Álgebra Lineal 2 - Tarea 6

Daniel Dorado Toro (201821010)

9 de marzo de 2020

Punto 1

1. La representación matricial en la base canónica es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Primero, hallamos y factorizamos el polinomio característico:

$$P_f(t) = (t-3)t^3.$$

Así, $P_f(t) = P_1(t) \cdot P_2(t)^3$, donde $P_1(t) = t - 3$ y $P_2(t) = t$. Para calcular la base de Jordan, buscamos las nulidades de las potencias de $P_1(f)$ y $P_2(f)$.

$$\begin{aligned} \ker(P_1(f)) &= \langle (3/2, 1, 1, 1) \rangle \\ \ker(P_2(f)) &= \langle (1, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle \\ \ker(P_2(f)^2) &= \langle (1, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Así, defino 4 vectores que conforman la base:

$$\begin{aligned} v_1 &= (3/2, 1, 1, 1) \in \ker(P_1(f)) \\ v_3 &= (-1, 0, 1, 0) \in \ker(P_2(f)^2) \setminus \ker(P_2(f)) \\ v_2 &= P_1(f)(v_3) = (-3, -3, -3, 0) \\ v_4 &= (-1, 0, 0, 1) \in \ker(P_2(f)) \setminus \langle v_2 \rangle \end{aligned}$$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

3. $$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left[\begin{array}{c|cc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Punto 2

1. La representación matricial en la base canónica es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. f es de grado de nilpotencia 2. Para construir la base de Jordan, hallamos la nulidad de f y de f^2.

$$\begin{aligned}
\ker(f) &= \langle (1,1,1,0), (0,-1,0,1) \rangle \\
\ker(f^2) &= \mathbb{Q}^4 \\
\text{null}(f) &= 2 \\
\text{null}(f^2) &= 2+2
\end{aligned}$$

La base estará conformada (no en ese orden) por dos vector de "orden" 2 (i.e vectores en $\ker(f^2) \backslash \ker(f)$) y las imágenes mediante f de los vectores anteriores.

$$\begin{aligned}
v_2 &= (1,0,0,0) \\
v_1 &= f(v_2) = (-1,1,-1,-2) \\
v_4 &= (0,0,0,1) \\
v_3 &= f(v_4) = (2,1,2,1)
\end{aligned}$$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

3.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$