעות מאורע משלים

נתון מאורע A המאורע המשלים של A הוא המאורע לפיו A **לא יתרחש**.
את המאורע המשלים נסמן על ידי אחד הסימנים הבאים: A' , A^C , $\bar{A}$
ההשלמה נעשית ביחס למרחב המדגם.

דוגמא: בהטלת קובייה אחת, נגדיר את A בתור המאורע שייצא מספר זוגי. לפיכך, המשלים של A הוא המאורע שייצא מספר אי זוגי.



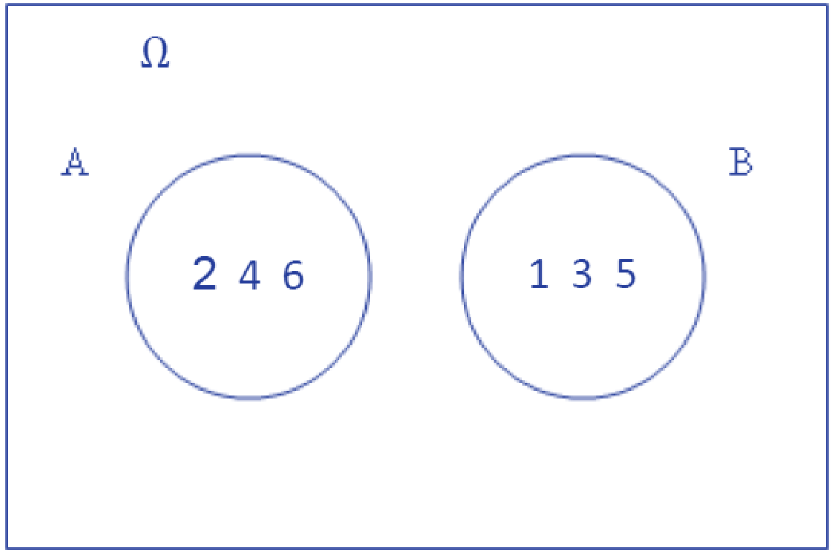
לסיכום..



פעולות על מאורעות: מאורעות זרים

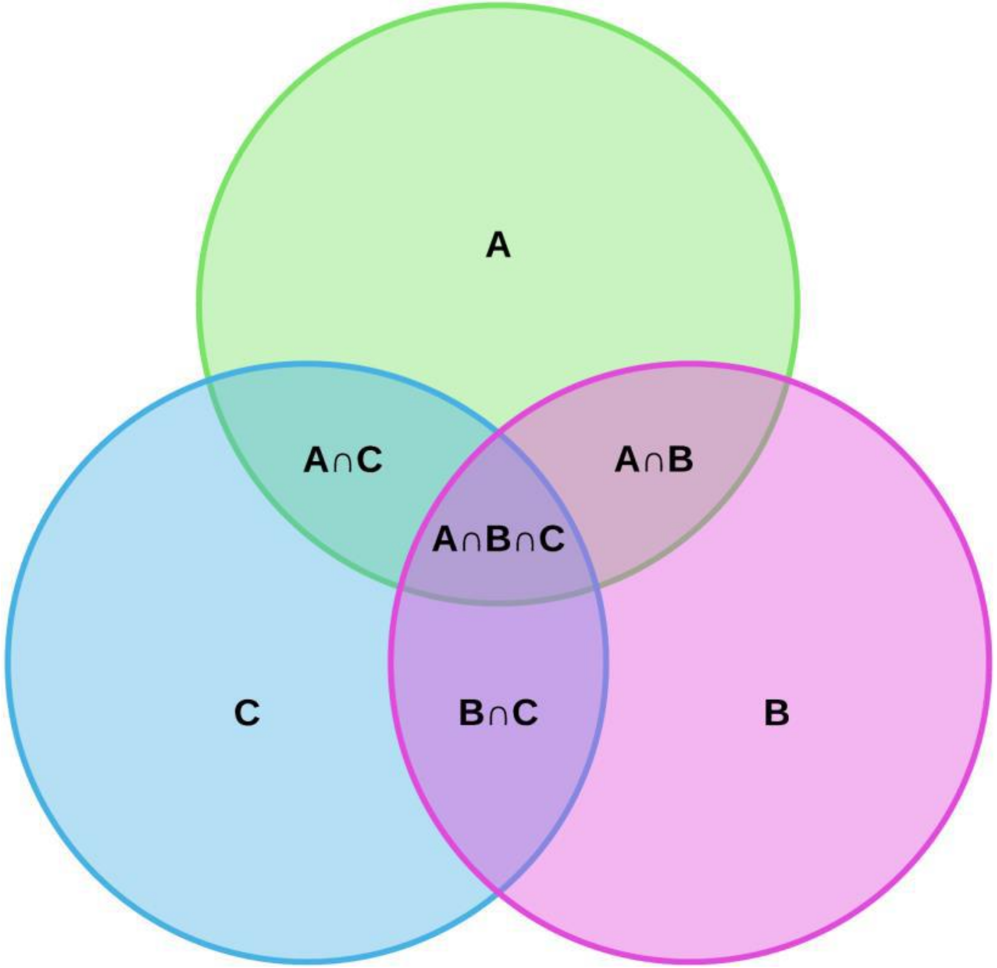
שני מאורעות A ו– B ייקראו **מאורעות זרים**, אם החיתוך שלהם נותן **קבוצה ריקה** של תוצאות.

דוגמא:
בהטלת קובייה, נגדיר את A במאורע שייצא מספר זוגי. B יהיה המאורע שייצא מספר אי זוגי.
לפיכך החיתוך, כלומר- ייצא מספר זוגי וגם ייצא מספר אי זוגי, הוא מאורע ריק. לא קיימים מספרים בין 1 ל – 6 שהם גם זוגיים וגם אי זוגיים.



ומה אם יש יותר משני מאורעות?

מתמודדים... זה עובד אותו דבר..



שאלה לסיכום:

בפרויקט שיפור מודל לחיזוי התפתחות סוכרת, המודל נשען על שני סוגי מדדים:

- נתונים רפואיים היסטוריים (למשל, גיל והיסטוריה משפחתית).
- מדדים קליניים עדכניים (למשל, לחץ דם ורמות סוכר).

ידוע כי ההסתברות שהדיוק של המודל ישתפר בהתבסס על נתונים היסטוריים היא 0.6, וההסתברות שהדיוק ישתפר בהתבסס על מדדים קליניים עדכניים היא 0.5. כמו כן, ידוע כי ההסתברות שלפחות אחד מהשיפורים יתקיים היא 0.8.

א. מה ההסתברות ששני השיפורים (במדדים ההיסטוריים ובמדדים הקליניים) יתקיימו?

ב. תארו את התוצאה של סעיף א' באמצעות דיאגרמת ואן.