

深圳大学医学部生物医学工程学院  
本科生课程作业

课程：计算方法  
(2018-2019 学年第一学期)

任课教师：张治国

专业（方向）	生物医学工程
年级/班级	2016 级 2 班
学号	2016222042
姓名	陈焕鑫
提交日期	2018 年 11 月 20 日

供助教评分使用	
助教姓名	
收到日期	201__年 __ 月 __ 日
评分 (0-100)	
评语（如有）	

17. 求满足下列条件的 Hermite 插值多项式.

$X_k$	$Y_k$	$y'_k$	$X_k$	$Y_k$	$y'_k$
1	2	1	2	3	-1

解:

设  $x_0=1, x_1=2$ , 则

$$\alpha_0(x) = (1 - 2 \frac{x-x_0}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 = (1 - 2 \frac{x-1}{1-2})(\frac{x-2}{1-2})^2 = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4,$$

$$\alpha_1(x) = (1 - 2 \frac{x-x_1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 = (1 - 2 \frac{x-2}{2-1})(\frac{x-1}{2-1})^2 = -2x^3 + 7x^2 - 8x + 3,$$

$$\beta_0(x) = (x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 = (x-1)(\frac{x-2}{1-2})^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 4,$$

$$\beta_1(x) = (x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 = (x-2)(\frac{x-1}{2-1})^2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y'_0\beta_0(x) + y'_1\beta_1(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore &= 2(2x^3 - 9x^2 + 12x - 4) + 3(-2x^3 + 7x^2 - 8x + 3) + (x^3 - 5x^2 + 8x - 4) - (x^3 - 4x^2 + 5x - 2) \\ &= -2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

23. 已知一组数据如下:

$x_i$	2	4	6	8
$y_i$	2	11	28	48

用最小二乘法求拟合这组数据的一条曲线.

解:

(1) 在坐标平面上描出点  $(x_i, y_i)$  ( $i=0, 1, \dots, 6$ ), 如图23-1

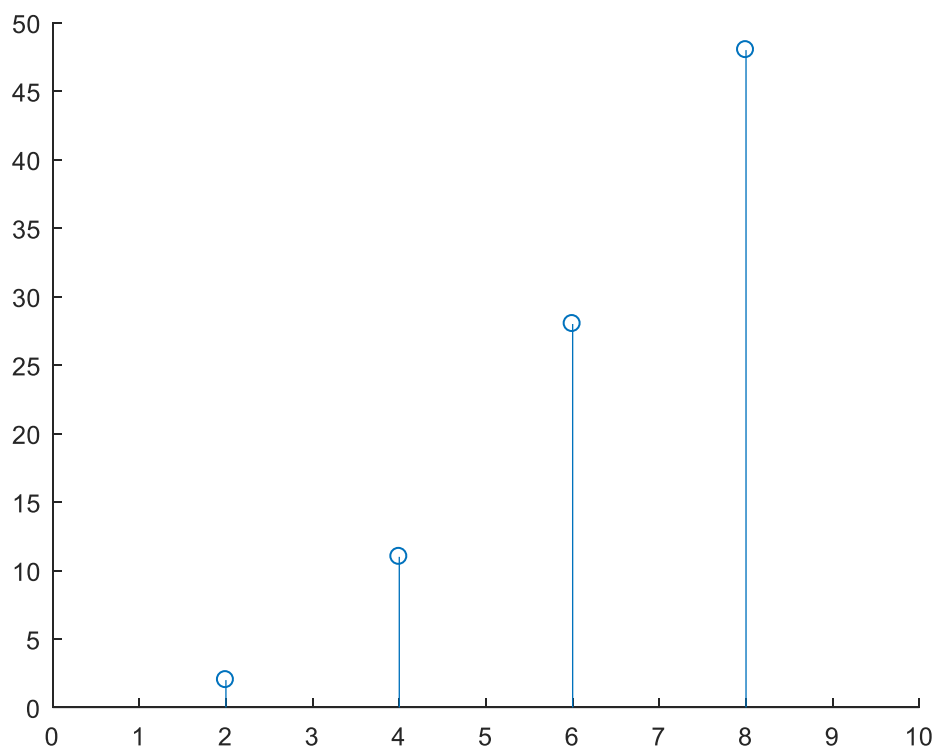


图23-1

- (2) 根据散点的分布情况，选用线性函数  $P_0(x) = a_0 + a_1x$ ，作拟合函数，故取

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x.$$

- (3) 建立法方程组，这里  $n=1$ ， $m=3$ ， $\omega_i \equiv 1$ .

根据内积公式：

$$\begin{cases} (\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^m \omega_i \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i), \\ (f, \varphi_k) = \sum_{i=0}^m \omega_i y_i \varphi_k(x_i). \end{cases}$$

可得，

$$\begin{aligned}
(\varphi_0, \varphi_0) &= \sum_{i=0}^3 \omega_i \times 1 \times 1 = 4, \\
(\varphi_0, \varphi_1) &= \sum_{i=0}^3 \omega_i \times 1 \times x_i = 20, \\
(\varphi_1, \varphi_1) &= \sum_{i=0}^3 \omega_i \times x_i \times x_i = 120, \\
(f, \varphi_0) &= \sum_{i=0}^3 \omega_i \times y_i = 89, \\
(f, \varphi_1) &= \sum_{i=0}^3 \omega_i \times x_i \times y_i = 600.
\end{aligned}$$

法方程组为

$$\begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 20 & 120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 \\ 600 \end{pmatrix}.$$

用直接三角分解法解得

$$a_0 = -16.5, a_1 = 7.75.$$

从而  $P(x) = -16.5 + 7.75x$ , 为所求最小二乘解.

25. 在某个低温过程中, 函数  $y$  依赖于温度  $Q$  (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ) 的试验数据如下:

$Q_j$	1	2	3	4
$y_j$	0.8	1.5	1.8	2.0

且已知经验公式是  $\varphi(Q) = a_0 Q + a_1 Q^2$ , 使用最小二乘法求  $a_0, a_1$ .

解:

依题意，建立法方程组，这里  $\varphi_0(Q)=Q$ ,  $\varphi_1(Q)=Q^2$ ,  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $\omega_i \equiv 1$ ,

根据内积公式：

$$\begin{cases} (\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^m \omega_i \varphi_j(Q_i) \varphi_k(Q_i), \\ (f, \varphi_k) = \sum_{i=0}^m \omega_i y_i \varphi_k(Q_i). \end{cases}$$

可得，

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^3 \omega_i \times Q_i \times Q_i = 30,$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=0}^3 \omega_i \times Q_i \times Q_i^2 = 100,$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^3 \omega_i \times Q_i^2 \times Q_i^2 = 354,$$

$$(f, \varphi_0) = \sum_{i=0}^3 \omega_i \times Q_i \times y_i = 17.2,$$

$$(f, \varphi_1) = \sum_{i=0}^3 \omega_i \times Q_i^2 \times y_i = 55.$$

法方程组为：

$$\begin{pmatrix} 30 & 100 \\ 100 & 354 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.2 \\ 55 \end{pmatrix}.$$

用直接三角分解法解得：

$$a_0 = 0.9497, a_1 = -0.1129.$$

因而，经验公式为  $y = 0.9497\varphi_0(Q) - 0.1129\varphi_1(Q) = 0.9497Q - 0.1129Q^2$

**附加题【25题用 MATLAB 编程实现】**

程序代码如下：

```
clc;clear;close all;

Q = [1,2,3,4];           %基项 1
y = [0.8,1.5,1.8,2.0];   %函数值
Q2 = Q .^ 2;             %基项 2
m = length(Q);           %数据长度
sqm = sqrt(m);           %矩阵的大小

w = zeros(2,2);          %生成存放内积的矩阵
f = zeros(2,1);

%循环求出各个内积公式的值
for jj = 1:1:sqm
    for k = 1:1:sqm
        for ii = 1:1:m
            if jj==1 && k==1
                w(jj,k) = w(jj,k)+Q(ii)*Q(ii);
            elseif (jj==1 && k==2) || (jj==2 && k==1)
                w(jj,k) = w(jj,k)+Q(ii)*Q2(ii);
            elseif jj==2 && k==2
                w(jj,k) = w(jj,k)+Q2(ii)*Q2(ii);
            end
        end
    end
end
for ii = 1:1:m
    if jj == 1
        f(jj,1) = f(jj,1)+y(ii)*Q(ii);
    elseif jj == 2
        f(jj,1) = f(jj,1)+y(ii)*Q2(ii);
    end
end
end

%求得结果
a = inv(w)*f
```

运行程序，得到的结果如下图所示：

```
w =  
  
    30    100  
    100    354  
  
f =  
  
    17.2000  
    55.0000
```

图1 - 求得的内积

```
a =  
  
    0.9497  
   -0.1129
```

图2 - 运行结果