深圳大学医学部生物医学工程学院

本科生课程作业

课程：计算方法

（2018-2019 学年第一学期）

任课教师：张治国

专业（方向）	生物医学工程
年级/班级	2016 级 2 班
学号	2016222042
姓名	陈焕鑫
提交日期	2018 年 11 月 20 日

供助教评分使用	
助教姓名	
收到日期	201__年 ___ 月 ___ 日
评分(0-100)	
评语（如有）	

17. 求满足下列条件的Hermite插值多项式.

x_k	y_k	y'_k	x_k	y_k	y'_k
1	2	1	2	3	−1

解:

设 $x_0=1, x_1=2$, 则

$$\alpha_0(x)=(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2=(1-2\frac{x-1}{1-2})(\frac{x-2}{1-2})^2=2x^3-9x^2+12x-4,$$

$$\alpha_1(x)=(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2=(1-2\frac{x-2}{2-1})(\frac{x-1}{2-1})^2=-2x^3+7x^2-8x+3,$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2=(x-1)(\frac{x-2}{1-2})^2=x^3-5x^2+8x-4,$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2=(x-2)(\frac{x-1}{2-1})^2=x^3-4x^2+5x-2.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad H_3(x)&=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y'_0\beta_0(x)+y'_1(x)\beta_1(x)\\&=2(2x^3-9x^2+12x-4)+3(-2x^3+7x^2-8x+3)+(x^3-5x^2+8x-4)-(x^3-4x^2+5x-2)\\&=-2x^3-2x^2+3x-1\end{aligned}$$

23. 已知一组数据如下:

x_i	2	4	6	8
y_i	2	11	28	48

用最小二乘法求拟合这组数据的一条曲线.

解:

(1) 在坐标平面上描出点(x_i, y_i)(i=0, 1, ⋯, 6), 如图23-1

可得，

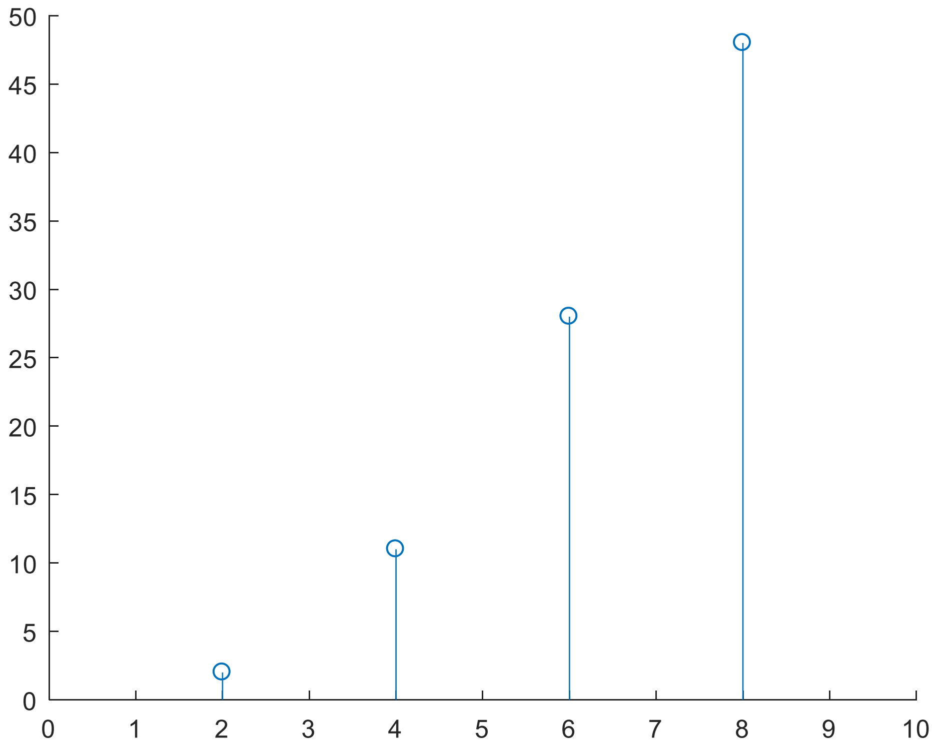

图23-1

(2) 根据散点的分布情况，选用线性函数 $P_0(x)=a_0+a_1x$, 作拟合函数，故取

$$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x.$$

(3) 建立法方程组，这里 n=1，m=3，$\omega_i\equiv 1$.

根据内积公式：

$$\begin{cases}(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i),\\ (f,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i y_i\varphi_k(x_i).\end{cases}$$

可得，

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}\omega_i\times 1\times 1=4,$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}\omega_i\times 1\times x_i=20,$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}\omega_i\times x_i\times x_i=120,$$

$$(f,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}\omega_i\times y_i=89,$$

$$(f,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}\omega_i\times x_i\times y_i=600.$$

法方程组为

$$\begin{pmatrix}4 & 20\\ 20 & 120\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}89\\ 600\end{pmatrix}.$$

用直接三角分解法解得

a_0=−16. 5, a_1=7. 75.

从而 $P(x)=-16.5+7.75x$，为所求最小二乘解.

25. 在某个低温过程中，函数 y 依赖于温度 Q（单位：℃）的试验数据如下：

Q_j	1	2	3	4
y_j	0. 8	1. 5	1. 8	2. 0

且已知经验公式是 $\varphi(Q)=a_0Q+a_1Q^2$，使用最小二乘法求 a_0, a_1.

解:

依题意，建立法方程组，这里 $\varphi_0(Q)=Q$, $\varphi_1(Q)=Q^2$, m=3, n=1, $\omega_i\equiv1$,

根据内积公式：

$$\begin{cases}(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\varphi_j(Q_i)\varphi_k(Q_i),\\(f,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i y_i\varphi_k(Q_i).\end{cases}$$

可得，

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}\omega_i\times Q_i\times Q_i=30,$$
$$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}\omega_i\times Q_i\times Q_i^2=100,$$
$$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}\omega_i\times Q_i^2\times Q_i^2=354,$$
$$(f,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}\omega_i\times Q_i\times y_i=17.2,$$
$$(f,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}\omega_i\times Q_i^2\times y_i=55.$$

法方程组为：

$$\begin{pmatrix}30&100\\100&354\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17.2\\55\end{pmatrix}.$$

用直接三角分解法解得：

a_0=0. 9497, a_1=−0. 1129.

因而，经验公式为 $y=0.9497\varphi_0(Q)-0.1129\varphi_1(Q)=0.9497Q-0.1129Q^2$

附加题【25题用 MATLAB 编程实现】

程序代码如下：

```
clc;clear;close all;

Q = [1,2,3,4];          %基项 1
y = [0.8,1.5,1.8,2.0];  %函数值
Q2 = Q .^ 2;            %基项 2
m = length(Q);          %数据长度
sqm = sqrt(m);          %矩阵的大小

w = zeros(2,2);         %生成存放内积的矩阵
f = zeros(2,1);

%循环求出各个内积公式的值
for jj = 1:1:sqm
    for k = 1:1:sqm
        for ii = 1:1:m
            if jj==1 && k==1
                w(jj,k) = w(jj,k)+Q(ii)*Q(ii);
            elseif (jj==1 && k==2) || (jj==2 && k==1)
                w(jj,k) = w(jj,k)+Q(ii)*Q2(ii);
            elseif jj==2 && k==2
                w(jj,k) = w(jj,k)+Q2(ii)*Q2(ii);
            end
        end
    end
    for ii = 1:1:m
        if jj == 1
            f(jj,1) = f(jj,1)+y(ii)*Q(ii);
        elseif jj == 2
            f(jj,1) = f(jj,1)+y(ii)*Q2(ii);
        end
    end
end
%求得结果
a = inv(w)*f
```

运行程序，得到的结果如下图所示：

```
w =

    30   100
   100   354


f =

   17.2000
   55.0000
```

图 1 – 求得的内积

```
a =

    0.9497
   -0.1129
```

图 2 – 运行结果

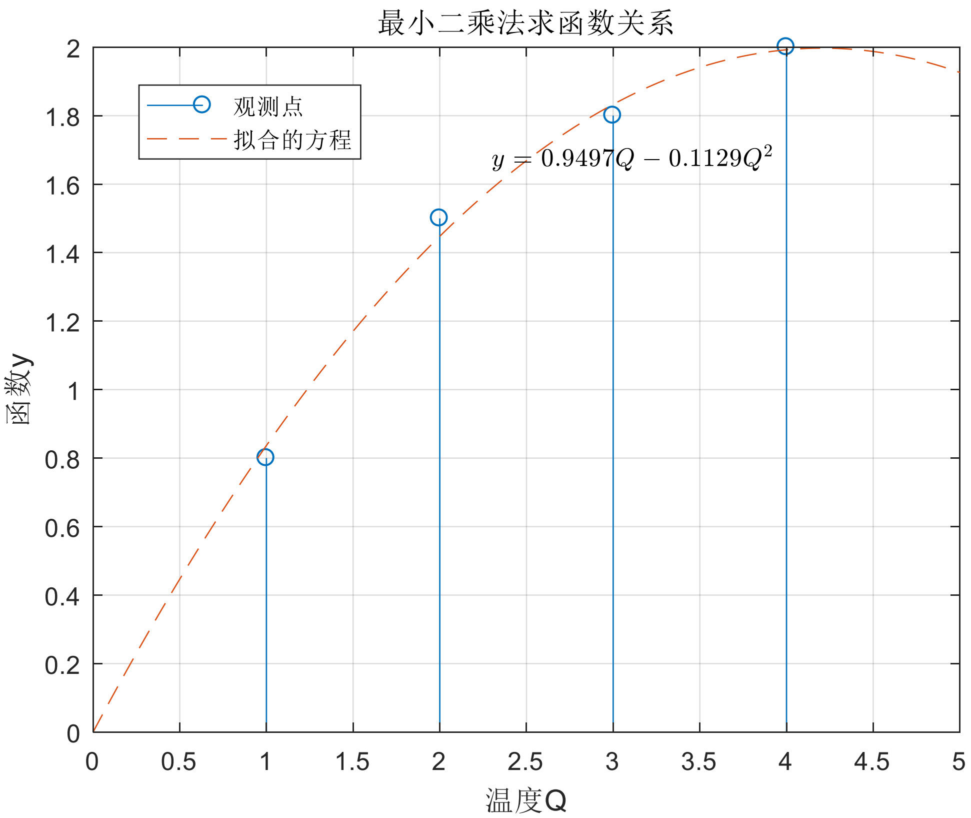

图3 – 拟合的图像