深圳大学医学部生物医学工程学院
本科生课程作业

课程：计算方法

（2018-2019 学年第一学期）

任课教师：张治国

专业（方向）	计算方法
年级/班级	2016 级 2 班
学号	2016222042
姓名	陈焕鑫
提交日期	2018 年 12 月 25 日

供助教评分使用	
助教姓名	
收到日期	201__年 ___ 月 ___ 日
评分(0-100)	
评语（如有）	

9. 设方程组

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12, \\ -x_1+4x_2+2x_3=20, \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3. \end{cases}$$

试用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解此方程组，$x^{(0)}=(0,0,0)^T$，当 $\max\limits_{1\le i\le 3}|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|\le 10^{-5}$ 时迭代终止.

解：

（1）Jacobi 迭代法：

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12, \\ -x_1+4x_2+2x_3=20, \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{5}(-12-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}(20+x_1^{(k)}-2x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{10}(3-2x_1^{(k)}+3x_2^{(k)}). \end{cases}$$

初始向量为 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$，可得

$x_1^{(1)}=-2.4, x_2^{(1)}=5, x_3^{(1)}=0.3$

$x_1^{(2)}=-4.6, x_2^{(2)}=4.25, x_3^{(2)}=2.28$

$x_1^{(3)}=-4.556, x_2^{(3)}=2.745, x_3^{(3)}=2.467$

$x_1^{(4)}=-3.9914, x_2^{(4)}=2.6275, x_3^{(4)}=2.0347$

$x_1^{(5)}=-3.85794, x_2^{(5)}=2.98480, x_3^{(5)}=1.88653$

……

$x_1^{(19)}=-3.99998953, x_2^{(19)}=3.00000095, x_3^{(19)}=1.99999145$

$x_1^{(20)}=-3.99999867, x_2^{(20)}=3.00000689, x_3^{(20)}=1.99999819$

当计算到 k=19 时，满足 $\max\limits_{1\le i\le 3}|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|\le 10^{-5}$，迭代终止.

$\therefore x=(-3.99999867, 3.00000689, 1.99999819)^T.$

（2）Gauss-Seidel 迭代法：

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12,\\ -x_1+4x_2+2x_3=20,\\ 2x_1-3x_2+10x_3=3.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{5}(-12-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}),\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(20+x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}),\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{10}(3-2x_1^{(k+1)}+3x_2^{(k+1)}).\end{cases}$$

初始向量为 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$, 可得

$x_1^{(1)}=-2.4, x_2^{(1)}=4.4, x_3^{(1)}=2.1$

$x_1^{(2)}=-4.58, x_2^{(2)}=2.805, x_3^{(2)}=2.0575$

$x_1^{(3)}=-3.9335, x_2^{(3)}=2.987875, x_3^{(3)}=1.983063$

……

$x_1^{(9)}=-3.9999935, x_2^{(9)}=3.0000008, x_3^{(9)}=1.9999999$

$x_1^{(10)}=-4.0000001, x_2^{(10)}=3.0000005, x_3^{(10)}=2.0000002$

当计算到 k=9 时，满足 $\max\limits_{1\le i\le 3}|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|\le 10^{-5}$，迭代终止.

$\therefore x=(-4.0000001, 3.0000005, 2.0000002)^T$

18. 用 Newton 法求下列方程的根，要求 $|x^{(k)}-x^{(k-1)}|<10^{-5}$.

(1) $x^3-x^2-x-1=0$, 取 $x_0=0$.

解：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-x_k^2-x_k-1}{3x_k^2-2x_k-1}，\text{可得}$$

$$x_1=x_0-\frac{x_0^3-x_0^2-x_0-1}{3x_0^2-2x_0-1}=0-1=-1$$

$$x_2=x_1-\frac{x_1^3-x_1^2-x_1-1}{3x_1^2-2x_1-1}=-0.5$$

$$x_3=x_2-\frac{x_2^3-x_2^2-x_2-1}{3x_2^2-2x_2-1}=0.666667$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^3 - x_3^2 - x_3 - 1}{3x_3^2 - 2x_3 - 1} = -1.148148$$

……

$$x_{13} = x_{12} - \frac{x_{12}^3 - x_{12}^2 - x_{12} - 1}{3x_{12}^2 - 2x_{12} - 1} = 1.839287$$

$$x_{14} = x_{13} - \frac{x_{13}^3 - x_{13}^2 - x_{13} - 1}{3x_{13}^2 - 2x_{13} - 1} = -1.839287$$

当计算到 k=14 时，满足 $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < 10^{-5}$. 迭代终止.

∴方程的根 x≈-1.839287.

21. 用弦截法求下列方程的根. 要求 $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < 10^{-5}$.

(1) $xe^x - 1 = 0$, **取初值 x_0=0.5，x_1=0.6.**

解：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{x_k e^{x_k} - x_{k-1} e^{x_{k-1}}}(x_k - x_{k-1}) \text{，可得}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 e^{x_1} - 1}{x_1 e^{x_1} - x_0 e^{x_0}}(x_1 - x_0) = 0.565315$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 e^{x_2} - 1}{x_2 e^{x_2} - x_1 e^{x_1}}(x_2 - x_1) = 0.567094$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 e^{x_3} - 1}{x_3 e^{x_3} - x_2 e^{x_2}}(x_3 - x_2) = 0.567143$$

$$x_5 = x_4 - \frac{x_4 e^{x_4} - 1}{x_4 e^{x_4} - x_3 e^{x_3}}(x_4 - x_3) = 0.567143$$

当计算到 k=5 时，满足 $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < 10^{-5}$. 迭代终止.

∴方程的根 x≈0.567143.

22. Heonardo 于 1225 年研究了方程

$$f(x)=x^3+2x^2+10x-20=0,$$

并得出一个根α=1.36880817，但当时无人知道他用了什么方法，这个结果在当时是个非常著名的结果，请你构造一种简单迭代来验证此结果.

解：

$f(x)=x^3+2x^2+10x-20,$ 则 $f'(x)=3x^2+4x+10=3(x+\frac{2}{3})^2+\frac{26}{3}>0$，当 x∈R 时

又 $f(1)=-7<0, f(2)=16>0,$ ∴f(x)=0 有唯一实根，在 x∈（1,2）上.

用 Newton 法可得，

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3+2x_k^2+10x_k-20}{3x_k^2+4x_k+10},$$

取初值 x_0=1.5,

$$x_1=x_0-\frac{x_0^3+2x_0^2+10x_0-20}{3x_0^2+4x_0+10}=1.373626373$$

$$x_2=x_1-\frac{x_1^3+2x_1^2+10x_1-20}{3x_1^2+4x_1+10}=1.368814819$$

$$x_3=x_2-\frac{x_2^3+2x_2^2+10x_2-20}{3x_2^2+4x_2+10}=1.368808107$$

$$x_4=x_3-\frac{x_3^3+2x_3^2+10x_3-20}{3x_3^2+4x_3+10}=1.368808107$$

$x_5=1.368808107$

∴方程的根 x≈1.368808107