2018-2019学年第一学期

计算方法

第四讲:解线性方程组的直接法-2第二章§3

主讲人: 张治国 zgzhang@szu.edu.cn



上节课回顾

- 介绍了解线性方程组的直接法,主要是Gauss消去法(消去和回代)和它的变形直接三角分解法(通过LU分解)。
- · 讨论了主元素的作用并介绍了Gauss列主元素消去法以避免小主元引起的误差。
- 简介了Gauss消去法(和Gauss列主元素消去法) 的矩阵乘法形式、算法设计、和复杂度。

本节课内容

第二章 解线性方程组的直接法

§ 3 直接三角分解法

3-1 基本的三角分解法

3-2 部分选主元的Doolittle分解

回顾: Gauss消元法得到LU分解

- Gauss消元过程可用矩阵乘法实现,这里我们先考虑不带 行交换的消元过程。
- 矩阵 L_k 称为指标是 k 的初等下三角矩阵。

$$m{L}_{k} = egin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & -m_{k+1,k} & 1 & & & & \\ & 0 & -m_{k+2,k} & & 1 & & & \\ & & \vdots & 0 & & \ddots & & \\ & & -m_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix}$$

其中行乘数 $m_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$, $i = k+1, k+2, \dots, n$

• \mathbb{Z} $L_k(A^{(k)}, b^{(k)}) = (A^{(k+1)}, b^{(k+1)})$, $L_kA^{(k)} = A^{(k+1)}$, $L_kb^{(k)} = b^{(k+1)}$

回顾: Gauss消元法得到LU分解

• 于是, 消元过程可表示为

$$L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1(A,b) = (A^{(n)},b^{(n)})$$

• 因此 $L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1A=A^{(n)}$, $A=L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1}A^{(n)}=LU$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{1}^{-1} \mathbf{L}_{2}^{-1} \cdots \mathbf{L}_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & \cdots & 1 \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \mathbf{A}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

• 不带行交换的Gauss消元过程产生了一个单位下三角形矩 阵 L 和一个上三角矩阵 U ,且 A = LU 。这称之为矩阵 A的LU分解。

§3直接三角分解法

根据定理2.1,系数矩阵 A 如果是非奇异矩阵,则必有
 A = LU 或 PA = LU 成立,其中 P 是排列矩阵, L 是单位
 下三角矩阵, U 是非奇异上三角矩阵。

• Gauss消去法可以得到 L 和 U 的表达式。

• 本节着重研究 L, U 的元素和 A 的元素之间的直接关系。

《3直接三角分解法

3-1 基本三角分解法

- Doolittle分解: 把矩阵 A 分解成一个单位下三角阵 L 和一 个上三角矩阵 U 的乘积
- 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的各阶顺序主子式均不为0,则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ l_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{L}\boldsymbol{U} \quad (3.1)$$

- 行号 $r \le$ 列号 i: $a_{ri} = \sum_{k=1}^{r} l_{rk} u_{ki}, i = r, \dots, n; r = 1, 2, \dots, n$ (3.2) 行号 i > 列号 r: $a_{ir} = \sum_{k=1}^{r} l_{ik} u_{kr}, i = r + 1, \dots, n; r = 1, 2, \dots, n 1$ (3.3)

• Doolittle分解公式

1) 当 r = 1 时,解得

(*U*的第1行不变)
$$u_{1i} = a_{1i}, i = 1, 2, \dots, n$$
 (3.4)

(L的第1列)
$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \ i = 2, 3, \dots, n$$
 (3.5)

2) 当 r > 1 时,行列元素的计算公式

先由(3.2)算 U 的第 r 行,后由(3.3)算 L 的第 r 列

$$u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{ki}, \ i = r, \dots, n; \ r = 2, \dots, n$$
(3.6)

$$l_{ir} = \frac{a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}}{u_{rr}}, \quad i = r+1, \dots, n; \quad r = 2, \dots, n-1$$

由(3.4)-(3.7)式所表示的矩阵分解为Doolittle分解

(3.7)

- Crout分解: 把矩阵 A 分解成一个下三角阵 L 和一个单位上三角矩阵 U 的乘积
- 则可以递推得到

先算L的第r列, 后算U的第r行

$$l_{ir} = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{ki}, \ i = r, \dots, n; \ r = 2, \dots, n$$
 (3.8)

$$u_{ri} = \frac{a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}}{l_{rr}}, \quad i = r+1, \dots, n; \quad r = 2, \dots, n-1$$
(3.9)

- Doolittle分解的求解公式
 - 求 Ly = b

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_r = b_r - \sum_{i=1}^{r-1} l_{ri} y_i, & r = 2, \dots, n \end{cases}$$
 (3.10)

■ 再求 *Ux = y*

$$\begin{cases} x_{n} = \frac{y_{n}}{u_{nn}} \\ y_{r} - \sum_{i=r+1}^{n} u_{ri} x_{i} \\ x_{r} = \frac{u_{ri} x_{i}}{u_{rr}} \end{cases}, \quad r = n-1, \dots, 1$$
(3.11)

• Crout分解的求解公式

• 求
$$Ly = b$$

■ 再求 *Ux = y*

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_r = y_r - \sum_{i=r+1}^n u_{ri} x_i, & r = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$
 (3.13)

• 例1. 用Doolittle法解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

解: 由公式(3.4)和(3.5),得

$$(u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}) = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}) = (2,10,0,-3)$$

$$(l_{21}, l_{31}, l_{41})^T = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)^T$$

对 r = 2,3,4,用公式(3.6),(3.7)计算,得

$$(u_{22}, u_{23}, u_{24}) = (11,-12,17/2)$$
 $(l_{32}, l_{42})^T = (-3/11,-6/11)^T$
 $(u_{33}, u_{34}) = (-3/11,-2/11)$ $l_{43} = -9$ $u_{44} = -4$

1) 解 Ly = b, 可得

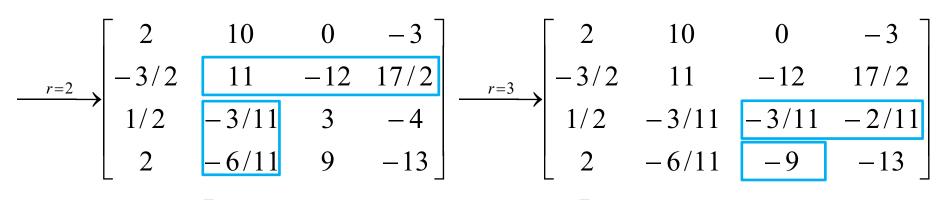
$$\mathbf{y} = (10,20,-17/11,-16)^T$$

2) 解 Ux = y, 得

$$\mathbf{x} = (1,2,3,4)^T$$

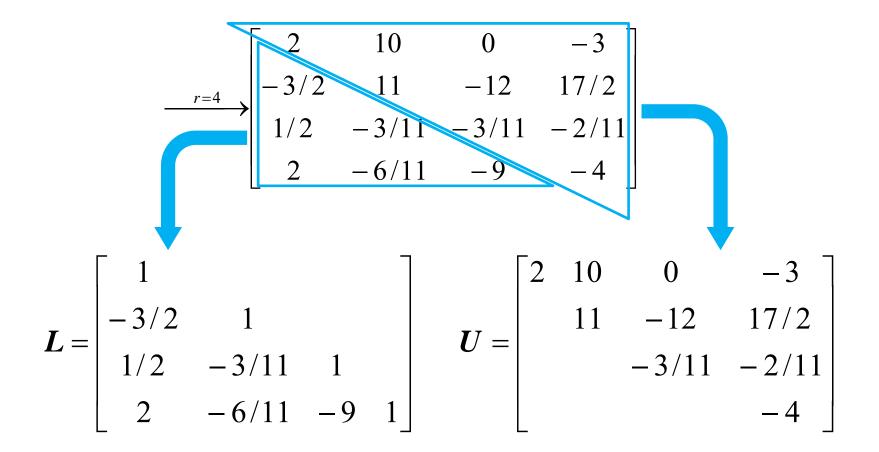
• 计算过程中矩阵变化详细情况:

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{r=1} \begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3/2 & -4 & -12 & 13 \\ 1/2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 14 & 9 & -13 \end{bmatrix}$$



$$\xrightarrow{r=4} \begin{bmatrix}
2 & 10 & 0 & -3 \\
-3/2 & 11 & -12 & 17/2 \\
1/2 & -3/11 & -3/11 & -2/11 \\
2 & -6/11 & -9 & -4
\end{bmatrix}$$

• 计算过程中矩阵变化详细情况:



- 紧凑格式的Doolittle法: 计算机计算时,用二维数组 A 存 放增广矩阵 (A, b),数组的元素记为 A(i, j), i=1,2,...,n;
 j=1,2,...,n+1。分解计算得到 L 和 U 的元素冲掉数组 A 相 应位置的元素。
- 如用Doolittle法,则

$$A(r,i) \leftarrow u_{ri}, \ r = 1,2,...,n; i = r,r+1,...,n+1$$

$$A(i,r) \leftarrow l_{ir}, \ r = 1,2,...,n-1; i = r,r+1,...,n$$

其中 $u_{r,n+1}$ 为 y_r ,用以冲掉 b_r 。

• 因此,数组 A 元素的计算可按照如下格式进行:

$$A(r,i) \leftarrow u_{ri} = A(r,i) - 第r$$
行左方数组元素 $A(r,k), k = 1,..., r - 1$,与第 i 列上方数组元素 $A(k,i), k = 1,..., r - 1$,对应元乘积之和

(3.14)

$$A(i,r) \leftarrow l_{ir} = [A(i,r) - \hat{\pi}i$$
行左方数组元素 $A(i,k), k = 1,..., r - 1,$ 与第 r 列上方数组元素 $A(k,r), k = 1,..., r - 1,$ 对应元乘积之和]/ $A(r,r)$ (3.15)

- 由于在计算 U 的方程(3.6)和解 y 的方程(3.10) 遵循相似的规则,因此系数矩阵的Doolittle分解和解方程组 Ly = b 可以同时进行。
- 以 N=3 为例, r 表示分解步数:

$$A = (A, B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34} \end{bmatrix} r = 1$$

$$= 2$$

$$\parallel \parallel$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & y_1 \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & y_2 \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & y_3 \end{bmatrix}$$

• 紧凑格式的Doolittle分解过程中数组 A 的变化(N=3):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r=1} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ l_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \xrightarrow{r=2} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

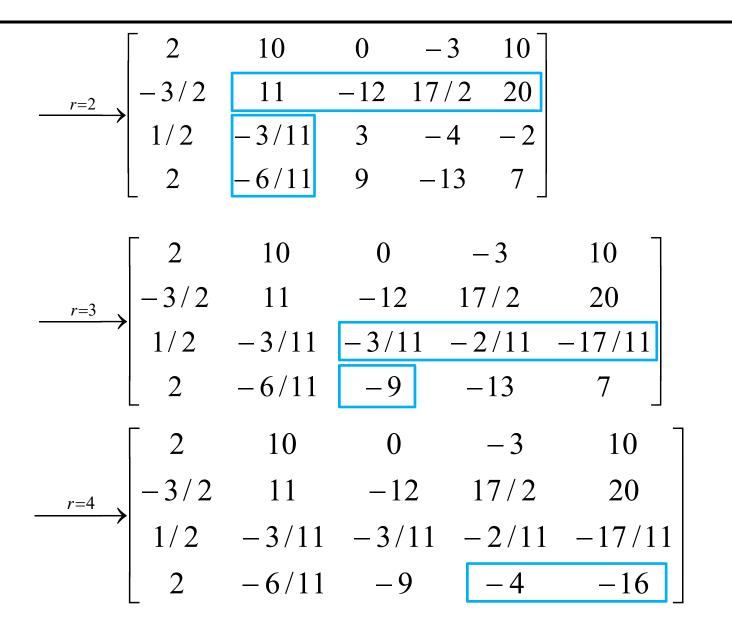
$$\xrightarrow{r=3} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & y_1 \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & y_2 \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & y_3 \end{bmatrix}$$

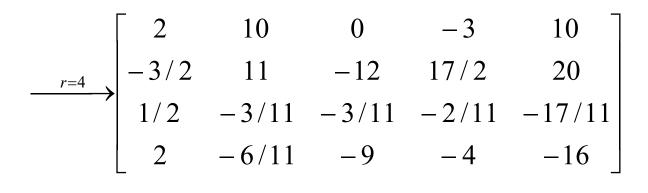
• 例2: 用紧凑格式的Doolittle法解例1中的方程组

解:

(1) 分解得到 L 和 U,并得到 Ly = b 的解 y

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\ -3 & -4 & -12 & 13 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ 4 & 14 & 9 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$





$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 & 1 \\ 1/2 & -3/11 & 1 \\ 2 & -6/11 & -9 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ 11 & -12 & 17/2 \\ & -3/11 & -2/11 \\ & & -4 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ -17/11 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ & 11 & -12 & 17/2 \\ & & -3/11 & -2/11 \\ & & & -4 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ -17/11 \\ -16 \end{bmatrix}$$

(2) 解 Ux = y, 计算得:

$$\mathbf{x} = (1,2,3,4)^T$$

§3直接三角分解法

3-2 部分选主元的Doolittle分解

- Doolittle分解法的 u_{rr} 或Crout法中的 l_{rr} (r = 1,2,...,n)称为主元素。
- 为避免"小主元"做除数,算法中需要加入选主元措施。
- 部分选主元Doolittle法:在每一步分解时,先选列主元, 再进行分解计算。

• 过程描述如下:设用紧凑格式的Doolittle法已完成了第r-1步分解

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & & & & \cdots & u_{1r} & \cdots & u_{1n} & u_{1,n+1} \\ l_{21} & u_{22} & & & & \vdots & & \vdots \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & u_{r-1,r-1} & u_{r-1,r} & \cdots & u_{r-1,n} & u_{r-1,n+1} \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & & l_{r,r-1} & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & a_{r,n+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & l_{n,r-1} & a_{nr} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

- 第 *r* 步分解: 首先在数组 *A* 的第 *r* 列主对角元以下(含主对角元)选主元,步骤如下:
 - 1. 计算中间量 S_i ,并存入 A(i,r),

$$A(i,r) \leftarrow S_i = A(i,r) - \sum_{k=1}^{r-1} A(i,k)A(k,r)$$
 (3.16)
 $i = r, \dots, n; r = 1, \dots, n-1$

- 2. 选绝对值最大的 S_i ,即确定行号 i_r ,使满足 $|S_{i_r}| = \max_{r \leq i \leq N} |S_i|$
- 3. 换行:如果 $i_r \neq r$,则交换数组 A 中的第 r 行与 i_r 行,其中,新位置主元素仍记为

$$u_{rr} = A(r,r)$$

4. 分解计算:

$$A(i,r) \leftarrow l_{ir} = \frac{A(i,r)}{A(r,r)},$$
 (3.17)
 $i = r + 1, \dots, n; r = 1, 2, \dots, n - 1$

$$A(r,i) \leftarrow u_{ri} = A(r,i) - \sum_{k=1}^{r-1} A(r,k)A(k,i),$$
 (3.18)
 $i = r+1, \dots, n+1; r = 1, 2, \dots, n$

注: 以上规定
$$\sum_{k=1}^{0} A(r,k)A(k,i) = 0$$

例:用部分选主元的Doolittle法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & -9 & 2 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解:用紧凑式数组 A 进行分解如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 4 \\ 4 & -9 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r=1 \\ A(i,1) \leftarrow S_i \\ i=1,2,3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 4 \\ 4 & -9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\beta \not R} \begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 & 1 \\ 1/2 & -4 & 6 & 4 \\ 1/4 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r=2} \xrightarrow{A(i,2) \leftarrow S_i} = 1 \\
\xrightarrow{i=2,3} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/4} \xrightarrow{1/4} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/4} \xrightarrow{1/4} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/4} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/4} \xrightarrow{1/2} \xrightarrow{1/4} \xrightarrow{1$$

• 紧凑格式的Doolittle法还可用于解矩阵方程(系数矩阵相 同的系列方程组):

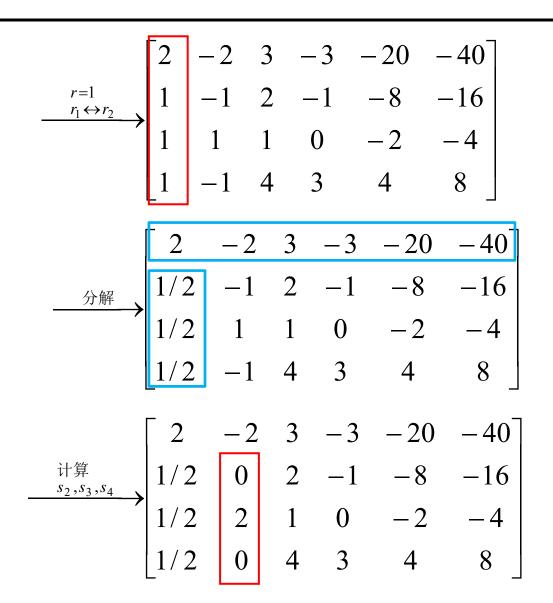
$$AX = B$$

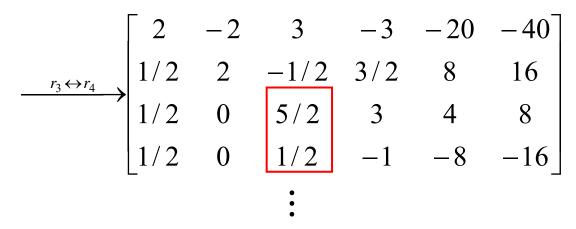
其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_m), B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$

• 用部分选主元Doolittle法解矩阵方程 AX = B, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -8 & -16 \\ -20 & -40 \\ -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{bmatrix}$$

解:
$$(A,B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 & -16 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & -40 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$





下省略(详见pp48-50)

$$X = \begin{vmatrix} -7 & -14 \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

- 由于矩阵三角分解的唯一性,直接三角分解法和Gauss消 去法的解是一致的(如果不考虑舍入误差)。
- 解 Ly = b 对应于消元;解 Ux = y 对应于回代。
- 直接三角分解法的优势在于
 - (1)内积运算可以采用双精度运算,
 - (2) 节省内存。
- 因此,直接三角分解法可为提高解的精度提供方便。

本节课小结

- 介绍了基本的直接三角分解法(主要是Doolittle 分解算法),研究 *L*, *U* 的元素和 *A* 的元素之间的直接关系。
- · 介绍了Doolittle分解法的紧凑格式,可用于解矩阵方程。
- 简介了可避免"小主元"的部分选主元Doolittle 分解法。

作业

习题二: 9, 10(分解 A),

13 (用紧凑格式Doolittle分解法)

【选做】习题二: 10 (分解 B, MATLAB编程, 40分)

作业上交日期: 2018年10月09日

下节课内容

第二章 解线性方程组的直接法 § 4 平方根法 § 5 追赶法