Álgebra Lineal 2 - Parcial No. 1

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

miércoles, 12 de marzo de 2019

Esto es un examen individual.

Importante: Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada** el procedimiento **completo** que permite llegar a la respuesta.

Duración: 75 minutos - Máxima nota: 30 puntos

1. **[/8pts]** Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^6, \mathbb{Q}^6)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (&3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6,\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6,\\ &2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 + 2x_6,\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6,\\ &2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 2x_6,\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 2x_6) \end{aligned}$$

   (a) **[/1pt]** Encuentre el grado de nilpotencia de f.

   (b) **[/3pts]** Encuentre, sin calcular una base de Jordan, la forma normal de Jordan de f.

   (c) **[/4pts]** Encuentre una base de Jordan $\mathcal{B}$ para f tal que $\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ tenga la forma encontrada en (b).

2. **[/22pts]** Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^6, \mathbb{Q}^6)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (&4x_1 - 6x_2 - 6x_3 - x_4 + 4x_5 + 9x_6,\ -x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 + 4x_5 + 9x_6,\\ &-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 + 8x_6,\ -2x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 8x_6,\\ &x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 + 11x_6,\ -5x_2 - 5x_3 + 10x_5 + 5x_6) \end{aligned}$$

   (a) **[/1pt]** Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.

   (b) **[/1pt]** Encuentre la factorización del polinomio característico $P_f(t)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles de $\mathbb{Q}[t]$:

$$P_f(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)^{r_i}$$

   donde cada $P_i(t) \in \mathbb{Q}[t]$ es irreducible.

   (c) **[/4pts]** Sean $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$, $i = 1, \ldots, n$, y $p_1, \ldots, p_n$ las proyecciones sobre $V_1, \ldots, V_n$ respecto a la descomposición $\mathbb{Q}^6 = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \ldots, \Pi_n(t) \in K[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.

   (d) **[/1pt]** Encuentre las representaciones matriciales de p_i, $i = 1, \ldots, n$, en la base canónica.

   (e) **[/4pts]** Encuentre, sin calcular una base de Jordan, la forma normal de Jordan de f.

   (f) **[/8pts]** Encuentre una base de Jordan $\mathcal{B}$ para f tal que $\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ tenga la forma encontrada en (e).

   (g) **[/3pts]** Encuentre polinomios $P_D(t), P_N(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tales que $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.

1. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^6, \mathbb{Q}^6)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (&3x_1-2x_2+3x_3-2x_4-2x_5+3x_6,\ 3x_1-2x_2+3x_3-2x_4-2x_5+3x_6,\\ &2x_1+2x_2+2x_3-3x_4-3x_5+2x_6,\ 3x_1-2x_2+3x_3-2x_4-2x_5+3x_6,\\ &2x_1-3x_2+2x_3+2x_4-3x_5+2x_6,\ 2x_1-3x_2+2x_3-3x_4+2x_5+2x_6) \end{aligned}$$

(a) Como $f^2 \neq 0$ pero $f^3 = 0$ entonces el grado de nilpotencia de f es 3.

(b) Tenemos

$$\begin{aligned} \dim\Big(\ker(f)\Big) =& 3\\ \dim\Big(\ker(f^2)\Big) =& 3+2\\ \dim\Big(\ker(f^3)\Big) =& 3+2+1 \end{aligned}$$

así que en la forma normal de Jordan de f tenemos tres bloques: uno de dimensión 3×3, uno de dimensión 2×2 y otro de dimensión 1×1. Luego la forma normal de Jordan de f es

$$\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right].$$

(c) Tenemos

$$\begin{aligned} \ker(f) =& \langle(-1,0,0,0,0,1),\ (2,1,0,1,1,0),\ (-1,0,1,0,0,0)\rangle\\ \ker(f^2) =& \langle(-1,0,0,0,0,1),\ (-1,0,0,0,1,0),\ (4,0,0,1,0,0),\ (-1,0,1,0,0,0),\ (-1,1,0,0,0,0)\rangle\\ \ker(f^3) =& \mathbb{Q}^6 \end{aligned}$$

Tomamos

$$\begin{aligned} v_3 =& (0,0,1,0,0,0) \in \ker(f^3)\setminus\ker(f^2)\\ v_5 =& (4,0,0,1,0,0) \in \ker(f^2)\setminus\Big(\ker(f)+\langle f(v_3), f^2(v_3)\rangle\Big)\\ v_6 =& (-1,0,0,0,0,1) \in \ker(f)\setminus\langle f(v_5), f^2(v_3)\rangle. \end{aligned}$$

Así $\mathcal{B} = \{f^2(v_3), f(v_3), v_3, f(v_5), v_5, v_6\}$ es una base de Jordan para f.

2. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^6, \mathbb{Q}^6)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (&4x_1-6x_2-6x_3-x_4+4x_5+9x_6,\ -x_1-x_2-6x_3-x_4+4x_5+9x_6,\\ &-2x_1-2x_2-2x_3-2x_4+3x_5+8x_6,\ -2x_1-7x_2-2x_3+3x_4+3x_5+8x_6,\\ &x_1-4x_2-4x_3+x_4+x_5+11x_6,\ -5x_2-5x_3+10x_5+5x_6) \end{aligned}$$

(a) La representación matricial de f en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 4&-6&-6&-1&4&9\\ -1&-1&-6&-1&4&9\\ -2&-2&-2&-2&3&8\\ -2&-7&-2&3&3&8\\ 1&-4&-4&1&1&11\\ 0&-5&-5&0&10&5 \end{bmatrix}$$

(b) Tenemos $P_f(t) = P_1(t)^2 P_2(t)^4$ donde $P_1(t) = t+5$, $P_2(t) = t-5$.

(c) Sean $R_1(t) = P_2(t)^4$ y $R_2(t) = P_1(t)^2$. Tenemos

$$\frac{2t+15}{50000} R_1(t) - \frac{2t^3 - 45t^2 + 400t - 1625}{50000} R_2(t) = 1$$

así si $\Pi_1(t) = \dfrac{2t+15}{50000} R_1(t)$ y $\Pi_2(t) = -\dfrac{2t^3 - 45t^2 + 400t - 1625}{50000} R_2(t)$ entonces, para $i = 1, 2$, $p_i = \Pi_i(f)$ es la proyección sobre $V_i = \ker(P_i(f))$ de acuerdo a la descomposición

$$V = V_1 \oplus V_2$$

(d) Tenemos para $i = 1, 2$

$$\Big[p_i\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \Big[\Pi_i(f)\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \Pi_i(\Big[f\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}).$$

Entonces

$$\Big[p_1\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

y

$$\Big[p_2\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

(e) Tenemos

$$\begin{aligned} \dim\Big(\ker\big(P_1(f)\big)\Big) &= 1 \\ \dim\Big(\ker\big(P_1(f)^2\big)\Big) &= 1 + 1 \\ \dim\Big(\ker\big(P_2(f)\big)\Big) &= 2 \\ \dim\Big(\ker\big(P_2(f)^2\big)\Big) &= 2 + 1 \\ \dim\Big(\ker\big(P_2(f)^3\big)\Big) &= 2 + 1 + 1 \end{aligned}$$

así que en la forma normal de Jordan de $f \restriction_{V_1}$ tenemos un único bloque 2×2, y en la forma normal de Jordan de $f \restriction_{V_2}$ tenemos dos bloques: uno de dimensión 3×3 y otro de dimensión 1×1. Luego la forma normal de Jordan de f es

$$\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cc||ccc|c} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

(f) Tenemos

$$\begin{aligned}
\ker(P_1(f)) =&\langle(1,1,1,1,1,0)\rangle\\
\ker(P_1(f)^2) =&\langle(1,1,1,1,0,1),\ (1,1,1,1,1,0)\rangle\\
\ker(P_2(f)) =&\langle(1,1,1,0,1,1),\ (-1,0,0,1,0,0)\rangle\\
\ker(P_2(f)^2) =&\langle(2,1,0,0,1,1),\ (-1,0,0,1,0,0),\ (-1,0,1,0,0,0)\rangle\\
\ker(P_2(f)^3) =&\langle(3,0,0,0,1,1),\ (-1,0,0,1,0,0),\ (-1,0,1,0,0,0),\ (-1,1,0,0,0,0)\rangle
\end{aligned}$$

Tomamos

$$\begin{aligned}
v_2 =&(1,1,1,1,0,1) \in \ker\left(P_1(f)^2\right) \setminus \ker\left(P_1(f)\right)\\
v_5 =&(-1,1,0,0,0,0) \in \ker\left(P_2(f)^3\right) \setminus \ker\left(P_2(f)^2\right)\\
v_6 =&(-1,0,0,1,0,0) \in \ker\left(P_2(f)\right) \setminus \langle P_2(f)(v_5)\rangle.
\end{aligned}$$

Así $\mathcal{B} = \{P_1(f)(v_2), v_2, P_2(f)^2(v_5), P_2(f)(v_5), v_5, v_6\}$ es una base de Jordan para f.

(g) Si $P_D(t) = -5\Pi_1(t) + 5\Pi_2(t)$ y $P_N = t - P_D(t)$ entonces $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.