第1章 引 论

知识要点

一、误差来源及其分类

数值分析主要研究两类误差：舍入误差和截断误差。

1. 舍入误差

由于计算机字长的有限性，数据在机器内的表示以及进行算术运算（+，-，×，÷）时进行舍入处理产生的误差，称为舍入误差。

2. 截断误差（方法误差）

为了在有限时间段内得到运算结果，用有限的过程近似取代无穷的过程时产生的误差，称为截断误差。

用数值方法求解数学模型所得到的近似解包含舍入误差和截断误差两部分。

二、误差度量

1. 绝对误差（误差）

(1) 定义：设 x 为准确值，x^* 为 x 的一个近似值，称 $E(x^*)=x^*-x$ 为近似值 x^* 的绝对误差，简称误差，可简记为 E。

(2) 绝对误差限（误差限）：绝对误差绝对值的某个上界 $\varepsilon(x^*)$，即 $|E|=|x^*-x|\leqslant\varepsilon(x^*)$，可简记为 ε。

2. 相对误差

(1) 定义：近似值 x^* 的绝对误差与准确值 x 的比值，即

$$E_r(x^*)=\frac{E(x^*)}{x}=\frac{x^*-x}{x}$$

称为近似值 x^* 的相对误差，可简记为 E_r。

(2) 相对误差限：相对误差绝对值的任何一个上界 $\varepsilon_r(x^*)$，均称为相对误差限，简记为 ε_r，即

$$|E_r| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \leqslant \varepsilon_r(x^*)$$

也可用 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon}{x^*}$ 代替 ε_r。

3. 有效数字

(1)定义 1:如果 x^* 的误差绝对值不超过某一位数字的半个单位,且该位数字到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位,则称用 x^* 近似 x 时具有 n 位有效数字,简称 x^* 有 n 位有效数字。

(2)定义 2:设准确值 x 的近似值 x^* 可表示为

$$x^* = \pm 10^n \times 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n \ (\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \text{为 } 0,1,2,\cdots,9 \text{ 中的数字})$$

k 为整数,则使不等式 $|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{k-n}$ 成立的对 x^* 的第 $n+1$ 位经四舍五入得到的 x^* 具有 n 位有效数字。

三、浮点基本运算的误差

1. 浮点数四则运算的误差

设 x, y 为机器规格化浮点数,并且用 $x \pm y, xy, \frac{x}{y}(y \neq 0)$ 分别表示 x 和 y 的 $+,-,\times,\div$ 等四则精确运算,这些运算结果的浮点数表示分别为

$$fl(x \pm y) = (x \pm y)(1 + \varepsilon_{1,2})$$

$$fl(x \cdot y) = (x \cdot y)(1 + \varepsilon_3)$$

$$fl\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)(1 + \varepsilon_4)$$

式中,$|\varepsilon_i| \leqslant 2^{-t+1}$,$i = 1,2,3,4$。

2. 连加和连乘的误差

四、数值方法的稳定性与算法设计原则

1. 四则运算中的稳定性问题

(1)防止大数吃小数。

(2)要避免两个相近数相减。

(3)避免小数作除数和大数作乘数。

2. 提高算法效率问题

(1)尽量减少运算次数。

(2)充分利用耗时少的运算。

(3)充分利用存贮空间。

课后习题解析

1-1 指出由四舍五入得到的下列各数是几位有效数字。

$$x_1^*=7.8673,\quad x_2^*=8.0916,\quad x_3^*=0.06213$$

$$x_4^*=0.07800,\quad x_5^*=90\times10^3,\quad x_6^*=2.0*10^{-4}$$

解 x_1^* 具有5位有效数字，x_2^* 具有5位有效数字，x_3^* 具有4位有效数字，x_4^* 具有4位有效数字，x_5^* 具有2位有效数字，x_6^* 具有2位有效数字。

评注：根据约定写出的数均为有效数字，有效数字为从末位数起向左数位数至左端第一位非零数字。

1-2 设准确值为 $x=3.78695$，$y=10$，它们的近似值分别为

$$x_1^*=3.7869,\quad x_2^*=3.7870 \text{ 及 } y_1^*=9.9999,\quad y_2^*=10.1,\quad y_3^*=10.0001$$

试分析 $x_1^*,x_2^*,y_1^*,y_2^*,y_3^*$ 分别具有几位有效数字。

解 ①将 x_1^* 写成 $x=\pm10^k\times0.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots$ 的表示形式，$x_1^*=0.37869\times10^1$，所以 $k_1=1$。

$$|x_1^*-x|=|3.7869-3.78695|=0.00005\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}=\frac{1}{2}\times10^{k_1-n_1}$$

所以 $n_1=5$。x_1^* 具有5位有效数字。

同理，$x_2^*=0.37870\times10^1$，$k_2=1$。

$$|x_2^*-x|=|3.7870-3.78695|=0.00005\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}=\frac{1}{2}\times10^{k_2-n_2}$$

所以 $n_2=5$。x_2^* 具有5位有效数字。

②将 y_1^*,y_2^*,y_3^* 写成 $x=\pm10^k\times0.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots$ 的表示形式，则

$$y_1^*=0.99999\times10^1,\ k_1=1$$

$$y_2^*=0.101\times10^2,\ k_2=2;\quad y_3^*=0.100001\times10^2,\ k_3=2$$

$$|y_1^*-y|=|9.9999-10|=0.0001\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times10^{k_1-n_1}，所以\ n_1=4。$$

$$|y_2^*-y|=|10.1-10|=0.1\leqslant\frac{1}{2}\times10^{0}=\frac{1}{2}\times10^{k_2-n_2}，所以\ n_2=2。$$

$$|y_3^*-y|=|10.0001-10|=0.0001\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times10^{k_3-n_3}，所以\ n_3=5。$$

1-3 根据求根公式，设计三次代数方程 $ax^3+b=0(a\neq0)$ 的求根算法，并用自然语言和N-S图等两种方法表达。

解 略

1-4 设计求100个正随机数 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 由小到大的求和算法，并用自然语言和流程图

等两种方法表达.

解 略。

1-5 设 $x=2^{1110}\cdot 0.101\,100\,11$, $y=2^{111}\cdot 0.111\,001\,10$,求 $fl(x\pm y)$, $fl(x*y)$。

解 ①对阶 $y=2^{1110}\cdot 0.000\,000\,011\,100\,110$(小阶向大阶看齐)

②舍入 $x+y=2^{1110}\cdot(0.101\,100\,11+0.000\,000\,011\,110\,011\,0)$

$=2^{1110}\cdot 0.101\,101\,00$

所以 $fl(x+y)=2^{1110}\cdot 0.101\,101\,00$

$fl(x-y)=2^{1110}\cdot(0.202\,200\,11-0.000\,000\,011\,100\,110)$

$=2^{1110}\cdot 0.101\,100\,10$

$fl(x*y)=2\,(1\,110+111)\cdot(0.101\,100\,11\times 0.111\,001\,10)$

$=2^{10\,001}\cdot 0.100\,101\,11$

1-6 分别算出取6位和5位有效数字的和 S.

$$S=545\,492+\sum_{i=1}^{100}\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{50}\delta_i$$

其中 $\varepsilon_i=0.8$, $\delta_i=2$。

解 略。

1-7 设光速 $c=(2.997\,902\pm 0.000\,009)\times 10^{10}$ cm/s,取 $c_1^*=2.997\,902\times 10^{10}$ cm/s 作为 c 的近似值,求 c_1^* 的相对误差限;若取 $c_2^*=3.000\,000\times 10^{10}$ cm/s 作为 c 的近似值,求 c_2^* 的相对误差限,并问 c_2^* 有几位有效数字。

解 $|E_r(c_1^*)|=\left|\dfrac{\max(c_1^*-c)}{\min(c)}\right|\leqslant\left|\dfrac{0.000\,009}{2.997\,902-0.000\,09}\right|=3.002\,1\times 10^{-6}$

$$|E_r(c_2^*)|=\left|\frac{\max(c_2^*-c)}{\min(c)}\right|\leqslant\left|\frac{0.002\,098}{2.997\,893}\right|=6.998\,24\times 10^{-4}$$

又因为 $c_2^*=3.000\,000\times 10^{10}=0.300\,000\times 10^{11}$,所以 $k=11$。

$$|c_2^*-c|=0.002\,098\times 10^{10}=0.2.098\times 10^{8}\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{8}=\frac{1}{2}\times 10^{11-n}$$

得 $n=3$,所以 c_2^* 有3位有效数字。

1-8 为了使$\sqrt{11}$的近似值的相对误差不超过0.1%,问至少应取几位有效数字。

解 $\sqrt{11}$的首位数字为 $a_1=3$。设 x^* 有 n 位有效数字,则有

$$\varepsilon_r(x^*)\leqslant\frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n}=\frac{1}{6}\times 10^{(1-n)}$$

令$\dfrac{1}{6}\times 10^{1-n}\leqslant 0.1\%$,解得 $n\geqslant 3.22$,即需取四位有效数字。

评注:设非零近似数 x^* 可用形如式 $x^*=\pm 10^k\times 0.a_1a_2\cdots a_n$ 表示,若 x^* 具有 n 位有效数字,则相对误差限满足 $\varepsilon_r^*\leqslant\dfrac{1}{2a_1}\times 10^{1-n}$。

1-9 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根,使它们具有4位有效数字($\sqrt{783}\approx 27.982$)。

解 应用求根公式得到 $x_{1,2}=28\pm\sqrt{783}$,于是

$$x_1=28+\sqrt{783}\approx 28+27.982=55.982$$

$$x_2=28-\sqrt{783}=\frac{1}{28+\sqrt{783}}\approx\frac{1}{55.982}\approx 0.017\ 863$$

利用误差传播公式易知两根近似值均满足题设要求。

评注:一元函数误差传播为

$$e(f(x^*))=f(x^*)-f(x)\approx f'(x^*)e(x^*)$$

$$\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$$

$$\varepsilon_r(f(x^*))\approx C_p(f,x^*)\varepsilon_r(x^*)$$

其中条件数
$$C_p(f,x^*)\overset{\text{def}}{=}\left|\frac{x^*f'(x^*)}{f(x^*)}\right|$$

1-10 计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$,取$\sqrt{2}\approx 1.4$,利用下列算式计算,哪一个得到的结果最好。

(1)$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$; (2)$(3-2\sqrt{2})^3$; (3)$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$; (4)$99-70\sqrt{0}$。

解 $99-70\sqrt{0}$出现相近数相减,$(3-2\sqrt{2})^3$出现较相近的数相减,故二者不能得到最好的结果,$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$与$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$均不出现相近数相减,但前者的乘法运算次数多,而二者除法运算次数相同,每次乘除法运算必然引入新的舍入误差,故式$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$将出现最好的运算结果。

1-11 如何计算下列函数值才比较精确。

(1)$\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{1+x}$,对$|x|\ll 1$;

(2)$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}$,对$|x|\gg 1$;

(3)$\int_N^{N+1}\frac{dx}{1+x^2}$,其中 N 充分大;

(4)$\frac{1-\cos x}{\sin x}$,对$|x|\ll 1$;

(5)$\ln(30-\sqrt{30^2-1})$(开方用6位函数表)。

解 (1)$\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{(1+x)-(1-x)(1+2x)}{(1+2x)(1+x)}=\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$

(2)$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}$

(3)$\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(N+1)-\arctan N\overset{\text{def}}{=}\alpha-\beta$

$$=\arctan(\tan(\alpha-\beta))=\arctan\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\arctan\frac{N+1-N}{1+(N+1)N}=\arctan\frac{1}{1+N+N^2}$$

(4) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}=\tan\dfrac{x}{2}$

(5) $\ln(30-\sqrt{30^2-1})=\ln\dfrac{1}{30+\sqrt{30^2-1}}=-\ln(30+\sqrt{30^2-1})$

评注：(5)令 $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，则 $f(30)=\ln(30-\sqrt{899})$，记 $a=30-\sqrt{899}$，若用 6 位的开方函数值表，则有 $a^*=30-29.9833=0.0167$。故有 $\varepsilon(a^*)=\dfrac{1}{2}\times10^{-4}$，而 $f(30)\approx\ln a^*$。于是

$$\varepsilon(f(30))=\varepsilon(\ln a^*)\approx\left|\frac{1}{a^*}\right|\varepsilon(a^*)=\frac{0.5}{0.0167}\times10^{-4}\approx0.003$$

对于等价公式有 $f(30)=-\ln(30+\sqrt{899})$，记 $b=30+\sqrt{899}$，用同样函数值表，有 $b^*=30+29.9833=59.9833$，进而得到 b^* 的绝对误差限 $\varepsilon(b^*)=(2\times10^{-4})^{-1}$。

对 $f(30)\approx-\ln b^*$ 使用误差传播公式，有

$$\varepsilon(f(30))=\varepsilon(-\ln b^*)\approx\left|-\frac{1}{b^*}\right|\varepsilon(b^*)=\frac{0.5}{59.9833}\times10^{-4}\approx0.834\times10^{-6}$$

TONG BU XUN LIAN TI 同步训练题

1. 已知 $e=2.71828\cdots$，问下列 x 的近似值 a 有几位有效数字，相对误差是多少？

(1) $x=e,\ a=2.7$　　(2) $x=e,\ a=2.718$

(3) $x=e/100,\ a=0.027$　　(4) $x=e,\ a=10.10111$(二进制)

2. 经过四舍五入得出 $x_1=6.1025$，$x_2=80.115$。(1)它们各具有几位有效数字？(2)求 x_1+x_2，x_1-x_2，x_1x_2 和 $\dfrac{x_1}{x_2}$ 的绝对误差限。

3. 为使 $\sqrt{70}$ 的近似数的相对误差小于 0.1%，问查开方表时，要取几位有效数字？

4. 计算 sin1.2，问要取几位有效数字才能保证相对误差限不大于 0.01%？

5. 设 $I_n=\int_0^1 x^n e^{x-1}\mathrm{d}x$，求证：

(1) $I_n=1-nI_{n-1}$，$n=1,2,3\cdots$

(2)正向递推时误差传播逐步放大，逆向递推时误差传播逐步衰减。

6. 真空中自由落体运动距离 s 和时间 t 的关系是 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，并设重力加速度 g 是准确的，而对 t 的测量有 ±0.1 秒的误差，试证：当 t 增加时，距离 s 的绝对误差增加，相对误差却减小。

7. 计算多项式 $p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ 的值 $p_n(x)$，需要多少次算术

运算；若利用秦九韶算法

$$p_n(x)=a_0+x(a_1+x(a_2+x(a_3+\cdots+x(a_{n-2}+x(a_{n-1}+a_nx))\cdots)))$$

计算多项式的值 $p_n(x)$，又需要多少次算术运算？

8. 试用两种方法计算：$\frac{1}{994}-\frac{1}{995}$，并比较结果（取五位浮点数）。

9. 利用等价变换使下列表达式的计算结果比较精确：

(1) $\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}$，$|x|\gg 1$ (2) $\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}$，$x\ll 1$

(3) e^x-1，$|x|\ll 1$

10. 已知三角形面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$，$0<C<\frac{\pi}{2}$，且测量 a,b,c 的误差分别为 $\Delta a,\Delta b,\Delta c$。证明：面积的误差 Δs 满足

$$\left|\frac{\Delta s}{s}\right|\leqslant\left|\frac{\Delta a}{a}\right|+\left|\frac{\Delta b}{b}\right|+\left|\frac{\Delta c}{c}\right|$$

11. 由图 1－1 所示知道三角形一边和两邻角的近似值为 $a=100$，$\beta=45°$，$\gamma=45°$。

假设 a,β,γ 的观测误差限分别为 0.1°，0.1°，0.1°。试计算另外的边和角，并给出误差的界。

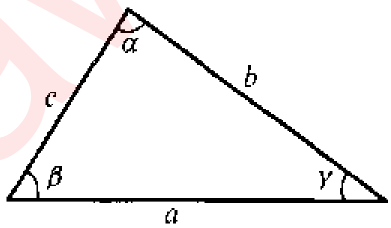


图 1－1

12. 在计算机上对 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 自左至右求和

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

若 n 很大，则 s_n 将不随 n 的增加而增加。试说明原因。

同步训练题答题

TONG BU XUN LIAN TI DA AN

1. 解 (1)按四舍五入的原则，$a=2.7$ 作为 x 的近似值具有 2 位有效数字，且

$$E_r(a)=\frac{|x-a|}{|x|}=\frac{|e-2.7|}{e}=0.006\,7\cdots\approx 0.67\%$$

(2)按四舍五入的原则，$a=2.718$ 作为 x 的近似值具有 4 位有效数字，且

$$E_r(a)=\frac{|x-a|}{|x|}=\frac{|e-2.718\,1|}{e}=0.000\,10\cdots\approx 0.010\%$$

(3) $a=0.027=2.7\times10^{-2}$ 作为 $x=e/100$ 的近似值，有

$$E_r(a)=\frac{|x-a|}{|x|}=0.006\,7\cdots\approx 0.67\%$$

又 $$0.5\times10^{-4}<|x-a|=|e/100-0.027|=0.000\,18\cdots\leqslant 0.5\times10^{-2-(2-1)}$$

根据绝对误差与有效数字的关系，$a=0.027$ 具有 2 位有效数字。

(4)因为 $a=10.101\ 11$(二进制)$=2.718\ 75$(十进制)，故有

$$E_r(a)=\frac{|x-a|}{|x|}=0.000\ 17\cdots\approx 0.017\%$$

又
$$0.5\times 10^{-4}<|x-a|=0.000\ 46\cdots\leqslant 0.5\times 10^{-4+1}$$

从而可知，$a=10.101\ 11$(二进制)作为 $x=e$ 的近似值时具有 4 位有效数字。

2. **解**　记 x_1 和 x_2 对应的精确值分别是 x_1^* 和 x_2^*，则有

$$|x_1^*-x_1|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-4}\quad 和\quad |x_2^*-x_2|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

故知 x_1 和 x_2 各具有 5 位有效数字。

再根据误差限估计式，得

$$\varepsilon(x_1\pm x_2)\leqslant\varepsilon(x_1)+\varepsilon(x_2)\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-4}+\frac{1}{2}\times 10^{-3}=0.000\ 55$$

$$\varepsilon(x_1x_2)\leqslant|x_2|\varepsilon(x_1)+|x_1|\varepsilon(x_2)\leqslant 80.115\times\frac{1}{2}\times 10^{-4}+6.1025\times\frac{1}{2}\times 10^{-3}=0.007\ 057$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\leqslant\frac{|x_2|\varepsilon(x_2)+|x_1|\varepsilon(x_2)}{|x_2|^2}\leqslant\frac{0.007\ 057}{80.115^2}=0.109\ 95\times 10^{-5}$$

3. **解**　设查表时取 n 位有效数字，则由公式

$$\frac{|x-x^*|}{|x^*|}\leqslant\frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n}$$

并注意到 $8\leqslant\sqrt{70}\leqslant 9$，可取 $a_1=8$。因此，为使 $\sqrt{70}$ 的近似数的相对误差小于 0.1%，只需取 $n=3$，就有 $\frac{1}{2a_1}\times 10^{1-n}=\frac{1}{2\times 8}\times 10^{1-3}<0.1\%$，查开方表，$\sqrt{70}\approx 8.37$，取三位有效数字。

4. **解**　设取 n 位有效数字，由 $\sin 1.2=0.93\cdots$，故 $a_1=9$；又由 $|E_r(x^*)|\leqslant 0.01\%=10^{-4}$，解不等式 $\frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1}\leqslant 10^{-4}$，由此，取 $n=4$ 即可满足要求。

5. **解**　(1)当 $n\geqslant 1$ 时，有

$$I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{d}(e^{x-1})=[x^ne^{x-1}]_0^1-n\int_0^1 x^{n-1}e^{x-1}\mathrm{d}x=1-nI_{n-1}$$

(2)正向递推，由 I_{n-1} 计算 I_n，即

$$I_n=1-nI_{n-1},\ n=1,2,3\cdots$$

若已知 I_{n-1} 的一个近似值 I_{n-1}，则由上式递推得到 I_n 的近似值为 $\tilde{I}_n=1-n\tilde{I}_{n-1}$ 从而得到 $I_n-\tilde{I}_n=-n(I_{n-1}-\tilde{I}_{n-1})$，即 $|I_n-\tilde{I}_n|=n|I_{n-1}-\tilde{I}_{n-1}|$。

出此可见，I_{n-1} 的误差将放大 n 倍传播到 I_n，误差传播逐步放大。

逆向递推，由 I_n 计算 I_{n-1}，即

$$I_{n-1}=\frac{1}{n}(1-I_n),\ n=N,N-1,N-2,\cdots$$

若已知 I_n 的一个近似值 $\tilde{I}_n$，则由上式递推得到 I_{n-1} 的近似值为 $\tilde{I}_{n-1}=\frac{1}{n}(1-\tilde{I}_n)$，从而得到 $I_{n-1}-\tilde{I}_{n-1}=-\frac{1}{n}(I_n-\tilde{I}_n)$，即 $|I_{n-1}-\tilde{I}_{n-1}|=\frac{1}{n}|I_n-\tilde{I}_n|$。

由此可见，I_n 的误差将缩小 n 倍传播到 I_{n-1}，误差传播逐步衰减。

6. **证明** 由 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 得 $ds=gtdt$，因而

$$E(s)\approx gtE(t),E_r(s)=\frac{E(s)}{s}\approx\frac{gtE(t)}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2}{t}E(t)$$

于是
$$|E(s)|\approx gt|E(t)|,\quad |E_r(s)|\approx\frac{2}{t}|E(t)|$$

可见，当 $|E(t)|$ 固定时，$|E(s)|$ 随着 t 的增加而增加，而 $|E_r(s)|$ 却随着 t 的增加而减少。

7. **解** 如果先计算 $x^2,x^3,\cdots,x^n$ 再作线性组合，则需要 $1+\underbrace{2+\cdots+2}_{n-1个}(=2n-1)$ 次乘法运算和几次加法运算，共需 $3n-1$ 次算术运算；若利用秦九韶算法，则只需 $n-1$ 次乘法运算和几次加法运算，共需 $2n-1$ 次算术运算。

8. **解** 方法一：将两数直接相减，得

$$\frac{1}{994}-\frac{1}{995}\approx 0.100\,60\times10^{-2}-0.100\,50\times10^{-2}=0.100\,00\times10^{-5}$$

方法二：先作恒等变形，得

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$$

取 $n=994$，再进行近似计算

$$\frac{1}{994}-\frac{1}{995}=\frac{1}{994\times995}\approx0.101\,11\times10^{-5}$$

而精确值是 $0.101\,109\,16\cdots\times10^{-5}$，可见方法一不如方法二好。主要原因是：方法一将两个相近的数直接相减，造成了有效数字的损失。

9. **解** (1) $\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{1+x-(1-x)(1+2x)}{(1-2x)(1+x)}=\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$

(2) 为避免相近数相减，造成有效数字的损失，应作变换

$$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}$$

(3) 取 Taylor 展开式的前几项：$e^x-1\approx x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$。

10. **证明** 由多元函数近似值的绝对误差和相对误差估计公式，有

$$\Delta s\leqslant\left|\frac{\partial s}{\partial a}\right|\Delta a+\left|\frac{\partial s}{\partial b}\right|\Delta b+\left|\frac{\partial s}{\partial c}\right|\Delta c$$
$$=\left|\frac{1}{2}b\sin C\right|\Delta a+\left|\frac{1}{2}a\sin C\right|\Delta b+\left|\frac{1}{2}ab\cos C\right|\Delta c$$

故
$$\left|\frac{\Delta s}{s}\right| \leqslant \left|\frac{\frac{1}{2}b\sin C}{\frac{1}{2}ab\sin C}\right| |\Delta a| + \left|\frac{\frac{1}{2}a\sin C}{\frac{1}{2}ab\sin C}\right| |\Delta b| + \left|\frac{\frac{1}{2}ab\cos C}{\frac{1}{2}ab\sin C}\right| |\Delta c|$$
$$= \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{\tan C}\right|$$

由于 $0 < C < \frac{\pi}{2}$，故有 $\tan C > C > 0$，从而得

$$\left|\frac{\Delta s}{s}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{c}\right|$$

11. 解　由题意知 $a = 100, \beta = 45° = \frac{\pi}{4}, \gamma = 45° = \frac{\pi}{4}$，有

$$|e(a)| \leqslant 0.1,\quad |e(\beta)| \leqslant 0.1° = \frac{\pi}{1\,800},\quad |e(\gamma)| \leqslant 0.1° = \frac{\pi}{1\,800}$$

根据三角形内角和为 π，知

$$\alpha = \pi - \beta - \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$|e(\alpha)| \approx |-e(\beta) - e(\gamma)| \leqslant |e(\beta)| + |e(\gamma)| \leqslant \frac{\pi}{1\,800} + \frac{\pi}{1\,800} = \frac{\pi}{900} = 0.2°$$

由正弦定理有
$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 100 \times \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}} = 50\sqrt{2}$$

$$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 100 \times \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}} = 50\sqrt{2}$$

$$db = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}da + a\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}d\beta - a\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}dx$$

知
$$e(b) \approx \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}e(a) + a\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}e(\beta) - a\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}e(\alpha)$$

因而
$$|e(b)| \approx \left|\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}e(a) + a\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}e(\beta) - a\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}e(\alpha)\right|$$
$$\leqslant \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}|e(a)| + a\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}|e(\beta)| + a\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}|e(\alpha)|$$
$$= \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}} \times 0.1 + 100 \times \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}} \times 1\,800 + 100 \times \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} \times \frac{\pi}{900}$$
$$= 0.194$$

同理，$|e(c)| \leqslant 0.194$。

12. 解　这主要是由于在计算机上作加法运算需先对位而造成的。例如，设这台计算机具有 7 位精度，即字长 $t = 7$。由 S_n 的性质知，S_n 单调增加且趋向于 $+\infty$。另一方面通项 $\frac{1}{n}$ 单调

减少且趋于零，所以 $\frac{\frac{1}{m+1}}{S_m}$ 为单调减少序列，因而必存在 m 使得 $\frac{\frac{1}{m+1}}{S_m} < \frac{1}{2} \times 10^{-7}$。

设 $S_m = 0.a_1 a_2 \cdots a_7 \times 10^p$，$a \neq 0$，则

$$\begin{aligned} S_m + \frac{1}{m+1} &= 0.a_1 a_2 \cdots a_7 \times 10^p + \frac{1}{m+1} \\ &= 0.a_1 a_2 \cdots a_7 \times 10^p + 0.000\,000\,00 \times 10^p \\ &= (0.a_1 a_2 \cdots a_7 + 0.000\,000\,0) \times 10^p = 0.a_1 a_2 \cdots a_7 \times 10^p \\ &= S_m \end{aligned}$$

即
$$S_{m+1} = S_m$$

同理，当 $k > m$ 时，有

$$\begin{aligned} S_m + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{k} &= \left(S_m + \frac{1}{m+1}\right) + \cdots + \frac{1}{k} \\ &= \left(S_m + \frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \frac{1}{k} = \cdots = S_m \end{aligned}$$

即
$$S_k = S_m$$

第 2 章　解线性方程组的直接法

知识要点

一、Gauss 消去法

对方程组 $Ax=b$(A 非奇异),Gauss 消去法是将方程组约化为一个上三角形的方程组,然后回代求解。在消元过程中,为避免主元素相对其他元素过小,以致引起舍入误差过大的情形,可将同列中绝对值最大的元素换到主元素位置上,即为列主元素消去法。

二、直接三角分解法

高斯消元过程实现了 A 的一个三角因子分解 $A=LU$,其中 L 为单位下三角阵,U 为上三角阵,此分解称为 A 的 Doolittle 分解。

定理 1　A 有唯一的 Doolittle 分解的主要条件是 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式均不为零。

定理 2　若 A 对称,且 A 的所有顺序主子式均不为零,则 A 有唯一的分解式

$$A=LDL^{\mathrm{T}}$$

式中　L——单位下三角阵;

D——对角阵。

定理 3　若 A 对称正定,则存在一个实非奇异下三角阵 L,使 $A=LL^{\mathrm{T}}$。当限定 L 的对角元为正时,这种分解是唯一的。

如果在 $A=LU$ 分解式中,U 为单位上三角形矩阵,L 为下三角形矩阵,用类似于推导 Doolittle 分解的方法,可以得到递推地计算 L 和 U 的公式,称上述分解为 Crout 分解

系数矩阵的 Doolittle 分解与解方程组 $Ly=b$ 可以同时进行,都归结为对 $A=(A,b)$ 进行分解计算,然后再解 $Ux=y$,称这种求解方式为紧凑格式。

设 A 是对称正定矩阵，则存在对角线元素全是正数的下三角形矩阵 L，使 $A=LL^{\mathrm{T}}$ 存在且唯一，称这种分解为 Cholesky 分解。

SHU HOU XI TI JIE XI 书后习题解析

2-1　分别用 Gauss 消去法和列主元素消去法解方程组

$$\begin{cases}0.002x_1+87.13x_2=87.15\\4.453x_1-7.26x_2=37.27\end{cases}$$

并对所得的结果进行分析(用具有舍入的四位浮点数进行运算)，并通过计算剩余量 $V=b-Ax$ 判断结果的正确性。

解　(1)用 Gauss 消去法求解。消元过程用矩阵可表示为

$$\left[\begin{array}{cc:c}0.002\,0 & 87.13 & 87.15\\4.453 & -7.260 & 37.27\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-r_1\times2.227\times10^3}\left[\begin{array}{cc:c}0.002\,0 & 87.13 & 87.15\\0 & -1.840\times10^5 & -1.941\times10^5\end{array}\right]$$

回代求解得 $x_2=1.001, x_1=-35.00$。

(2)用列主元素消去法求解。

$$\left[\begin{array}{cc:c}0.002\,0 & 87.13 & 87.15\\4.453 & -7.260 & 37.27\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\Leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{cc:c}4.453 & -7.260 & 37.27\\0.002\,0 & 87.13 & 87.15\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1\times0.000\,4}\left[\begin{array}{cc:c}4.450 & -7.260 & 37.27\\0 & 87.13 & 87.13\end{array}\right]$$

回代求解得 $x_2=1.000, x_1=10.00$。因

$$r=b-Ax$$

对于(1)有　$r_1=\begin{bmatrix}87.15\\37.27\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.002\,0 & 87.13\\4.453 & -7.260\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-35.00\\1.001\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.002\,87\\-125.83\end{bmatrix}$

对于(2)有　$r_2=\begin{bmatrix}37.27\\87.15\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4.453 & -7.260\\0.002\,0 & 87.13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10.00\\1.000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

显然，直接用 Gauss 消去法由于用小数作除数，而引起结果严重失真，而用列主元素消去法则得到了极为满意的结果。

2-2　用 Gauss 消去法求解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-4x_4=1\\-x_1+x_2+x_3+3x_4=-2\\x_1+3x_2+5x_3-4x_4=-4\\x_2+2x_3-x_4=-2\end{cases}$$

解　(1)对增广矩阵进行初等变换。

$$\begin{bmatrix}1&1&0&-4&1\\-1&1&1&3&-2\\1&3&5&-4&-4\\0&1&2&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&1&0&-4&-1\\0&2&1&-1&-1\\0&2&5&0&-5\\0&1&2&-1&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-\frac{1}{2}r_2]{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&1&0&-4&1\\0&2&1&-1&-1\\0&0&4&1&-4\\0&0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-\frac{3}{8}r_3}\begin{bmatrix}1&1&0&-4&1\\0&2&1&-1&-1\\0&0&4&1&-4\\0&0&0&-\frac{7}{8}&0\end{bmatrix}$$

回代得 $x_1=1, x_2=0, x_3=-1, x_4=0$。

2-3 用 Gauss 列主元素消去法求解方程组

$$\begin{bmatrix}1&2&1&-2\\2&5&3&-2\\-2&-2&3&5\\1&3&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\\15\\9\end{bmatrix}$$

解 对增广矩阵按列选主元素后做高斯消元。

$$[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}1&2&1&-2&-1\\2&5&3&-2&3\\-4&-2&3&5&15\\1&3&2&5&9\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}2&5&3&-2&3\\1&2&1&-2&-1\\-2&-2&3&5&15\\1&3&2&5&9\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\ r_4-\frac{1}{2}r_1}]{r_2-\frac{1}{2}r_1}\begin{bmatrix}2&5&3&-2&3\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{5}{2}\\0&3&6&3&18\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&6&\frac{15}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}2&5&3&-2&3\\0&3&6&3&18\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{15}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&6&\frac{15}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-\frac{1}{6}r_2]{r_3-\frac{1}{6}r_2}\begin{bmatrix}2&5&3&-2&3\\0&3&6&3&18\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}&\frac{11}{2}&\frac{9}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{bmatrix}2&5&3&-2&3\\0&3&6&3&18\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&5&5\end{bmatrix}$$

回代求解得 $x_1=-3, x_2=1, x_3=2, x_4=1$。

2-4 用 Gauss 列主元素消去法解方程组 $Ax=b$,并写出相应的矩阵分解 $PA=LU$ 中的矩阵 P,L,U。

(1)
$$A=\begin{bmatrix}1.012 & -2.132 & 3.104\\ -2.132 & 4.096 & -7.013\\ 3.104 & -7.013 & 0.14\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}1.984\\ -5.049\\ -3.769\end{bmatrix}$$

(2)
$$A=\begin{bmatrix}5 & 10 & 15 & 20 & 25\\ 7 & 21 & 42 & 63 & 84\\ 6 & 16 & 32 & 56 & 66\\ 6 & 17 & 37 & 76 & 96\\ 7 & 19 & 39 & 73 & 93\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}15\\ 49\\ 24\\ 27\\ 33\end{bmatrix}$$

解 (1)
$$(A,b)=\begin{bmatrix}1.012 & -2.132 & 3.104 & 1.984\\ -2.132 & 4.096 & -7.013 & -5.049\\ 3.104 & -7.013 & 0.14 & -3.895\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{bmatrix}3.104 & -7.013 & 0.14 & -3.895\\ -2.132 & 4.096 & -7.013 & -5.049\\ 1.012 & -2.132 & 3.104 & 1.984\end{bmatrix}$$

$$m_{21}=\frac{-2.132}{3.104}=-0.686\,855\,7,\quad m_{31}=0.326\,030\,93$$

$$(A^{(2)},b^{(2)})=\begin{bmatrix}3.104 & -7.013 & 0.14 & -3.895\\ 0 & -0.720\,919 & -6.916\,840\,2 & -7.724\,303\\ 0 & 0.154\,454\,9 & 3.058\,355\,7 & 3.253\,890\,5\end{bmatrix}$$

$$m_{32}=-0.214\,247\,2$$

$$(A^{(3)},b^{(3)})=\begin{bmatrix}3.104 & -7.013 & 0.14 & -3.895\\ 0 & -0.721 & -6.917 & -7.724\,303\\ 0 & 0 & 1.577\,099\,5 & 1.598\,902\end{bmatrix}$$

回代得
$$x_1=0.928\,64,\quad x_2=0.986\,66,\quad x_3=1.013\,824$$

(2)
$$(A,b)=\begin{bmatrix}5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 15\\ 7 & 21 & 42 & 63 & 84 & 49\\ 6 & 16 & 32 & 56 & 66 & 24\\ 6 & 17 & 37 & 76 & 96 & 27\\ 7 & 19 & 39 & 73 & 93 & 33\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\Leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}7 & 21 & 42 & 63 & 84 & 49\\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 15\\ 6 & 16 & 32 & 56 & 66 & 24\\ 6 & 17 & 37 & 76 & 96 & 27\\ 7 & 19 & 39 & 73 & 93 & 33\end{bmatrix}$$

$$m_{21}=\frac{5}{7},\quad m_{31}=\frac{6}{7},\quad m_{41}=\frac{6}{7},\quad m_{51}=1$$

$$(A^{(2)},b^{(2)})=\begin{bmatrix}7 & 21 & 42 & 63 & 84 & 49\\ 0 & -5 & -15 & -25 & -35 & -20\\ 0 & -2 & -4 & 2 & -6 & -18\\ 0 & -1 & 1 & 22 & 24 & -15\\ 0 & -2 & -3 & 10 & 9 & -16\end{bmatrix}$$

$$m_{32}=\frac{2}{5},\quad m_{42}=\frac{1}{5},\quad m_{52}=\frac{2}{5}$$

$$(\boldsymbol{A}^{(3)},\boldsymbol{b}^{(3)})=\begin{bmatrix}7&21&42&63&84&49\\0&-5&-15&-25&-35&-20\\0&0&2&12&8&-10\\0&0&4&27&31&-11\\0&0&3&20&23&-8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\Leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}7&21&42&63&84&49\\0&-5&-15&-25&-35&-20\\0&0&4&27&31&-11\\0&0&2&12&8&-10\\0&0&3&20&23&-8\end{bmatrix}$$

$$m_{43}=\frac{1}{2},\quad m_{53}=\frac{3}{4}$$

$$(\boldsymbol{A}^{(4)},\boldsymbol{b}^{(4)})=\begin{bmatrix}7&21&42&63&84&49\\0&-5&-15&-25&-35&-20\\0&0&4&27&31&-11\\0&0&0&-\frac{3}{2}&-\frac{15}{2}&-\frac{9}{2}\\0&0&0&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$m_{54}=\frac{1}{6}$$

$$(\boldsymbol{A}^{(5)},\boldsymbol{b}^{(5)})=\begin{bmatrix}7&21&42&63&84&49\\0&-5&-15&-25&-35&-20\\0&0&4&27&31&-11\\0&0&0&-\frac{3}{2}&-\frac{15}{2}&-\frac{9}{2}\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

回代得 $x_1=2,\quad x_2=-2,\quad x_3=3,\quad x_4=-2,\quad x_5=1$

5.某一装置运动轨迹为一圆锥曲线

$$x^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

在运动轨迹上测得五个不同的点:

$c_1(147.38,3.94)$, $c_2(11.38,2.79)$, $c_3(7.42,3.07)$, $c_4(6.38,5.11)$, $c_5(8.81,2.59)$

试形成 b,c,d,e,f 所满足的方程,并用列主元素消去法求出 b,c,d,e,f 的近似值。

解 由于五个点都在运动轨道上,因此可得

$$\begin{cases}206.784\,4+56.657\,2b+15.523\,6c+14.38d+3.94e+f=0\\ 129.504\,4+31.750\,2b+7.784\,1c+11.38d+2.79e+f=0\\ 55.056\,4+22.779\,4b+9.424\,9c+7.42d+3.07e+f=0\\ 40.704\,4+32.601\,8b+26.112\,1c+6.38d+5.11e+f=0\\ 77.616\,1+22.817\,9b+6.708\,1c+8.81d+2.59e+f=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1&3.94&14.38&15.523\,6&56.657\,2\\1&2.79&11.38&7.784\,1&31.750\,2\\1&3.07&7.42&9.424\,9&22.779\,4\\1&5.11&6.38&26.112\,1&32.601\,8\\1&2.59&8.81&6.708\,1&22.817\,9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f\\e\\d\\c\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-206.784\,4\\-129.504\,4\\-55.056\,4\\-40.704\,4\\-77.616\,1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3.94&14.38&15.523\,6&56.657\,2&-206.784\,4\\0&-1.15&-3&-7.739\,5&-24.907&77.28\\0&-0.87&-6.96&-6.098\,7&-33.877\,8&151.728\\0&1.17&-8&10.588\,5&-24.055\,4&166.08\\0&-1.35&-5.57&-8.815\,5&-33.839\,3&129.168\,3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3.94&14.38&15.523\,6&56.657\,2&-206.784\,4\\0&-1.35&-5.57&-8.815\,5&-33.839\,3&129.168\,3\\0&-0.87&-6.96&-6.098\,7&-33.877\,8&151.728\\0&1.17&-8&10.588\,5&-24.055\,4&166.08\\0&-1.15&-3&-7.739\,5&-24.907&77.28\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3.94&14.38&15.523\,6&56.657\,2&-206.784\,4\\0&-1.35&-5.57&-8.815\,5&-33.839\,3&129.168\,3\\0&0&-3.37&-0.418\,0&-12.071\,8&68.491\,9\\0&0&-12.83&2.948\,1&-53.383\,9&278.030\,2\\0&0&1.745&-0.229\,6&3.920\,7&-32.758\,5\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3.94&14.38&15.523\,6&56.657\,2&-206.784\,4\\0&-1.35&-5.57&-8.815\,5&-33.839\,3&129.168\,3\\0&0&-12.83&2.948\,1&-53.383\,9&278.030\,2\\0&0&-3.37&-0.418\,0&-12.071\,8&68.491\,9\\0&0&1.745&-0.229\,6&3.920\,7&-32.758\,5\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3.94&14.38&15.523\,6&56.657\,2&-206.784\,4\\0&-1.35&-5.57&-8.815\,5&-33.839\,3&129.168\,3\\0&0&-12.83&2.948\,1&-53.383\,9&278.030\,2\\0&0&0&-1.192\,5&1.952\,2&-4.546\,6\\0&0&0&0.171\,3&-3.339\,5&5.053\,6\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 3.94 & 14.38 & 15.5236 & 56.6572 & -206.7844 \\ 0 & -1.35 & -5.57 & -8.8155 & -33.8393 & 129.1683 \\ 0 & 0 & -12.83 & 2.9481 & -53.3839 & 278.0302 \\ 0 & 0 & 0 & -1.1925 & 1.9522 & -4.5466 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.0592 & 4.407 \end{bmatrix}$$

回代得 $b=-1.438\,513$，$c=1.457\,723$，$d=-15.349\,903$，$e=5.808\,61$，$f=49.934\,292$

2-6 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实对称阵，且 $a_{11}\neq 0$，经过 Gauss 消去法一步后，$\boldsymbol{A}$ 约化为 $\begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=(a_{12},\cdots,a_{1n})$，$\boldsymbol{A}_2$ 是 $n-1$ 阶方阵。证明 $\boldsymbol{A}_2$ 是对称阵。

证明 因为 $\boldsymbol{A}_2$ 是 $n-1$ 阶方阵，即 $\boldsymbol{A}_2=(a_{ij}^{(2)})\in\mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)}$，由 $\boldsymbol{A}$ 的对称性及消元公式得

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}=a_{ji}-\frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}=a_{ji}^{(2)},\ i,j=2,\cdots,n$$

故 $\boldsymbol{A}_2$ 也对称。

2-7 证明 (1)

$$\boldsymbol{L}_k=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix}$$

的逆阵为

$$\boldsymbol{L}_k^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix}$$

即 $\boldsymbol{L}_k^{-1}$ 与 $\boldsymbol{L}_k$ 的非对角元素仅相差一个符号。

(2)

$$\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{L}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{L}_{n-1}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{2,1} & 1 & & & \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & & 1 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

证明 (1)证法 1。因为 $\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{L}_k^{-1}=\boldsymbol{L}_k^{-1}\boldsymbol{L}_k=\boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{I}$ 为同阶单位阵），设 $\boldsymbol{L}_k^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}$，则有

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

直接利用矩阵乘法，比较 $L_kL_k^{-1}$ 的元素和 I 的对应元素，可得

$$L_k^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix}$$

证法 2。也可用直接求逆阵的方法证。

$$[L_k \vdots I]=\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & & & & & & 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & & & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & & & & & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & & & & & & \ddots & \\ & & -l_{n,k} & & & 1 & & & & & & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(i=k+1,k+2,\cdots,n)]{\text{第 } i \text{ 行}+\text{第 } k \text{ 行}\times l_{i,k}}[I \vdots L_k^{-1}]=\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & & & & & & 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & & & \ddots & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & 1 & & & l_{n,k} & & & 1 \end{array}\right]$$

所以

$$L_k^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix}$$

（2）证法 1。用数学归纳法。由矩阵乘法可得

$$L_1^{-1}L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&\\l_{21}&1&&&\\l_{31}&&1&&\\\vdots&&&\ddots&\\l_{n1}&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&l_{32}&1&&\\&\vdots&&\ddots&\\&l_{n2}&&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&&\\l_{21}&1&&&\\l_{31}&l_{32}&1&&\\\vdots&\vdots&&\ddots&\\l_{n1}&l_{n2}&&&1\end{bmatrix}$$

设

$$\begin{matrix}L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{k-1}^{-1}\\(1\leqslant k\leqslant n-1)\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\l_{21}&1&&&&\\l_{31}&l_{32}&1&&&\\&&&\ddots&&\\\vdots&\vdots&\ddots&l_{k,k-1}&1&\\&&&\vdots&&\ddots\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{n,k-1}&\cdots&1\end{bmatrix}$$

则

$$L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{k-1}^{-1}L_k^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\l_{21}&1&&&&\\l_{31}&l_{32}&1&&&\\&&\ddots&\ddots&&\\\vdots&\vdots&&l_{k,k-1}&1&\\&&&\vdots&&\ddots\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{n,k-1}&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&&\\&&l_{k+1,k}&1&\\&&\vdots&&\ddots\\&&l_{n,k}&&&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&&&&&\\l_{21}&1&&&&\\l_{31}&l_{32}&1&&&\\&&\ddots&\ddots&&\\\vdots&\vdots&&l_{k+1,k}&1&\\&&&\vdots&&\ddots\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{n,k}&\cdots&1\end{bmatrix}$$

所以有

$$L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots\cdot L_n^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&\\l_{21}&1&&&\\l_{31}&l_{32}&1&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{n,n-1}&1\end{bmatrix}$$

证法 2。作

$$P_i=\begin{bmatrix}0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & l_{i+1,i} & 0 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,i} & & & 0\end{bmatrix}_{n\times n}$$

则由矩阵乘法,可以证明 $P_mP_k=0$(当 $m<k$)。令 $L_i^{-1}=I+P_i$(I 是与 P_i 同阶的单位方阵),则有

$$\begin{aligned}L&=L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_n^{-1}=(I+P_1)(I+P_2)\cdots(I+P_n)\\&=I+(P_1+P_2+\cdots+P_n)+(P_1P_2+P_1P_3+\cdots+P_1P_n)+\cdots+P_1P_2\cdots P_n\\&=I+(P_1+P_2+\cdots+P_n)\\&=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

2-8 下述矩阵能否进行直接 LU 分解(其中 L 为单位下三角阵,U 为上三角阵)?若能分解,那么分解是否唯一?

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&2&6\\2&5&15\\6&15&46\end{bmatrix}$$

解 A 中 $\Delta_2=0$,故不能分解,但 $\det A=-10\neq0$,故若将 A 中第一行与第三行交换,则可以分解,且分解唯一。

B 中,$\Delta_2=\Delta_2=0$,但它们仍可以分解为

$$B=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & l_{32} & -2\end{bmatrix}$$

式中,l_{32} 为任意常数,且 U 奇异,故分解不唯一。

对 C,有 $\Delta_i\neq0$,$i=1,2,3$,故 C 可分解且分解唯一,为

$$C=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 6 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ & 1 & 3\\ & & 1\end{bmatrix}$$

2-9 给出下列矩阵的 LU 分解。

(1)用 Gauss 消元过程分解 A。

(2)用 Doolittle 消元过程分解 B。

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&3\\-1&-3&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&6\\2&5&15\\6&15&46\end{bmatrix}$$

解 (1)
$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&3\\-1&-3&0\end{bmatrix}\quad A^{(2)}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-2&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

其中，$m_{21}=\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}=2$，$m_{31}=\dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}=-1$。

$$A^{(3)}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-2&1\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

其中 $m_{32}=\dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}=\dfrac{1}{2}$。

因为
$$A=LU=\begin{bmatrix}1&&\\m_{21}&1&\\m_{31}&m_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}^{(1)}&a_{12}^{(1)}&a_{13}^{(1)}\\&a_{22}^{(2)}&a_{23}^{(2)}\\&&a_{33}^{(3)}\end{bmatrix}$$

所以
$$L=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\-1&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1&2&1\\&-2&1\\&&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

(2)由书中公式

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&\cdots&u_{1n}\\&u_{22}&\cdots&u_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&u_{nn}\end{bmatrix}\equiv LU$$

其中
$$u_{1i}=a_{1i},\quad l_{i1}=\frac{a_{i1}}{u_{11}}$$

$$u_{ri}=a_{ri}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{ki}\quad(i=r,\cdots,n;r=2,\cdots n)$$

$$l_{ir}=\frac{a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{ik}u_{kr}}{u_{rr}}(i=r+1,\cdots,n;r=2,\cdots,n-1)$$

可得
$$B=\begin{bmatrix}1&2&6\\2&5&15\\6&15&46\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\6&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以
$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\6&3&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1&2&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

2－10　试对下列矩阵进行部分主元素 Doolitte 分解。

$$A=\begin{bmatrix}-1&4&6\\-3&14&25\\1&0&13\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&1&6\\2&1&3\\1&1&1\end{bmatrix}$$

解

$$A=\begin{bmatrix}-1&4&6\\-3&14&25\\1&0&13\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\Leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}-3&14&25\\-1&4&6\\1&0&13\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-3&14&25\\\frac{1}{3}&4&6\\-\frac{1}{3}&0&13\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}-3&14&25\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&6\\-\frac{1}{3}&\frac{14}{3}&13\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}-3&14&25\\-\frac{1}{3}&\frac{14}{3}&13\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-3&14&25\\-\frac{1}{3}&\frac{14}{3}&\frac{64}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{7}&\frac{5}{7}\end{bmatrix}$$

则

$$A=LU=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{7}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&14&25\\0&\frac{14}{3}&\frac{64}{3}\\0&0&\frac{5}{7}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}3&1&6\\2&1&3\\1&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3&1&6\\\frac{2}{3}&1&3\\\frac{1}{3}&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3&1&6\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&3\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}3&1&6\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&3\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}3&1&6\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-1\\\frac{2}{3}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

则

$$B=LU=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{3}&1&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&6\\0&\frac{2}{3}&-1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

2－11　试给出 Crout 分解的紧凑格式，并对 A 进行 Crout 分解

$$A=\begin{bmatrix}10&1&-5\\-20&3&20\\5&3&5\end{bmatrix}$$

解
$$A=\begin{bmatrix}10&1&-5\\-20&3&20\\5&3&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}10&\frac{1}{10}&-\frac{1}{2}\\-20&5&20\\5&\frac{5}{2}&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}10&\frac{1}{10}&-\frac{1}{2}\\-20&5&2\\5&\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

则
$$A=LU=\begin{bmatrix}10&0&0\\-20&5&0\\5&\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{10}&-\frac{1}{2}\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

2-12 设 $Ax=b$,其中
$$A=\begin{bmatrix}5&7&9&10\\6&8&10&9\\7&10&8&9\\5&7&6&5\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}26\\18\\22\\9\end{bmatrix}$$

用 Doolittle 方法求解此方程组。

解
$$[A\,\vdots\,b]=\begin{bmatrix}5&7&9&10&26\\6&8&10&9&18\\7&10&8&9&22\\5&7&6&5&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}5&7&9&10&26\\\frac{6}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}&-3&-\frac{66}{5}\\\frac{7}{5}&-\frac{1}{2}&8&9&22\\1&0&6&5&9\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}5&7&9&10&26\\\frac{6}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}&-3&-\frac{66}{5}\\\frac{7}{5}&-\frac{1}{2}&-5&-\frac{13}{2}&-21\\1&0&\frac{3}{5}&-\frac{11}{10}&-\frac{22}{5}\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}5&7&9&10\\0&-\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}&-3\\0&0&-5&-\frac{13}{2}\\0&0&0&-\frac{11}{10}\end{bmatrix}$$

解 $Ux=y$,由公式计算得
$$y=\begin{bmatrix}26\\-\frac{66}{5}\\-21\\-\frac{22}{5}\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}-8\\5\\-1\\4\end{bmatrix}$$

即 $x_1=-8, x_2=5, x_3=-1, x_4=4$。

2-13 用部分选主元 Doolittle 法的紧凑格式解下列矩阵方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B}$。

(1)
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}10&10\\26&49\\58&142\\112&313\end{bmatrix}$$

(2)
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}10&10\\30&20\\100&50\\354&146\end{bmatrix}$$

解 (1)

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cccc:cc}1&1&1&1&10&10\\1&2&4&8&26&49\\1&3&9&27&58&142\\1&4&16&64&112&331\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:cc}1&1&1&1&10&10\\1&1&4&8&26&49\\1&2&9&27&58&142\\1&3&16&64&112&311\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_4}\left[\begin{array}{cccc:cc}1&1&1&1&10&10\\1&3&16&64&112&311\\1&2&9&27&58&142\\1&1&4&8&26&49\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:cc}1&1&1&1&10&10\\1&3&15&63&102&303\\1&\frac{2}{3}&-2&27&58&142\\1&\frac{1}{3}&-2&8&26&49\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:cc}1&1&1&1&10&10\\1&3&15&63&102&303\\1&\frac{2}{3}&-2&-16&-20&-70\\1&\frac{1}{3}&1&2&2&8\end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&3&15&63\\0&0&-2&-16\\0&0&0&2\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2)\begin{bmatrix}10&10\\102&303\\-20&-70\\2&8\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$，由公式计算得

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4&1\\3&2\\2&3\\1&4\end{bmatrix}$$

$$(2)A=\left[\begin{array}{cccc:cc}1&1&1&1&10&10\\1&2&3&4&30&20\\1&4&9&16&100&50\\1&8&27&64&354&146\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:cc}1&1&1&1&10&10\\1&1&3&4&30&20\\1&3&9&16&100&50\\1&7&27&64&354&146\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&1&1&1&10&10\\1&7&26&63&344&136\\1&\frac{3}{7}&9&16&100&50\\1&\frac{1}{7}&3&4&30&20\end{bmatrix}\cdots\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&10&10\\1&7&26&63&344&136\\1&\frac{3}{7}&-\frac{22}{7}&-12&-\frac{402}{7}&-\frac{128}{7}\\1&\frac{1}{7}&\frac{6}{11}&\frac{6}{11}&\frac{168}{77}&\frac{42}{77}\end{bmatrix}$$

所以

$$x=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\\3&2\\4&1\end{bmatrix}$$

2-14 求下列矩阵的 Cholesky 分解

$$A=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}16&4&-4\\4&17&11\\-4&11&14\end{bmatrix}$$

解 由 $A=LL^{\mathrm{T}}$，其中

$$\begin{cases}l_{jj}=\left(a_{jj}-\sum\limits_{k=1}^{j-1}l_{jk}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ l_{ij}=\dfrac{a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}\end{cases}\quad(i=j+1,\cdots,n)$$

且

$$\sum_{k=1}^{n}l_{ik}l_{jk}=0$$

所以

$$A=LL^{\mathrm{T}},\quad L=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{12}}&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{6\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

同理，有

$$B=LL^{\mathrm{T}}\quad 且\ L=\begin{bmatrix}4&0&0\\1&4&0\\-1&3&2\end{bmatrix}$$

2-15 用平方根法解下列对称正定方程组 $Ax=b$。

(1) $$A=\begin{bmatrix}4&-1&1\\-1&4.75&2.75\\1&2.75&3.5\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}4\\6\\7.25\end{bmatrix}$$

(2) $$A=\begin{bmatrix}5&7&6&5\\7&10&8&7\\6&8&10&9\\5&7&9&10\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}14.5\\20\\29\\32.5\end{bmatrix}$$

(3) $$A=\begin{bmatrix}0.5&0.07&0.06&0.05\\0.07&0.10&0.08&0.07\\0.06&0.08&0.10&0.09\\0.05&0.07&0.09&0.10\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0.23\\0.32\\0.33\\0.31\end{bmatrix}$$

解 (1) $$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\-1&4.75&0\\1&2.75&3.5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{分解}}\begin{bmatrix}2&0&0\\-0.5&2.1213&0\\0.5&1.4142&1.1180\end{bmatrix}$$

解 $Ly=b$，得 $y=(2\quad 3.300\quad 1.416)^{T}$。

解 $L^{T}x=y$，得 $x=(0.8612\quad 0.7113\quad 1.2665)^{T}$。

(2) $$A=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\7&10&0&0\\6&8&10&0\\5&7&9&10\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{分解}}\begin{bmatrix}2.2361&0&0&0\\3.1305&0.4472&0&0\\2.6832&-0.8939&1.4147&0\\2.2360&0.0005&2.1212&0.7077\end{bmatrix}$$

解 $Ly=b$，得 $y=(6.4845\quad -0.6702\quad 7.7767\quad 2.1267)^{T}$。

解 $L^{T}x=y$，得 $x=(-1.9651\quad 0.4791\quad 0.9911\quad 3.0052)^{T}$。

(3) $x_1=3.267229E-04$, $x_2=1.602743$, $x_3=1.249921$, $x_4=8.529875E-01$。

2-16 用追赶法解三对角线方程组 $Ax=F$。

(1) $$A=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&4&1&0\\0&1&4&1\\0&0&1&2\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}-3\\6\\14\\-2\end{bmatrix};$$

(2) $$A=\begin{bmatrix}4&-1&&&\\-1&4&-1&&\\&-1&4&-1&\\&&-1&4&-1\\&&&-1&4\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}2&100&10&200&2\\4&200&20&100&1\\6&200&20&100&1\\8&200&20&100&1\\16&100&10&200&2\end{bmatrix}。$$

解 (1)由公式

$$\begin{cases}\gamma_i=a_i & (i=2,3,\cdots,n)\\ \alpha_1=b_1,\ \alpha_i=b_i-a_i\beta_{i-1} & (i=2,3,\cdots,n)\\ \beta_i=\dfrac{c_i}{\alpha_i} & (i=1,2,\cdots,n-1)\end{cases}$$

和公式

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{f_1}{\alpha_1} \\ y_i = \dfrac{f_i - a_i y_{i-1}}{\alpha_i} \quad (i = 2, \cdots, n) \end{cases}$$

解 $Ly = F$，可得下表

i	α_i	β_i	y_i
1	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
2	$\frac{7}{2}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{15}{7}$
3	$\frac{26}{7}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{83}{26}$
4	$\frac{45}{26}$		-3

由公式

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - \beta_i x_{i+1} \quad (i = n-1, \cdots, 2, 1) \end{cases}$$

解 $Ux = y$ 得

$$x_4 = y_4 = -3, \quad x_3 = y_3 - \beta_3 x_4 = 4, \quad x_3 = y_2 - \beta_2 x_3 = 1, \quad x_1 = y_1 - \beta_1 x_2 = -2$$

所以

$$x = (-2 \quad 1 \quad 4 \quad -3)^T$$

(2)略

2-17 用 Gauss-Jordan 列主元素法求 A^{-1}。

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 10 & 5 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & 10 & 5 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 10 & 5 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4.5 & 3 & 1 & 1.2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 2.3 \\ 3 & 3 & 8 & 4 & 3.4 \\ 2 & 2 & 4 & 9 & 4.8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

解 略

同步训练题

1. 用 Gauss 列主元消去法求矩阵 A 的行列式值，其中

$$A=\begin{bmatrix}2&3&-1&2\\5&1&3&3\\6&4&-1&1\\1&4&0&5\end{bmatrix}$$

2. 用高斯消去法解方程组

(1) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\8\\13\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}12&-3&3&4\\-18&3&-1&-1\\1&1&1&1\\3&1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\-15\\6\\2\end{bmatrix}$

3. 用直接三角分解法求解方程组

$$\begin{cases}2x_1+4x_2+2x_3+6x_4=9\\4x_1+9x_2+6x_3+15x_4=23\\2x_1+6x_2+9x_3+18x_4=22\\6x_1+15x_2+18x_3+40x_4=47\end{cases}$$

4. 用 Doolittle 法解方程组

$$\begin{cases}8.1x_1+2.3x_2-1.5x_3=6.1\\0.5x_1-6.23x_2+0.87x_3=2.3\\2.5x_1+1.5x_2+10.2x_3=1.8\end{cases}$$

5. 用系数矩阵的 Crout 分解法求解方程组

$$\begin{cases}6x_1+2x_2+x_3-x_4=6\\2x_1+4x_2+x_3=-1\\x_1+x_2+4x_3-x_4=5\\-x_1-x_3+3x_4=-5\end{cases}$$

6. 用平方根法解方程组

$$\begin{cases}4x_1-x_2+x_3=6\\-x_1+4.25x_2+2.75x_3=-0.5\\x_1+2.75x_2+3.5x_3=1.25\end{cases}$$

7. 用改进平方根法解方程组

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+5x_3=10 \\ 3x_1+5x_2+9x_3=16 \\ 5x_1+9x_2+17x_3=30 \end{cases}$$

8. 用追赶法解三对角方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=-3 \\ 3x_2-7x_3+4x_4=-10 \\ 2x_3+5x_4=2 \end{cases}$$

9. 用按列选主元的 Gauss-Jordan 消去法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

10. 用 Gauss-Jordan 方法求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

同步训练题答案

TONG BU XUN LIAN TI DA AN

1. **解** 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列值，可以采用 Gauss 列主元消去法将 $\boldsymbol{A}$ 化为一个上三角阵，则对角元素的乘积就是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值。该消元过程为

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \Leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-\frac{1}{3}r_1 \\ r_4-\frac{1}{6}r_1}]{r_2-\frac{5}{6}r_1} \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{23}{6} & \frac{13}{6} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{1}{6} & \frac{29}{6} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 \Leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{1}{6} & \frac{29}{6} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{23}{6} & \frac{13}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+\frac{7}{10}r_2]{r_3-\frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{1}{6} & \frac{29}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{79}{20} & \frac{111}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 \Leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}6 & 4 & -1 & 1\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{1}{6} & \frac{29}{6}\\ 0 & 0 & \frac{79}{20} & \frac{111}{20}\\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-\frac{15}{79}r_3}\begin{bmatrix}6 & 4 & -1 & 1\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{1}{6} & \frac{29}{6}\\ 0 & 0 & \frac{79}{20} & \frac{111}{20}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{79}\end{bmatrix}$$

所以
$$\det A = 6\times\frac{10}{3}\times\frac{79}{20}\times\frac{24}{79}=24$$

2. 解 (1)对增广矩阵进行初等变换

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 1 & 2 & 8\\ 2 & 4 & 1 & 13\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+(-2)r_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 1 & 2 & 8\\ 0 & 0 & -5 & -15\end{bmatrix}$$

得同解三角方程组
$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14 & (1)\\ x_2+2x_3=8 & (2)\\ -5x_3=-15 & (3)\end{cases}$$

由式(3)得 $x_3=(-15)/(-5)=3$

由式(2)得 $x_2=8-2x_3=8-2\times3=2$

再由式(1)得 $x_1=14-2x_2-3x_3=14-2\times2-3\times3=1$

(2)对增广矩阵进行初等变换

$$\begin{bmatrix}12 & -3 & 3 & 4 & 15\\ -18 & 3 & -1 & -1 & -15\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6\\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+\left(-\frac{1}{12}\right)r_1\\ r_4+\left(-\frac{1}{4}\right)r_1}]{r_2+\frac{3}{2}r_1}\begin{bmatrix}12 & -3 & 3 & 4 & 15\\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 5 & \frac{15}{2}\\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{19}{4}\\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+\frac{7}{6}r_2]{r_3+\frac{5}{6}r_2}\begin{bmatrix}12 & -3 & 3 & 4 & 15\\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 5 & \frac{15}{2}\\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{29}{6} & 11\\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{35}{6} & 7\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+\left(-\frac{7}{11}\right)r_3}\begin{bmatrix}12 & -3 & 3 & 4 & 15\\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 5 & \frac{15}{2}\\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{29}{6} & 11\\ 0 & 0 & 0 & \frac{91}{33} & 0\end{bmatrix}$$

得同解三角方程组

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15 \\ -\dfrac{3}{2}x_2 + \dfrac{7}{2}x_3 + 5x_4 = \dfrac{15}{2} \\ \dfrac{11}{3}x_3 + \dfrac{29}{6}x_4 = 11 \\ \dfrac{91}{33}x_4 = 0 \end{cases}$$

回代得 $x_4 = 0, x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$。

3. **解** 方程组的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 6 & 15 \\ 2 & 6 & 9 & 18 \\ 6 & 15 & 18 & 40 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \\ 22 \\ 47 \end{bmatrix}$$

(1)分解 $A = LU$,由公式得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 3 & 6 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

(2)求解 $Ly = b$,即

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \\ 22 \\ 47 \end{bmatrix}$$

由公式得到 $y = (9 \quad 5 \quad 3 \quad -1)^T$。

(3)求解 $Ux = y$,即

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 3 & 6 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

由公式可解得 $x = (0.5 \quad 2 \quad 3 \quad -1)^T$,即 $x_1 = 0.5, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = -1$。

4. **解** 首先求系数矩阵 A 的 Doolittle 分解,为

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.061\,73 & 1 & 0 \\ 0.308\,6 & -0.124\,6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.1 & 2.3 & -1.5 \\ 0 & -6.372 & 0.9626 \\ 0 & 0 & 10.78 \end{bmatrix}$$

再解 $Ly = b$,即方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.061\,73 & 1 & 0 \\ 0.308\,6 & -0.124\,6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.1 \\ 2.3 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

得
$$y=[6.100\quad 1.923\quad 0.157\,2]^T$$

再解 $Ux=y$，即方程

$$\begin{bmatrix}8.1 & 2.3 & -1.5\\ 0 & -6.372 & 0.962\,6\\ 0 & 0 & 10.78\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.100\\ 1.923\\ 0.157\,2\end{bmatrix}$$

最后求得方程的近似解为 $x=[0.840\,9\quad -0.299\,6\quad 0.014\,58]^T$。

5. **解**　方程组的系数矩阵 A 和右端向量 b 分别为

$$A=\begin{bmatrix}6 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 4 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}6\\ -1\\ 5\\ -5\end{bmatrix}$$

所谓矩阵 A 的 Crout 分解是指将矩阵分解为 $A=\tilde{L}\tilde{U}$ 的形式，其中 $\tilde{L}$ 是下三角矩阵，$\tilde{U}$ 是单位上三角矩阵，即

$$A=\begin{bmatrix}l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & u_{12} & u_{13} & u_{14}\\ & 1 & u_{23} & u_{24}\\ & & 1 & u_{34}\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

根据矩阵的乘法，等式两边对应元素相等，得 Crout 分解的计算公式为

$$\begin{cases}l_{i1}=a_{i1} & (i=1,2,3,4)\\ u_{1j}=a_{1j}/l_{11} & (j=2,3,4)\\ l_{ik}=a_{ik}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk} & (k=2,3,4;i=k,\cdots,4)\\ u_{kj}=(a_{kj}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj})/l_{kk} & (k=2,3,4;j=k+1,\cdots,n)\end{cases}$$

具体计算得到

$$A=\begin{bmatrix}6 & & & \\ 2 & \frac{3}{10} & & \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{37}{10} & \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{9}{10} & \frac{199}{74}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{10}\\ & & 1 & -\frac{9}{37}\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

求解下三角方程组 $\tilde{L}y=b$，自上而下求得 $y=[1\quad -\frac{9}{10}\quad \frac{46}{37}\quad -1]^T$。

求解上三角方程组 $\tilde{U}x=b$，自下而上回代可得方程的解为 $x=[1\quad -1\quad 1\quad -1]^T$，这也就是原方程的解。

6. **解**　因系数矩阵 A 对称且顺序主子式 $\Delta_1=4>0,\Delta_2=16>0,\Delta_3=16>0$。故方程组为对

称正定方程组,可用平方根法求解。

(1)对 $\boldsymbol{A}$ 进行 Cholesky 分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$,由公式求得 $\boldsymbol{L}$ 的元素为

$$l_{11}=a_{11}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2,\quad l_{21}=a_{21}/l_{11}=-\frac{1}{2}=-0.5$$

$$l_{31}=a_{31}/l_{11}=\frac{1}{2}=0.5,\quad l_{22}=(a_{22}-l_{21}^2)^{\frac{1}{2}}=[4.25-(0.5)^2]^{\frac{1}{2}}=2$$

$$l_{32}=(a_{32}-l_{31}l_{22})/l_{22}=[2.75-0.5\times(-0.5)]/2=1.5$$

$$l_{33}=(a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2)^{\frac{1}{2}}=[3.5-(0.5)^2-(1.5)^2]^{\frac{1}{2}}=1$$

因此,系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 分解为

$$\begin{bmatrix}4&-1&1\\-1&4.25&2.75\\1&2.75&3.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\-0.5&2&0\\0.5&1.5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-0.5&0.5\\0&2&1.5\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(2)解下三角方程组 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$,即

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\-0.5&2&0\\0.5&1.5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-0.5\\1.25\end{bmatrix}$$

由公式自上而下解得 $\boldsymbol{y}=(3\quad 0.5\quad -1)^{\mathrm{T}}$。

(3)解上三角方程组 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$,即

$$\begin{bmatrix}2&-0.5&0.5\\0&2&1.5\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0.5\\-1\end{bmatrix}$$

由公式自下而上回代,求得方程组的解为 $\boldsymbol{x}=(2\quad 1\quad -1)^{\mathrm{T}}$。

7. 解　将系数矩阵按 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 形式分解,有

$$\begin{bmatrix}3&3&5\\3&5&9\\5&9&17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\l_{21}&1&\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&&\\&d_2&\\&&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&l_{21}&l_{31}\\&1&l_{32}\\&&1\end{bmatrix}$$

根据矩阵乘法得到

$$d_1=3,l_{21}=1,l_{31}=5/3,d_2=2,l_{32}=2,d_3=2/3$$

由

$$\begin{bmatrix}1&&\\1&1&\\\frac{5}{3}&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\16\\30\end{bmatrix}$$

解得 $y_1=10,y_2=6,y_3=\frac{4}{3}$,则可以得到

$$\begin{bmatrix}1&1&\frac{5}{3}\\&1&2\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10}{3}\\3\\2\end{bmatrix}$$

解上述方程得到原方程组的解为 $x_3=2, x_2=-1, x_1=1$。

8. 解　由追赶法对其增广矩阵进行初等变换

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -7 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+\left(-\frac{1}{2}\right)r_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & 0 & \frac{-9}{2} \\ 0 & 3 & -7 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-2)r_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & 0 & \frac{-9}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+2r_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

得同解二对角方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=3 \\ \frac{3}{2}x_2-3x_3=\frac{-9}{2} \\ -x_3+4x_4=-1 \\ 13x_4=0 \end{cases}$$

回代得 $x_4=0, x_3=1, x_2=-1, x_1=2$。

9. 解　对矩阵$[A \vdots I]$进行按列选主元的高斯消元过程，当左边矩阵 A 化为单位矩阵 I 时，右边单位矩阵 I 就同时化为A^{-1}，具体过程为

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \Leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3+\left(-\frac{1}{2}\right)r_1]{r_2+\left(-\frac{1}{2}\right)r_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \Leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3+\frac{1}{3}r_2]{r_1+\frac{2}{3}r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2\times\left(-\frac{2}{3}\right) \\ r_3\times(-1)}]{r_1\times\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

所以

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

10. 解

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 19 & 0 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{85}{3} & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{25}{3} \end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{85} & \frac{10}{17} & -\frac{23}{85} & -\frac{16}{17} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{33}{85} & -\frac{6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{85} & \frac{5}{17} & -\frac{3}{85} & -\frac{8}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17} \end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{4}{85} & \frac{10}{7} & -\frac{23}{85} & -\frac{16}{17} \\ \frac{33}{85} & -\frac{6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\ -\frac{19}{85} & \frac{5}{17} & -\frac{3}{85} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{3}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.047\,058\,9 & 0.588\,235\,3 & -0.270\,588\,2 & -0.941\,176\,5 \\ 0.388\,235\,3 & -0.352\,941\,2 & 0.482\,352\,9 & 0.764\,705\,9 \\ -0.223\,529\,4 & 0.294\,117\,6 & -0.035\,294\,1 & -0.470\,588\,2 \\ -0.035\,294\,1 & -0.058\,823\,5 & 0.047\,058\,9 & 0.294\,117\,6 \end{bmatrix}$$

第3章　插值法与最小二乘法

知识要点

一、插值问题

1. 定义

已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一组互异的点 $\{x_i\}$ 上的函数值 $\{y_i\}(i=0,1,\cdots,n)$。若存在简单函数 $P(x)$，使得

$$P(x_i)=y_i,i=0,1,\cdots,n \tag{3-1}$$

成立，则称 $P(x)$ 是 $f(x)$ 关于节点 $\{x_i\}(i=0,1,\cdots,n)$ 的一个插值函数。式中，$\{x_i\}(i=0,1,\cdots,n)$ 为插值节点；$[a,b]$ 为插值区间；$f(x)$ 为被插值函数；式(3-1)称为插值条件。

当 $P(x)$ 为代数多项式时，称 $P(x)$ 为代数插值多项式，简称为插值多项式，相应的求插值多项式的方法称为多项式插值。

插值多项 $R(x)\overset{\text{def}}{=\!=}f(x)-P(x)$，插值多项又称为截断误差。

2. 代数插值多项式的存在唯一性

定理3.1　满足插值条件式(3-1)的不超过 n 次的插值多项式 $P(x)$ 是存在唯一性的。

推论3.2　若 $f(x)$ 是不超过 n 次的多项式，则它的关于 $n+1$ 个互异节点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的不超过 n 次的插值多项式 $P(x)$ 与被插值函数 $f(x)$ 恒等，即有 $P(x)\equiv f(x)$。

3. 误差估计

(1) 导数型误差估计定理

定理3.2　设 $f(x)\in C^{(n)}[a,b]$，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在，则有插值余项

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\xi\in(a,b)$$

式中，$P_n(x)$是$f(x)$关于互异节点$\{x_i\}_{i=0}^n$的插值多项式；ξ依赖于x和插值节点；且

$$\omega_{n+1}(x)\stackrel{\text{def}}{=\!=}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

(2)差商型误差估计定理

定理 3.3 设$f(x)$在$[a,b]$上有定义，$P_n(x)$同定理3.2中的说明，则有插值余项$R_n(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)$。

(3)等距节点的插值误差估计

当节点$\{x_i\}_{i=0}^n$等距分布时，即有$x_t=x_0+th(h>0,t=0,1,\cdots,n)$，作变换$x=x_0+th$，则导数型误差估计简化为

$$R_n(x_0+th)=f(x_0+th)-P_n(x_0+th)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\xi\in(x_0,x_n),0\leqslant t\leqslant 1$$

如果作变换$x=x_n+th$，则误差估计简化为

$$R_n(x_n+th)=f(x_n+th)-P_n(x_n+th)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\xi\in(x_0,x_n),-1\leqslant t\leqslant 0$$

二、插值多项式的构造方法

1. 依据插值条件建立线性方程组

设不超过n次的插值多项式$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，其余数是如下线性方程组的解。

$$\begin{bmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_0\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

2. 基函数法

$$P_n(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+\cdots+f(x_n)l_n(x)\stackrel{\text{def}}{=\!=}L_n(x)\qquad(3-2)$$

式中，$\{l_i(x)\}_{i=0}^n$是关于节点$\{x_i\}_{i=0}^n$的 Lagrange 插值整函数，它仅与节点有关，与被插值函数无关，具体定义为

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$= \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}, \quad i=0,1,2,\cdots,n$$

插值公式(3-2)又叫做 Lagrange 插值多项式。

3. 差商方法

$$P_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\overset{\text{def}}{=\!=}N_n(x) \quad (3-3)$$

式中,$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$为 k 阶差商(也称为均差).插值公式(3-3)又叫 Newton 插值公式。

4. 等距节点插值公式

基于变换 $x=x_0+th(0\leqslant t\leqslant 1)$的插值公式(Newton 向前插值公式)

$$N_n(x_0+th)=f(x_0)+t\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\cdots$$
$$+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \quad (3-4)$$

式中,$\Delta^k f_0(k=1,2,\cdots,n)$为 k 阶向前差分。

基于变换 $x=x_n+th(-1\leqslant t\leqslant 0)$的插值公式(Newton 向后插值公式)

$$N_n(x_n+th)=f_n+t\nabla f_n+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\cdots$$
$$+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \quad (3-5)$$

式中,$\nabla^k f_n(k=1,2,\cdots,n)$为 k 阶向后差分。

三、基函数、差商和差分的性质

1. Lagrange 插值基函数

(1) $l_i(x_k)=\begin{cases}1, & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases} \quad k=0,1,2,\cdots,n$

(2) $l_0(x)+l_1(x)+\cdots+l_n(x)\equiv 1$

(3) $x_0^k l_0(x)+x_1^k l_1(x)+\cdots+x_n^k l_n(x)\equiv x^k \quad (0\leqslant k\leqslant n)$

2. 差商

(1) $$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=1}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$$

式中,$\omega_{k+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$。

(2)对称性

差商与节点的排列次序无关。

(3)线性组合性质

$$(c_1 f + c_2 y)[x_0, x_1, \cdots, x_k] = c_1 f[x_0, x_1, \cdots, x_k] + c_2 y[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

式中,c_1 及 c_2 为常数。

(4)与导数的关系

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\varepsilon)}{k!}$$

式中,ε 位于节点$\{x_i\}_{i=0}^{k}$形成的开区间内。

3. 差分(等距节点)

(1)
$$\Delta^n f_k = (E - I)^n f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f_{k+n-j}$$

$$\nabla^n f_k = (I - E^{-1})^n f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_{k+j-n}$$

(2)
$$f_{n+k} = (I + \Delta)^n f_k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Delta^j f_k$$

(3)
$$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k$$

$$f[x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\nabla^m f_k$$

(4)
$$\Delta^m f_k = h^m f^{(m)}(\varepsilon), x_k < \varepsilon \leqslant x_{k+m}$$

四、Hermite 插值

1. 插值条件

$$H(x_j) = f(x_j), H'(x_j) = f'(x_j) \quad (j = 0,1,2,\cdots,n) \tag{3-6}$$

2. 存在唯一性

满足插值条件式(3-6)的不超过 $2n+1$ 次的插值多项式是存在唯一性的。

3. 基函数表示形式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} [f(x_j)\alpha_j(x) + f'(x_j)\beta_j(x)] \tag{3-7}$$

式中
$$\alpha_j(x) = \left(1 - 2(x - x_j)\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}\right) l_j^2(x) \quad (j = 0,1,\cdots,n)$$

$$\beta_j(x) = (x - x_j) l_j^2(x) \quad (j = 0,1,\cdots,n)$$

4. 误差估计

设 $f(x)\in C^{2n+1}[a,b]$，$f^{(2n+2)}(x)$ 在 (a,b) 内存在，则有误差估计

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x),\quad \varepsilon\in(a,b)$$

式中，ε 依赖于 x 及插值节点。

五、分段插值

1. 分段线性插值

(1)插值形式

函数 $f(x)$ 关于节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 的分段线性插值函数

$$I_h(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}f(x_k)+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}f(x_{k+1})$$

$$x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1},k=0,1,\cdots,n-1$$

(2)误差估计

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-I_h(x)|\leqslant\frac{m_2}{8}h^2$$

式中

$$m_2\xlongequal{\text{def}}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|,\quad h_k\xlongequal{\text{def}}x_{k+1}-x_k,\quad h\xlongequal{\text{def}}\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}h_k$$

(3)收敛性

当 $f(x)\in C[a,b]$ 时，有 $\lim\limits_{h\to 0}I_h(x)=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致成立。

2. 分段三次 Hermite 插值。

(1)插值形式

函数 $f(x)$ 关于节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 的分段三次 Hermite 插值函数

$$\begin{aligned}I_h(x)=&\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2(x-x_k)f(x_k)\\&+\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2\cdot(x-x_k)f'(x_k)+\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right)^2f(x_{k+1})\\&+\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right)^2(x-x_{k+1})f'(x_{k+1})\qquad x\in[x_k,x_{k+1}],k=0,1,2,\cdots,n-1\end{aligned}$$

(2)误差估计

若 $f(x)\in C^3[a,b]$ 且 $m_4\xlongequal{\text{def}}\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|$，则

$$|R(x)|=|f(x)-H_h(x)|\leqslant\frac{h^4}{384}m_4$$

式中，$h\xlongequal{\text{def}}\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}h_i$，$h_i\xlongequal{\text{def}}x_{i+1}-x_i$。

若 $m_1 \xlongequal{\text{def}} \max\limits_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ 存在，则 $\max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{35}{27} h m_1$。

(3)收敛性

若 $f(x) \in C^1[a,b]$，则 $\lim\limits_{h \to 0} I_h(x) = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致成立。

3. 三次样条插值

(1)定义

如果函数 $S(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足条件：

①$S(x), S'(x), S''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则记作 $S(x) \in C^2[a,b]$；

②在子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 上是三次多项式，其中 $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$，则称 $S(x)$ 是 $[a,b]$ 上的三次样条函数；

③对于在节点上给定的函数值 $f(x_i) = y_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$，如果 $S(x)$ 满足 $S(x_i) = y_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$，则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的三次样条插值函数。

(2)存在唯一性

满足下列三类附加条件之一的三次样条插值函数是唯一存在的。

第一类：$S'(x_0) = f'(x_0), S'(x_n) = f'(x_n)$；

第二类：$S''(x_0) = f''(x_0), S''(x_n) = f''(x_n)$；

第三类：$S^{(p)}(x_0+0) = S^{(p)}(x_n - 0), p = 0,1,2$。

(3)插值形式

$$S(x) = m_k \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} + m_{k+1} \frac{(x - x_k)^3}{6h_k} + \left(f(x_k) - \frac{m_k h_k^2}{6}\right) \cdot \frac{x_{k+1} - x}{h_k}$$

$$+ \left(f(x_{k+1}) - \frac{m_{k+1} h_k^2}{6}\right) \frac{x - x_k}{h_k} \qquad x \in [x_k, x_{k+1}], k = 0,1,\cdots,n-1$$

式中，$h_k = x_{k+1} - x_k$。

对于第一组边界条件，参数 $\{m_k\}_{k=0}^{n}$ 是下列方程组的解。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_0, x_0, x_1] \\ f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \\ f[x_{n-1}, x_n, x_n] \end{bmatrix}$$

式中 $$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j} (j = 1,2,\cdots,n-1)$$

$$f[x_0,x_0,x_1] \overset{\text{def}}{=} \frac{f'(x_0)-f[x_0,x_1]}{x_0-x_1} = \frac{f[x_0,x_1]-f'(x_0)}{h_0}$$

$$f[x_{n-1},x_n,x_n] \overset{\text{def}}{=} \frac{f[x_{n-1},x_n]-f'(x_n)}{x_{n-1}-x_n} = \frac{f'(x_n)-f[x_{n-1},x_n]}{h_{n-1}}$$

这样，方程组右端的差商部分可用带重节点的差商表计算，有

$$\begin{array}{llll}
x_0 & f(x_0) & & \\
 & & > f'(x_0) & \\
x_0 & f(x_0) & & > f[x_0,x_0,x_1] \\
 & & > f[x_0,x_1] & \\
x_1 & f(x_1) & & > f[x_0,x_1,x_2] \\
 & & > f[x_1,x_2] & \\
x_2 & f(x_2) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & & \\
 & & > f[x_{n-1},x_n] & \\
x_n & f(x_n) & & > f[x_{n-1},x_n,x_n] \\
 & & > f'(x_n) & \\
x_n & f(x_n) & &
\end{array}$$

对于第二组边界条件，$\{m_k\}_{k=0}^{n-1}$是下列方程组的解。

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6f[x_0,x_1,x_2]-\mu_1 m_0 \\ 6f[x_1,x_2,x_3] \\ 6f[x_2,x_3,x_4] \\ \vdots \\ 6f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1}] \\ 6f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]-\lambda_{n-1} m_n \end{bmatrix}$$

对于第三组边界条件，$\{m_k\}_{k=0}^{n}$是下列方程组的解($m_n=m_0$)。

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_n \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} f[x_0,x_1,x_2] \\ f[x_1,x_2,x_3] \\ f[x_2,x_3,x_4] \\ \vdots \\ f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] \\ \dfrac{f[x_0,x_1]-f[x_{n-1},x_n]}{h_0+h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

式中，$\lambda_n = \dfrac{h_0}{h_{n-1}+h_0}$，$\mu_n = \dfrac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_0}$。

(4)误差估计及收敛性

设 $f(x) \in C^4[a,b]$，$S(x)$是 $f(x)$关于节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 的三次样条插值函数，附加第一组或第二组边界条件，则有误差估计

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(m)}(x) - S^{(m)}(x)| \leqslant c_m \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(4)}(x)| h^{4-m}, \quad m = 0,1,2$$

式中 $\quad c_0 = \dfrac{5}{384}, \quad c_1 = \dfrac{1}{24}, \quad c_2 = \dfrac{3}{8}, \quad h = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} h_k, \quad h_k = x_{k+1} - x_k$

从上述过程自然得到，当 $h \to 0$ 时，$S(x)$，$S'(x)$和 $S''(x)$均分别一致收敛到 $f(x)$，$f'(x)$及$f''(x)$。

六、最小二乘曲线拟合

1. 线性空间中的最小二乘曲线拟合问题

已知数据$\{(x_j, f(x_j))\}_{j=0}^{m}$，在 $\Phi = \operatorname{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$中确定一函数$S(x)$，使得 $\sum\limits_{j=0}^{m} \omega(x_j)[S(x_j) - f(x_j)]^2$ 最小，这里$\{\omega(x_j)\}_{j=0}^{m}$ 是权系数，均大于零。

2. 最小二乘解 $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \varphi_k$ 的系数满足的法方程组的形式同下式

$$G_n \xlongequal{\text{def}} \begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

只需将其中内积换为如下离散形式的内积

$$(f,g) = \sum_{j=0}^{m} \omega(x_j) f(x_j) g(x_j)$$

3. 存在唯一性

当$\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$关于点集$\{x_j\}_{j=0}^{m}$满足哈尔(Haar)条件时，法方程组存在唯一解向量。

哈尔条件：$\{\varphi_k\}_{k=0}^{m} \subset C[a,b]$的任意系数不全为零的线性组合在点集$\{x_j\}_{j=0}^{m}$ $(m \geqslant n)$中至多有 n 个不同的零点($\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$是线性无关的函数组)。

4. 用关于点集的正交多项式作最小二乘拟合

SHU HOU XI TI JIE XI 书后习题解析

3-1 已知下列表值

x	10	11	12	13
$\ln x$	2.302 6	2.397 9	2.484 9	2.564 9

用线性插值与二次 Lagrange 插值计算 ln11.75 的近似值，并估计误差。

解 因插值点 $x=11.75$ 位于 $x_1=11$ 和 $x_2=12$ 之间，所以取 x_1 和 x_2 为线性插值节点。

$$L_1(x)=y_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

据此公式算得 $L_1(11.75)=2.463\ 15$。

计算二次插值时，取点 $x_1=11,x_2=12,x_3=13$，有

$$L_2(x)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

代入 $x=11.75$，计算得 $L_2(11.75)=2.463\ 806\ 25$。

因为 $$f''(x)=(\ln x)''=-\frac{1}{x^2},\quad f'''(x)=(\ln x)'''=\frac{2}{x^3}$$

所以 $$m_2=\max_{11\leqslant x\leqslant 12}|f''(x)|=|f''(11)|\leqslant 8.264\ 5\times 10^{-3}$$

$$m_3=\max_{11\leqslant x\leqslant 13}|f'''(x)|=|f'''(11)|\leqslant 1.503\times 10^{-3}$$

于是 $$|R_1(11.75)|\leqslant\frac{m_2}{2!}|(11.75-11)(11.75-12)|\leqslant 7.748\times 10^{-4}$$

$$|R_2(11.75)|\leqslant\frac{m_3}{3!}|(11.75-11)(11.75-12)(11.75-13)|\leqslant 5.871\ 1\times 10^{-5}$$

3-2 给出概率积分 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$ 的数据表。

x	0.46	0.47	0.48	0.49
$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$	0.484 655	0.493 745	0.502 750	0.511 668

试用二次 Lagrange 插值计算：

(1)当 x 为何值时，该积分等于 0.505？

(2)当 $x=0.472$ 时,该积分等于多少?

解 (1)将 x 看成 y 的函数,即 $x=x(y)$,以 y_1,y_2 和 y_3 为插值节点作 $x(y)$的 2 次插值多项式,有

$$\tilde{L}_2(y)=x_1\frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}+x_2\frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)}+x_3\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)}$$

所以 $x(0.505)\approx\tilde{L}_2(0.505)$

$$\begin{aligned}&=0.47\times\frac{(0.505-0.502\,750)(0.505-0.511\,668)}{(0.493\,745-0.502\,750)(0.493\,745-0.511\,668)}\\&\quad+0.48\times\frac{(0.505-0.493\,745)(0.505-0.511\,668)}{(0.502\,750-0.493\,745)(0.502\,750-0.511\,668)}\\&\quad+0.49\times\frac{(0.505-0.493\,745)(0.505-0.502\,750)}{(0.511\,668-0.493\,745)(0.511\,668-0.502\,750)}\\&=0.483\,056\,2\end{aligned}$$

(2)以 x_0,x_1,x_2 为插值节点作 $y(x)$的 2 次插值多项式

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

所以 $y(0.472)\approx L_2(0.472)$

$$\begin{aligned}&=0.484\,655\times\frac{(0.472-0.47)(0.472-0.48)}{(0.46-0.47)(0.46-0.48)}\\&\quad+0.493\,745\times\frac{(0.472-0.46)(0.472-0.48)}{(0.47-0.46)(0.47-0.48)}\\&\quad+0.502\,750\times\frac{(0.472-0.46)(0.472-0.47)}{(0.48-0.46)(0.48-0.47)}\\&=0.495\,562\,4\end{aligned}$$

3-3 已知下列表值

x	0	1	2
$f(x)$	8	-7.5	-18

求 $f(x)$在[0,2]之间的零点近似值。

解 当函数 $f(x)$的解析式未知,而仅知其在某区间$[a,b]$上的函数表时,如何求其在$[a,b]$上的零点呢? 一般地可先求 $f(x)$在$[a,b]$上的插值函数 $y(x)$,然后求 $y(x)$的零点,把此零点作为 $f(x)$的近似零点。特别是,若 $f(x)$的反函数存在,记为 $x=g(y)$,于是,求 $f(x)$的零点问题就变成求函数值 $g(0)$的问题了。若用插值法构造出 $g(y)$,从而求得 $f(x)$的零点的近似值,则一般称其为"反插值"。使用反插值时,必须注意反插值的条件是函数 $y=f(x)$存在反函数,即要求 $y=f(x)$单调。本题中,因为 $f(x)$是严格单调下降排列的,所以可用反插值法求 $f(x)$的零点的近似值。具体做法是先把原表变成反函数表。

$f(x)$	8	-7.5	-18
x	0	1	2

由上表构造二次插值多项式 $L_2(y)$，且令 $y=0$，则可得 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 之间的零点近似值 $x^* \approx L_2(y)$。具体计算过程为

$$L_2(0)=\frac{(0+7.5)\times(0+18)}{(8+7.5)\times(8+18)}\times 0+\frac{(0-8)(0+18)}{(-7.5-8)(-7.5+18)}\times 1$$
$$+\frac{(0-8)(0+7.5)}{(-18-8)(-18+7.5)}\times 2\approx 0.445$$

即 $x^*\approx 0.445$。

事实上，此题的 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-16x+8$ 在 $[0,2]$ 之间的零点为 $x^*=0.5$。

应该指出，当所给函数表不满足严格单调的条件时，利用反插值法求根会出错。

3-4　给出 $f(x)=\sin x$ 的等距节点函数表，如用分段线性插值计算 $\sin x$ 的近似值，使其截断误差为 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，则函数表的步长应取多大？

解　设 $x_k(k=0,1,\cdots)$ 为等距节点，其步长为 h，即 $x_{k+1}=x_k+h$。当 $x\in[x_k,x_{k+1}]$ 时，作 $f(x)$ 的线性插值

$$L_1(x)=f(x_k)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+f(x_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

则有
$$f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_k)(x-x_{k+1})$$

由此易知
$$|f(x)-L_1(x)|\leqslant\frac{1}{2}\max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}|f''(x)|\cdot\max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}|(x-x_k)(x-x_{k+1})|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{4}\qquad x\in[x_k,x_{k+1}]$$

因而 $\max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}|f(x)-L_1(x)|\leqslant\frac{h^2}{8}$。由 $\frac{h^2}{8}\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，解得 $h\leqslant 0.02$，即要使得截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，只要求步长 $h\leqslant 0.02$。

3-5　已知等距插值节点

$$x_0<x_1<x_2<x_3,\quad x_{i+1}-x_i=h\qquad (i=0,1,2)$$

且 $f(x)$ 在 $[x_0,x_3]$ 上有四阶连续导数，证明 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式余项的误差界为

(1)二次插值的误差界

$$R_2=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f(x)-L_2(x)|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{27}h^3\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f'''(x)|$$

(2)三次插值的误差界

$$R_3=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_3}|f(x)-L_3(x)|\leqslant\frac{1}{24}h^4\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_3}|f^{(4)}(x)|$$

证明 令 $x = x_0 + th$。

(1) $f(x) - L_2(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad x_0 \leqslant \xi \leqslant x_2$

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_2} |f(x) - L_2(x)| \leqslant \frac{1}{6} \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_2} |f'''(x)| \cdot \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_2} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$$

$$= \frac{1}{6} h^3 \max_{0 \leqslant t \leqslant 2} |t(t-1)(t-2)| \cdot \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_2} |f'''(x)| \tag{1}$$

考虑函数 $\varphi(t) = t(t-1)(t-2), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

由 $\varphi'(t) = 0$，即 $3t^2 - 6t + 2 = 0$，解得

$$t_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

由 $\varphi(0) = 0, \varphi(t_1) = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \varphi(t_2) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}, \varphi(2) = 0$，知

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 2} \varphi(t) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \tag{2}$$

由 $\varphi(t)$ 的定义及式(1)和式(2)得

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_2} |f(x) - L_2(x)| \leqslant = \frac{\sqrt{3}}{27} h^3 \cdot \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_2} |f'''(x)|$$

(2) $f(x) - L_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_3} |f(x) - L_3(x)|$

$$\leqslant \frac{1}{24} \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_2} |f^{(4)}(x)| \cdot \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_3} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)|$$

$$= \frac{h^4}{24} \max_{0 \leqslant t \leqslant 3} |t(t-1)(t-2)(t-3)| \cdot \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_3} |f^{(4)}(x)| \tag{3}$$

作变换 $s = t - \frac{3}{2}$，则 $t = s + \frac{3}{2}, t - 1 = s + \frac{1}{2}, t - 2 = s - \frac{1}{2}, t - 3 = s - \frac{3}{2}$，则

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 2} |t(t-1)(t-2)(t-3)| = \max_{\frac{3}{2} \leqslant s \leqslant \frac{3}{2}} \left| (s + \frac{3}{2})(s + \frac{1}{2})(s - \frac{1}{2})(s - \frac{3}{2}) \right|$$

$$= \max_{-\frac{3}{2} \leqslant s \leqslant \frac{3}{2}} \left| (s^2 - \frac{1}{4})(s^2 - \frac{9}{4}) \right| = \max_{x_0 \leqslant s \leqslant \frac{3}{2}} \left| (s^2 - \frac{1}{4})(s^2 - \frac{9}{4}) \right|$$

$$= \max_{0 \leqslant z \leqslant \frac{9}{4}} \left| (z - \frac{1}{4})(z - \frac{9}{4}) \right| = 1$$

最后一步参见图 3-1，因而

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_3} |f(x) - L_3(x)| \leqslant \frac{h^4}{24} \cdot \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_3} |f^{(4)}(x)|$$

3-6 证明：由下列插值条件

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	-1	-0.75	0	1.25	3	5.25

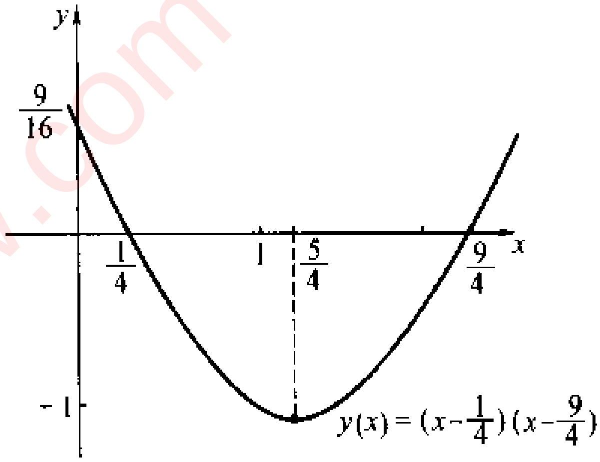


图 3-1

所确定的 Lagrange 插值多项式是一个二次多项式。该例说明了什么问题?

证明 记 $x_0=0,\quad x_1=0.5,\quad x_2=1,\quad x_3=1.5,\quad x_4=2,\quad x_5=2.5$

$$y_0=-1,\quad y_1=-0.75,\quad y_2=0,\quad y_3=1.25,\quad y_4=3,\quad y_5=5.25$$

以 x_0,x_2,x_4 为插值节点作 $f(x)$ 的 2 次插值多项式 $P(x)$,则

$$P(x)=y_0\frac{(x-x_2)(x-x_4)}{(x_0-x_2)(x_0-x_4)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_4)}+y_4\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_4-x_0)(x_4-x_2)}$$

$$=-\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}+0\times\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(0-2)}+3\times\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=x^2-1$$

容易验证 $P(x_1)=y_1,P(x_3)=y_3,P(x_5)=y_5$,因而 6 个点 (x_i,y_i), $i=0,1,\cdots,5$ 均在二次曲线 $P(x)=x^2-1$ 上。换句话说,满足插值条件 $P(x_i)=y_i,i=0,1,2,\cdots,5$ 的 Lagrange 插值多项式为 $P(x)=x^2-1$。

由拉格朗日插值多项式的存在唯一性定理知满足条件 $P(x_i)=y_i$ 的 5 次插值多项式是唯一存在的,但该 5 次多项式并不一定是一个真正的 5 次多项式,而把小于等于 4 次的多项式看成特殊的 5 次多项式。

3-7 给定数据表

x	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750
$f(x)$	0.796 18	0.773 34	0.743 71	0.704 13	0.656 32	0.602 28

用二次 Newton 插值公式计算 $f(0.158\ 1)$ 及 $f(0.636\ 7)$。

解 所给节点是等距的,有

$$x_0=0.125,\quad h=0.125$$

$$x_i=x_0+th,\quad 0\leqslant t\leqslant 5$$

计算差分表如下。

k	x_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$	$\Delta^5 f_k$
0	0.125	0.796 18					
			-0.022 84				
1	0.250	0.773 34		-0.006 79			
			-0.029 63		-0.003 16		
2	0.375	0.743 71		-0.009 95		0.004 88	
			-0.039 58		0.001 72		-0.004 60
3	0.500	0.704 13		-0.008 23		0.000 28	
			-0.047 81		0.002 00		
4	0.625	0.656 32		-0.006 23			
			-0.054 04				
5	0.750	0.602 28					

令 $x = x_0 + th\ (t = \dfrac{x - x_0}{h})$，则牛顿插值多项式为

$$N_3(x_0 + th) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}t(t-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!}t(t-1)(t-2)$$

$$f(0.158\ 1) \approx N_3(0.158\ 1) = 0.790\ 615$$

$$f(0.636\ 7) \approx N_3(0.636\ 7) = 0.651\ 495$$

3-8　用上题数据计算 $f(0.385)$。

(1)取 $x_0 = 0.250$，用二次 Newton 前插公式。

(2)取 $x_0 = 0.500$，用二次 Newton 后插公式。

二者计算结果是否相同，为什么？

解　为使结果精确度更高，选择点 $x_1 = 0.250, x_2 = 0.375, x_3 = 0.500$ 为插值节点。

(1) $N_2(x_0 + th) = f_0 + \dfrac{\Delta f_0}{1!}t + \dfrac{\Delta^2 f_0}{2!}t(t-1)$

$$= 0.773\ 34 + \frac{(-0.029\ 63)}{1} \times 1.08 + \frac{(-0.009\ 95)}{2} \times 1.08 \times (1.08 - 1)$$

$$= 0.740\ 909\ 76 \qquad \left(t = \frac{0.385 - 0.25}{0.125} = 1.08\right)$$

(2) $N_2(x_3 + th) = f_3 + \nabla f_3 t + \dfrac{\nabla_3^2 f_3}{2!}t(t-1)$

$$= 0.704\ 13 + (-0.039\ 58) \times (-0.92) + \frac{(-0.009\ 95)}{2} \times (-0.92) \times (-0.92 + 1)$$

$$= 0.740\ 909\ 76 \qquad \left(t = \frac{0.385 - 0.50}{0.125} = -0.92\right)$$

二者结果相同。

3-9　给出下列函数表。

x	$\tan x$	$\sin x$	$\cos x$
1.566	208.491 28	0.999 988 5	0.004 796 3
1.567	263.411 25	0.999 992 8	0.003 796 3
1.568	357.611 06	0.999 996 1	0.002 796 3
1.569	556.690 98	0.999 998 4	0.001 796 3
1.570	1 255.765 59	0.999 999 7	0.000 796 3

利用这些数据用 Newton 差分插值公式求 tan1.569 5。

(1)直接利用关于 $\tan x$ 的数表进行插值;

(2)利用关于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的数表进行插值,算出 sin1.569 5 与 cos1.569 5 后,再求 $\tan x$ 的相应值。

(3)tan1.569 5 真值为 771.409 99。若利用(1)算得的结果与此不相符,解释其原因。

解 (1)制 $\tan x$ 的差分表。记 $x_0 = 1.566, x_1 = 1.567, x_2 = 1.568, x_3 = 1.569, x_4 = 1.570$。

x	$\tan x$	$\Delta\tan x$	$\Delta^2\tan x$	$\Delta^3\tan x$	$\Delta^4\tan x$
x_0	$\tan x_0$				
		54.919 97			
x_1	$\tan x_1$		39.279 84		
		94.199 81		65.600 26	
x_2	$\tan x_2$		104.880 11		329.514 34
		199.079 92		395.114 6	
x_3	$\tan x_3$		499.994 710		
		699.074 62			
x_4	$\tan x_4$				

四次插值多项式

$$
\begin{aligned}
P_4(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!}\Delta^k \tan x \\
&= 208.491\,28 + 54.919\,97t + 39.279\,84t(t-1)/2! \\
&\quad + 65.600\,62t(t-1)(t-2)/3! \\
&\quad + 329.514\,34t(t-1)(t-2)(t-3)/4!
\end{aligned}
$$

由 $x = x_0 + th = 1.566 + 0.001t$,令 $x = 1.569\,5$,解得 $t = 3.5$,代入上式,即得 $\tan 1.569\,5 = P_4(1.569\,5) = 777.462\,5$。

(2)制 $\sin x$,$\cos x$ 的差分表,并计算 sin1.569 5,cos1.569 5。

x	$\sin x$	$\Delta\sin x$	$\Delta^2\sin x$	$\Delta^3\sin x$	$\Delta^4\sin x$
x_0	$\sin x_0$				
x_1	$\sin x_1$	0.000 004 3			
x_2	$\sin x_2$	0.000 003 3	-0.000 001 0		
x_3	$\sin x_3$	0.000 002 3	-0.000 001 0	0	
x_4	$\sin x_4$	0.000 001 3	-0.000 001 0	0	0

$$\begin{aligned}\sin 1.569\,5 &= P_4(1.569\,5) = 0.999\,988\,5 + 0.000\,004\,3\times 3.5 - 0.000\,001\,0\times 3.5\times(3.5-1)/2! \\ &= 0.999\,999\,1\end{aligned}$$

x	$\cos x$	$\Delta\cos x$	$\Delta^2\cos x$	$\Delta^3\cos x$	$\Delta^4\cos x$
x_0	$\cos x_0$				
x_1	$\cos x_1$	-0.001 000 0			
x_2	$\cos x_2$	-0.001 000 0	0		
x_3	$\cos x_3$	-0.001 000 0	0	0	
x_4	$\cos x_4$	-0.001 000 0	0	0	0

$$\cos 1.569\,5 = P_4(1.569\,5) = 0.004\,796\,3 + (-0.001\,000\,0)\times 3.5 = 0.001\,296\,3$$

因此
$$\tan 1.569\,5 = 0.999\,999\,1/0.001\,296\,3 = 771.425\,67$$

(3)按第一种算法,近似值的绝对误差 $e^* = -6.052\,26$。第二种算法,近似值的绝对误差 $e^* = -0.015\,42$。其原因为在区间[1.566,1.570],特别是在[1.569,1.570]区间内,函数 $\tan x$ 的变化很大,从而差商的绝对值便很大,用差商表示的逼近误差势必偏大,插值效果不好。相反 $\sin x$, $\cos x$ 在任意区间的函数值的变化平缓,插值逼近的效果好。

3-10 求二次多项式 $P_2(x)$,使它满足

$$P_2(x_0) = y_1,\quad P_2(x_2) = y_2,\quad P_2'(x_1) = y_1'$$

其中
$$x_0 < x_1 < x_2,\qquad x_1 \neq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

解 记
$$L_1(x) = y_1\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_2\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_1(x - x_2) - y_2(x - x_0)}{x_0 - x_2}$$

并令 $P_2(x) = L_1(x) + q(x)$,则易知 $q(x) = P_2(x) - L_1(x)$为不超过2次的多项式,且

$$q(x_0) = P_2(x_0) - L_1(x_0) = y_1 - y_1 = 0$$
$$q(x_2) = P_2(x_2) - L_1(x_2) = y_2 - y_2 = 0$$

即 x_0, x_2 为 $q(x)$的零点。于是 $q(x) = A(x - x_0)(x - x_2)$,其中 A 为待定常数。于是

$$P_2(x)=L_1(x)+q(x)=\frac{y_1(x-x_2)-y_2(x-x_0)}{x_0-x_2}+A(x-x_0)(x-x_2)$$

对 $P_2(x)$ 求导得
$$P_2'(x)=\frac{(y_1-y_2)}{x_0-x_2}+A(2x-x_0-x_2)$$

由 $P_2'(x_1)=y_1'$ 得
$$\frac{(y_1-y_2)}{x_0-x_2}+A(2x_1-x_0-x_2)=y_1'$$

所以
$$A=\frac{y_1'(x_0-x_2)-(y_1-y_2)}{(2x_1-x_0-x_2)(x_0-x_2)}$$

因而
$$P_2(x)=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_0}(x-x_0)+\frac{y_1'(x_0-x_2)-(y_1-y_2)}{(2x_1-x_0-x_2)(x_0-x_2)}(x-x_0)(x-x_2)$$

3－11　已知 $f(x)=x^6+x^4-x^2+1, x_k=2+kh, h=2(k=0,1,2,\cdots)$。

(1)求 $f[2,4,6,8,10,12,14]$ 及 $f[2,6,10,14,18,22,26,30]$；

(2)求 $\Delta^6 f_0$ 及 $\nabla^7 f_7$。

解　(1)利用差商和导数之间的关系，有
$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},\quad \xi\in(\min_{0\le i\le k}\{x_i\},\max_{0\le i\le k}\{x_i\})$$

可得
$$f[2,4,6,8,10,12,14]=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}=\frac{6!}{6!}=1$$
$$f[2,4,6,10,14,18,22,26,30]=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\frac{0}{7!}=0$$

(2)因为
$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{\Delta^k f_0}{k!\ h^k}\quad(k=1,2,\cdots)$$

所以
$$\Delta^6 f_0=f[x_0,x_1,\cdots,x_6]6!\ \times 2^6=1\times 6!\ \times 2^6=46\,080$$

又因为 $\nabla^m f_{k+m}=\Delta^m f_k$，所以 $\nabla^7 f_7=\Delta^7 f_0$，因此
$$\Delta^7 f_0=f[x_0,x_1,\cdots,x_7]7!\ \times 2^7=1\times 7!\ \times 2^7=0$$

3－12　若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ 有 n 个不同实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。证明
$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2\\ a_n^{-1}, & k=n-1\end{cases}$$

证明　由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个互异的零点，所以
$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$
$$=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=a_n(x-x_j)\prod_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{n}(x-x_i)$$

对 $f(x)$ 求导得
$$f'(x)=a_n\Big[\prod_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{n}(x-x_i)+(x-x_j)\Big(\prod_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{n}(x-x_i)\Big)'\Big]$$

因而
$$f'(x_j)=a_n\prod_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n\prod\limits_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)}=\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)}\qquad(1)$$

记 $g_k(x)=x^k$,则

$$g^{(n-1)}(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant k\leqslant n-2\\(n-1)! & k=n-1\end{cases}\tag{2}$$

于是由式(1)和式(2)得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{g_k(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)}=\frac{1}{a_n}g_k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$$

$$=\frac{1}{a_n}\frac{g_k^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}=\begin{cases}0 & 0\leqslant k\leqslant n-2\\\dfrac{1}{a_n} & k=n-1\end{cases}$$

3-13 若 $y_n=2^n$,求 $\Delta^4 y_n$ 及 $\nabla^4 y_n$。

解 $$\Delta^4 y_n=(E-I)^4 y_n=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(-1)^{4-i}E^i y_n=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(-1)^{4-i}y_{n+i}$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(-1)^{4-i}2^i\right)y_n=(2-1)^4 y_n=y_n=2^n$$

$$\nabla^4 y_n=\Delta^4 y_{n-4}=\Delta^4 y_n\cdot 2^{-4}=2^{n-4}$$

3-14 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,在 $-5\leqslant x\leqslant 5$ 上取 $n=10$,按等距节点求分段线性插值函数 $I_h(x)$,计算各节点中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 的值,并估计误差。

解 步长 $h=\dfrac{5-(-5)}{n}=1$,$x_i=-5+ih=-5+i\,(0\leqslant i\leqslant 10)$。在区间$[x_i,x_{i+1}]$上的线性插值函数

$$I_h^{(i)}(x)=f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

$$=\frac{x_{i+1}-x}{1+x_i^2}+\frac{x-x_i}{1+x_{i+1}^2}\qquad i=0,1,\cdots,9$$

分段线性插值函数定义为

$$I_h(x)=I_h^{(i)}(x)=\frac{x_{i+1}-x}{1+x_i^2}+\frac{x-x_i}{1+x_{i+1}^2},\quad x\in[x_i,x_{i+1}]$$

各区间中点的函数值及插值函数值如下表所示。

x	±0.5	±1.5	±2.5	±3.5	±4.5
$f(x)$	0.800 00	0.307 69	0.137 93	0.075 47	0.047 06
$I_h(x)$	0.750 00	0.350 00	0.150 00	0.079 41	0.048 64

估计误差:在区间$[x_i,x_{i+1}]$上,有

$$|f(x)-I_h^{(i)}(x)|=\left|\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\max_{-5\leqslant x\leqslant 5}|f''(x)|\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})|$$

而
$$\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})| \xlongequal{x=x_i+sh} \max_{0\leqslant s\leqslant 1}|s(s-1)| = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

令 $f'''(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = 0$，得 $f'''(x)$ 的驻点 $0, \pm 1$，于是

$$\max_{-5\leqslant x\leqslant 5}\{|f''(x)|\} = \max\{|f''(0)|, |f''(\pm 1)|, |f''(\pm 5)|\} = 2$$

故有结论
$$|f(x) - I_h^{(i)}(x)| \leqslant \frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{4} = 0.25,\quad x\in[x_i, x_{i+1}]$$

右端与 i 无关，于是有

$$|f(x) - I_h^{(i)}(x)| \leqslant 0.25,\quad x\in[-5,5]$$

3－15　求 $f(x) = x^2$ 在 $[a,b]$ 上分段线性插值函数 $L_h(x)$，并估计误差。

解　设采用节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，定义 $h_i = x_{i+1} - x_i$，$0\leqslant i\leqslant n-1$，$h = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} h_i$，在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的线性插值函数

$$I_h^{(i)} = f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} + f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} = \frac{x_i^2}{h_i}(x_{i+1}-x) + \frac{x_{i+1}^2}{h_i}(x-x_i)$$

分段线性插值函数

$$I_h(x) = I_h^{(i)}(x) = \frac{x_i^2}{h_i}(x_{i+1}-x) + \frac{x_{i+1}^2}{h_i}(x-x_i),\quad x\in[x_i, x_{i+1}]$$

误差估计

$$|f(x) - I_h^{(i)}(x)| = \left|\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\cdot\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})|$$
$$= \frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{h_i}{2}\right)^2 = \frac{h_i^2}{4},\quad x\in[x_i, x_{i+1}]$$

进而
$$|f(x) - I_h(x)| \leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|f(x) - I_h^{(i)}(x)| \leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\frac{h_i^2}{4} = \frac{h^2}{4}$$

3－16　证明两点三次 Hermite 插值余项是

$$R(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2,\quad \xi\in(x_k, x_{k+1})$$

并由此求出分段三次 Hermite 插值的余项。

证明　设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上有四阶连续导数，且有 $P(x)$ 使得

$$P(x_j) = f(x_j),\quad P'(x_j) = f'(x_j),\quad j = 0,1$$

则估计余项
$$R(x) = f(x) - P(x)$$

$$R(x_j) = f(x_j) - P(x_j) = 0,\quad R'(x_j) = f'(x_j) - P'(x_j) = 0,\quad j = 0,1$$

即 x_0 和 x_1 均为 $R(x)$ 的二重零点，因而 $R(x)$ 具有形式

$$R(x)=k(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

即
$$f(x)-P(x)=k(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \tag{1}$$

当 $x=x_0,x_1$ 时，式(1)的两边均为零，因而对任何有界的 $k(x)$ 均成立。现设 $x\neq x_0,x_1$ $(x_0<x<x_1)$，作辅助函数

$$\varphi(t)=f(t)-P(t)-k(x)(t-x_0)^2(t-x_1)^2$$

则
$$\varphi(x_0)=0,\quad \varphi(x)=0,\quad \varphi(x_1)=0,\quad \varphi'(x_0)=0,\quad \varphi'(x_1)=0$$

由罗尔定理知，存在 $\xi_1\in(x_0,x)$，$\xi_2\in(x,x_1)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=0$，$\varphi'(\xi_2)=0$，因而 $\varphi'(x)$ 有 4 个互异的零点 $x_0<\xi_1<\xi_2<x_1$。再根据罗尔定理知，存在 $\eta_1\in(x_0,\xi_1)$，$\eta_2\in(\xi_1,\xi_2)$，$\eta_3\in(\xi_2,x_1)$，使得

$$\varphi''(\eta_1)=0,\quad \varphi''(\eta_2)=0,\quad \varphi''(\eta_3)=0$$

再由罗尔定理知，存在 $\zeta_1\in(\eta_1,\eta_2)$，$\zeta_2\in(\eta_2,\eta_3)$，使得 $\varphi'''(\zeta_1)=0$，$\varphi'''(\zeta_2)=0$，最后由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\zeta_1,\zeta_2)\subset(x_0,x_1)$，使得

$$\varphi^{(4)}(\xi)=0 \tag{2}$$

对 $\varphi(t)$ 求四阶导数，得 $\varphi^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-4!k(x)$，由式(2)得 $f^{(4)}(\xi)-4!k(x)=0$，因而

$$k(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

将其代入式(1)得
$$f(x)-P(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

3－17　求满足下列条件的 Hermite 插值多项式

x_k	y_k	y'_k
1	2	1
2	3	－1

解　令 $x_0=1,x_1=2$，代入 Hermite 插值公式

$$H_3(x)=\left[1-2(x-x_0)\frac{1}{x_0-x_1}\right]l_0^2(x)y_0+(x-x_0)l_0^2(x)y'_0$$
$$+\left[1-2(x-x_1)\frac{1}{x_1-x_0}\right]l_1^2(x)y_1+(x-x_1)l_1^2(x)y'_1$$

这里 $l_0(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$，$l_1(x)=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$，得

$$H_3(x)=-2x^3+8x^2-9x+5$$

3－18　求 $f(x)=\sin x$ 在 $[a,b]$ 上的分段 Hermite 插值多项式，并估计误差。

解　设有节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，步长 $h_i=x_{i+1}-x_i\,(0\leqslant i\leqslant n-1)$，有

$$h\overset{\text{def}}{=\!=}\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}h_i$$

在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 的 Hermite 插值为

$$
\begin{aligned}
I_h^{(i)}(x) = {} & \sin x_i\left(1-2\frac{x-x_i}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2+\cos x_i(x-x_i)\left(\frac{x-x_i}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 \\
& +\sin x_{i+1}\left(1-2\frac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 \\
& +\cos x_{i+1}(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2, \quad x\in[x_i,x_{i+1}]
\end{aligned}
$$

估计误差 $\quad \left|f(x)-I_h^{(i)}(x)\right| = \left|\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\right|$

$$
\begin{aligned}
& \le \frac{1}{24}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\cdot\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|^2 \\
& = \frac{1}{24}\times1\times\left[\frac{h_i}{2}\right]^2=\frac{h_i^4}{384} \qquad x\in[x_i,x_{i+1}]
\end{aligned}
$$

对于 $I_h(x)$ 有

$$
\left|f(x)-I_h(x)\right| \le \max_{0\le i\le n-1}\left|f(x)-I_h^{(i)}(x)\right| \le \max_{0\le i\le n-1}\frac{h_i^4}{384}=\frac{h^4}{384}
$$

3-19 求一个次数不超过 4 次的插值多项式 $P(x)$，使它满足：

$$
P(0)=f(0)=0, \quad P(1)=f(1)=1
$$

$$
P'(0)=f'(0)=0, \quad P'(1)=f'(1)=1, \quad P''(1)=f''(1)=0
$$

并求其余项表达式(设 $f(x)$ 存在 5 阶导数)。

解 略。

3-20 求满足 $P(x_j)=f(x_j)(j=0,1,2)$ 及 $P'(x_1)=f'(x_1)$ 的 3 次插值多项式，并证明其余项为

$R_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$ (ξ 位于节点之间)(假设 $f(x)$ 存在 4 阶导数)

解 作三次多项式 $\alpha_0(x)$，使得

$$
\alpha_0(x_0)=1, \quad \alpha_0(x_1)=0, \quad \alpha_0(x_2)=0, \quad \alpha_0'(x_1)=0
$$

作三次多项式 $\alpha_1(x)$，使得

$$
\beta_0(x_0)=0, \quad \beta_0(x_1)=0, \quad \beta_0(x_2)=1, \quad \beta_0'(x_1)=0
$$

作三次多项式 $\beta_0(x)$，使得

$$
\beta_0(x_0)=0, \quad \beta_0(x_1)=0, \quad \beta_0(x_2)=0, \quad \beta_0'(x_1)=1
$$

作三次多项式 $\beta_1(x)$，使得

$$
\beta_1(x_0)=0, \quad \beta_1(x_1)=0, \quad \beta_1(x_2)=0, \quad \beta_1'(x_1)=1
$$

则易知多项式

$$
P(x)=f(x_0)\alpha_0(x)+f(x_1)\alpha_1(x)+f'(x_0)\beta_0(x)+f'(x_1)\beta_1(x) \tag{1}
$$

满足插值解 $P(x_j)=f(x_j)(j=0,1,2)$，$P'(x_1)=f'(x_1)$，由 $\alpha_0(x_1)=0$，$\alpha_0'(x_1)=0$ 可知 x_1 为 $\alpha_0(x)$ 的二重零点，因此，$\alpha_0(x)$ 可写为

$$
\alpha_0(x)=[A+B(x-x_0)](x-x_1)^2 \tag{2}
$$

求导得 $\quad \alpha_0'(x)=B(x-x_1)^2+2[A+B(x-x_0)](x-x_1)$

再由 $\alpha_0(x_0)=1$ 及 $\alpha_0(x_2)=0$ 得

$$\begin{cases} A(x_0-x_1)^2=1 \\ B(x_2-x_1)^2+2[A+B(x_2-x_0)](x_2-x_1)=0 \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{(x_0-x_1)^2},\quad B=-\frac{2}{(3x_2-x_1-2x_0)(x_0-x_1)^2}$$

将其代入式(2)得

$$\begin{aligned}\alpha_0(x)&=\left[\frac{1}{(x_0-x_1)^2(3x_2-x_1-2x_0)}-\frac{2(x-x_0)}{(x_0-x_1)^2}\right](x-x_1)^2\\&=\left[1+\frac{2(x-x_0)}{3x_2-x_1-2x_0}\right]\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2\end{aligned}$$

3-21　求三次样条插值函数 $S(x)$，已知 (x_i,y_i) 的值如下：

x_i	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
y_i	0.500 0	0.547 7	0.624 5	0.670 8	0.728 0

边界条件为 $S''(0.25)=0$，$S''(0.53)=0$。

解　由给定数据知

$$h_0=0.30-0.25=0.05,\quad h_1=0.39-0.30=0.09$$
$$h_2=0.45-0.39=0.06,\quad h_3=0.53-0.45=0.08$$

由 $\mu_i=\dfrac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$，$\lambda_i=\dfrac{h_i}{h_{i-1}+h_i}$ 得

$$\mu_1=\frac{5}{14},\lambda_1=\frac{9}{14};\quad \mu_2=\frac{3}{5},\lambda_2=\frac{2}{5};\quad \mu_3=\frac{3}{7},\lambda_3=\frac{4}{7}$$

建立差商表

0.25	0.500 00		
		1.000 0	
0.25	0.500 00		$-0.920\ 0=f[x_0,x_0,x_1]$
		0.954 0	
0.30	0.547 7		$-0.719\ 3=f[x_0,x_1,x_2]$
		0.853 3	
0.39	0.624 5		$-0.544\ 0=f[x_1,x_2,x_3]$
		0.771 7	
0.45	0.670 8		$-0.405\ 0=f[x_2,x_3,x_4]$
		0.715 0	
0.53	0.728 0		$-0.352\ 5=f[x_3,x_4,x_5]$
		0.686 8	
0.53	0.728 0		

已知二阶导数边界条件，$m_0=m_4=0$，弯矩方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{14} & 0 \\ \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{7} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}=6\begin{bmatrix} -0.719\ 3 \\ -0.544\ 0 \\ -0.405\ 0 \end{bmatrix}$$

用追赶法解得 $m_1 = -1.8809, m_2 = -0.8616, m_3 = -1.0304$。三次样条插值函数为

$$S(x) = \begin{cases} -6.2697x^3 + 4.7023x^2 - 0.2059x + 0.3555, & x \in [0.25, 0.30] \\ 1.8876x^3 - 2.6393x^2 + 1.9966x + 0.1353, & x \in [0.30, 0.39] \\ -0.4689x^3 + 0.1178x^2 + 0.9123x + 0.2751, & x \in [0.39, 0.45] \\ 2.1467x^3 - 3.4132x^2 + 2.5103x + 0.0367, & x \in [0.45, 0.53] \end{cases}$$

3-22 用§4中4-5Newton插值公式的算法设计中算例的数据，已知

$$f''(0.52) = -0.1967586$$

$$f''(520) = 0.009772$$

试用7-4算法设计编制程序，并计算在 $x = 5, 25, 65, 130, 170, 220, 380, 440, 500$ 处的函数值.

解 略。

3-23 已知一组数据如下

x_i	2	4	6	8
y_i	2	11	28	48

用最小二乘法求拟合这组数据的一条曲线。

解 略。

3-24 设有某实验数据如下

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
y	5.1234	5.3053	5.5684	5.9378	6.4270	7.0798	7.9493	9.0253	10.3627

(1)求二次最小二乘拟合多项式；

(2)用二次正交多项式作拟合曲线。

解 (1) $\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=1}^{9} \varphi_0(x_i)^2 = \sum_{i=1}^{9} 1^2 = 9$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{9} \varphi_1(x_i)^2 = \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 2.85$$

$$(\varphi_2, \varphi_2) = \sum_{i=1}^{9} \varphi_2(x_i)^2 = \sum_{i=1}^{9} x_i^4 = 1.5333$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \sum_{i=1}^{9} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=1}^{9} x_i = 4.5$$

$$(\varphi_0, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_0) = \sum_{i=1}^{9} \varphi_0(x_i)\varphi_2(x_i) = \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 2.85$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_2,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{9}\varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i)=\sum_{i=1}^{9}x_i^3=2.025$$

$$(y,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{9}y_i\varphi_0(x_i)=\sum_{i=1}^{9}y_i=62.779$$

$$(y,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{9}y_i\varphi_1(x_i)=\sum_{i=1}^{9}y_ix_i=35.191\,6$$

$$(y,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{9}y_i\varphi_2(x_i)=\sum_{i=1}^{9}y_ix_i^2=23.935\,264$$

将以上数据代入正规方程组

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)&(\varphi_0,\varphi_1)&(\varphi_0,\varphi_2)\\(\varphi_1,\varphi_0)&(\varphi_1,\varphi_1)&(\varphi_1,\varphi_2)\\(\varphi_2,\varphi_0)&(\varphi_2,\varphi_1)&(\varphi_2,\varphi_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(y,\varphi_0)\\(y,\varphi_1)\\(y,\varphi_2)\end{bmatrix}$$

得
$$\begin{bmatrix}9&4.5&2.85\\4.5&2.85&2.025\\2.85&2.025&1.533\,3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}62.779\\35.191\,6\\23.935\,264\end{bmatrix}$$

用列主元高斯消去法解得 $a_0=5.313\,9,a_1=-1.882\,2,a_2=8.219\,1$,因而二次拟合多项式为

$$P(x)=5.313\,9-1.882\,2x+8.219\,1x^2$$

3-25 在某个低温过程中,函数 y 依赖于温度 Q(℃)的试验数据如下:

Q_j	1	2	3	4
y_j	0.8	1.5	1.8	2.0

且已知经验公式是 $\varphi(Q)=a_0Q+a_1Q^2$,试用最小二乘法求 a_0,a_1。

解 方法1。记 $\varphi_0(Q)=Q,\varphi_1(Q)=Q^2$,则拟合函数为 $y=a_0\varphi_0(Q)+a_1\varphi_1(Q)$。正规方程组为

$$\begin{bmatrix}(\varphi_1,\varphi_0)&(\varphi_0,\varphi_1)\\(\varphi_0,\varphi_1)&(\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,y)\\(\varphi_1,y)\end{bmatrix}\tag{1}$$

其中 $(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{j=1}^{4}\varphi_0^2(Q_j)=30,\quad(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{j=1}^{4}\varphi_0(Q_j)\varphi_1(Q_j)=100$

$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{j=1}^{4}\varphi_1(Q_j)^2=354,(\varphi_0,y)=\sum_{j=1}^{4}\varphi_0(Q_j)y_j=17.2,(\varphi_1,y)=\sum_{j=1}^{4}\varphi_1(Q_j)y_j=55$

将以上数据代入式(1)得 $\begin{bmatrix}30&100\\100&354\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17.2\\55\end{bmatrix}$

解得 $a_0=0.949\,7,a_1=-0.112\,9$,因而经验公式为

$$y=0.949\,7\varphi_0(Q)-0.112\,9\varphi_1(Q)=0.949\,7Q-0.112\,9Q^2$$

方法2。由 $y=a_0Q+a_1Q^2$ 得 $\frac{y}{Q}=a_0+a_1Q$。令 $Y=\frac{y}{Q}$,则经验公式转变为 $Y=a_0+a_1Q$。

相应的数据如下表。

Q_j	1	2	3	4
Y_j	0.8	0.75	0.6	0.5

可应用求一次拟合多项式的方法求解，正规方程组为

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中

$$S_0 = 4,\quad S_1 = \sum_{j=1}^{4} Q_j = 10,\quad S_2 = \sum_{j=1}^{4} Q_j^2 = 30$$

$$T_0 = \sum_{j=1}^{4} Y_j = 2.65,\quad T_1 = \sum_{j=1}^{4} Q_j Y_j = 6.1$$

将这些数据代入式(1)，得

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.65 \\ 6.1 \end{bmatrix}$$

解得 $a_0 = 0.925$，$a_1 = -0.105$，因而经验公式为

$$Y = 0.925 - 0.105Q \quad 或 \quad y = 0.925Q - 0.105Q^2$$

3－26　在某次实验中，需要观察水分的渗透速度，测得时间 t 与水的质量 W 的数据如下：

t/s	1	2	4	8	16	32	64
W/g	4.22	4.02	3.85	4.59	3.44	3.02	2.59

设已知 t 和 W 之间的关系为 $W = At^s$，试用最小二乘法确定参数 A，s。

解　对 $W = At^s$，两边取对数得 $\ln W = \ln A + s\ln t$，令 $Y = \ln W$，$a_0 = \ln A$，$a_1 = s$，$X = \ln t$，则拟合函数转变为

$$Y = a_0 + a_1 X \tag{1}$$

所给数据转化为下表，式(1)为一次多项式。

x_i	0	0.693 1	1.386 3	2.079 4	0.772 6	3.465 7	4.158 9
y_i	1.439 8	1.391 3	1.348 1	1.523 9	1.235 7	1.105 3	0.951 7

正规方程组为

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中 $s_0 = 7,\quad s_1 = \sum_{i=1}^{7} X_i = 14.556,\quad s_2 = \sum_{i=1}^{7} X_i^2 = 43.720\,9$

$$T_0 = \sum_{i=1}^{7} Y_i = 8.995\,8,\quad T_1 = \sum_{i=1}^{7} X_i Y_i = 17.216\,7$$

将上述数据代入式(2)得

$$\begin{bmatrix} 7 & 14.556 \\ 14.556 & 43.720\,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.995\,8 \\ 17.216\,7 \end{bmatrix}$$

解得 $a_0 = 2.182\,0, a_1 = -0.431\,3$,因而所求得拟合函数为

$$Y = 2.182\,0 - 0.431\,3\ln t \quad 或 \quad W = e^{2.182\,0 - 0.431\,0\ln t} = 4.550\,946 t^{-0.110\,736\,4}$$

3－27　求形如 $y = a_0 e^{a_1 x}$(a_0, a_1 为常数)的经验函数拟合下表给出的数据。

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6

解　对函数 $y = a_0 e^{a_1 x}$ 两边取常用对数,得 $\lg y = \lg a_0 + a_1 x \lg e$,令 $u = \lg y, A = \lg a_0, B = a_1 \lg e$。则得到的线性模型 $u = A + Bx$。计算列表如下。

i	x_i	y_i	u_i	x_i^2	$x_i u_i$
1	1	15.3	1.184 7	1	1.184 7
2	2	20.5	1.311 8	4	2.623 6
3	3	27.4	1.437 8	9	4.313 4
4	4	36.6	1.563 5	16	6.254 0
5	5	49.1	1.691 1	25	8.455 5
6	6	65.6	1.816 9	36	10.901 4
7	7	87.8	1.943 5	49	13.604 5
8	8	117.6	2.070 4	64	16.563 2
$\sum_{i=1}^{8}$	36	419.9	13.019 7	204	63.900 3

可得出法方程

$$\begin{cases} 8A + 36B = 13.019\,7 \\ 36A + 204B = 63.900\,3 \end{cases}$$

求解得 $A = 1.058\,3, B = 0.126\,5$。再算出 $a = 11.44, b = 0.291\,3$。因此,经验公式为

$$y = 11.44 e^{0.291\,3x}$$

同步训练题

1. 依据如下函数值表建立不超过三次的 Lagrange 插值多项式及 Newten 插值多项式，并验证插值多项式的唯一性。

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	9	23	3

2. 已知$\sqrt{100}=10,\sqrt{121}=11,\sqrt{144}=12$，试利用二次插值多项式计算$\sqrt{115}$的近似值并估计误差。

3. 在函数值表中选择合适的节点，分别通过线性、二次、三次插值多项式近似计算 $f(8.4)$的值。

x	8.1	8.3	8.6	8.7
$f(x)$	16.944 10	17.564 92	18.505 15	18.820 91

4. 已知由数据$(0,0)$，$(0.5,y)$，$(1,3)$和$(2,2)$构造出的三次插值多项式 $P_3(x)$的 x^3 的系数是 6，试确定数据 y。

5. 试用数据表中的数据，建立不超过 3 次的插值多项式及其插值误差估计。

x	0	1	2
$f(x)$	1	2	9
$f'(x)$		3	

6. 如果 $P_n(x)$表示 e^x 以 $n+1$ 个等距节点 $x_i=\dfrac{i}{n}(i=0,1,\cdots,n)$为插值节点的 n 次插值多项式，则 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|e^x-P_n(x)\right|\leqslant\dfrac{e}{2^{n+1}(n+1)!}$。又问 n 为何值时，才能保证插值误差小于 $\dfrac{1}{2}\times10^{-6}$！

7. 设 $f(x)=\dfrac{1}{a-x}$且 $a,x_1,x_2,\cdots x_n$ 互不相同。证明

$$f[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_k]=\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)\cdots(a-x_k)},\quad k=1,2,\cdots,n$$

并写出 $f(x)$ 的 n 次牛顿插值多项式。

8. 在平面上给出三个点，它们的坐标分别为(1,1),(2,0),(1.5,3)，每个点对应一个函数值，依次为 $y_1=1.8, y_2=2.6, y_3=3.1$。试找出一个平面通过这三个点。

9. 试建立 $f(x)=\cos\pi x$ 关于节点 $x=0,0.25,0.5,0.75$ 和 1.0 的三次样条插值函数，附加边界条件为 $f'(0)=0$ 和 $f'(1.0)=0$。计算样条函数在[0,1]上的定积分值，用样条函数的导数近似 $f'(0.5)$ 和 $f''(0.5)$；将计算结果和真实值比较。

10. 试用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2$ 的多项式，使与下列数据相拟合(计算取3位小数)。

i	1	2	3	4	5
x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

11. 已知一组实验数据如下表所示，求它的拟合曲线。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	10	5	4	2	1	1	2	3	4

12. 在某化学反应中，测得分解物的浓度 $y\times10^{-4}$ 与时间 t 的数据，如下表。

t_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$y_i\times10^{-4}$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

试用指数函数 $y=ae^{b/t}$ 拟合这组数据，其中 $a>0$ 和 b 为待定系数。

13. 测得变速直线运动的路程 s 与时间 t 的数据，如下表。

t_i	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
s_i	0	10	30	50	80	110

试用一个等速直线运动描述运动方程。

同步训练题答案

TONG BU XUN LIAN TI DA AN

1. 解 (1)建立 Lagrange 插值多项式。基函数为

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}=-\frac{1}{8}x^3+\frac{7}{8}x^2-\frac{7}{4}x+1$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}x$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}=-\frac{1}{4}x^3+\frac{5}{4}x^2-x$$

$$l_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}=\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{12}x$$

Lagrange 插值多项式为

$$\begin{aligned}L_3(x)&=\sum_{i=0}^{3}f(x_i)l_i(x)=l_0(x)+9l_1(x)+23l_2(x)+3l_3(x)\\&=-\frac{11}{4}x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1\end{aligned}$$

(2)Newton 插值多项式。建立差商表为

$$\begin{array}{ccccc}0 & 1 & & & \\ & & 8 & & \\ 1 & 9 & & 3 & \\ & & 14 & & -\frac{11}{4} \\ 2 & 23 & & -8 & \\ & & -10 & & \\ 4 & 3 & & & \end{array}$$

Newton 插值多项式为

$$N_3(x)=1+8(x-0)+3(x-0)(x-1)-\frac{11}{4}(x-0)(x-1)(x-2)$$

(3)唯一性验证。将 Newton 插值多项式按 x 幂次排列,便得到

$$N_3(x)=-\frac{11}{4}x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1=L_3(x)$$

这一结论和插值多项式的唯一性一致。

2. 解 记 $y(x)=\sqrt{x}$, $x_0=100$, $x_1=121$, $x_2=144$, $y_0=10$, $y_1=11$, $y_1=12$,则 $y(x)$以 x_0,x_1,x_2 为插值节点的二次插值多项式为

$$\begin{aligned}L_2(x)&=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\\&=10\times\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}+11\times\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}\\&\quad+12\times\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{115}\approx L_2(115)&=10\times\frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)}+11\times\frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)}\\&\quad+12\times\frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)}=10.7227\end{aligned}$$

$$y'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\quad y''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\quad y'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

因为 $y(x)-L_2(x)=\frac{1}{6}y'''(\varepsilon)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\varepsilon\in(100,144)$，所以

$$|y(115)-L_2(115)|=\left|\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}\varepsilon^{-\frac{5}{2}}\times(115-100)(115-121)(115-144)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}\times100^{-\frac{5}{2}}\times15\times6\times29$$

$$=0.163\times10^{-2}$$

用 $L_2(115)$ 作为 $\sqrt{115}$ 的近似值具有 4 位有效数字。

3. **解** 依据插余项的表达形式，要计算 $f(8.4)$ 的近似值，节点应选择为距离 8.4 较近的点。按距离由近到远，节点排列顺序为

$$x_0=8.3,\quad x_1=8.6,\quad x_2=8.7,\quad x_3=8.1$$

建立差商表如下。

8.3	17.564 92			
		3.134 10		
8.6	18.505 15		0.058 75	
		3.157 60		−0.002 05
8.7	18.820 91		0.059 16	
		3.128 02		
8.1	16.944 10			

用插值公式计算近似值，则有

$$f(8.4)\approx N_1(8.4)=17.564\,92+3.134\,10\times(8.4-8.3)=17.878\,33$$

$$f(8.4)\approx N_2(8.4)=N_1(8.4)+0.058\,75\times(8.4-8.3)(8.4-8.6)=17.877\,155$$

$$f(8.4)\approx N_3(8.4)=N_2(8.4)+(-0.002\,05)\times(8.4-8.3)(8.4-8.6)(8.4-8.7)$$

$$=17.877\,143$$

4. **解** 方法一。利用 Lagrange 插值多项式，有

$$P_3(x)=L_2(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)+f(x_3)l_3(x)$$

及基函数的表达形式，可知 x^3 的系数为

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

将有关数据代入上式，得

$$6=0+\frac{y}{0.5\times(-0.5)\times(-1.5)}+\frac{3}{1\times0.5\times(-1)}+\frac{2}{2\times1.5\times1}$$

解得 $y=4.25$。

方法二。利用 Newton 插值公式

$$P_3(x)=N_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

这样得到 x^3 的系数为 $f[x_0,x_1,x_2,x_3]$，即有 $f[x_0,x_1,x_2,x_3]=6$。由节点值做差商表如

下。

$$\begin{array}{lllll} x_0=0 & 0 & & & \\ & & 3 & & \\ x_1=1 & 3 & & -2 & \\ & & -1 & & 6 \\ x_2=2 & 2 & & f[x_1,x_2,x_3] & \\ & & f[x_2,x_3] & & \\ x_3=0.5 & y & & & \end{array}$$

依差商的定义推得

$$f[x_0,x_1,x_3]=6\times[0.5-0]+(-2)=1$$
$$f[x_2,x_3]=1\times(0.5-1)+(-1)=-1.5$$
$$y=-1.5\times(0.5-2)+2=4.25$$

5. **解** 方法一(待定参数法)。以已知函数值为插值条件的二次插值多项式,为

$$N_2(x)=f(0)+f[0,1](x-0)+f[0,1,2](x-0)(x-1)$$
$$=1+1\times(x-0)+3\times(x-0)(x-1)=3x^2-2x+1$$

设待求插值函数为 $H_3(x)=N_2(x)+k(x-0)(x-1)(x-2)$,令 $H_3'(1)=f'(1)=3$,即 $4-k=3$,求得 $k=1$,进而有

$$H_3(x)=N_2(x)+(x-0)(x-1)(x-2)=x^3+1$$

下面建立插值误差估计。假定被插值函数 $f(x)$ 充分光滑。由插值条件知

$$f(0)-H_3(0)=0,\quad f(1)-H_3(1)=0,\quad f(2)-H_3(2)=0,\quad f'(1)-H_3'(1)=0$$

这样可设余项 $R(x)=f(x)-H_3(x)=k(x)x(x-1)^2(x-2)$。

当 $x=0,1$ 或 2 时,对任意 $k(x)$ 值,上式皆成立。

当 $x\in[0,2]$ 且不同于 0,1 和 2 时,构造关于变量 t 的函数

$$g(t)=f(t)-H_3(t)-k(x)t(t-1)^2(t-2)$$

上述函数是充分光滑的,并且有零点

$$g(0)=g(1)=g(2)=g(x)=0,\quad g'(1)=0$$

在四个互异节点 0,1,2 和 x 形成的三个区间上使用 Rolle 定理,则存在三个互异数 $\eta_1,\eta_2,\eta_3\in(0,2)$ 且不同于 0,1,2 和 x,使得有

$$g'(\eta_1)=g'(\eta_2)=g'(\eta_3)=0$$

由此知 $g'(t)$ 至少有四个(η_1,η_2,η_3 和 x)互异零点。继续使用 Rolle 定理,知 $g''(t)$ 至少有三个互异零点,$g'''(t)$ 至少有四个互异零点,$g^{(4)}(t)$ 至少有一个零点 ε(ε 依赖于 0,1,2 和 x)。而 $g^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-k(x)4!$,令 $g^{(4)}(\varepsilon)=0$ 得 $k(x)=\dfrac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!}$,于是得到误差余项

$$R(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!}x(x-1)^2(x-2),\quad \varepsilon\in(0,2)$$

方法二(用重节点的差商表建立 Hermite 插值多项式)。建立带重节点的差商表如下。

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
1 & 2 & & 2 & & & \\
 & & 3 & & 1 & & \\
1 & 2 & & 4 & & & \\
 & & 7 & & & & \\
2 & 9 & & & & &
\end{array}
$$

写出插值多项式

$$
\begin{aligned}
H_3(x) &= f(0)+f[0,1](x-0)+f[0,1,1](x-0)(x-1)+f[0,1,1,2](x-0)(x-1)(x-1)\\
&= 1+1x(x-0)+2(x-0)(x-1)+1(x-0)(x-1)(x-1)\\
&= x^3+1
\end{aligned}
$$

6. **解** 由插值余项公式有

$$e^x - P_n(x) = \frac{e^\varepsilon}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i), \quad \varepsilon \in (0,1)$$

因而
$$\max_{0\le x\le 1}\left|e^x - P_n(x)\right| \le \frac{e}{(n+1)!}\cdot \max_{0\le x\le 1}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| \tag{1}$$

要证明所需结论，只要证明

$$\max_{0\le x\le 1}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| \le \frac{1}{2^{n+1}}$$

对任意 $\bar{x}\in(0,1)$，记 $g(x)=(x-\bar{x})(x-(1-\bar{x}))$，则

$$\max_{0\le x\le 1}|g(x)| \le \max\left\{|g(0)|,\left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right|,|g(1)|\right\} = \max\left\{\bar{x}(1-\bar{x}),\left(\frac{1}{2}-\bar{x}\right)^2\right\} \le \frac{1}{4}$$

当 n 为偶数时，有

$$\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = (x-x_{\frac{n}{2}})\prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}[(x-x_i)(x-x_{n-i})] = \left(x-\frac{1}{2}\right)\prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}[(x-x_i)(x-(1-x_i))]$$

所以
$$
\begin{aligned}
\max_{0\le x\le 1}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| &\le \max_{0\le x\le 1}\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot\prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\max_{0\le x\le 1}|(x-x_i)(x-(1-x_i))|\\
&\le \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}
$$

当 n 为奇数时，有

$$\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = \prod_{i=0}^{\frac{n+1}{2}}[(x-x_i)(x-x_{n-i})] = \prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}[(x-x_i)(x-(1-x_i))]$$

所以 $\max\limits_{0\le x\le 1}\left|\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| \le \prod\limits_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\max\limits_{0\le x\le 1}|(x-x_i)(x-(1-x_i))| \le \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$。

故式(2)成立。

要使 $\max\limits_{0\le x\le 1}|e^x-P_n(x)| < \frac{1}{2}\times 10^{-6}$ 成立，只需 $\frac{e}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{2}\times 10^{-6}$，或

$$2^{n+1}(n+1)! > 2e\times 10^6 \approx 5\ 436\ 564 \tag{3}$$

记 $\varphi(n)=2^{n+1}(n+1)!$，则易知 $\varphi(n)$ 为 n 的增函数。注意到 $\varphi(6)=645\ 120$，$\varphi(7)=$

10 321 920,因而使式(3)成立的最小正数 n 为 7,所以当 $n=7$ 时,可保证插值误差小于 $\frac{1}{2}\times 10^{-6}$。

7. **解** 用数学归纳法可证明当 $k=1$ 时,有

$$f[x_0,x_1]=\frac{1}{x_1-x_0}[f(x_1)-f(x_0)]=\frac{1}{x_1-x_0}\left[\frac{1}{a-x_1}-\frac{1}{a-x_0}\right]$$

$$=\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)}$$

设对 $k=m$,成立,即有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_m]=\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{m}(a-x_i)},\quad f[x_0,x_1,\cdots,x_{m+1}]=\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{m+1}(a-x_i)}$$

则

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_m,x_{m+1}]=\frac{1}{x_{m+1}-x_0}(f[x_1,x_2,\cdots,x_{m+1}]-f[x_0,x_1,\cdots,x_m])$$

$$=\frac{1}{x_{m+1}-x_0}\left[\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{m+1}(a-x_i)}-\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{m}(a-x_i)}\right]$$

$$=\frac{1}{x_{m+1}-x_0}\times\frac{(a-x_0)-(a-x_{m+1})}{\prod\limits_{i=0}^{m+1}(a-x_i)}=\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{m+1}(a-x_i)}$$

即对 $k=m+1$,成立。由归纳原理,对任意 $k(1\leqslant k\leqslant m)$,均是成立的。

$f(x)$ 以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为节点的 n 次牛顿插值多项式为

$$N_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$=\frac{1}{a-x_0}+\frac{x-x_0}{(a-x_0)(a-x_1)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(a-x_0)(a-x_1)\cdots(a-x_n)}$$

8. **解** 这是一个二元拉格朗日插值问题。类似于一元情形,先求一组插值基函数 $l_i(x,y)$,$i=1,2,3$ 使其满足条件

$$l_i(x_j,y_j)\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad i=1,2,3;j=1,2,3$$

则所要求的平面可以写成

$$z=\sum_{i=1}^{3}y_il_i(x,y)$$

下面确定 $l_1(x,y)$。假设 $l_1(x,y)=a+bx+cy$,将所给定的坐标代入,并由基函数满足的条件得到方程组

$$\begin{cases}a+b+c=1\\ a+2b=0\\ a+1.5b+3c=0\end{cases}$$

解方程组,得 $a=2.4,b=-1.2,c=-0.2$,所以 $l_1(x,y)=2.4-1.2x-0.2y$。

类似地,有

$$l_2(x,y)=-0.6+0.8x-0.2y$$

$$l_3(x,y)=-0.8+0.4x+0.4y$$

因此,所要求的平面方程为 $z=1.8l_1(x,y)+2.6l_2(x,y)+3.1l_3(x,y)$,即

$$z=0.28+1.16x+0.36y$$

9. 解 (1)建立弯矩方程。利用节点数据,得

$$h_0=h_1=h_2=h_3=0.25$$

$$u_1=\lambda_1=u_2=\lambda_2=u_3=\lambda_3=0.5$$

对于附加一阶导数边界条件建立带重节点的差商表如下。

$x_0=0.00$	1.000 000		
		0.000 000	
$x_0=0.00$	1.000 000		$-4.686\ 288=f[x_0,x_0,x_1]$
		$-1.171\ 572$	
$x_1=0.25$	1.707 107		$-3.313\ 712=f[x_0,x_1,x_2]$
		$-2.828\ 428$	
$x_2=0.50$	1.000 000		$-0.000\ 000=f[x_1,x_2,x_3]$
		$-2.828\ 428$	
$x_3=0.75$	$-0.707\ 107$		$-3.313\ 712=f[x_2,x_3,x_4]$
		$-1.171\ 572$	
$x_4=1.00$	$-1.000\ 000$		$-4.686\ 288=f[x_3,x_4,x_4]$
		0.000 000	
$x_4=1.00$	$-1.000\ 000$		

弯矩方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 0.5 & 2 & 0.5 & & \\ & 0.5 & 2 & 0.5 & \\ & & 0.5 & 2 & 0.5 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}=6\begin{bmatrix} -4.686\ 288 \\ -3.313\ 712 \\ 0.000\ 000 \\ 3.313\ 712 \\ 4.686\ 288 \end{bmatrix}$$

(2)用追赶法求解三弯矩方程组,得

$$m_0=-10.386\ 642,\quad m_1=-7.344\ 480,\quad m_2=0.000\ 000$$

$$m_3=7.344\ 480,\quad m_4=10.386\ 642$$

(3)三次样条插值函数为

$$S(x)=\begin{cases} 1-5.193\ 312x^2+2.028\ 096x^3, & x\in[0,0.25] \\ 0.955\ 184+0.537\ 793x-7.344\ 480x^2+4.896\ 320x^3, & x\in[0.25,0.5] \\ 0.955\ 184+0.537\ 793x-7.344\ 480x^2+4.896\ 320x^3, & x\in[0.5,0.75] \\ 2.165\ 217-4.302\ 337x-0.890\ 976x^2+2.028\ 076x^3, & x\in[0.75,1] \end{cases}$$

(4)计算积分 $\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=0.000\ 000,\quad \int_0^1 \cos\pi x\mathrm{d}x=0$

(5)计算导数 $S'(0.5)=-3.134\ 447,\quad [\cos\pi x]'_{x=0.5}=-\pi$

$$S''(0.5)=0.000\ 000,\quad [\cos\pi x]''_{x=0.5}=0$$

10. 解 将$(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,5$代入多项式 $y=a+bx^2$,得矛盾方程组

$$\begin{cases} a+19^2b=19 \\ a+25^2b=32.3 \\ a+31^2b=49 \\ a+38^2b=73.3 \\ a+44^2b=97.8 \end{cases}$$

矛盾方程组的矩阵表示为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 19^2 \\ 1 & 25^2 \\ 1 & 31^2 \\ 1 & 38^2 \\ 1 & 44^2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 19 \\ 32.3 \\ 49 \\ 73.3 \\ 97.8 \end{bmatrix}$$

而

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & 5\,327 \\ 5\,327 & 7\,277\,699 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 271.4 \\ 369\,321.5 \end{bmatrix}$$

解此法方程组可得 $a=0.973$，$b=0.050$，故所求拟合多项式为 $y=0.973+0.05x^2$。

11. **解** 求拟合曲线的第一步一般是把测量数据描在坐标纸上，观察图形的特点选择合适的拟合曲线类型。从图 3-2 中可以看出它近似一系列抛物线，因此可设拟合曲线为 $y=\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$。第二步，把测量数据代入拟合曲线，建立包含未知数 a_0,a_1,a_2 的矛盾方程组，并计算其法方程组的系数矩阵和常数项的各元素，得

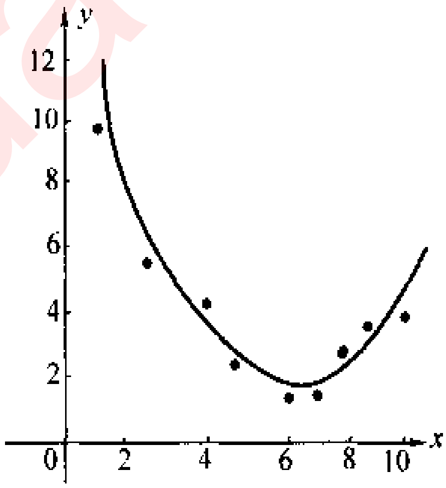


图 3-2

$$n=9,\ \sum_{i=1}^{9}x_i=53,\ \sum_{i=1}^{9}x_i^2=381$$

$$\sum_{i=1}^{9}x_i^3=3\,017,\ \sum_{i=1}^{9}x_i^4=25\,317$$

$$\sum_{i=1}^{9}y_i=32,\ \sum_{i=1}^{9}x_iy_i=147,\ \sum_{i=1}^{9}x_i^2y_i=1\,025$$

则法方程组为

$$\begin{bmatrix} 9 & 53 & 381 \\ 53 & 381 & 3\,017 \\ 381 & 3\,017 & 25\,317 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 32 \\ 147 \\ 1\,025 \end{bmatrix}$$

求得法方程组的解为

$$a_0=13.460,\quad a_1=-3.605,\quad a_2=0.268$$

故所求拟合曲线为

$$y=13.46-3.605x+0.268x^2$$

12. **解** 本题为非线性拟合问题，应先作代换使其线性化，在拟合函数 $y = ae^{b/t}$ 两端取对数，得

$$\ln y = \ln a + b/t = A + b/t, \quad A = \ln a$$

令 $y = \ln y$，$T = 1/t$，则拟合函数变为一次多项式 $y = A + bT$（A，b 为待定系数）。

根据数据组 (t_i, y_i)，$i = 0,1,2,\cdots,11$ 容易算出数据组 (T_i, Y_i)，$i = 0,1,2,\cdots,11$ 及相应的正则方程

$$\begin{cases} 11A + 0.603\,975\,5b = 13.639\,649 \\ 0.603\,975\,5A + 0.062\,321\,3b = 0.530\,330\,3 \end{cases}$$

解之，得 $b = -7.496\,169\,2$，$A = 1.651\,559\,2$，推得 $a = 5.215\,104\,8$，从而所求的拟合函数为

$$y = 5.215\,104\,8e^{-7.496\,169\,2/t}$$

注：数据对 (t_i, y_i) 中的 $(t_0, y_0) = (0,0)$，应理解为 $\lim\limits_{t \to +0} y = 0$。

13. **解** 设运动方程为 $s = a_0 + a_1 t$（a_0，a_1 为待定系数），则正则方程

$$\begin{cases} 6a_0 + 14.7a_1 = 280 \\ 14.7a_0 + 53.63a_1 = 1\,078 \end{cases}$$

解之，得 $a_0 = -7.855\,047\,8$，$a_1 = 22.253\,76$，从而 $s = -7.855\,047\,8 + 22.253\,76t$。

第 4 章　数值积分与微分

知识要点

一、数值求积公式

1. 数值求积的基本思想

积分 $I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的数值求积公式可表示为

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{4-1}$$

数值求积公式(4-1)的余项为

$$R(f)=I(f)-\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{4-2}$$

式中，x_k 称为求积节点；A_k 称为求积系数，仅与节点 x_k 的选取有关，而不依赖于被积函数 $f(x)$ 的具体形式。

2. 插值型求积公式

当 $f(x)$ 用 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ 近似时，构造出的求积公式

$$I_n=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{4-3}$$

被称为是插值型的。式中，求积系数 A_k 通过插值基函数 $l_k(x)$ 积分得出，即

$$A_k=\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega_{n+1}'(x_k)}\mathrm{d}x,\quad k=0,1,\cdots,n \tag{4-4}$$

式中，$\omega_{n+1}=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$。

对于插值型求积公式(4-3)，其余项为

$$R(f)=I-I_n=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\mathrm{d}x$$

式中，ε 与变量 x 有关。

3. 求积公式的稳定性

若求积公式(4-1)中系数 $A_k>0, k=0,1,\cdots,n$,则此求积公式是稳定的。

二、求积公式的代数精确度

求积公式(4-1)若对于次数不超过 m 次的多项式均能准确成立,但对于 $m+1$ 次的多项式就不能准确成立,则称该求积公式具有 m 次代数精确度。

三、Newton-Cotes 公式

1. 基本公式

在插值型求积公式中,若求积节点取为等距节点,即 $x_k=a+kh, h=\dfrac{b-a}{n}$, $k=0,1,\cdots,n$,则可构造出 Newton-Cotes 求积公式

$$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k) \tag{4-6}$$

式中,$C_k^{(n)}$ 称为 Cotes 系数。

当 $n=1$ 时,求积公式为梯形公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)] \tag{4-7}$$

当 $n=2$ 时,求积公式为辛普生公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \tag{4-8}$$

当 $n=4$ 时,求积公式为 Cotes 公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{(b-a)}{90}[7f(a)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(b)] \tag{4-9}$$

式中,$x_k=a+kh, h=\dfrac{b-a}{4}, k=1,2,3,4$。

当 $n\geqslant 8$ 时,Cotes 系数 $C_k^{(n)}$ 出现负值,此时计算不稳定,不宜使用。

2. 代数精确度

当 n 为奇数时,Newton-Cotes 公式(4-6)至少有 n 次代数精确度。当 n 为偶数时,则至少有 $n+1$ 次代数精确度。

3. 几种低阶求积公式的余项

梯形公式

$$R_T=-\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3,\quad \eta\in(a,b) \tag{4-10}$$

辛普生公式

$$R_s = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a,b) \tag{4-11}$$

Cotes 公式

$$R_c = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta), \quad \eta \in (a,b) \tag{4-12}$$

四、复合求积公式

把积分区间分成若干个子区间，在每个子区间用低阶求积公式进行计算，然后把所有子区间上的计算结果求和的方法称为复合求积方法。

复合梯型公式$\left(h=\frac{b-a}{n}\right)$

$$I \approx T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right] \tag{4-13}$$

其余项为

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta), \quad \eta \in (a,b) \tag{4-14}$$

复合辛普生公式$\left(h=\frac{b-a}{n}\right)$

$$I \approx S_n = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)h\right) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right] \tag{4-15}$$

其余项为

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a,b) \tag{4-16}$$

五、龙贝格求积公式

见教材。

六、高斯求积公式

1. 一般理论

在$[a,b]$上带权$\rho(x)$的积分$I=\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x$，它的求积公式为

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1} A_k f(x_k) \tag{4-17}$$

若求积公式(4-17)具有$2n+1$次代数精确度，则称其节点$x_k, k=0,1,\cdots,n$为高斯点，相应的式(4-17)称为高斯求积公式。

插值型求积公式(4－17)的节点 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$ 是高斯点的充要条件是，以这些节点为零点的多项式

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

与任何次数不超过 n 次的多项式 $P(x)$ 带权 $\rho(x)$ 正交，即

$$\int_a^b\rho(x)P(x)\omega_{n+1}(x)\mathrm{d}x=0 \tag{4-18}$$

据此可得，在 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式的零点即为高斯求积公式的节点，其系数

$$A_k=\int_a^b\rho(x)\frac{\omega_{n+1}^2(x)}{(x-x_k)^2\omega_{k+1}'^2(x_k)}\mathrm{d}x \tag{4-19}$$

其余项为

$$R_n(f)=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b\omega_{n+1}^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x,\quad \eta\in(a,b) \tag{4-20}$$

高斯求积公式(4－17)的求积系数 $A_k,k=0,1,\cdots,n$ 全是正的，从而高斯求积公式是稳定的。

若 $f(x)\in C[a,b]$，则高斯求积公式(4－17)是收敛的，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x \tag{4-21}$$

2. 高斯—勒让德求积公式，高斯—切比雪夫求积公式

七、数值微分

数值求导常用泰勒展开法、插值函数法、数值积分法和三次样条法等，也可使用理查森外推法。考虑到舍入误差的因素，数值微分公式中的步长一般不宜取得过小。

SHU HOU XI TI JIE XI 课后习题解析

4－1 (1)分别用梯形公式和 Simpson 公式计算下列积分。

(a) $\int_0^1\frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}\mathrm{d}x\ (n=6)$ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\ (n=4)$

(2)写出 $n=3$ 的 Newton-Cotes 公式，并求出其代数精度，再利用此公式计算(1)中(b)的积分。

解 略。

4－2 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高。

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}[f(-1)+2f(\alpha)+3f(\beta)]$；

(2) $\int_{0}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\alpha h^2[f'(0)-f'(h)]$；

(3) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx a_0 f(-1)+a_1 f(0)+a_2 f(1)$；

解 (1) $$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}[f(-1)+2f(\alpha)+3f(\beta)]\tag{1}$$

当 $f(x)=1$ 时，左边 $=\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x=2$，右边 $=\frac{1}{3}(1+2\times 1+3\times 1)=2$，左边 = 右边。

当 $f(x)=x$ 时，左边 $=\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x=0$，右边 $=\frac{1}{3}(-1+2\alpha+3\beta)$。

当 $f(x)=x^2$ 时，左边 $=\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$，右边 $=\frac{1}{3}[(-1)^2+2\alpha^2+3\beta^2]$。

要使求积公式(1)具有2次代数精度，当且仅当

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(-1+2\alpha+3\beta)=0\\ \frac{1}{3}(-1+2\alpha^2+3\beta^2)=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+3\beta=1 & (2)\\ 2\alpha^2+3\beta^2=1 & (3)\end{cases}$$

由式(2)得

$$\beta=\frac{1-2\alpha}{3}\tag{4}$$

将式(4)代入式(3)得 $5\alpha^2-2\alpha-1=0$，得 $\alpha_1=\frac{1+\sqrt{6}}{5}$，$\alpha_2=\frac{1-\sqrt{6}}{5}$，再由式(4)得 $\beta_1=\frac{3-2\sqrt{6}}{15}$，$\beta_2=\frac{3+2\sqrt{6}}{15}$。将 (α_1,β_1) 代入式(1)，得到求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\left[f(-1)+2f\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)+3f\left(\frac{3-2\sqrt{6}}{15}\right)\right]\tag{5}$$

当 $f(x)=x^3$ 时，左边 $=\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x=0$，且

$$\text{右边}=\frac{1}{3}\times\left[(-1)^3+2\times\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)^3+3\times\left(\frac{3-2\sqrt{6}}{15}\right)^3\right]=\frac{4\sqrt{6}-36}{225}\tag{6}$$

左边 $\neq$ 右边，求积公式(5)具有3次代数精度。

将 (α_2,β_2) 代入式(1)，得到求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\left[f(-1)+2f\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)+3f\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{15}\right)\right]\tag{7}$$

当 $f(x)=x^3$ 时，左边 $=\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x=0$，且

$$右边=\frac{1}{3}\left[-1+2\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)^3+3\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{15}\right)^3\right]=-\frac{4\sqrt{6}+36}{225} \tag{8}$$

左边≠右边,求积公式(7)具有3次代数精度。

结论:当 $\alpha=\frac{1+\sqrt{6}}{5},\beta=\frac{3-2\sqrt{6}}{15}$ 或 $\alpha=\frac{1-\sqrt{6}}{5},\beta=\frac{3+2\sqrt{6}}{15}$ 时,所得的求积公式(5)和(7)具有最高代数精度3。

(2)
$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+ah^2[f'(0)-f'(h)] \tag{9}$$

当 $f(x)=1$ 时,左边 $=\int_0^h 1\mathrm{d}x=h$,右边 $=\frac{h}{2}(1+1)+ah^2\times(0-0)=h$,左边=右边。

当 $f(x)=x$ 时,左边 $=\int_0^h x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}h^2$,右边 $=\frac{h}{2}(0+h)+ah^2(1-1)=\frac{h^2}{2}$,左边=右边。

当 $f(x)=x^2$ 时,左边 $=\int_0^h x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}h^3$,且

$$右边=\frac{h}{2}(0^2+h^2)+ah^2(2\times0-2h)=\left(\frac{1}{2}-2a\right)h^3$$

要使求积公式(9)具有2次代数精度,当且仅当 $\left(\frac{1}{2}-2a\right)h^3=\frac{1}{3}h^3$,即 $\frac{1}{2}-2a=\frac{1}{3}$,解得 $a=\frac{1}{12}$,代入式(9),得

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\frac{h^2}{12}[f'(0)-f'(h)] \tag{10}$$

当 $f(x)=x^3$ 时,左边 $=\int_0^h x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}h^4$,右边 $=\frac{h}{2}(0^3+h^3)+\frac{h^2}{12}(3\times0^2-3h^2)=\frac{1}{4}h^4$,左边=右边。

当 $f(x)=x^4$ 时,左边 $=\int_0^h x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}h^5$,右边 $=\frac{h}{2}(0^4+h^4)+\frac{h^2}{12}(4\times0^3-4h^3)=\frac{1}{6}h^5$,左边≠右边。

求积公式(10)具有3次代数精度。

结论:当 $a=\frac{1}{12}$ 时所得求积公式(10)具有最高代数精度3。

(3)
$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\approx a_0f(-1)+a_1f(0)+a_2f(1) \tag{11}$$

当 $f(x)=1$ 时,左边 $=\int_{-1}^1 1\mathrm{d}x=2$,右边 $=a_0+a_1+a_2$。

当 $f(x)=x$ 时,左边 $=\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x=0$,右边 $=-a_0+a_2$。

当 $f(x)=x^2$ 时,左边 $=\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,右边 $=a_0+a_2$。

要使求积公式(11)具有2次代精精度,当仅且当

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ -a_0 + a_2 = 0 \\ a_0 + a_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

解得 $a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = \frac{4}{3}, a_2 = \frac{1}{3}$，代入式(11)，得

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{3}{4}f(0) + \frac{1}{3}f(1) \tag{12}$$

当 $f(x) = x^3$ 时，左边 $= \int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x = 0$，右边 $= \frac{1}{3} \times (-1)^3 + \frac{3}{4} \times 0^3 + \frac{1}{3} \times 1^3 = 0$，左边 = 右边。

当 $f(x) = x^4$ 时，左边 $= \int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x = \frac{2}{5}$，右边 $= \frac{1}{3} \times (-1)^4 + \frac{3}{4} \times 0^4 + \frac{1}{3} \times 1^4 = \frac{2}{3}$，左边 $\neq$ 右边。

求积公式(12)具有 3 次代数精度。

结论：当 $a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = \frac{4}{3}, a_2 = \frac{1}{3}$ 时所得求积公式(12)具有最高代数精度 3。

评注：(1)对于第(3)小题可按如下方法做。要使求积公式(11)至少具有 2 次代数精度，它必须是插值型的，即

$$a_0 = \int_{-1}^{1} \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \quad a_1 = \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

$$a_2 = \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

代入式(11)得式(12)，再验证其具有 3 次代数精度。

(2)有同学对第(3)小题按如下方法做：

对照 Simpson 公式有 $a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = \frac{4}{3}, a_2 = \frac{1}{3}$ 代入式(11)得式(12)，并指出式(12)的代数精度为 3。这种解法不能认为是正确的，原因是没有按题目的要求回答取的这组数是否达到了最高代数精度。

4－3　验证当 $f(x) = x^5$ 时，Cotes 求积公式

$$C = \frac{b-a}{90}[7f(x_0) + 32(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

准确成立，其中 $x_k = a + kh (k = 0,1,2,3,4), h = \frac{b-a}{4}$。

解　由 $x_k = a + kh, k = 0,1,2,3,4, h = \frac{b-a}{4}$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{90}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

当 $f(x) = x^5$ 时

$$左边 = \int_a^b x^5 \mathrm{d}x = \frac{1}{6}(b^6 - a^6) = \frac{1}{6}[(a+4h)^6 - a^6]$$

$$= \frac{1}{6}[6a^5(4h) + 15a^4(4h)^2 + 20a^3(4h)^3 + 15a^2(4h)^4 + 6a(4h)^5 + (4h)^6]$$

$$= \frac{1}{6}[24a^5h + 240a^4h^2 + 1\ 280a^3h^3 + 3\ 840a^2h^4 + 6\ 144ah^5 + 4\ 096h^6]$$

$$= \frac{2h}{3}[6a^5 + 60a^4h + 320a^3h^2 + 960a^2h^3 + 1\ 536ah^4 + 1\ 024h^5]$$

右边 $= \frac{4h}{90} \times [7a^5 + 32(a+h)^5 + 12(a+2h)^5 + 32(a+3h)^5 + 7(a+4h)^5]$

$$= \frac{2h}{45} \times \{7a^5 + 32 \times (a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5)$$
$$+ 12 \times [a^5 + 5a^4 \times (2h) + 10a^3 \times (2h)^2 + 10a^2 \times (2h)^3 + 5a \times (2h)^4 + (2h)^5]$$
$$+ 32 \times [a^5 + 5a^4 \times (3h) + 10a^3 \times (3h)^2 + 10a^2 \times (3h)^3 + 5a \times (3h)^4 + (3h)^5]$$
$$+ 7 \times [a^5 + 5a^4 \times (4h) + 10a^3 \times (4h)^2 + 10a^2 \times (4h)^3 + 5a \times (4h)^4 + (4h)^5]\}$$

$$= \frac{2h}{45}(90a^5 + 900a^4h + 4\ 800a^3h^2 + 14\ 400a^2h^3 + 23\ 040ah^4 + 15\ 360h^5)$$

$$= \frac{2h}{3}(6a^5 + 60a^4h + 320a^3h^2 + 960a^2h^3 + 1\ 536ah^4 + 1\ 024h^5)$$

左边 = 右边，因而 Cotes 积公式对 $f(x) = x^5$ 精确成立。

评注：上面推导中应用了二项式公式

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

4－4　用复合梯形公式，复合 simpson 公式计算

$$I = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx, \quad n = 8$$

解　首先计算出所需各节点的函数值，$n = 8$ 时，$h = \frac{1}{8} = 0.125$。

k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$
0	0	0	5	0.625	0.442 188 4
1	0.125	0.111 915 9	6	0.75	0.518 449
2	0.25	0.205 444 1	7	0.875	0.597 053 4
3	0.375	0.288 593 3	8	1	0.679 570 5
4	0.5	0.366 382 5			

有

$$T_8 = \frac{1}{16}(f(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(1)) = 0.358\ 726\ 5$$

$$S_4 = \frac{1}{24}\Big[f(0) + f(1) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75))$$

$$+4(f(0.125)+f(0.375)+f(0.625)+f(0.875))\Big] = 0.359\ 130\ 2$$

4-5 应用复合梯形公式,复合 simpson 公式计算第二类椭圆积分

$$E=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad n=8$$

解 首先计算出所需各节点的函数值,$n=8$ 时,$h=\frac{\pi}{16}$。

k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$
0	0	1	5	$\frac{5\pi}{16}$	0.808 906 1
1	$\frac{\pi}{16}$	0.990 439 2	6	$\frac{3\pi}{8}$	0.757 115 1
2	$\frac{\pi}{8}$	0.962 692 4	7	$\frac{7\pi}{16}$	0.720 437 4
3	$\frac{3\pi}{16}$	0.919 603 6	8	$\frac{\pi}{2}$	0.707 106 8
4	$\frac{\pi}{4}$	0.866 025 4			

有

$$T_8=\frac{\frac{\pi}{2}}{16}\left(f(0)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=1.350\ 643\ 8$$

$$S_4=\frac{\frac{\pi}{2}}{24}\left[f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\left(f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)\right.$$
$$\left.+4\left[f\left(\frac{\pi}{16}\right)+f\left(\frac{3\pi}{16}\right)+f\left(\frac{5\pi}{16}\right)+f\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right]\right]=1.350\ 643\ 8$$

4-6 应用复合 simpson 公式计算积分

$$G=\int_0^1\frac{\arctan x}{x}dx,\quad n=8$$

计算到五位小数,此积分值称为 Catalan 常数,G 的真值为 0.915 965。

解 首先计算出所需各节点的函数值,$n=8$,$h=\frac{1}{8}=0.125$,$\frac{h}{2}=0.062\ 5$。

k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$
0	0	1.000 00	9	0.562 5	156.840 52
1	0.062 5	1 190.359 50	10	0.625	141.440 67
2	0.125	656.411 11	11	0.687 5	128.793 84
3	0.187 5	451.637 29	12	0.75	118.222 54
4	0.25	344.025 92	13	0.812 5	109.254 67

(续)

k	x_k	$f(x_k)$	k	x_k	$f(x_k)$
5	0.312 5	277.770 63	14	0.875	101.551 19
6	0.375	232.894 02	15	0.397 5	94.862 354
7	0.437 5	200.492 56	16	1	89.000 102
8	0.5	176.001 62			

$$\begin{aligned}S_8 = &\frac{1}{48}[f(0)+f(1)+2(f(0.125)+f(0.25)+f(0.375)+f(0.5)\\&+f(0.625)+f(0.75)+f(0.875)+4f(0.062\,5)+f(0.187\,5)+f(0.312\,5)\\&+f(0.437\,5)+f(0.562\,5)+f(0.687\,5)+f(0.812\,5)+f(0.937\,5))]\\=&0.915\,966\end{aligned}$$

4-7 若$f''(x)>0$,证明用梯形公式计算积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$所得结果比准确值大,并说明几何意义。

证明 由梯形公式的余项

$$R(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

知,若$f''(\eta)>0$,则 $R(f)<0$,从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T+R(f) < T$$

即用梯形公式计算积分所得结果比准确值大。其几何意义为$f''(x)>0$,故 $f(x)$为下凸函数,梯形面积大于曲边梯形的面积。

4-8 若用复合梯形公式求积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值,问将积分区间分成多少等分,才能保证误差不超过 ε(假设$|f''(x)|\leqslant M$)。

解 求积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的复合梯形公式的余项为

$$|I-T_n| = \left|-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)\right| \leqslant \left|-\frac{b-a}{12}h^2M\right| = \varepsilon$$

所以

$$h<\sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)M}}$$

4-9 利用积分$\int_2^8\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\ln2$计算 $\ln2$ 时,若采用复合梯形公式,问应取多少节点才能使其误差绝对值不超过$\frac{1}{2}\times10^{-5}$。

解 由$\int_2^8\frac{1}{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln x\Big|_2^8 = \ln2$,记 $f(x)=\frac{1}{2x}$, $I(f) = \int_2^8 f(x)\mathrm{d}x$,则 $I(f)=\ln2$,将区间$[2,8]$作 n 等分,记 $h=\frac{8-2}{n}$,用复合梯形公式 $T_n(f)$计算 $I(f)$,则有

$$I(f)-T_n(f)=-\frac{h^2}{12}f''(\eta),\quad \eta\in(2,8) \tag{①}$$

注意到$f'(x)=-\frac{1}{2}x^2, f''(x)=x^{-3}$，由式(1)得

$$|I(f)-T_n(f)|\leqslant\frac{h^2}{12}\times\frac{1}{2^3}=\frac{1}{12\times 8}\times\left(\frac{6}{n}\right)^2=\frac{3}{8n^2}$$

当$\frac{3}{8n^2}\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-5}$时，有

$$|I(f)-T_n(f)|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-5} \tag{2}$$

由式(2)解得 $$n\geqslant\sqrt{\frac{3}{4}\times 10^5}=273.861$$

结论：取 $n=274$，即取 275 个节点可使误差的绝对值不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$。

评法：(1)由 $$I(f)-T_n(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{h^3}{12}\right)f''(\eta_k),\quad \eta_k\in(x_k,x_{k+1}) \tag{3}$$

得 $$|I(f)-T_n(f)|\leqslant\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k^3}\leqslant\frac{h^2}{12}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{h^2}{24}\left[\frac{1}{(2-h)^2}-\frac{1}{(8-h)^2}\right]=\frac{h^2}{4}\cdot\frac{10-2h}{(2-h)^2(8-h)^2}$$

$$<\frac{5}{2}\cdot\left[\frac{h}{(2-h)(8-h)}\right]^2 \tag{4}$$

当$\frac{5}{2}\left[\frac{h}{(2-h)(8-h)}\right]^2\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-5}$时，有

$$|I(f)-T_n(f)|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

将不等式(4)两边开方，得到

$$\frac{h}{(2-h)(8-h)}\leqslant\sqrt{2}\times 10^{-3}$$

即 $h^2-(10+500\sqrt{2})h+16\geqslant 0$，知

$$h\leqslant\frac{10+500\sqrt{2}-\sqrt{(10+500\sqrt{2})^2-64}}{2}=\frac{32}{10+500\sqrt{2}+\sqrt{(10+500\sqrt{2})^2-64}}$$

即 $$\frac{6}{n}\leqslant\frac{32}{10+500\sqrt{2}+\sqrt{(10+500\sqrt{2})^2-64}}$$

$$n\geqslant\frac{6}{32}\times\left[10+500\sqrt{2}+\sqrt{(10+500\sqrt{2})^2-64}\right]=268.906\ 675\ 7$$

结论：取 $n=269$，即取 270 个节点，可使误差的绝对值不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$。

(2)由式(3)可得

$$|I(f)-T_n(f)|=\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k)\geqslant\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_{k+1}^3}\geqslant\frac{h^2}{12}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{h^2}{12}\int_{x_1}^{x_{n+1}} \frac{1}{x^3}dx = \frac{h^2}{24}\left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{(8+h)^2}\right]$$

$$= \frac{h^2}{24} \times \frac{6\times(10+2h)}{(2+h)^2(8+h)^2} > \frac{5}{2}\left[\frac{h}{(2+h)(8+h)}\right]^2$$

当$\frac{5}{2}\left[\frac{h}{(2+h)(8+h)}\right]^2 \geqslant \frac{1}{2}\times 10^{-5}$时,有

$$|I(f) - T_n(f)| \geqslant \frac{1}{2}\times 10^{-5} \tag{5}$$

将式(5)两边开方得
$$\frac{h}{(2+h)(8+h)} \geqslant \frac{1}{500\sqrt{2}}$$

即 $h^2 - (500\sqrt{2}-10)h + 16 \leqslant 0$,解得

$$h \geqslant \frac{500\sqrt{2}-10-\sqrt{(500\sqrt{2}-10)^2-64}}{2}$$

即
$$\frac{6}{n} \geqslant \frac{500\sqrt{2}-10-\sqrt{(500\sqrt{2}-10)^2-64}}{2}$$

或
$$n \leqslant \frac{12}{500\sqrt{2}-10-\sqrt{(500\sqrt{2}-10)^2-64}}$$
$$= \frac{12}{64}\times\left[500\sqrt{2}-10-\sqrt{(500\sqrt{2}-10)^2-64}\right]$$
$$= 261.406\,435\,7$$

结论:若取 $n \leqslant 260$,即节点数小于等于 261,则误差的绝对值大于$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$。

(3)应用复合梯形公式的渐近误差估计式,有

$$I(f) - T_n(f) \approx \frac{1}{12}[f'(a) - f'(b)]h^2$$

得到
$$I(f) - T_n(f) \approx \frac{1}{24}\times\left(\frac{1}{8^2} - \frac{1}{2^2}\right)h^2 = -\frac{5h^2}{512}$$

当$\frac{5h^2}{512} \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-5}$时,有

$$|I(f) - T_n(f)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-5} \tag{6}$$

解不等式(6)得 $h \leqslant \frac{32}{\sqrt{2}}\times 10^{-3}$,即$\frac{6}{n} \leqslant \frac{32}{\sqrt{2}}\times 10^{-3}$,于是 $n \geqslant \frac{6\sqrt{2}}{32}\times 10^{-3} = 265.17$。

结论:取 $n = 266$,即取 267 个节点,可使误差的绝对值不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$。

4-10 用 Romberg 方法求 $\frac{1}{2}\int_2^8 \frac{1}{x}dx$,要求误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$,从所取节点个数与上题结果比较中体会这两种方法的优缺点。

解 记 $f(x) = \frac{1}{2x}$,有

$$T_1 = \frac{6}{2}[f(2)+f(8)] = 0.937\ 5$$

$$T_2 = \frac{1}{2}[T_1 + 6f(5)] = 0.768\ 75$$

$$S_1 = \frac{1}{3}(4T_2 - T_1) = 0.712\ 5$$

$$T_4 = \frac{1}{2}\{T_2 + 3\times[f(3.5)+f(6.5)]\} = 0.714\ 045\ 329$$

$$S_2 = \frac{1}{3}(4T_4 - T_2) = 0.695\ 810\ 438$$

$$C_1 = \frac{1}{15}(16S_2 - S_1) = 10.694\ 697\ 801$$

$$T_8 = \frac{1}{2}\{T_4 + 1.5\times[f(2.75)+f(4.25)+f(5.75)+f(7.25)]\} = 0.698\ 563\ 124$$

$$S_4 = \frac{1}{3}(4T_8 - T_4) = 0.693\ 402\ 389,\quad \frac{1}{15}(S_4 - S_2) = -1.608\times 10^{-4}$$

$$C_2 = \frac{1}{15}(16S_4 - S_2) = 0.693\ 241\ 852,\quad \frac{1}{63}(C_2 - C_1) = -2.311\times 10^{-5}$$

$$R_1 = \frac{1}{63}(64C_2 - C_1) = 0.693\ 218\ 742$$

$$\begin{aligned} T_{16} = \frac{1}{2}\{&T_8 + 0.75\times[f(2.375)+f(3.125)+f(3.875)+f(4.625) \\ &+ f(5.375)+f(6.125)+f(6.875)+f(7.625)]\} \\ =\ &0.694\ 515\ 424 \end{aligned}$$

$$S_8 = \frac{1}{3}(4T_{16} - T_8) = 0.693\ 166\ 19,\quad \frac{1}{15}(S_8 - S_4) = -1.575\times 10^{-5}$$

$$C_4 = \frac{1}{15}(16S_8 - S_4) = 0.693\ 150\ 444,\quad \frac{1}{63}(C_4 - C_2) = -1.451\times 10^{-6}$$

由 $I - C_4 \approx \frac{1}{63}(C_4 - C_2)$ 知 $|I - C_4| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-5}$，因而 C_4 为满足精度要求的近似值。

$$R_2 = \frac{1}{63}(64C_4 - C_2) = 0.693\ 148\ 993$$

$$\frac{1}{255}(R_2 - R_1) = -2.737\times 10^{-7}$$

由 $I - R_2 \approx \frac{1}{255}(R_2 - R_1)$，知 $|I - R_2| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-6}$，因而 R_2 为满足精度要求的近似值。

上述计算数据可列成如下表格。

k	区间等分数 2^k	T_{2^k}	S_{2^k}	C_{2^k}	R_{2^k}
0	1	0.937 5	0.712 5	0.694 697 801	0.693 218 742
1	2	0.768 75	0.695 810 438	0.693 241 852	0.693 148 993
2	4	0.714 045 329	0.693 402 389	0.693 150 444	
3	8	0.698 563 124	0.693 166 19		
4	16	0.694 515 424			

所以有 $\ln 2\approx 0.693\ 15$，计算 C_1 或 R_2 仅用到了 $f(x)$ 在 17 个节点上的函数值，而应用复合梯形公式 $T_n(f)$ 计算，要达到同样精度需要用 275 个节点（至少应用 262 个节点），可见用龙贝格算法计算积分的近似值，计算量大大减少了。

评注：(1)本题通过逐次二分步长的方法求出 T_1,T_2,T_4,T_8 和 T_{16}，其他的值均由它们的线性组合得到。要记住如下一些关系式

$$T_{2n}=\frac{1}{2}\left[T_n+h\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})\right],\quad I-T_{2n}\approx\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$$

$$S_n=\frac{1}{3}(4T_{2n}-T_n),\quad I-S_{2n}\approx\frac{1}{15}(S_{2n}-S_n)$$

$$C_n=\frac{1}{15}(16S_{2n}-S_n),\quad I-C_{2n}\approx\frac{1}{63}(C_{2n}-C_n)$$

$$R_n=\frac{1}{63}(64C_{2n}-C_n),\quad I-R_{2n}\approx\frac{1}{255}(R_{2n}-R_n)$$

式中，$h=\dfrac{b-a}{n}$ 为计算 T_n 时的步长；$x_{i+\frac{1}{2}}=a+(i+\frac{1}{2})h=\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}$。

(2)外推算法是建立在 T_n,S_n,C_n,R_n 均是精确计算的基础上的，因此在计算过程中的每一步要尽可能保留足够多的有效位数才能获得理想的结果。

4－11 用 Romberg 方法求下列积分，要求误差不超过 a。

(1) $\displaystyle\int_0^{0.8}\sqrt{x}\,dx$，$a=10^{-2}$；　　(2) $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x^2}dx$，$a=10^{-5}$；

(3) $\displaystyle\int_{0.1}^{0.6}\frac{0.027\,92(2-x)}{(1.449x+1)^{0.8}(1-x)^{1.2}x}dx$，$a=10^{-5}$。

解 (1)利用公式

$$\begin{cases}T_0(0)=\dfrac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\\[2ex] T_0(k)=\dfrac{1}{2}T_0(k-1)+\dfrac{b-a}{2^k}\displaystyle\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1}f\left(a+(2j+1)\frac{b-a}{2^k}\right)\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots)$$

列表如下：

k	x_j	$f(x_j)$	$T_0(k)$
0	0	0	
	0.8	0.894 427 2	0.357 770 9
1	0.4	0.632 455 5	0.431 867 7
2	0.2	0.447 213 6	
	0.6	0.774 596 7	0.460 296
3	0.1	0.316 227 8	
	0.3	0.547 722 6	
	0.5	0.707 106 8	
	0.7	0.836 66	0.470 919 7

由此列出 T 数表。

k	$T_0(k)$	$T_1(k-1)$	$T_2(k-2)$	$T_3(k-3)$
0	0.357 770 9			
1	0.431 867 7	0.456 566 6		
2	0.460 296	0.469 772 1	0.470 652 5	
3	0.470 919 7	0.474 460 9	0.474 773 5	0.474 838 9

$$|T_3(0)-T_2(0)| = |0.474\,838\,9-0.470\,652\,5| = 0.42\times10^{-4} < 10^{-3}$$

故取 $I\approx0.474\,838\,9$。

(2)可先计算 $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$，列表如下。

k	x_j	$f(x_j)$	$T_0(k)$
0	0	1	
	1	0.367 879 4	0.683 939 7
1	0.5	0.778 800 8	0.731 370 3

(续)

k	x_j	$f(x_j)$	$T_0(k)$
2	0.25	0.939 413 1	
	0.75	0.569 782 8	0.742 984 1
3	0.125	0.984 496 4	
	0.375	0.868 815 1	
	0.625	0.676 633 8	
	0.875	0.465 043 2	0.745 865 6

列表如下。

k	$T_0(k)$	$T_1(k-1)$	$T_2(k-2)$	$T_3(k-3)$
0	0.683 939 7			
1	0.731 370 3	0.747 180 5		
2	0.742 984 1	0.746 855 4	0.746 833 7	
3	0.745 865 6	0.746 826 1	0.746 824 1	0.746 823 9

因 $$|T_3(0)-T_2(0)| = |0.746\,823\,9-0.746\,833\,7| = 0.98\times10^{-7} < \varepsilon$$

故取 $I\approx0.746\,823\,9$,所以

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 0.746\,823\,9\times\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 0.842\,700\,5$$

(3)列表如下。

k	x_j	$f(x_j)$	$T_0(k)$
0	0.1	2.823 083 6	
	0.6	0.118 592 8	0.735 419 1
1	0.35	0.158 968 1	0.407 451 6
2	0.225	0.238 631 6	
	0.475	0.127 745 6	0.249 523

（续）

k	x_j	$f(x_j)$	$T_0(k)$
3	0.162 5	0.329 794 9	
	0.287 5	0.189 047 8	
	0.412 5	0.139 828 9	
	0.537 5	0.120 889 8	0.173 484 1

列 T 数表如下。

k	$T_0(k)$	$T_1(k-1)$	$T_2(k-2)$	$T_3(k-3)$
0	0.735 419 1			
1	0.407 451 6	0.298 129 1		
2	0.249 523	0.196 880 1	0.190 130 2	
3	0.173 484 1	0.148 137 8	0.144 888 3	0.144 170 2

$$|T_3(0)-T_2(0)| = |0.144\ 170\ 2-0.190\ 130\ 2| = 0.459\ 6\times 10^{-1}$$

故取 $I\approx 0.144\ 170\ 2$。

4－12　用下列方法计算 $I=\int_1^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，并比较结果（$I=1.098\ 61\cdots$）。

（1）Romberg 方法。

（2）用三点及五点 Gauss－legendre 公式计算。

（3）将[1,3]四等分，在两个小区间上用两点 Gauss－Legendre 公式计算积分，然后累加。

解　（1）计算见下表。

k	$T_0(k)$	$T_1(k-1)$	$T_2(k-2)$	$T_3(k-3)$	$T_4(k-4)$
0	1.333 333 3				
1	1.166 666 7	1.111 111 1			
2	1.116 666 7	1.100 000 0	1.099 259 3		
3	1.103 210 7	1.098 825 3	1.098 640 3	1.098 630 5	
4	1.099 767 7	1.098 620 0	1.098 613 0	1.098 612 6	1.098 612 5

取 $I\approx 1.098\ 612\ 5$。

（2）积分区间[1,3]，要使用高斯公式，需先变换到[－1,1]上。为此，作变换

$$y=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)t=t+2$$

则当 $y\in[1,3]$ 时，$t\in[-1,1]$，且 $dy=dt$，$\int_1^3\frac{dy}{y}=\int_{-1}^1\frac{dt}{t+2}$，由三点高斯公式有

$$\int_1^3\frac{dy}{y}=\int_{-1}^1\frac{dt}{t+2}\approx 0.555\,555\,6\times\left(\frac{1}{2-0.774\,596\,7}+\frac{1}{2+0.774\,596\,7}\right)$$

$$+0.888\,888\,9\times\frac{1}{2+0}=1.098\,039\,3$$

由五点高斯公式有

$$\int_1^3\frac{dy}{y}=\int_{-1}^1\frac{dt}{t+2}\approx 0.236\,926\,9\times\left(\frac{1}{2-0.906\,179\,8}+\frac{1}{2+0.906\,179\,8}\right)$$

$$+0.478\,628\,9\times\left(\frac{1}{2-0.538\,469\,3}+\frac{1}{2+0.538\,469\,3}\right)$$

$$+0.568\,888\,9\times\frac{1}{2+0}=1.098\,609\,3$$

(3)将区间[1,3]四等分，在每个小区间上用两点高斯公式得

$$I_1=\int_1^{1.5}\frac{dy}{y}=\int_{-1}^1\frac{0.5dt}{2.5+0.5t}\approx 0.5\times\left[\frac{1}{2.5+0.5\times(-\frac{1}{\sqrt3})}+\frac{1}{2.5+0.5\times\frac{1}{\sqrt3}}\right]$$

$$=0.405\,405\,4$$

$$I_2=\int_{1.5}^{2}\frac{dy}{y}=\int_{-1}^1\frac{0.5dt}{3.5+0.5t}\approx 0.5\times\left[\frac{1}{3.5+0.5\times(-\frac{1}{\sqrt3})}+\frac{1}{3.5+0.5\times\frac{1}{\sqrt3}}\right]$$

$$=0.287\,671\,2$$

$$I_3=\int_{2}^{2.5}\frac{dy}{y}=\int_{-1}^1\frac{0.5dt}{4.5+0.5t}\approx 0.5\times\left[\frac{1}{4.5+0.5\times(-\frac{1}{\sqrt3})}+\frac{1}{4.5+0.5\times\frac{1}{\sqrt3}}\right]$$

$$=0.223\,140\,5$$

$$I_4=\int_{2.5}^{3}\frac{dy}{y}=\int_{-1}^1\frac{0.5dt}{5.5+0.5t}\approx 0.5\times\left[\frac{1}{5.5+0.5\times(-\frac{1}{\sqrt3})}+\frac{1}{5.5+0.5\times\frac{1}{\sqrt3}}\right]$$

$$=0.182\,320\,4$$

故 $I=I_1+I_2+I_3+I_4\approx 1.098\,537\,6$，积分真值 $I=\int_1^3\frac{dy}{y}=\ln 3=1.098\,612\,288\cdots$。比较，说明龙贝格求积算法和五点 Gauss 求积公式结果更精确，但龙贝格积分运算量大。

4－13　用 $n=3$ 的 Gauss－Chebyshev 求积公式计算积分 $\int_{-1}^1 e^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$。

解　$f(x)=e^x$，由 Gauss－Chebyshev 公式，有

$$\int_{-1}^1\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n}e^{x_k}$$

当 $n=2$ 时，$x_k=\cos\frac{2k+1}{6}\pi$，$k=0,1,2$，求得

$$x_0=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_1=\cos\frac{3\pi}{6}=0,\ x_2=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故由三点 Gauss – Chebyshev 求积公式,有

$$I\approx\frac{\pi}{3}\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+e^{0}+e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=3.977\ 322\ 0$$

由 $f(x)=e^x,f^{(m)}(x)=e^x,m=0,1,2,\cdots$,得误差

$$|R_2(f)|=\left|\frac{\pi}{2^{2n+1}(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\eta)\right|\leqslant\frac{\pi}{2^5\times 6!}\times e=3.706\ 481\ 9\times 10^{-4},\quad \eta\in(-1,1)$$

当 $n=3$ 时,$x_k=\cos\frac{2k+1}{8}\pi,k=0,1,2,3$,求得

$$x_0=0.923\ 879\ 5,\ x_1=0.382\ 683\ 4,\ x_2=-0.382\ 683\ 4,\ x_3=-0.923\ 879\ 5$$

$$I\approx\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{3}e^{x_k}=3.977\ 462\ 6$$

误差 $$|R_3(f)|=\left|\frac{\pi}{2^7\times 8!}f^{(8)}(\eta)\right|\leqslant\frac{\pi}{2^7\times 8!}\times e=1.654\ 679\ 4\times 10^{-6},\quad \eta\in(-1,1)$$

4-14 已知函数表。

x_k	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x_k)=\frac{1}{(1+x_k)^2}$	0.250 0	0.226 8	0.206 6	0.189 0	0.173 6

试分别用两点及三点公式求 $f(x)$ 在 $x=1.0,1.2$ 处的导数值,并估计误差。

解 取 $h=0.1,x_0=1.0,x_1=1.1$,由两点数值微分公式得

$$f'(1.0)\approx\frac{1}{0.1}[f(1.1)-f(1.0)]=-0.232$$

取 $h=0.1,x_0=1.2,x_1=1.3$,由两点数值微分公式得

$$f'(1.2)\approx\frac{1}{0.1}[f(1.3)-f(1.2)]=-0.176$$

取 $h=0.1,x_0=1.0,x_1=1.1,x_2=1.2$,由三点数值微分公式得

$$f'(1.0)\approx\frac{1}{2\times 0.1}[-3f(1.0)+4f(1.1)-f(1.2)]=-0.247\ 0$$

$$f'(1.2)\approx\frac{1}{2\times 0.1}[f(1.0)-4f(1.1)+3f(1.2)]=-0.187\ 0$$

真实值 $$f'(1.0)=-0.250\ 0,\quad f'(1.2)=-0.187\ 8$$

4-16 已知函数表

x_k	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
$f(x_k)$	-0.916 291	-0.693 147	-0.510 826	-0.357 765	-0.223 144

(1)用两点公式求上过节点的一阶导数值；

(2)利用(1)的结论，用三次样条微分公式求$f'(0.45)$处的近似值。

解 取 $h=0.1, x_0=0.40, x_1=0.50, x_2=0.60, x_3=0.70, x_4=0.80$，有

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]$$

$$f'(x_4)\approx\frac{1}{2h}(f(x_3)-4f(x_4)+3f(x_5))$$

其余各点 $$f(x_i)\approx\frac{1}{2h}[-f(x_{i-1})+f(x_{i+1})],\quad i=1,2,3$$

将节点及其对应的导数值的计算结果列表如下。

x_k	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
$f'(x_k)$	2.231 44	1.823 21	1.530 61	1.345 06	1.345 06

因 $x=0.45\in[0.40,0.50]$，$h=0.1$，所以将数据

$x_j=0.40, x_{j+1}=0.50$； $y_j=-0.916\ 291, y_{j+1}=-0.693\ 147$； $m_j=2.231\ 44, m_{j+1}=1.823\ 21$

代入公式

$$S'(x)=\frac{2}{h^3}((x-x_{j+1})(3x-2x_j-x_{j+1}+h)y_j-(x-x_j)(3x-x_j-2x_{j+1}-h)y_{j+1})$$

$$+\frac{1}{h^2}((x-x_{j+1})(3x-2x_j-x_{j+1})m_j+(x-x_j)(3x-2x_{j+1}-x_j)m_{j+1})x\in[x_j,x_{j+1}]$$

经计算得 $$f'(0.45)\approx s'(0.45)=2.333\ 497\ 5$$

4－17 一个枪管长 0.609 6 m，膛孔面积 $4.56\times10^{-5}\ m^2$，子弹重力 0.095 6 N，发火后，气体压强随子弹在膛内的运动而变化，压强 P 的单位为 GPa，距离 x 的单位为 m，$P=P(x)$的函数关系如下表所求。

x/m	p/GPa	x/m	p/GPa	x/m	p/GPa
0.012 7	0.101 35	0.241 3	0.168 23	0.457 2	0.070 32
0.025 4	0.200 64	0.254 0	0.157 89	0.469 9	0.067 57
0.038 1	0.273 03	0.266 7	0.148 24	0.482 6	0.064 81
0.050 8	0.310 95	0.279 4	0.139 27	0.495 3	0.062 05
0.063 5	0.330 94	0.292 1	0.132 88	0.508 0	0.059 29

（续）

x/m	p/GPa	x/m	p/GPa	x/m	p/GPa
0.076 2	0.339 91	0.304 8	0.125 48	0.520 7	0.056 54
0.088 9	0.344 74	0.317 5	0.118 59	0.533 4	0.053 78
0.101 6	0.335 77	0.330 2	0.112 38	0.546 1	0.051 02
0.114 3	0.315 08	0.342 9	0.106 87	0.558 8	0.048 26
0.127 0	0.295 78	0.355 6	0.102 04	0.571 2	0.045 50
0.139 7	0.277 17	0.368 3	0.092 15		
0.152 4	0.261 31	0.381 0	0.093 08	0.584 2	0.042 74
0.165 1	0.245 45	0.393 7	0.088 94	0.596 9	0.040 67
0.177 8	0.230 97	0.406 4	0.084 80	0.609 6	0.038 61
0.190 5	0.217 18	0.419 1	0.080 67		
0.203 2	0.203 39				
0.215 9	0.191 67	0.431 8	0.077 22		
0.228 6	0.179 95	0.444 5	0.073 77		

根据能量守恒原理，子弹出枪时的速度满足

$$v_f = \sqrt{\frac{2[4.561\times10^{-5}]}{\frac{0.095\,6}{9.81}}\int_0^{0.609\,6} P(x)\mathrm{d}x}$$

试用 simpson 公式求出子弹出枪管的速度。

解 略。

4－18 用插值多项式 $L_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数，试导出带余项的二阶三点数值微分公式。

解 略。

同步训练

1. 用梯形公式和辛普森公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$，并估计误差。

2. 证明求积公式

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)) - \frac{h^2}{12}(f'(x_1)-f'(x_0))$$

具有 3 次代数精确度，其中 $h = x_1 - x_0$。

3. 求 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $[0,1]$ 上的积分 $I = \int_0^1 \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，已知下表。

x	0	1/8	2/8	3/8	
$f(x) = \sin x/x$	1	0.997 397 8	0.989 615 8	0.976 726 7	
	4/8	5/8	6/8	7/8	1
	0.958 851 0	0.936 155 6	0.908 851 6	0.877 192 5	0.841 470 9

根据上述数据，分别用复合梯形公式和复合 Simpson 公式的算式 $I \approx T_8$ 和 $I \approx S_4$ 求 I 的近似值。

4. 设某物体垂直于 ox 轴的可变截面的面积为 $s(x)$，且 $s(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ $(a \leqslant x \leqslant b)$，其中 A,B,C,D 是任意常数。试证明：此物体界于 $x = a$ 和 $x = b$ 间的体积 V 由下式给出

$$V = \frac{b-a}{6}\left[s(a) + 4s\left(\frac{a+b}{2}\right) + s(b)\right]$$

并应用上述结论推出计算球、球台的体积公式。

5. 用龙贝格方法求积分 $I = \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$，使误差不超过 10^{-5}。

6. 已知函数 $y = \mathrm{e}^x$ 的下列数值：

x	2.6	2.7	2.8
y	13.463 7	14.879 7	16.444 6

试用二点、三点微分公式计算 $x = 2.7$ 处的一阶、二阶导数值。

7. 在区间 $[-1,1]$ 上求三个不同的节点 x_0, x_1, x_2 和一个常数 C，使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx C[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)]$$

具有尽可能高的代数精确度。

8. 证明高斯求积公式的收敛性：对任何有限区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$，对任意 $\varepsilon > 0$，总存在自然数 N，使当 $n > N$ 时，有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k^{(n)})\right| < \varepsilon$$

其中，$x_k^{(n)}$，$k = 1,2,\cdots,n$ 为高斯基点；A_k 为高斯求积系数。

9. 用 Romberg 算法计算积分 $\int_0^1 \dfrac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$，使达到 7 位有效数字。

10. 设 $f(x,y)$ 有 4 阶连续导数，试证明计算二重积分

$$I=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

的辛普生公式

$$S=\frac{(b-a)(d-c)}{36}\{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)$$
$$+4\left[f(a,\frac{a+d}{2})+f(b,\frac{c+d}{2})+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right]$$
$$+16f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\}$$

的截断误差为

$$R(f)=-\frac{(b-a)(d-c)}{180}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^4\frac{\partial^4 f(\varepsilon,\eta)}{\partial x^4}+\left(\frac{d-c}{2}\right)^4\frac{\partial^4 f(\bar{\varepsilon},\bar{\eta})}{\partial y^4}\right]$$

其中，$\varepsilon,\bar{\varepsilon}\in(a,b)$；$\eta,\bar{\eta}\in(c,d)$。

同步训练题答案

TONG BU XUN LIAN TI DA AN

1. **解**　记 $a=0,b=1,f(x)=e^{-x}$，则

$$f'(x)=-e^{-x},f''(x)=e^{-x},f'''(x)=-e^{-x},f^{(4)}(x)=e^{-x}$$

有

$$I(f)=\int_0^1 e^{-x}dx$$

$$T(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1-0}{2}(e^0+e^{-1})\approx 0.683\ 9$$

由 $I(f)-T(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)=-\frac{1}{12}e^{-\eta},\eta\in(0,1)$ 得

$$|I(f)-T(f)|\leqslant\frac{1}{12}=0.083\ 33$$

$$S(f)=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$
$$=\frac{1-0}{6}(e^0+4e^{-0.5}+e^{-1})=0.632\ 3$$

由

$$I(f)-S(f)=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4f^{(4)}(\eta)=-\frac{1}{180}\left(\frac{1}{2}\right)^4e^{-\eta},\quad \eta\in(0,1)$$

得

$$|I(f)-S(f)|\leqslant\frac{1}{180}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2\ 880}=0.000\ 347\ 2$$

2. **证明**　令 $f(x)=1$，代入求积公式，得

$$左边=x_1-x_0=h,\quad 右边=\frac{h}{2}(1+1)-\frac{h^2}{12}(0-0)=h$$

故左边 = 右边。

令 $f(x)=x$，代入求积公式中，得

$$左边=\frac{1}{2}(x_1^2-x_0^2)=\frac{h}{2}(x_1+x_0),右边=\frac{h}{2}(x_0+x_1)-\frac{h^2}{12}(1-1)=\frac{h}{2}(x_0+x_1)$$

故左边 = 右边。

再令 $f(x)=x^2$，代入求积公式中，得

$$左边=\frac{1}{3}(x_1^3-x_0^3)=\frac{h}{3}(x_1^2+x_1x_0+x_0^2)=\frac{h}{3}(h^2+3x_0x_1)=\frac{1}{3}h^3+x_0x_1h$$

$$右边=\frac{h}{2}(x_0^2-x_1^2)-\frac{h^2}{12}(2x_1-2x_0)=\frac{h}{2}(h^2+2x_0x_1)-\frac{h^3}{6}=\frac{1}{3}h^3+x_0x_1h$$

故左边 = 右边，从而该求积公式至少具有 2 次代数精确度。

再取 $f(x)=x^3$，代入求积公式中，得

$$左边=\frac{1}{4}(x_1^4-x_0^4)=\frac{h}{4}(x_1+x_0)(x_1^2+x_0^2)$$

$$\begin{aligned}右边&=\frac{h}{2}(x_0^3+x_1^3)-\frac{h^2}{12}(3x_1^2-3x_0^2)\\&=\frac{h}{2}(x_0+x_1)(x_0^2-x_0x_1+x_1^2)-\frac{h^3}{4}(x_1+x_0)\\&=\frac{h}{4}(x_0+x_1)[2x_0^2-2x_0x_1+2x_1^2-(x_1-x_0)^2]\\&=\frac{h}{4}(x_1+x_0)(x_1^2+x_0^2)\end{aligned}$$

故左边 = 右边，从而，该求积公式至少具有 3 次代数精确度。

3. **解** $I\approx T_8=\dfrac{\frac{1}{8}}{2}[1+2\times(0.997\,397\,8+0.989\,615\,8+0.976\,726\,7+0.958\,851\,0$

$+0.936\,155\,6+0.908\,851\,6+0.877\,192\,5)+0.841\,470\,9]$

$=0.945\,691\,1$

$I\approx S_4=\dfrac{\frac{1}{4}}{6}[1+4\times(0.997\,397\,8+0.976\,726\,7+0.936\,155\,6+0.877\,192\,5)$

$+2\times(0.989\,615\,8+0.958\,851\,0+0.908\,851\,6)+0.841\,470\,9]$

$=0.946\,083\,2$

4. **证明** 由 Simpson 公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

具有 3 次代数精确度，因而对 $f(x)=s(x)$ 精确成立，即有

$$\int_a^b s(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{6}\left[s(a)+4s\left(\frac{a+b}{2}\right)+s(b)\right]$$

而上式左边就是所求物体的体积，故

$$V=\frac{b-a}{6}\left[s(a)+4s\left(\frac{a+b}{2}\right)+s(b)\right]$$

(1) 设球的半径为 R，取球心为原点，则有 $s(x)=\pi(R^2-x^2)$，$x\in[-R,+R]$，$s(x)$ 是一个

二次多项式,应用上述结论,得到球体体积为

$$V=\frac{R-(-R)}{6}[s(-R)+4s(0)+s(R)]=\frac{R}{3}[0+4\pi R^2+0]=\frac{4\pi R^3}{3}$$

(2)设球台的高为 H,两底的半径分别为 $r_0<r_1$,取一底的圆心为原点,则有

$$s(x)=\pi\left(-x^2+\frac{H^2+r_0^2-r_1^2}{H}x+r_1^2\right),\quad x\in[0,H]$$

$s(x)$是一个二次多项式,应用上述结论,得到球台体积为

$$V=\frac{H-0}{6}\left[s(0)+4s\left(\frac{H}{2}\right)+s(H)\right]=\frac{H}{6}\left[\pi r_1^2+4\pi\left(\frac{H^2}{4}+\frac{r_0^2+r_1^2}{2}\right)+\pi r_0^2\right]$$

$$=\frac{\pi H}{6}\{H^2+3(r_1^2+r_0^2)\}$$

5. **解** 计算见下表。

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	1.859 140 9			
1	1.753 931 1	1.718 861 2		
2	1.727 221 9	1.718 318 8	1.718 282 6	
3	1.720 518 6	1.718 284 2	1.718 281 9	1.718 281 9

由于 $|T_3^{(0)}-T_2^{(0)}|=7\times10^{-7}<10^{-5}$,故得 $I\approx1.718\ 28$,它具有6位有效数字。

6. **解** 取 $x_0=2.6,x_1=2.7$ 时,由两点公式得

$$y'\Big|_{x=2.7}\approx\frac{e^{2.7}-e^{2.6}}{2.7-2.6}=14.160\ 0$$

取 $x_0=2.7,x_1=2.8$ 时,由两点公式得

$$y'\Big|_{x=2.7}\approx\frac{e^{2.8}-e^{2.7}}{2.8-2.7}=15.649\ 0$$

取 $x_0=2.6,x_1=2.7,x_2=2.8$ 时,由三点公式得

$$y'\Big|_{x=2.7}\approx\frac{1}{2\times0.1}(e^{2.8}-e^{2.6})=14.904\ 5$$

$$y'\Big|_{x=2.7}\approx\frac{1}{0.1^2}(e^{2.8}-2e^{2.7}+e^{2.6})=14.890\ 0$$

而其精确值 $$y'\Big|_{x=2.7}=y''\Big|_{x=2.7}=e^{2.7}=14.879\ 7$$

可见,三点公式计算结果较两点公式精确。

7. **解** 假设 $x_0<x_1<x_2$,要使求积公式具有至少3次代数精确度,则对多项式 $f(x)=1,x,x^2,x^3$,求积公式精确成立。

当 $f(x)=1$ 时,则有 $3C=2$,即 $C=\frac{2}{3}$。

当 $f(x)=x,x^2,x^3$ 时，则有

$$\begin{cases} C(x_0+x_1+x_2)=0 \\ C(x_0^2+x_1^2+x_2^2)=\dfrac{2}{3} \\ C(x_0^3+x_1^3+x_2^3)=0 \end{cases}$$

把 $C=\dfrac{2}{3}$ 代入，即得节点 x_0,x_1,x_2 应满足方程组

$$\begin{cases} x_0+x_1+x_2=0 \\ x_0^2+x_1^2+x_2^2=1 \\ x_0^3+x_1^3+x_2^3=0 \end{cases}$$

解方程组，并考虑到 $x_0<x_1<x_2$，有

$$x_0=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x_1=0,\quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

此时求积公式为
$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

由于当 $f(x)=x^4$ 时，$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{5}$，而

$$\frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]=\frac{1}{3}$$

即求积公式对 $f(x)=x^4$ 不精确成立。

8. **证明** 因函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由 Weierstrass 定理，总存在多项式 $P(x)$（不妨设为 m 次），$\forall x\in[a,b]$，满足

$$|f(x)-P(x)|<\frac{1}{2(b-a)}\varepsilon$$

于是，有
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b P(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

故
$$\left|\sum_{k=1}^{n}A_kP(x_k^{(n)})-\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k^{(n)})\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|A_k|\cdot|P(x_k^{(n)})-f(x_k^{(n)})|$$
$$\leqslant\frac{1}{2(b-a)}\varepsilon\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{1}{2(b-a)}\varepsilon\int_a^b 1\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\varepsilon$$

再对 m 次多项式 $P(x)$ 取节点数 $n\geqslant\dfrac{m+1}{2}$，即 $m\leqslant 2n-1$，则 n 点 Gauss 求积公式对 $f(x)=P(x)$ 精确成立，即有

$$\left|\int_a^b P(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}A_kP(x_k^{(n)})\right|=0$$

从而对任意 $\varepsilon>0$，总存在自然数 $N\geqslant\dfrac{m+1}{2}$，使当 $n>N$ 时，有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k^{(n)})\right|=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b P(x)\mathrm{d}x+\int_a^b P(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}A_kP(x_k^{(a)})\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}A_kP(x_k^{(n)})-\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k^{(n)})\Big|$$

$$\leqslant\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b P(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b P(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}A_kP(x_k^{(n)})\right|$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{n}A_kP(x_k^{(n)})-\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k^{(n)})\right|$$

$$<\frac{1}{2}\varepsilon+0+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

9. **解** 设 $f(x)=\arctan x/\sqrt{x^3}$，则 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=+\infty$，故原积分为瑕积分，积分的下限 $x=0$ 是个瑕点，因此，不可直接运用 Romberg 算法计算。下面用代换 $x=t^2$ 使积分变形，即

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x^{3/2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2\arctan t^2}{t^2}\mathrm{d}t=2\left[-\frac{1}{t}\arctan t^2\Big|_0^1+2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}\right]=4\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}-\frac{\pi}{2}$$

令 $g(t)=\dfrac{1}{1+t^4}$，则问题集中到只要计算 $I(g)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$。本题可用微积分基本公式求出精确解，易知

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[2\arctan\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}+\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right]+C$$

从而

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}=0.866\ 972\ 987\ 3\tag{1}$$

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x^{3/2}}\mathrm{d}x=1.897\ 095\ 622\tag{2}$$

下面用 Romberg 算法计算，利用基本数据 $g(0)=1,g(1)=0.5$，且

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=0.941\ 176\ 5,\quad g\left(\frac{1}{4}\right)=0.996\ 108\ 9,\quad g\left(\frac{3}{4}\right)=0.759\ 643\ 9$$

$$g\left(\frac{1}{8}\right)=0.999\ 755\ 9,\quad g\left(\frac{3}{8}\right)=0.980\ 608\ 1,\quad g\left(\frac{5}{8}\right)=0.867\ 612\ 8$$

$$g\left(\frac{7}{8}\right)=0.630\ 444\ 8,\quad g\left(\frac{1}{16}\right)=0.999\ 984\ 7,\quad g\left(\frac{3}{16}\right)=0.998\ 765\ 5$$

$$g\left(\frac{5}{16}\right)=0.990\ 553\ 3,\quad g\left(\frac{7}{16}\right)=0.817\ 391\ 5,\quad g\left(\frac{9}{16}\right)=0.908\ 997\ 6$$

$$g\left(\frac{11}{16}\right)=0.817\ 391\ 5,\quad g\left(\frac{13}{18}\right)=0.696\ 472\ 8,\quad g\left(\frac{15}{16}\right)=0.564\ 182\ 5$$

仿照上题，利用梯形法的递推公式算出 $T_0^{(k)}$，$k=0,1,2,3,4$，再按系数 $4^m/(4^m-1)$，$-1/(4^m-1)$，$m=1,2,3,4$ 反复进行线性组合，即得 $T_m^{(k)}$ 数表如下。

k	$T_0^{(k)}$	T_1^{k-1}	T_2^{k-2}	T_3^{k-3}	T_4^{k-4}
0	0.75				
1	0.845 588 2	0.877 451 0			
2	0.861 732 3	0.867 113 7	0.866 424 6		
3	0.865 668 9	0.866 981 1	0.866 972 2	0.866 980 9	
4	0.866 647 3	0.866 973 4	0.866 922 9	0.866 972 9	0.866 972 9

与式(1)的结果比较知,取近似值 0.866 972 9 已获得 7 位有效数字,积分

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = 4\times 0.866\,972\,9 - \frac{\pi}{2} = 1.897\,095\,2$$

与式(1)比较,已获得 7 位有效数字。

注:本题为广义积分,$x=0$ 为瑕点,因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{\arctan x}{x^{3/2}}\sqrt{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\arctan x}{x} = 1$$

因此,广义积分是收敛的,对于发散的广义积分,一般无数值计算的问题。

10. **证明** 令 $g(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$,则 $I=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,由定积分的辛普生公式的截断误差公式知,存在 $\varepsilon\in(a,b)$,使得

$$I=\frac{b-a}{6}\left[g(a)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(b)\right]-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 g^{(4)}\varepsilon$$

注意到

$$g^{(4)}(\varepsilon)=\int_c^d\frac{\partial^4 f(\varepsilon,y)}{\partial x^4}\mathrm{d}y=\frac{\partial^4 f(\varepsilon,\eta)}{\partial x^4}(d-c),\quad \eta\in(c,d)$$

从而有 $$I=\frac{b-a}{6}\left[g(a)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(b)\right]-\frac{(b-a)(d-c)}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4\frac{\partial^4 f(\varepsilon,\eta)}{\partial x^4} \tag{1}$$

再次应用积分的辛普生公式的截断误差公式,得

$$g(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{d-c}{6}\left[f(x,c)+4f\left(x,\frac{c+d}{2}\right)+f(x,d)\right]-\frac{d-c}{180}\left(\frac{d-c}{2}\right)^4\frac{\partial^4 f(\varepsilon,\eta)}{\partial y^4}$$

$$x\in[a,b],\tilde{\eta}\in(c,d)$$

在上式中分别取 $x=a,x=\frac{a+b}{2},x=b$ 得到 $g(a),g\left(\frac{a+b}{2}\right),g(b)$ 且

$$S=\frac{b-a}{b}\left[g(a)+4\left(\frac{a+b}{2}\right)+\gamma(b)\right]$$

再代入到式(1)中,得

$$I=S-\frac{(b-a)(d-c)}{180}\left(\frac{d-c}{2}\right)^4\times\frac{1}{6}\left[\frac{\partial^4 f(a,\tilde{\eta}_1)}{\partial y^4}+4\frac{\partial^4 f\left(\frac{a+b}{2},\tilde{\eta}_2\right)}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 f(b,\tilde{\eta}_3)}{\partial y^4}\right]$$

$$-\frac{(b-a)(d-c)}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 f(\varepsilon,\eta)}{\partial x^4}$$

$$= S - \frac{(b-a)(d-c)}{180}\left[\left(\frac{d-c}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 f(\tilde{\varepsilon},\tilde{\eta})}{\partial y^4} + \left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 f(\varepsilon,\eta)}{\partial x^4}\right]$$

$$\tilde{\varepsilon}\in(a,b),\ \tilde{\eta}\in(c,d)$$

第 5 章 常微分方程数值解法

知识要点

ZHI SHI YAO DIAN

一、引言

本章主要研究一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{5-1}$$

的数值求解方法，根据常微分方程理论，当 $f(x,y)$ 满足 Lipschitz 条件时，初值问题适定。

所谓数值解法，就是求 $y(x)$ 在区间 $[a,b]$ 中一系列离散点（也称节点）

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$$

上 $y(x_k)$ 的近似值 $y_k(k=1,2,\cdots,n)$，这些近似值就是数值解，相邻两节点的间距 $h_n = x_{n+1} - x_n$ 称为步长，一般取等步长的节点，此时记为 h。

初值问题式(5-1)的求解都采用“步进式”，数值方法有单步与多步之分，也有显式与隐式之分。

二、简单的数值方法与基本概念

欧拉法 $\quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0,1,2,\cdots$

后退欧拉法 $\quad y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0,1,2,\cdots$

梯形方法 $\quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n,y_n) + f(x_{n+1},y_{n+1})], \quad n = 0,1,2,\cdots$

改进的欧拉法

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

上述方法都是单步方法，其中后退的欧拉法和梯形方法是隐式方法，需要迭代

求解。

式(5-1)的单步法的一般形式为

$$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,y_{n+1},h) \tag{5-2}$$

定义 5.1 设 $y(x)$是初值问题式(5-1)的准确解,称

$$e_{k+1}(h)=y(x_{n+1})-y(x_n)-h\varphi(x_n,y(x_n),y(x_{n+1}),h) \tag{5-3}$$

为单步法式(5-2)的局部截断误差。

定义 5.2 设 $y(x)$是初值问题式(5-1)的准确解,若存在最大整数使单步法式(5-2)的局部截断误差满足

$$e_{k+1}(h)=y(x+h)-y(x)-h\varphi(x,y(x),y(x+h),h)=O(h^{p+1}) \tag{5-4}$$

则称式(5-2)具有 P 阶精度,也称式(5-2)为 P 阶方法。若将式(5-4)的展开式写成

$$e_{k+1}=\varphi(x_n,y(x_n))h^{p+1}+O(h^{p+2})$$

则称 $\varphi(x_n,y(x_n))h^{p+1}$为局部截断误差主项。

容易证明,欧拉法和后退的欧拉法都是一阶方法,梯形法和改进的欧拉法是二阶方法。

三、Runge-Kutta 方法

显式 Runge-Kutta 方法的一般形式为

$$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h) \tag{5-5}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x_n,y_n,h)&=\sum_{i=1}^{r}c_ik_i\\K_1&=f(x_n,y_n)\\K_i&=f(x_n+\lambda_ih,y_n+h\sum_{j=1}^{r-1}\mu_{ij}k_j),i=2,3,\cdots,r\end{aligned}\right\} \tag{5-6}$$

式(5-5),式(5-6)称为 r 阶 Runge-Kutta 方法。

常用的 2 阶 Runge-Kutta 方法有改进的欧拉公式和中点公式,2 阶显式 Runge-Kutta 方法不可能达到三阶精度。

经典的四阶 Runge-Kutta 公式为

$$\left.\begin{aligned}
&y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)\\
&K_1=f(x_n,y_n)\\
&K_2=f(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}hK_1)\\
&K_3=f(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}hK_2)\\
&K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3)
\end{aligned}\right\}\qquad(5-7)$$

四、线性多步法

一般形式 $\qquad y_{n+k}=\sum\limits_{i=0}^{k-1}\alpha_i y_{n+i}+h\sum\limits_{i=0}^{k}\beta_i f_{n+i}$

四阶 Adams 显式公式与隐式公式为

$$y_{n+4}=y_{n+3}+\frac{1}{24}h(55f_{n+3}-59f_{n+2}+37f_{n+1}-9f_n)$$

$$y_{n+3}=y_{n+2}+\frac{1}{24}h(9f_{n+3}+19f_{n+2}-5f_{n+1}+f_n)$$

线性多步法的构造方法主要是基于数值积分和泰勒展开这两种途径，有关局部截断误差等单步法的基本概念对于多步法也类似成立。

SHU HOU XI TI JIE XI 书后习题解析

5-1 用 Euler 法求解初值问题。

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-y+2(x+1), & x\in[0,1]\\ y(0)=1\end{cases}$$

(步长 $h=0.1$)并与精确解 $y=2x+e^{-x}$ 相比较。

解 $\qquad f(x,y)=y-\dfrac{2x}{y}$

$$x_0=a=0,\quad y_0=1,\quad n=\frac{1}{h}=10$$

$$y_{j+1}=y_j+hf(x_j,y_j)=y_j+h\in y_j+2(x_j+1),\quad j=0,1,\cdots,9$$

计算结果如下表。

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_n	1.000 000	1.100 000	1.210 000	1.329 000	1.456 100	1.590 490
x_n	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
y_n	1.731 441	1.878 297	2.030 467	2.187 421	2.348 678	

5-2　用 Euler 法求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}(1+x)y^2,0\leqslant x\leqslant 1\\ y(0)=1\end{cases}$$

取步长 $h=0.1$。

解
$$f(x,y)=\frac{1}{2}(1+x)y^2$$

$$x_0=a=0,\quad y_0=1,\quad n=\frac{1}{h}=10$$

$$y_{j+1}=y_j+hf(x_j,y_j)=y_j+h\cdot\frac{1}{2}(1+x_j)y_j^2,\quad j=0,1,\cdots,9$$

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	
y_n	1.000 000 0	1.050 000 0	1.110 637	1.184 648	1.275 869	
x_n	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	1.397 96	1.534 687	1.723 109	1.975 482	2.326 710	2.841 00

5-3　利用 Euler 法计算积分 $I=\int_0^x e^{t^2}dt$ 在点 $x=0.5,1,1.5,2$ 的近似值。

解　$y(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ 等价于

$$\begin{cases}y'=e^{-x^2},x>0\\ y(0)=0\end{cases}$$

记 $f(x,y)=e^{-x^2}$，取 $h=0.5$，记 $x_0=0,x_1=0.5,x_2=1.0,x_3=1.5,x_4=2.0$，则由 Euler 公式

$$\begin{cases}y_{j+1}=y_j+hf(x_j,y_j),\quad j=0,1,2,3\\ y_0=0\end{cases}$$

可得
$$y(0.5)\approx y_1=y_0+he^{-x_0^2}=0.5$$

$$y(1.0)\approx y_2=y_1+he^{-x_1^2}=0.889\ 40$$

$$y(1.5)\approx y_3=y_2+he^{-x_2^2}=1.073\ 34$$

$$y(2.0)\approx y_4=y_3+he^{-x_3^2}=1.126\ 04$$

5－4　用改进的 Euler 方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

取步长 $h = 0.1$ 计算，并与精确解 $y = -x - 1 + 2e^x$ 相比较。

解　改进的 Euler 法计算公式为

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + h(x_n + y_n) = hx_n + (1+h)y_n \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(x_n + y_n + x_{n+1} + \bar{y}_{n+1}) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = hx_n + (1+h)y_n \\ y_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{2}h\right)y_n + \dfrac{h}{2}\bar{y}_{n+1} + \dfrac{h}{2}[x_n + x_{n+1}] \end{cases}\quad n = 0, 1, \cdots, 4$$

代入 $h = 0.1$，$y_0 = 1$，计算结果见下表。

x_n	y_n	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$
0.1	1.11	$0.341\,836 \times 10^{-3}$
0.2	1.242 050	$0.755\,516 \times 10^{-3}$
0.3	1.398 465 250	$1.252\,365 \times 10^{-3}$
0.4	1.581 804 101	$1.845\,294 \times 10^{-3}$
0.5	1.794 893 532	$2.549\,009 \times 10^{-3}$

5－5　用改进的 Euler 法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 10x(1-y),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$ 计算，并与精确解 $y = 1 - e^{-5x^2}$ 相比较。

解

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n, \bar{y}_{n+1})] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$f(x, y) = 10x(1-y)$$

所以

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + h[10x_n(1-y_n)] = 10hx_n + (1-10hx_n)y_n \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[10x_n(1-y_n) + 10x_{n+1}(1-\bar{y}_{n+1})] \end{cases}\quad n = 0, 1, \cdots, 9$$

即

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = 10hx_n + (1-10hx_n)y_n \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[10x_n(1-y_n) + 10x_{n+1}(1-\bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

代入 $h = 0.1$，$y_0 = 0$，计算结果见下表。

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_n	0.000 000	0.050 000	0.183 000	0.362 740	0.547 545	0.705 905
x_n	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
y_n	0.823 543	0.901 184	0.947 628	0.973 290	0.986 645	

5-6 用 Euler 法与改进的 Euler 法求解

$$\begin{cases} y' = y - xy^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$ 计算，并与精确解 $y = \dfrac{1}{x - 1 + 2e^{-x}}$ 相比较。

解 Euler 法公式为

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(y_n + x_n y_n^2), \quad n = 0, 1, \cdots, 9$$

改进的 Euler 法公式为

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(y_n - x_n y_n^2) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + (x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \\ \quad\;\; = y_n + \dfrac{h}{2}[(y_n - x_n y_n^2) + (\bar{y}_{n+1} - x_{n+1}\bar{y}_{n+1}^2)] \end{cases} \quad n = 0, 1, \cdots, 9$$

将 $h = 0.1, y_0 = 1$ 代入以上两方法，计算结果如下表。

x_n	Euler 法 y_n	改进的 Euler 法 y_n
0	1.000 000	1.000 000
0.1	1.100 000	1.098 95
0.2	1.197 900	1.193 375
0.3	1.288 991	1.278 275
0.4	1.368 045	1.348 700
0.5	1.429 987	1.400 536
0.6	1.470 743	1.431 225
0.7	1.488 032	1.440 175
0.8	1.481 839	1.428 709
0.9	1.454 355	1.399 663
1.0	1.409 427	1.356 723

5-7 用梯形方法解初值问题

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

证明其近似解为 $y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n$。并证明：当 $h \to 0$ 时，它收敛于原初始问题的精确解

$y=e^{-x}$。

证明 梯形公式为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

将 $f(x,y)=-y$ 代入上式,得

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[-y_n-y_{n+1}]$$

解得 $$y_{n+1}=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2y_{n-1}=\cdots=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1}y_0$$

因为 $y_0=1$,故 $$y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

$\forall x>0$,以 h 为步长经 n 步运算可求得 $y(x)$ 的近似值 y_n,故 $x=nh$,即 $n=\frac{x}{h}$,代入上式有

$$y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{x/h}$$

$$\lim_{h\to0}y_n=\lim_{h\to0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}}=\lim_{h\to0}\left(1-\frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\left(1-\frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{2h}}\right]^{\frac{2h}{2+h}\frac{x}{h}}=e^{-x}$$

5-8 对 $$\begin{cases}y'=1+e^{-x}\sin y,0\leqslant x\leqslant1\\ y(0)=0\end{cases}$$

取步长 $h=0.1$,用下面方法求其数值解。

(1) Euler 法。

(2) 改进的 Euler 法。

(3) 四阶 Runge - Kutta 法。

解 Euler 法计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+h(1-e^{-x_n}\sin y_n),\quad n=0,1,\cdots,9$$

改进的 Euler 法公式为

$$\begin{cases}\bar{y}_{n+1}=y_n+h(1+e^{-x_n}\sin y_n)\\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[(1+e^{-x_n}\sin y_n)+(1+e^{-x_{n+1}}\sin\bar{y}_{n+1})]\end{cases}\qquad n=0,1,\cdots,9$$

四阶 Runge - Kutta 法公式为

$$\begin{rcases}y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)\\ k_1=f(x_n,y_n)=(1+e^{-x_n}\sin y_n)\\ k_2=f(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}hK_1)\\ k_2=f(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}hK_2)\\ k_3=f(x_n+h,y_n+hK_3)\end{rcases}$$

计算结果如下表。

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y_n（Euler 法）	0.000 000	0.100 000	0.209 033	0.326 023	0.449 750
y_n（改进 Euler 法）	0.000 000	0.104 517	0.217 929	0.338 979	0.466 284
y_n（Runge – Kutta 法）	0.000 000	0.104 825	0.218 540	0.339 880	0.467 453
x_n	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n（Euler 法）	0.578 892	0.712 075	0.847 934	0.985 174	1.122 62	1.259 261
y_n（改进 Euler 法）	0.598 385 8	0.733 820 4	0.871 185	1.009 200	1.146 744	1.282 914
y_n（Runge – Kutta 法）	0.599 797	0.735 444	0.872 986 9	1.011 144	1.148 804	1.285 056

5 – 9　对

$$\begin{cases} y' = x^2 + x^3 y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$，用四阶 Runge – Kutta 法求解 $y(1.3)$，$y(1.5)$。

解　计算公式为

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ k_1 &= f(x_n, y_n) = x_n^2 + x_n^3 y_n \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_2\right) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{aligned}\right\}$$

解得　　$y(1.3) \approx 2.103\ 211$，　$y(1.5) \approx 4.178\ 485$

5 – 10　对

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{1+x}, 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

试分别用下述方法求解。

(1)用改进的 Euler 公式，取 $h = 0.1$。

(2)用四阶 Runge – Kutta 法，取 $h = 0.2$。

解　(1)改进的 Euler 法公式。$f(x, y) = \dfrac{2y}{1+x}$。

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + h\dfrac{2y_n}{1+x_n} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[\dfrac{2y_n}{1+x_n} + \dfrac{2\bar{y}_{n+1}}{1+x_{n+1}}\right] \end{cases} \quad n = 0, 1, \cdots, 9$$

(2)四阶 Runge – Kutta 法计算公式。

$$
\left.\begin{aligned}
&y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)\\
&K_1=f(x_n,y_n)=\frac{2y_n}{1+x_n}\\
&K_2=f\left(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}hK_1\right)\\
&K_3=f\left(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}hK_2\right)\\
&K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3)
\end{aligned}\right\}
$$

计算结果如下表：

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y_n(改进的 Euler 法)	1.000 000	1.209 091	1.438 085	1.686 985	1.955 790

x_n	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n(改进的 Euler 法)	2.244 502	2.553 121	2.881 648	3.230 082	3.598 425	3.986 676

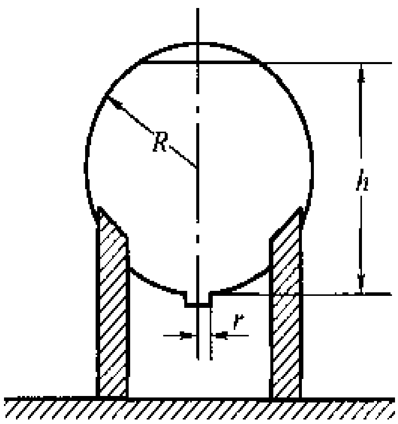
x_n	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_n(Runge - Kutta 法)	1.000 000	1.439 945	1.959 891	2.559 836	3.239 777	3.999 71

5 - 11　一个半径为 R 的球形水罐，通过底部半径为 r 的孔排水，罐的顶部有孔让空气进入。求水面高度与时间的关系，由此可求出水从任一高度到达另一高度的时间。由题 5 - 11 图所示，水面高度为 h 时，水的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h) \tag{1}$$

体积的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-Av \tag{2}$$



题 5 - 11 图

式中，A 是排水孔截面积；v 是通过此面积的水流速度。等式(2)还可写为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\pi r^2\sqrt{2gh} \tag{3}$$

式中，g 为重力加速度。

若对式(1)两边求导数也可以得到

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=(2\pi hR-\pi h^2)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

让式(3)和式(4)的左边相等，得 h 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\frac{r^2\sqrt{2gh}}{2hR-h^2} \tag{5}$$

已知 $R=3.5$ m，$r=0.04$ m，$g=9.81$ m/s^2，$h=6.9$ m，取步长 $\Delta t=7.5$ s。[当 $h_0=2R$ 时，式(5)分母为零]试编程序解微分方程式(5)。注意，当罐快空了的时候，即可停止运行程序，而当 h 小到一定程度时，必须减小时间步长，否则 h 有可能得负值。

解 略。

5－12 将高阶方程化成一阶方程组并给出经典四阶 R－K 求解公式。

$$\begin{cases} y''-0.1(1-y^2)y'+y=0 \\ y(0)=1, \quad y'(0)=1 \end{cases}$$

解 一阶方程组
$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=0.1(1-y_1^2)y_2-y_1 \\ y_1(1)=1, y_2(0)=1 \end{cases}$$

直接套用式(5－7)，注意 $f(x,y_1,y_2)=0.1(1-y_1^2)y_2-y_1$，则可得出求解的标准四阶R－K求解公式。

5－13 取 $h=0.25$，用差分法解边值问题

$$\begin{cases} y''+8y'+y=0 \\ y(0)=0, y(1)=2 \end{cases}$$

解 略。

5－14 试用 Taylor 展开式构造求解

$$\begin{cases} y''=y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

的二阶方法；并用构造的方法求 y_1，y_2，其中 $h=0.125$.

解 略。

5－15 证明中点方法 $y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$是二阶方法。

证明 局部截断误差

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= y(x_{n+1})-[y(x_{n-1})+2hf(x_n,y(x_n))] \\ &= y(x_{n+1})-y(x_{n-1})-2hy'(x_n) \\ &= \left[y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}(y''(x_n)+\frac{h^3}{6}(y'''(\varepsilon_n))\right] \\ &\quad -\left[y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{6}(y'''(\eta_n))\right]-2hy'(x_n) \\ &= \frac{1}{6}(y'''(\varepsilon_n)+y'''(\eta_n))h^3 \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_n\in(x_n,x_{n+1})$，$\eta_n\in(x_{n-1},x_n)$，因而中点方法是一个二阶方法。

5－16 使用二阶 Adams 法及其预测—校正系统解初值问题

$$\begin{cases} y'=x^2-y^2, \quad x\in[-1,0] \\ y(-1)=0 \end{cases}$$

取步长 $h=0.2$，用四阶 R-K 法求初始值。

解 先用四阶 R-K 法求初始值 $y(-0.8)$ 和 $y(-0.6)$。四阶 R-K 法公式为

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\dfrac{1}{2}h, y_n+\dfrac{1}{2}hK_1) \\ K_3=f(x_n+\dfrac{1}{2}h, y_n+\dfrac{1}{2}hK_2) \\ K_4=f(x_n+h, y_n+hK_3) \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{6}(K_1+2K_2+23_K+4K) \\ K_1=x_n^2+y_n^2 \\ K_2=(x_n+\dfrac{1}{2}h)^2-(y_n+\dfrac{1}{2}hK_1)^2 \\ K_3=(x_n+\dfrac{1}{2}h)^2-(y_n+\dfrac{1}{2}hK_2)^2 \\ K_4=(x_n+h)^2-(y_n+hK_3)^2 \end{cases}$$

求得 $y(-0.8)\approx 0.160\ 712\ 3,\quad y(-0.6)\approx 0.251\ 917\ 4$

再由用三阶 Adams 公式

$$y_n=y_{n-1}+\frac{h}{n}[23f(x_{n-1},y_{n-1})-16f(x_{n-2},y_{n-2})+5f(x_{n-3},y_{n-3})]$$

求得 $y(-0.4)\approx 0.285\ 144\ 4,\quad y(-0.2)\approx 0.287\ 414\ 2$

由 Adams 预测--校正系统，有

$$\begin{cases} \bar{y}_n=y_{n-1}+\dfrac{h}{24}[55f_{n-1}-59f_{n-2}+37f_{n-3}-9f_{n-4}] \\ y_n=y_{n-1}+\dfrac{h}{24}[9\bar{f}_n+19f_{n-1}-5f_{n-2}+f_{n-3}] \end{cases}$$

求得 $y(-0.2)\approx 0.287\ 068\ 3$

5-17 使用 Milne 求解公式求初值问题

$$\begin{cases} y'=1-y \\ y(0)=0 \end{cases}$$

$y(1.0)$ 的计算值，取 $h=0.2, y=0.181$，另一个初始值用什么方法计算由读者选取。

解 ①用三阶 R-K 计算 $y(0.4)$。因为 $f(x,y)=1-y$，所以 $K_1=1-y_1=0.819$，且

$$K_2=1-(y_1+\frac{h}{2}K_1)=1-(0.181+0.1\times 0.819)=0.737\ 1$$

$$K_3=1-[y_1+h(2K_2-K_1)]=1-0.312\ 04=0.688\ 96$$

$$y_2=y_1+\frac{h}{6}[K_1+4K_2+K_3]=0.329\ 545$$

②用三阶 Adams 显式公式计算 $y(0.6)$。

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{12}[23f_{k-1} - 16f_{k-2} + 5f_{k-3}] = y_{k-1} + \frac{h}{12}[12 - 23y_{k-1} + 16y_{k-2} - 5y_{k-3}]$$

所以
$$y_3 = y_2 + \frac{h}{12}[12 - 23y_2 + 16y_1 - 5y_0] = 0.451\,486$$

即
$$y(0.6) \approx 0.451\,486$$

③用 Milne 公式求 $y(0.8)$。

$$y_k = y_{k-4} + \frac{4}{3}h[2(1 - y_{k-1}) - (1 - y_{k-2}) + 2(1 - y_{k-3})]$$

$$= y_{k-4} + \frac{4}{3}h[3 - 2y_{k-1} + y_{k-2} - 2y_{k-3}]$$

$$y_4 = y_0 + \frac{4}{3}h[3 - 2y_3 + y_2 - 2y_1] = 0.550\,553$$

即
$$y(0.8) \approx 0.550\,553。$$

④用 Milne 公式求 $y(1.0)$。

$$y_5 = y_1 + \frac{4}{3}h[3 - 2y_4 + y_3 - 2y_2] = 0.632\,010\,7$$

5－18　设计用 Milen 公式和 Simpson 公式匹配的预测—校正系统(3.13)求解初值问题的算法。

解　略。

5－19　使用差分法解边值问题(取 $h = 0.2$)

$$\begin{cases} (1 + x^2)y'' - xy' - 3y = 6x - 3 \\ y(0) - y'(0) = 1, \quad y(1) = 2 \end{cases}$$

解　本题微分方程的系数函数分别为 $p = -\dfrac{x}{1 + x^2}, q = -\dfrac{3}{1 + x^2}, r = \dfrac{6x - 3}{1 + x^2}$，代入，有

$$\begin{bmatrix} -2 + h^2 q_1 & 1 + \frac{h}{2}p_1 & & \\ 1 - \frac{h}{2}p_2 & -2 + h^2 q_2 & 1 + \frac{h}{2}p_2 & \\ & 1 - \frac{1}{2}p_3 & -2 + h^2 q_3 & 1 + h^2 q_3 \\ & & 1 - \frac{h}{2}p_4 & -2 + h^2 q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 r_1 - (1 - \frac{h}{2}p_1)\alpha \\ h^2 r_2 \\ h^2 r_3 \\ h^2 r_4 - (1 + \frac{h}{2}p_4)\beta \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} -2.115\,38 & 0.980\,769 & 0 & 0 \\ 1.034\,48 & -2.103\,45 & 0.965\,517 & 0 \\ & 1.044\,12 & -2.088\,24 & 0.955\,082 \\ & & 1.048\,78 & -2.073\,17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.069\,230\,77 - 1.019\,231\,2 \\ -0.020\,689\,65 \\ 0.017\,647\,059 \\ -1.858\,536 \end{bmatrix}$$

加上条件
$$y_0 - \frac{y_1 - y_0}{0.2} = 1，即\ \alpha - \frac{y_1 - \alpha}{0.2} = 1$$

联解该五元方程组，得

$$y_0 = 1.014\,47, \quad y_1 = 1.017\,85, \quad y_2 = 1.070\,10, \quad y_3 = 1.219\,30, \quad y_4 = 1.513\,29$$

同步训练题

1. 用 Euler 方法(取步长 $h=0.1$)求 $y(t)$满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{t}y+t^2e^t,\quad 1\leqslant t\leqslant 2,\quad y(1.0)=0.0$$

的数值,并与精确解进行比较。

2. 初值问题

$$\begin{cases}y'=ax+b\\ y(0)=0\end{cases}$$

有解 $y(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx$。若 $x_n=nh$, y_n 为由欧拉方法得到的解。试证明

$$y(x_n)-y_n=\frac{1}{2}ahx_n$$

3. 用梯形法和改进的欧拉法求解初值问题

$$\begin{cases}y'=x+y,\quad 0\leqslant x\leqslant 0.5\\ y(0)=1\end{cases}$$

取步长 $h=0.1$,并与准确解 $y=-x-1+2e^x$ 相比较。

4. 用下列方法求初值问题

$$\begin{cases}y'=\frac{2}{3}xy^{-2},\quad x\in[0,1.2]\\ y(0)=1\end{cases}$$

的数值解,并将计算结果与准确解 $y=\sqrt[3]{1+x^2}$ 进行比较。

(1)欧拉方法(取 $h=0.1$);

(2)改进的欧拉方法(取 $h=0.2$);

(3)经典 Runge - Kutta 方法($h=0.4$)。

5. 用经典 Runge - Kutta 方法解初值问题

$$\begin{cases}y'=8-3y,\quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ y(0)=2\end{cases}$$

取步长 $h=0.2$,计算 $y(0.4)$的近似值,小数点后保留 4 位。

6. 证明　在初值问题 $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y$ 中,若 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant L$($L$ 为常量)且 $\frac{1}{2}hL<1$,则迭代法

$$\begin{cases}y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n)\\ y_{n+1}^{(s+1)}=y_n+\frac{1}{2}h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(s)})],\ s=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

是收敛的。

7. 证明如下 Runge - Kutta 方法

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{9}(2K_1 + 3K_2 + 4K_3) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 = f\left(x_i + \dfrac{3h}{4}, y_i + \dfrac{3h}{4}K_1\right) \end{cases}$$

是一个三阶方法。

8. 证明线性二步法 $y_{n+1} + (b-1)y_n - by_{n-1} = \dfrac{1}{4}h[(b+3)f_n + (3b+1)f_{n-1}]$，当 $b \neq 1$ 时方法为二阶，当 $b = -1$ 时方法为三阶。

9. 用差分法解边值问题

$$\begin{cases} y'' - y' = -2\sin x, & 0 < x < \pi/2 \\ y(0) = -1, & y(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

同步训练题答案

TONG BU XUN LIAN TI DA AN

1. 解　该方程的真解为 $y = t^2(e^t - e)$，从而 $y(t_n) = t_n^2(e^{t_n} - e)$。根据 Euler 方法的计算公式，有

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{2}{t_n}y_n + t_n^2 e^{t_n}\right), \quad y_0 = y(1.0) = 0.0, \quad t_n = t_0 + nh = 1.0 + 0.1n$$

$$y_1 = y_0 + 0.1\left(\frac{2}{t_0}y_0 + t_0^2 e^{t_0}\right) = 0.271\,83, \quad y_2 = y_1 + 0.1\left(\frac{2}{t_1}y_1 + t_1^2 e^{t_1}\right) = 0.684\,76\cdots$$

所得计算结果如下表。

n	t_n	y_n	$y(t_n)$	$y(t_n) - y_n$
0	1.0	0.0	0.0	0.0
1	1.1	0.271 83	0.345 92	0.074 09
2	1.2	0.684 76	0.866 64	0.181 88
3	1.3	1.276 98	1.607 22	0.330 24
4	1.4	2.093 55	2.620 36	0.526 81
…	…	…	…	…
10	2.0	15.398 24	18.683 10	3.284 86

2. 证明　欧拉公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(ax_i + b), i = 0,1,2 & (1) \\ y_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

方法 1。将式(1)的两边对 i 从 0 到 $n-1$ 求和，得

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i + h\sum_{i=0}^{n-1}(ax_i + b)$$

利用式(2)，得

$$y_n = h\sum_{i=0}^{n-1}(ax_i + b) = h\left(a\sum_{i=0}^{n-1} x_i + bn\right) = h\left(ah\sum_{i=0}^{n-1} i + bn\right)$$

$$= h\left(ah\frac{1}{2}n(n-1) + bn\right) = \frac{1}{2}a(nh)^2 + b(nh) - \frac{1}{2}anh^2$$

$$= \frac{1}{2}ax_n^2 + bx_n - \frac{1}{2}ahx_n = y(x_n) - \frac{1}{2}ahx_n$$

移项得
$$y(x_n) - y_n = \frac{1}{2}ahx_n$$

方法 2。由方程 $y' = ax + b$ 得 $y'' = a$，$y''' = 0$，因而

$$\begin{cases} y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \dfrac{h^2}{2}y''(x_i) & (3) \\ \qquad = y(x_i) + h(ax_i + b) + \dfrac{1}{2}ah^2, \quad i = 0,1,\cdots & \\ y(x_0) = 0 & (4) \end{cases}$$

将式(1)、式(2)和式(3)、式(4)分别相减，得

$$\begin{cases} y(x_{i+1}) - y_{i+1} = y(x_i) - y_i + \dfrac{1}{2}ah^2, \quad i = 0,1,2,\cdots \\ y(x_0) - y_0 = 0 \end{cases}$$

递推得
$$y(x_n) - y_n = \frac{1}{2}anh^2 = \frac{1}{2}ahx_n, \quad n = 0,1,2$$

3. **解** 梯形法计算公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[x_n + y_n + x_{n+1} + y_{n+1}]$$

解得
$$y_{n+1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{h}{2}\right)}\left[\left(1 + \frac{h}{2}\right)y_n + \frac{h(x_n + x_{n+1})}{2}\right], \quad n = 0,1,2,3,4$$

改进的欧拉法为
$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + h(x_n + y_n) = hx_n + (1+h)y_n \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[x_n + y_n + x_{n+1} + \bar{y}_{n+1}] \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = hx_n + (1+h)y_n \\ y_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{2}h\right)y_n + \dfrac{h}{2}\bar{y}_{n+1} + \dfrac{h}{2}[x_n + x_{n+1}], \quad n = 0,1,2,3,4 \end{cases}$$

将 $h = 0.1$，$y_0 = 1$ 代入以上两计算式，结果见下表。

n	x_n	梯形法 y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$	n	x_n	改进欧拉法 y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$
1	0.1	1.110 526 316	$0.184\ 479\times10^{-3}$	1	0.1	1.11	$0.341\ 836\times10^{-3}$
2	0.2	1.243 213 296	$0.407\ 779\times10^{-3}$	2	0.2	1.242 050	$0.755\ 516\times10^{-3}$
3	0.3	1.400 393 643	$0.676\ 027\times10^{-3}$	3	0.3	1.398 465 250	$1.252\ 365\times10^{-3}$
4	0.4	1.584 645 606	$0.996\ 210\times10^{-3}$	4	0.4	1.581 804 101	$1.845\ 294\times10^{-3}$
5	0.5	1.798 818 827	$1.376\ 285\times10^{-3}$	5	0.5	1.794 983 532	$2.549\ 009\times10^{-3}$

可以看出，就本题而言，梯形法比改进的欧拉法精确。

4. **解** 记 $f(x,y)=\dfrac{2x}{3y^2}$。

(1) $h=0.1, x_i=ih, 0\leqslant i\leqslant 1.2$。由欧拉公式

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)=y_i+\dfrac{0.2x_i}{3y_i^2}, & i=0,1,2,\cdots,11 \\ y_0=1 \end{cases}$$

计算结果见下表。

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i)-y_i\rvert$
0	0.0	1	1	0
1	0.1	1	1.003 322	0.003 322
2	0.2	1.006 667	1.013 159	0.006 492
3	0.3	1.019 824	1.029 142	0.009 318
4	0.4	1.039 054	1.050 718	0.011 664
5	0.5	1.063 754	1.077 217	0.013 463
6	0.6	1.093 212	0.107 932	0.014 720
7	0.7	1.126 682	1.142 165	0.015 483
8	0.8	1.163 444	1.179 274	0.015 830
9	0.9	1.202 845	1.218 689	0.015 844
10	1.0	1.244 315	1.259 921	0.015 606
11	1.1	1.289 372	1.302 559	0.015 187
12	1.2	1.331 620	1.346 263	0.014 643

(2) $h=0.2, x_i=ih, i=0,1,2,\cdots,6$。由改进欧拉公式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(p)} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + \dfrac{0.4x_i}{3y_i^2} \\ y_{i+1}^{(c)} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^{(p)}) = y_i + \dfrac{0.4x_{i+1}}{3[y_{i+1}^{(p)}]^2} \\ y_{i+1} = \dfrac{1}{2}(y_{i+1}^{(p)} + y_{i+1}^{(c)}), \quad i = 0,1,2,3,4,5 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

计算结果列于下表。

i	x_i	y_i	$y_{i+1}^{(p)}$	$y_{i+1}^{(c)}$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	1	1	1.026 667	0
1	0.2	1.013 333	1.039 303	1.062 709	1.74×10^{-4}
2	0.4	1.051 006	1.099 288	1.117 207	2.88×10^{-4}
3	0.6	1.108 248	1.173 383	1.857 21	3.16×10^{-4}
4	0.8	1.179 552	1.256 217	1.264 043	2.78×10^{-4}
5	1.0	1.260 130	1.344 097	1.348 694	2.09×10^{-4}
6	1.2	1.346 396			1.33×10^{-4}

(3) $h = 0.4, x_0 = 0, x_1 = 0.4, x_2 = 0.8, x_3 = 1.2$。由经典 Runge – Kutta 公式

$$\begin{cases} K_1 = f(x_i, y_i) = \dfrac{2x_i}{3y_i^2} \\ K_2 = f(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}K_1) = \dfrac{2(x_i + 0.2)}{3(y_i + 0.2K_1)^2} \\ K_3 = f(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}K_2) = \dfrac{2(x_i + 0.2)}{3(y_i + 0.2K_2)^2} \\ K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3) = \dfrac{2(x_i + 0.4)}{3(y_i + 0.4K_3)^2} \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{0.4}{6}(K_1 + 2K_2 + 3K_3 + K_4), \quad i = 0,1,2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

计算结果列于下表。

i	x_i	y_i	K_1	K_2	K_3	K_4	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	1	0	0.133 333	0.126 497	0.241 599	0
1	0.4	1.050 751	0.241 519	0.331 146	0.320 604	0.383 687	3.34×10^{-5}
2	0.8	1.179 332	0.383 466	0.422 583	0.417 368	0.441 387	5.83×10^{-5}
3	1.2	1.346 316					5.29×10^{-5}

本题所讨论的初值问题，三种算法的计算量基本相同，精度以经典 Runge – Kutta 公式最高，改进的欧拉方法次之，欧拉法最低。

5. **解** 四阶经典 Runge – Kutta 方法为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) = 8 - 3y_n \\ K_2 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1\right) = 5.6 - 2.1y_n \\ K_3 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_2\right) = 6.32 - 2.37y_n \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) = 4.208 - 1.578y_n \end{cases}$$

故 $y_{n+1} = 1.2016 + 0.5494y_n$，$y(0) = y_0 = 2$，计算得 $y(0.2) \approx y_1 = 2.3004$，$y(0.4) \approx y_2 = 2.4654$。

6. **证明** 本题实际上是对梯形法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

的迭代求解公式产生的序列 $\{y_{n+1}^{[s]}\}_0^{\infty}$ 的收敛性证明，只须证明 $\lim\limits_{s\to\infty}|y_{n+1}^{[s]} - y_{n+1}| = 0$ 即可。

将梯形法公式和题中迭代公式相减，有

$$\begin{aligned} |y_{n+1}^{[s+1]} - y_{n+1}| &= \frac{1}{2}h|f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[s]}) - f(x_{n+1}, y_{n+1})| \\ &= \frac{1}{2}h\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_{n+1}, \varepsilon)(y_{n+1}^{[s]} - y_{n+1})\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}hL|y_{n+1}^{[s]} - y_{n+1}| \quad (\varepsilon \text{ 介于 } y_{n+1}^{[s]} \text{ 与 } y_{n+1} \text{ 之间}) \end{aligned}$$

反复使用上述不等式有

$$\begin{aligned} |y_{n+1}^{[s+1]} - y_{n+1}| &\leqslant \frac{1}{2}hL|y_{n+1}^{[s]} - y_{n+1}| \leqslant \left(\frac{1}{2}hL\right)^2|y_{n+1}^{[s-1]} - y_{n+1}| \\ &\leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{1}{2}hL\right)^{s+1}|y_{n+1}^{[0]} - y_{n+1})| \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{2}hL < 1$，故 $\lim\limits_{s\to\infty}\left(\frac{1}{2}hL\right) = 0$，又 $|y_{n+1}^{[0]} - y_{n+1}|$ 为有界量，因此，$\lim\limits_{s\to\infty}|y_{n+1}^{[s+1]} - y_{n+1}| = 0$，即迭代收敛。

7. **证明** 已知

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{1}$$

对该式进行二元函数求导，得

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + y'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y'''(x) = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(x)) + y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial f}(x, y(x)) + y'(x)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial f}(x, y(x)) + y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(x))\right] \\ & + y'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \end{aligned}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y(x))+2y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial f}(x,y(x))+[y'(x)]^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y(x))+y''(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x)) \tag{3}$$

根据定义,该方法的局部截断误差为

$$T_{i+1}=y(x_{i+1})-\left[y(x_i)+\frac{h}{9}(2\tilde{K}_1+3\tilde{K}_2+4\tilde{K}_3)\right] \tag{4}$$

其中 $\tilde{K}_1=f(x_i,y(x_i))$, $\tilde{K}_2=f(x_i+\frac{h}{2},y(x_i)+\frac{h}{2}\tilde{K}_1)$, $\tilde{K}_3=f(x_i+\frac{3h}{4},y(x_i)+\frac{3h}{4}\tilde{K}_2)$

根据二元函数的 Taylor 级数展开,有

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_2 &= f(x_i+\frac{h}{2},y(x_i)+\frac{h}{2}\tilde{K}_1)\\
&=f(x_i,y(x_i))+\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y(x_i))+\frac{h}{2}\tilde{K}_1\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y(x_i))+\frac{1}{2}\left[\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i,y(x_i))\right.\\
&\quad\left.+2\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\tilde{K}_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial f}(x_i,y(x_i))+\frac{h^2}{4}\tilde{K}_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i,y(x_i))\right]+o(h^3)\\
&=y(x_i)+\frac{h}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y(x_i)+y'(x_i,y(x_i))\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y(x_i))\right]+\frac{h^2}{8}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i,y(x_i))\right.\\
&\quad\left.+2y'(x_i)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial f}(x_i,y(x_i))+[y'(x_i)]^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i,y(x_i))\right]+o(h^3)\\
&=y'(x_i)+\frac{h}{2}y'''(x_i)+\frac{h^2}{8}\left[y'''(x_i)-y''(x_i)\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y(x_i))\right]+o(h^3)
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_3 &= f(x_i+\frac{3h}{4},y(x_i)+\frac{3h}{4}\tilde{K}_2)\\
&=f(x_i,y(x_i))+\frac{3h}{4}\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y(x_i))+\frac{3h}{4}\tilde{K}_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y(x_i))+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3h}{4}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i,y(x_i))\right.\\
&\quad\left.+2\cdot\frac{4h}{3}\cdot\frac{3h}{4}(\tilde{K}_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_i,y(x_i))+\left(\frac{3h}{4}\tilde{K}_2\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i,y(x_i))\right]+o(h^3)\\
&=f(x_i,y(x_i))+\frac{3h}{4}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y(x_i))+\left[y'(x_i)+\frac{h}{2}y''(x_i)+o(h^2)\right]\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y(x_i))\right\}\\
&\quad+\frac{9h^2}{32}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i,y(x_i))+2[y'(x_i)+o(h)]\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_i,y(x_i))\right.\\
&\quad\left.+[y'(x_i)]^2+o(h^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i,y(x_i))\right\}+o(h^3)\\
&=y'(x_i)+\frac{3h}{4}\left[y''(x_i)+\frac{h}{2}y''(x_i)\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y(x_i))\right]+\frac{9h^2}{32}\left[y'''(x_i)-y''(x_i)\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y(x_i))\right]\\
&\quad+o(h^3)\\
&=y'(x_i)+\frac{3h}{4}y''(x_i)+\frac{3h^2}{32}y''(x_i)+\frac{3h^2}{32}y''(x_i)\frac{\partial f(x_i,y(x_i))}{\partial y}+\frac{9h^2}{32}y'''(x_i)+o(h^3)
\end{aligned} \tag{6}$$

式(5)和式(6)代入式(4),得

$$T_{i+1}=y(x_{i+1})-y(x_i)-\frac{2}{9}h\tilde{K}_1\cdot\frac{1}{3}h\tilde{K}_2-\frac{4}{9}\tilde{K}_3$$

$$= hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{h^3}{6}y'''(x_i)+o(h^4)-\frac{2}{9}hy'(x_i)$$

$$-\frac{1}{3}\left\{y'(x_i)+\frac{h}{2}y''(x_i)+\frac{h^2}{8}\left[y'''(x_i)-y''(x_i)\frac{\partial f(x_i,y(x_i))}{\partial y}\right]+o(h^3)\right\}$$

$$-\frac{4}{9}h\left[y'(x_i)+\frac{3}{4}hy''(x_i)+\frac{3h^2}{32}y''(x_i)\frac{\partial f(x_i,y(x_i))}{\partial y}+\frac{9}{32}h^2y'''(x_i)+o(h^3)\right]$$

$$=o(h^4)$$

所以该求解公式是一个三阶方法。

8. **证明** 根据局部截断误差的定义，并在 x_n 处用 Taylor 展开，有

$$T_{n+1}=y(x_n+h)+(b-1)y(x_n)-by(x_n-h)-\frac{h}{4}[(b+3)y'(x_n+h)+(3b+1)y'(x_n-h)]$$

$$=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+o(h^4)+(b-1)y(x_n)$$

$$-b\left[y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+o(h^4)\right]$$

$$-\frac{h}{4}(b+3)\left[y'(x_n)+hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y'''(x_n)+o(h^3)\right]$$

$$-\frac{h}{4}(3b+1)\left[y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{h}y'''(x_n)+o(h^3)\right]$$

$$=(1+b-1-b)y(x_n)+\left[1+b-\frac{1}{4}(3b+3)-\frac{1}{4}(3b+1)\right]hy'(x_n)+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}(b+3-3b-1)\right]h^2y''(x_n)+\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{6}b-\frac{1}{8}(b+3+3b+1)\right]h^3y'''(x_n)+o(h^4)$$

$$=-\frac{1}{3}(b+1)h^3y'''(x_n)+o(h^4)$$

则当 $b\neq-1$ 时，$T_{n+1}=o(h^3)$，方法为二阶；当 $b=-1$ 时，$T_{n+1}=o(h^4)$，方法为三阶。

9. **解** 这里，$p(x)=-1,q(x)=0,r(x)=-2\sin x,\alpha=-1,\beta=1$。取 $n=4$，即步长 $h=\pi/8$，相应的差分方程为

$$\begin{bmatrix}-2 & 0.8063 & \\ 1.1963 & -2 & 0.8036\\ & 1.1963 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.0783\\-0.2182\\-1.0886\end{bmatrix}$$

计算可得 $y_1=-0.5351,y_2=0.0101,y_3=0.5503$。问题的解析为 $y(x)=\sin x-\cos x$，由此有

$$y(\pi/8)=-0.5412,\quad y(\pi/4)=0,\quad y(3\pi/8)=0.5412$$

第6章 逐次逼近法

知识要点

一、向量和矩阵的范数

1. 向量和矩阵的范数定义
2. 常用的向量范数

∞ - 范数(最大范数) $\quad \|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

1 - 范数 $\quad \|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$

2 - 范数 $\quad \|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

p - 范数 $\quad \|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\le p<+\infty$

3. 常用的矩阵范数

∞ - 范数(行范数) $\quad \|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

1 - 范数(列范数) $\quad \|A\|_1 = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

2 - 范数 $\quad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}$

F - 范数 $\quad \|A\|_F = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

式中，$\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)$表示半正定矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的最大特征值。矩阵的前三种范数分别与向量的∞ - 范数，1 - 范数以及 2 - 范数相容。

二、误差分析

设$\|\cdot\|_r$为非奇异矩阵 A 的某种算子范数，称数 $\mathrm{Cond}(A)_r = \|A^{-1}\|_r\|A\|_r$ 为

矩阵的条件数。当 A 的条件数 $\mathrm{Cond}(A)_p > 1$ 时，方程组 $Ax = b$ 是"病态"的，否则称之为"良态"的。"病态"方程组很难用常规方法求得比较准确的解，但对其中部分方程组，可通过余量校正迭代求解方程组。

三、迭代法基本概念

对线性方程组 $Ax = b$，其中 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵，可变换成

$$x = Bx + f$$

的形式，从而构造出一阶定常迭代法公式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{6-2}$$

式中，$x^{(0)}$ 为任取的初始向量；B 为常数矩阵，称为迭代矩阵；f 为常数向量。若 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ 存在（记为 x^*），则称此迭代法收敛，且 x^* 就是方程组的解，否则称此迭代法发散。

定理 6.1 （迭代法基本定理）对任意初向量 $x^{(0)}$，一阶定常迭代法式(6-2)收敛的重要条件是迭代矩阵 B 的谱半径 $\rho(B) < 1$。

定理 6.2 （迭代法收敛的充分条件）若迭代矩阵 B 的某种算子范数 $\|B\| = q < 1$，则一阶定常迭代法式(6-2)对任意初始向量 $x^{(0)}$ 都收敛。

四、Jacobi 迭代法

若 $a_{ii} \neq 0(i,j = 1,2,\cdots,n)$，则可取

$$B_J = D^{-1}(L + U), \quad f = D^{-1}b \tag{6-3}$$

式中，D 为 A 的对角线元素构成的对角矩阵；L, U 分别为 A 的对角线下及上部分元素的相反数构成的矩阵。这样构造出的迭代法称为 Jacobi 迭代法，其用分量表示的计算公式为

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)}{a_{ii}}, \quad i = 1,2,\cdots,n; k = 0,1,2,\cdots \tag{6-4}$$

定理 6.3 Jacobi 迭代法收敛的重要条件是 $\rho(B_J) < 1$。

定理 6.4 若 $\|B_J\|_1 < 1$ 或 $\|B_J\|_\infty < 1$ 或 A 为严格对角占优矩阵，或 A 为弱对角占优且不可约矩阵，则 Jacobi 迭代法收敛。

五、Gauss - Seidel 迭代法

类似于 Jacobi 迭代法，取

$$B_s = (D - L)^{-1}U, \quad f = (D - L)^{-1}b \tag{6-5}$$

这样构造出的迭代法称为 Gauss - Seidel 迭代法，简称 G - S 法，其用分量表示的计算公式为

$$x_i^{k+1}=\frac{b_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{k+1}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ij}},\quad k=0,1,2,\cdots;i=1,2,\cdots,n \tag{6-6}$$

定理 6.5 G - S 法收敛的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{B}_s)<1$。

定理 6.6 若 $\|\boldsymbol{B}_s\|_1<1$ 或 $\|\boldsymbol{B}_s\|_\infty<1$，或 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵，或 $\boldsymbol{A}$ 为弱对角占优且不可约矩阵，则 G - S 法收敛。

六、非线性方程问题简介

求单变量函数方程

$$f(x)=0 \tag{6-7}$$

的根是指求 x^*（实数或复数），使得 $f(x^*)=0$，称 x^* 为式(6 - 7)的根，也称 x^* 为函数 $f(x)$ 的零点。$f(x)$ 可以分解为

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$$

式中，m 为正整数。若 $g(x)$ 满足 $g(x^*)\neq 0$，则 x^* 是式(6 - 7)的根。当 $m=1$ 时，称 x^* 为单根；当 $m>1$ 时，称 x^* 为 m 重根。若 $g(x)$ 充分光滑，x^* 是式(6 - 7)的 m 重根，则有

$$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0,\quad f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)f(b)<0$，则式(6 - 7)在 (a,b) 内至少有一个实根，称 $[a,b]$ 为式(6 - 7)的有根区间。有根区间可通过函数作用法或逐次搜索法求得。

七、方程求根的几种常用方法

1. 迭代法

将式(6 - 7)变形为

$$x=\varphi(x) \tag{6-8}$$

若要求 x^* 满足 $f(x^*)=0$，则 $x^*=\varphi(x^*)$；反之亦然，称 x^* 为函数 $\varphi(x)$ 的一个不动点。求式(6 - 7)的根等价于求 $\varphi(x)$ 的不动点，由式(6 - 8)产生的不动点迭代关系式（也称简单迭代法）为

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\quad k=0,1,2,\cdots \tag{6-9}$$

式中，函数 $\varphi(x_k)$ 称为迭代函数。如果对任意 $x_0\in[a,b]$，由式(6 - 9)产生的序列 $\{x_k\}$ 存极限 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$，则称不动点迭代法式(6 - 9)收敛。

定理 6.7 （不动点存在性定理）设 $\varphi(x)\in C[a,b]$ 满足以下两个条件：

(1)对任意 $x\in[a,b]$，有 $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$；

(2)存在正常数 $0<L<1$，使对任意 $x,y\in[a,b]$，都有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant L|x-y| \tag{6-10}$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点 x^*。

定理 6.8 （不动点迭代法的全局收敛性定理）设 $\varphi(x)\in C[a,b]$ 满足定理式(6-7)中的两个条件，则对任意 $x_0\in[a,b]$，由式(6-9)得到的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛，得到 $\varphi(x)$ 的不动点，并有误差估计式

$$|x_k-x^*|\leqslant\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}| \tag{6-11}$$

和

$$|x_k-x^*|\leqslant\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \tag{6-12}$$

定理 6.9 （不动点迭代法的局部收敛性定理）设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域连续，且 $|\varphi'(x)|<1$，则迭代法式(6-9)局部收敛。

设迭代过程式(6-4)收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的根 x^*，如果迭代误差 $e_k=x_k-x^*$，当 $k\to\infty$ 时，渐近关系式

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\to c \quad (\text{常数 } c\neq0) \tag{6-13}$$

成立，称该迭代法 p 阶收敛。特别地，$p=1$ 时，称之为线性收敛，$p>1$ 时称之为超线性收敛，$p=2$ 时称之为平方收敛。

定理 6.10 （收敛阶定理）对于迭代过程式(6-9)，如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻近连续，并且

$$\left.\begin{array}{l}\varphi'(x^*)=\varphi'(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0\\ \varphi^{(p)}(x^*)\neq0\end{array}\right\} \tag{6-14}$$

则该迭代过程在点 x^* 的附近是 p 阶收敛的，并有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}x^* \tag{6-15}$$

2. 牛顿迭代法

(1)定义

牛顿迭代法是一种特殊的不动点迭代法，其计算公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{6-16}$$

其迭代函数为 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$。

(2)牛顿迭代法的收敛速度

当 $f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0, f''(x^*)\neq 0$ 时，容易证明

$$\varphi'(x^*)=0, \quad \varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\neq 0$$

由定理 6.10 知牛顿迭代法是平方收敛的，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \tag{6-17}$$

(3)重根情形的牛顿迭代法

当 x^* 是 $f(x)=0$ 的 $m(m\geqslant 2)$ 重根时，迭代函数 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 在 x^* 处的导数为 $\varphi'(x^*)=1-\dfrac{1}{m}\neq 0$，且 $|\varphi'(x^*)|<1$，所以牛顿迭代法求重根为线性收敛。

若 x^* 的重数 m 已知，则迭代式

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2,\cdots \tag{6-18}$$

求重根为二阶收敛；当 m 未知时，x^* 一定是函数 $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 的单重零点，此时迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}, \quad k=0,1,2,\cdots \tag{6-19}$$

也是二阶收敛的。

(4)简化牛顿法

迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

称为简化牛顿法。

3. 弦截法

将牛顿迭代法式(6-16)中的 $f'(x_k)$ 用 $f(x)$ 在 x_{k-1}, x_k 处的一阶差商来代替，即可得弦截法，有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}) \tag{6-20}$$

定理 6.11 假设 $f(x)$ 在其零点 x^* 的邻域 $\Delta: |x-x^*|\leqslant\delta$ 内具有二阶连续导数，且对任意 $x\in\Delta$ 有 $f'(x)\neq 0$，又初值 $x_0, x_1\in\Delta$ 则当邻域 Δ 充分小时，弦截法式(6-20)将按阶 $p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ 收敛到 x^*，这里 p 是方程 $\lambda^2-\lambda-1=0$ 的正根。

4. 抛物线法

弦截法可以理解为用过$(x_{k-1},f(x_{k-1}))$,$(x_k,f(x_k))$两点的直线方程的根近似代替$f(x)=0$的根,若已知$f(x)=0$的三个近似根x_k,x_{k-1},x_{k-2},则用过$(x_k,f(x_k))$,$(x_{k-1},f(x_{k-1}))$,$(x_{k-2},f(x_{k-2}))$的抛物线方程的根近似代替$f(x)=0$的根,所得的迭代法称为抛物线法,也称密勒(Mliller)法。

当$f(x)$在x^*的附近有三阶连续导数,且$f'(x^*)\neq 0$时,抛物线法局部收敛,且收敛阶为$p=1.839\approx 1.84$。

5. 二分法

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)f(b)<0$,则$f(x)=0$在(a,b)内有根x^*。再设$f(x)=0$在(a,b)内仅有一个根,令$a_0=a$,$b_0=b$,计算$x_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)$和$f(x_0)$,若$f(x_0)=0$,则$x^*=x_0$,结束计算。若$f(a_0)f(x_0)>0$,则令$a_1=x_0$,$b_1=b$,得新的有根区间$[a_1,b_1]$。若$f(a_0)f(x_0)<0$,则令$a_1=a_0$,$b_1=x_0$,得新的有根区间$[a_1,b_1]$,$[a_1,b_1]\subset[a_0,b_0]$,$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b_0-a_0)$,再令$x_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$,计算$f(x_1)$,同上法得出新的有根区间$[a_2,b_2]$,如此反复进行,可得一有根区间套。

$$\cdots\subset[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]\subset\cdots\subset[a_0,b_0]$$

且$a_n<x^*<b_n$,$n=0,1,2,\cdots$;$b_n-a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})=\cdots=\frac{1}{2^n}(b_0-a_0)$,故

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n+b_n)=x^*$$

因此,$x_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$可作为$f(x)=0$的近似根,且有误差估计

$$|x_n-x^*|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)\tag{6-21}$$

已知$A=(a_{ij})_{n\times n}$,称$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)$为$A$的特征多项式,特征方程$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=0$的根称为$A$的特征值,相应于特征值$\lambda$的齐次方程组$(\lambda I-A)x=0$的非零解$x$称为矩阵$A$的对应于$\lambda$的特征向量。求解矩阵$A$的特征值及对应的特征向量的办法有两类:一类是幂法与反幂法,属迭代法;另一类是正交相似变换的方法,属变换法,如Jacobi和QR方法等。

(1)幂法

幂法是一种计算矩阵主要特征值(按模最大的特征值及对应特征向量)的迭代方法。

定理 6.12 设$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$有$n$个线性无关的特征向量,主特征值$\lambda$满足

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$，则对任意非零初始向量$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_0$，按下述方法构造的向量序列$\{\boldsymbol{u}_k\}$，$\{\boldsymbol{v}_k\}$

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_0 \neq 0 \\ &\boldsymbol{v}_k = A\boldsymbol{u}_{k-1} \\ &\boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)}, \quad k = 1,2,\cdots \end{aligned}\right\} \tag{6-22}$$

有(1) $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_k = \dfrac{\boldsymbol{x}_1}{\max(\boldsymbol{x}_1)}$；(2) $\lim\limits_{k\to\infty} \max(\boldsymbol{v}_k) = \lambda_1$。

式中，$\max(\boldsymbol{v}^{(k)})$为向量$\boldsymbol{v}^{(k)}$的绝对值最大的分量。

幂法可用原点平移法进行加速收敛的计算，对于实对称矩阵，也可用瑞利商加速法进行计算。关于主特征值是其它情况的，仍可用幂法进行计算。

(2)反幂法

反幂法用来计算非奇异实矩阵按模最小的特征值及其特征向量，结合原点平移法，也可用来计算一个给定近似特征值的特征向量。

反幂法迭代公式为：任取初始向量$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_0 \neq 0$，即

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_k = A^{-1}\boldsymbol{u}_{k-1} \\ &\boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)}, \quad k = 1,2,\cdots \end{aligned}\right\} \tag{6-23}$$

定理 6.13 设 A 为非奇异实矩阵，且有 n 个线性无关的特征向量，其对应的特征值满足$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0$，则对任何初始向量 $\boldsymbol{u}_0(\alpha_n \neq 0)$，由反幂法构造的向量序列$\{\boldsymbol{v}_k\}$，$\{\boldsymbol{v}_k\}$满足

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_k = \dfrac{\boldsymbol{x}_n}{\max(\boldsymbol{x}_n)}$； (2) $\lim\limits_{k\to\infty} \max(\boldsymbol{v}_k) = \dfrac{1}{\lambda_n}$。

定理 6.14 设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$有 n 个线性无关的特征向量。A 的特征值及对应的特征向量分别记为 λ_i 及 $x_i(i = 1,2,\cdots,n)$，而 p 为λ_j 的近似值，$(A - PI)^{-1}$存在，且$|\lambda_j - p| \ll |\lambda_i - p|(i \neq j)$，则对任意非零初始向量，$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{v}_0(\alpha_j \neq 0)$，由原点平移的反幂法迭代公式

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_k = (A - PI)^{-1}\boldsymbol{u}_{k-1} \\ &\boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)}, \quad k = 1,2,\cdots \end{aligned}\right\} \tag{6-24}$$

产生的向量序列$\{v_k\}$，$\{u_k\}$满足

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_k = \dfrac{\boldsymbol{x}_j}{\max(\boldsymbol{x}_j)}$； (2) $\lim\limits_{k\to\infty} \max(\boldsymbol{v}_k) = \dfrac{1}{\lambda_j - p}$。

即 $p+\frac{1}{\max(\boldsymbol{v}_k)}\to\lambda_j\ (k\to\infty)$。

反幂法迭代公式式(6－23)，式(6－24)中的$\boldsymbol{v}_k$ 是通过解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{u}_{k-1}$ 和 $(\boldsymbol{A}-P\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{u}_{k-1}$ 而得的。

6. 解大型稀疏线性方程组的逐次超松弛迭代法(SOR 法)

对 G－S 法作修正，取迭代矩阵

$$\boldsymbol{L}_\omega=(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}),\quad \boldsymbol{f}=\omega(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}\qquad(6-25)$$

式中，ω 为松弛因子。这样构造的迭代法称为逐次超松弛迭代法(SOR 法)。该方法的松弛因子 ω 可根据收敛速度选取最佳的 $\omega_{\rm opt}$，SOR 法用分量表示的计算公式为

$$x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right),\quad i=1,2,\cdots,n$$

定理 6.15 SOR 迭代法收敛的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{L}_\omega)<1$。

定理 6.16 若$\|\boldsymbol{L}_\omega\|_1<1$ 或$\|\boldsymbol{L}_\omega\|_\infty<1$，或 $\boldsymbol{A}$ 对称正定且 $0<\omega\leqslant1$，或 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优且 $0<\omega\leqslant1$，或 $\boldsymbol{A}$ 弱对角占优且不可约且 $0<\omega\leqslant1$，则 SOR 迭代法收敛。

定理 6.17 SOR 迭代法收敛和必要条件是 $0<\omega<2$。

课后习题解析

6－1 已知 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，求$\|\boldsymbol{x}\|_1,\|\boldsymbol{x}\|_2,\|\boldsymbol{x}\|_\infty$。

解 $\|\boldsymbol{x}\|_1=|1|+|2|+|3|+|4|=10,\quad \|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}=\sqrt{30}$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max\{|1|,|2|,|3|,|4|\}=4$$

6－2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&-1\\2&1\end{bmatrix}$，求$\|\boldsymbol{A}\|_1,\|\boldsymbol{A}\|_2,\|\boldsymbol{A}\|_\infty,\|\boldsymbol{A}\|_F$。

解

$$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max\{|-2|+2,|-1|+1\}=4$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\{|-2|+|-1|,|2|+|1|\}=3$$

$$\boldsymbol{A}^{\rm T}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&-2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&4\\4&2\end{bmatrix}$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\rm T}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-8&-4\\-4&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda-2)-16=0$$

即
$$\lambda(\lambda-10)=0$$
解得
$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=10,\quad \rho(A^{\mathrm{T}}A)=10$$
故
$$\|A\|_2=\sqrt{10},\quad \|A\|_F=[(-2)^2+(-1)^2+2^2+1^2]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$$

6-3 试证:若 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\|A\|<1$,则 $I\pm A$ 非奇异且
$$\frac{1}{1+\|A\|}\leqslant\|(I\pm A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|A\|}$$

证明 略。

6-4 已知二阶 Hilbert 矩阵 $H_2=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$,求 $\mathrm{Cond}(H_2)_1$,$\mathrm{Cond}(H_2)_2$,$\mathrm{Cond}(H_2)_\infty$。

解
$$\|H_2\|_1=\max\left\{1+\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right\}=\frac{3}{2},\quad H_2^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{bmatrix}$$
$$\|H_2^{-1}\|_1=\max\{4+|-6|,|-6|+12\}=18$$
所以
$$\mathrm{Cond}(H_2)_1=\|H_2\|\|H_2^{-1}\|=27,\quad \|H_2\|_\infty=\max\left\{1+\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right\}=\frac{3}{2}$$
$$\|H_2^{-1}\|_\infty=\max\{4+|-6|,|-6|+12\}=18$$
故
$$\mathrm{Cond}(H_2)_\infty=\|H_2\|\|H_2^{-1}\|=27$$
$$H_2^{\mathrm{T}}H_2=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{13}{36}\end{bmatrix}$$
$$|\lambda E-H_2^{\mathrm{T}}H_2|=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{5}{4} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \lambda-\frac{13}{36}\end{vmatrix}=\left(\lambda-\frac{5}{4}\right)\left(\lambda-\frac{13}{36}\right)-\frac{4}{9}=0$$
即
$$144\lambda^2-232\lambda+1=0$$
解得
$$\lambda_1=1.606\ 789\ 2,\quad \lambda_2=0.004\ 321\ 938\ 9$$
所以
$$\|H_2\|_2=\sqrt{\lambda_1}=1.267\ 591\ 9$$
$$(H_2^{-1})^{\mathrm{T}}(H_2^{-1})=\begin{bmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52 & -96\\ -96 & 180\end{bmatrix}$$
$$|\lambda E-(H_2^{-1})^{\mathrm{T}}(H_2^{-1})|=\begin{vmatrix}\lambda-52 & 96\\ 96 & \lambda-180\end{vmatrix}=(\lambda-52)(\lambda-180)-96^2=0$$
即
$$\lambda^2-232\lambda+144=0$$
解得
$$\lambda_1=231.377\ 64,\quad \lambda_2=0.622\ 359\ 2$$
所以
$$\|H_2^{-1}\|_2=\sqrt{231.377\ 64}=15.211\ 103$$
$$\mathrm{Cond}(H_2)_2=\|H_2\|_2\|H_2^{-1}\|_2=1.267\ 591\ 9\times15.211\ 103=19.281\ 47$$

6-5 设 A 为正交阵,求 $\text{Cond}(A)_2$,并由此判断 A 的性质。

解 略。

6-6 试证:若 A 为非奇异,则 A^TA 为对称正定阵,且 $\text{Cond}(A^TA)_2=[\text{Cond}(A)_2]^2$。

证明 $\text{Cond}_2(A^TA)=\|A^TA\cdot(A^TA)^{-1}\|_2$

$$=\sqrt{\lambda_{\max}((A^TA)^2)}\cdot\sqrt{\lambda_{\max}[((A^TA)^{-1})^2]}$$

$$=\sqrt{\lambda_{\max}^2(A^TA)}\cdot\sqrt{\lambda_{\max}[((A^TA)^{-1})]^2}$$

$$=[\sqrt{\lambda\max(A^TA)}]^2\cdot[\lambda\max((A^TA)^{-1})]^2$$

$$=\|A\|_2^2\cdot\|A^{-1}\|_2^2=[\text{cond}(A)_2]^2$$

6-7 方程组

$$\begin{pmatrix}6&13&17\\13&29&-38\\-17&-38&50\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

是否病态。

解 略。

6-8 用列主元素消解方程组 $Ax=b$,其中

$$A=\begin{pmatrix}1.15&0.42&100.71\\1.19&0.55&0.33\\1.00&0.35&1.50\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-198.70\\2.28\\-0.68\end{pmatrix}$$

对所求的结果 $\bar{x}$,使用3次迭代改善后,解的精度能否有明显提高。

解 略。

6-9 设方程组

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12\\-x_1+4x_2+2x_3=20\\2x_1-3x_2+10x_3=3\end{cases}$$

试用 Jacobi 迭代法和 Gauss - Seidel 迭代法求解此方程组,$x^{(0)}=(0,0,0)^T$,当 $\max\limits_{1\leq i\leq 3}|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|\leqslant 10^5$ 时迭代终止。

解 Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{5}[-12-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}]\\x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}[20+x_1^{(k)}-2x_3^{(k)}]\\x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{10}[3-2x_1^{(k)}+3x_2^{(k)}]\end{cases}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

取 $x_1^{(0)}=0,x_2^{(0)}=0,x_3^{(0)}=0$,计算结果如下表所示。

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0	-2.4	-4.46	-4.556	-3.991 4	-3.876 94
$x_2^{(k)}$	0	5	4.25	2.745	2.627 5	2.984 8
$x_3^{(k)}$	0	0.3	2.28	2.467	2.034 7	1.886 53

k	6	7	8	9	10
$x_1^{(k)}$	-3.971 226	-4.029 165 6	-4.012 810 8	-3.993 098 7	-3.998 064 7
$x_2^{(k)}$	3.087 5	3.021 779 5	2.982 461	2.996 511 6	3.003 075 1
$x_3^{(k)}$	1.970 828	2.020 495 2	2.000 571 4	1.997 300 5	1.997 573 2

k	11	12	13	14	15
$x_1^{(k)}$	-4.000 744 7	-4.000 786	-3.999 950 1	-3.999 794	-3.999 982 9
$x_2^{(k)}$	3.001 697 2	2.999 546 1	2.999 474 5	3.000 041	3.000 135 3
$x_3^{(k)}$	2.000 535 5	2.000 658 1	2.000 021	1.999 832 4	1.999 971 1

k	16	17	18	19	20
$x_1^{(k)}$	-4.000 048 3	-4.000 014 9	-3.999 990 8	-3.999 994 2	-4.000 001 1
$x_2^{(k)}$	3.000 018 7	2.999 969 3	2.999 988 6	3.000 005 4	3.000 004 1
$x_3^{(k)}$	2.000 037 2	2.000 015 3	1.999 993 8	1.999 994 7	2.000 000 5

因为
$$\max_{1\leq i\leq 3}\left|x_i^{(20)}-x_i^{(19)}\right|\leqslant 10^{5}$$
所以
$$x=(-4.000\,001\,1 \quad 3.000\,004\,1 \quad 2.000\,000\,5)^{T}$$

Gauss - Seidel 迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{5}(-12-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}(20+x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{10}(3-2x_1^{(k+1)}+3x_2^{(k)}) \end{cases}$$

取 $x_1^{(0)}=0, x_2^{(0)}=0, x_3^{(0)}=0$，计算结果如下表所示。

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0	-2.4	-4.58	-3.933 5	-3.99 176 25	-4.004 513 4
$x_2^{(k)}$	0	4.4	2.805	2.987 875	3.010 528 1	2.998 116 2
$x_3^{(k)}$	0	2.1	2.057 5	1.983 062 5	2.001 510 9	2.000 337 5

k	6	7	8	9	10
$x_1^{(k)}$	-3.999 314	-3.999 973 8	-4.000 033 4	-3.999 993 6	-4.000 000 1
$x_2^{(k)}$	3.000 002 8	3.000 074 8	2.999 983 1	3.000 000 8	3.000 000 5
$x_3^{(k)}$	1.999 863 6	2.000 017 2	2.000 001 6	1.999 999	2.000 000 2

因为
$$\max_{1\le i\le 3}|x_i^{(10)}-x_i^{(9)}|\leqslant 10^5$$

所以
$$x=(-4.000\,000\,1\quad 3.000\,000\,5\quad 2.000\,000\,2)^{T}$$

6-10 设有线性方程组

$$\begin{bmatrix}3.333\,0 & 15.920 & -10.333\\ 2.222\,0 & 16.710 & 9.612\,0\\ 1.561\,1 & 5.179\,1 & 1.685\,3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15.913\\28.544\\8.425\,4\end{bmatrix}$$

其精确解 $x^*=(1,1,1)^T$，若用 Gauss 列主元素消去法解上述方程组，得到近似解 $x^{(1)}$（取五位浮点数运算），为 $x^{(1)}=(1.200\,1\quad 0.999\,91\quad 0.925\,38)^T$。试用迭代改变方法，改变 $x^{(1)}$ 精度。

解 $$r^{(1)}=b-Ax^{(1)}=\begin{bmatrix}15913\\28.544\\8.4254\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}15913\\28.270\\8.611\,7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2.274\\-0.186\,3\end{bmatrix}$$

用 Doolittle 分解法求解 $AZ^{(1)}=r^{(1)}$，得计算解

$$Z^{(1)}=(-0.198\,51\quad 0.000\,09\quad 0.074\,63)^T$$
$$x^{(2)}=x^{(1)}+Z^{(1)}=(1.001\,61\quad 1.000\,0\quad 1.000\,0)^T$$

6-11 设方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases},\quad a_{11}a_{22}\neq 0$$

求证：(1)用 Jacobi 迭代法与 Gauss-Seidel 迭代法解此方程组，收敛的重要条件为 $\left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|<1$；

(2)Jacobi 方法和 Gauss-Seidel 方法同时收敛或同时发散。

证明 (1)所给线性方程组的系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$，记 $r=\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$。

Jacobi 迭代矩阵 J 的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & \lambda a_{22}\end{vmatrix}=0$$

即 $a_{11}a_{22}\lambda^2-a_{12}a_{21}=0$ 或 $\lambda^2=r$。①当 $r>0$ 时，$\lambda_1=\sqrt{\lambda}$，$\lambda_2=-\sqrt{r}$；②当 $r=0$ 时，$\lambda_1=0,\lambda_2=0$；③当 $r<0$ 时，$\lambda_1=i\sqrt{|r|}$，$\lambda_2=-i\sqrt{|r|}$。因而

$$\rho(J)=\sqrt{|r|}\tag{1}$$

Gauss-Seidel 迭代矩阵 G 的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & a_{12}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22}\end{vmatrix}=0$$

即 $a_{11}a_{22}\lambda^2-a_{12}a_{21}\lambda=0$ 或 $\lambda(\lambda-r)=0$，解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=r$，因而

$$\rho(G)=|r|\tag{2}$$

所以 $|r|<1\Leftrightarrow\rho(J)<1,\rho(G)<1$ 为 Jacobi 迭代法与 Gauss-Seidel 迭代法收敛的主要条件。

(2)比较式(1)和式(2)。当 $|r|<1$ 时，$\rho(J)<1,\rho(G)<1$；当 $|r|\geqslant 1$ 时，$\rho(J)\geqslant 1$，

$\rho(G)\geqslant 1$。因而 Jacobi 法和 Gauss－Seidel 法同时收敛或同时发散。

6－12　设

$$A=\begin{bmatrix}3 & 7 & 1\\ 0 & 4 & t+1\\ 0 & -t+1 & -1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},Ax=b$$

其中 t 为实参数。

(1)求用 Jacobi 法解 $Ax=b$ 时的迭代矩阵。

(2)t 在什么范围内，Jacobi 迭代法收敛。

解　(1)

$$B_J=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}(t+1)\\ 0 & 1-t & 0\end{bmatrix}$$

(2)

$$\det(\lambda I-B_J)=\begin{vmatrix}\lambda & \frac{7}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \lambda & \frac{1}{4}(t+1)\\ 0 & t-1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{\lambda}{4}(t^2-1)=0$$

所以 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{t^2-1}$ 或 $\lambda=-\frac{1}{2}\sqrt{t^2-1}$，即 $\rho(B_J)=\frac{1}{2}\sqrt{t^2-1}<1$，解得 $1<t<\sqrt{5}$ 或 $-\sqrt{5}<t<-1$。

6－13　设

$$A=\begin{bmatrix}t & 1 & 1\\ \frac{1}{t} & t & 0\\ \frac{1}{t} & 0 & t\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\quad Ax=b$$

试问用 Gauss－Seidel 迭代法解 $Ax=b$ 时，实参数 t 在什么范围内，上述迭代法收敛。

解

$$B_G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{t} & -\frac{1}{t}\\ 0 & \frac{1}{t^3} & \frac{1}{t^3}\\ 0 & \frac{1}{t^3} & \frac{1}{t^3}\end{bmatrix}$$

所以

$$\det(\lambda I-B_G)=\begin{vmatrix}\lambda & \frac{1}{t} & \frac{1}{t}\\ 0 & \lambda-\frac{1}{t^3} & -\frac{1}{t^3}\\ 0 & -\frac{1}{t^3} & \lambda-\frac{1}{t^3}\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda-\frac{1}{t^3}\right)^2-\lambda\left(\frac{1}{t^6}\right)=0$$

解得 $\lambda=0$　或　$\lambda=\sqrt{\frac{2}{t^3}}$，即 $\rho(B_G)=\sqrt{\frac{2}{t^3}}<1$，解得 $t>\sqrt[3]{2}$ 或 $t<-\sqrt[3]{2}$。

6-14 (1)对方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试证用 Jacobi 迭代法求解时发散,用 G-S 法求解时收敛,并求其解。

证明 对于 Jacobi 法,迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_J=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J)=|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J|=\lambda\left(\lambda^2+\frac{5}{4}\right),\quad \rho(\boldsymbol{B}_J)=\frac{\sqrt{5}}{2}>1$$

故用 Jacobi 求解时发散。

对于 G-S 法迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_G=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_G)=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \lambda+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda+\frac{1}{2} \end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2,\quad \rho(\boldsymbol{B}_G)=\frac{1}{2}<1$$

故用 G-S 法求解时收敛。

G-S 法迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}\left(x_2^{(k)}-x_3^{(k)}+1\right) \\ x_2^{(k+1)}=1-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{2}\left(1-x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

取初值 $x_1^{(0)}=0, x_2^{(0)}=0, x_3^{(0)}=0$,代入,计算结果如下表所示。

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	0	0.5	0.75	0.625	0.687 5	0.656 25	0.671 875	0.6640 625
$x_2^{(k)}$	0	0.5	0.25	0.375	0.312 5	0.343 75	0.328 125	0.335 937 5
$x_3^{(k)}$	0	0	0	0	0	0	0	0

k	8	9	10	11	12
$x_1^{(k)}$	0.667 968 8	0.666 015 6	0.666 992 2	0.666 503 9	0.666 748
$x_2^{(k)}$	0.332 031 3	0.333 984 4	0.333 007 8	0.333 496 1	0.333 252
$x_3^{(k)}$	0	0	0	0	0

k	13	14	15	16	17
$x_1^{(k)}$	0.666 626	0.666 687	0.666 656 5	0.666 671 8	0.666 664 1
$x_2^{(k)}$	0.333 374	0.333 313	0.333 343 5	0.333 328 2	0.333 335 9
$x_3^{(k)}$	0	0	0	0	0

所以 $\boldsymbol{x} = (0.666\,666\,41 \quad 0.333\,335\,9 \quad 0)^{\mathrm{T}}$。

(2)对方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试证:用 Jacobi 迭代法求解时收敛,并求其解,用 Gauss－Seidel 迭代法求解时发散。

证明 对于 Jacobi 法,迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_J = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_J) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0$$

所以 $\rho(\boldsymbol{B}_J) = 0 < 1$,故用 Jacobi 法求解时收敛。

对于 G－S 法,迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_G = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_G) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & -8 & \lambda+6 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-2\pm2\sqrt{5}$，所以 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=2\sqrt{5}-2>1$，故用 G－S 法求解时发散。

因为 Jacobi 法迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=1+2x_2^{(k)}-2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=1+x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=1+2x_1^{(k)}+2x_2^{(k)} \end{cases}$$

取 $x_1^{(0)}=0,x_2^{(0)}=0,x_3^{(0)}=0$，代入，计算结果如下表所示。

k	0	1	2	3	4
$x_1^{(k)}$	0	1	1	-3	-3
$x_2^{(k)}$	0	1	3	7	7
$x_3^{(k)}$	0	1	5	9	9

所以 $\boldsymbol{x}=(-3,7,9)^{\mathrm{T}}$。

6－15　设有方程组

$$\begin{cases} 3x_1-10x_2=-7 \\ 9x_1-4x_2=5 \end{cases}$$

(1)问用 Jacobi 迭代法和 Gauss－Seidel 迭代法求解此方程组，是否收敛？

(2)若把上述方程组交换方程次序得到新的方程组，再用 Jacobi 迭代法和 Gauss－Seidel 法解新方程组是否收敛？

解　对于 Jacobi 法，迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_J=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix} 0 & \frac{10}{3} \\ \frac{9}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J)=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{10}{3} \\ -\frac{-9}{4} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{15}{2}=0$$

所以 $\lambda_1=\sqrt{\frac{15}{2}},\lambda_2=-\sqrt{\frac{15}{2}},\rho(\boldsymbol{B}_J)=\sqrt{\frac{15}{2}}>1$，故用 Jacobi 法求解时发散。

对于 G－S 法，有

$$\boldsymbol{B}_G=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_G)=\begin{vmatrix} \lambda & \frac{10}{3} \\ 0 & \lambda-\frac{15}{2} \end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda-\frac{15}{2}\right)=0$$

所以 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\frac{15}{2}$，$\rho(B_G)=\frac{15}{2}>1$，故用 G－S 法求解时发散。

(2)对于 Jacobi 法，迭代矩阵

$$B_J=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0 & \frac{4}{9}\\ \frac{3}{10} & 0\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-B_J)=\begin{vmatrix}\lambda & -\frac{4}{9}\\ -\frac{3}{10} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{2}{15}=0$$

所以 $\lambda_1=\sqrt{\frac{2}{15}}$ 或 $\lambda_2=-\sqrt{\frac{2}{15}}$，$\rho(B_J)<\sqrt{\frac{2}{15}}<1$，故用 Jacobi 法求解时收敛。

对于 G－S 法，迭代矩阵

$$B_G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & 0\\ \frac{1}{30} & -\frac{1}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{4}{9}\\ 0 & \frac{2}{15}\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-B_G)=\begin{vmatrix}\lambda & -\frac{4}{9}\\ 0 & \lambda-\frac{2}{15}\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda-\frac{2}{15}\right)=0$$

所以 $\lambda_1=0,\lambda_2=\frac{2}{15}$，$\rho(B_G)=\frac{2}{15}<1$，故用 G－S 法求解时收敛。

6－16　用迭代法求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，将方程写成下列四种不同的等价形式

(1) $x=1+\frac{1}{x^2}$；　(2) $x=\sqrt[3]{1+x^2}$；　(3) $x=\sqrt{x^3-1}$；　(4) $x=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

试分析由此所产生的迭代格式的收敛性？选一种收敛速度最快的格式求方程的根，要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-3}$，选一种收敛速度最慢或不收敛的迭代格式，用 Aitken 加速，其结果如何？

解　取 $x_0=1.5$ 的邻域 $[1.3,1.6]$ 来考察。

(1)当 $x\in[1.3,1.6]$ 时，$\varphi(x)=1+\frac{1}{x^2}\in[1.3,1.6]$，有

$$|\varphi'(x)|=\left|-\frac{2}{x^3}\right|\leqslant\frac{2}{1.3^3}=L<1$$

故迭代式 $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$ 在 $[1.3,1.6]$ 上整体收敛；

(2)当 $x\in[1.3,1.6]$ 时，$\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x^2}\in[1.3,1.6]$，有

$$|\varphi'(x)|=\frac{2}{3}\left|\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}\right|<\frac{2}{3}\frac{1.6}{(1+1.3^2)^{\frac{2}{3}}}\leqslant L=0.522<1$$

故 $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$ 在[1.3,1.6]上整体收敛；

(3)
$$|\varphi'(x)|=\left|\frac{1}{2}(x^3-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2\right|$$

计算得 $|\varphi'(1.5)|=\frac{3}{2}\cdot\frac{1.5^2}{\sqrt{1.5^2-1}}=2.120>1$，故 $x_{k+1}=\sqrt{x_k^3-1}$，发散；

(4)
$$|\varphi'(x)|=\left|\frac{-1}{2(x-1)^{3/2}}\right|>\frac{1}{2(1.6-1)}>1$$

故 $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$，发散。

由于(2)的 L 较小，故取(2)中的迭代式计算，有

$$|x_k-x_{k-1}|<\frac{1-L}{L}\times\frac{1}{2}\times10^{-3}<\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

取 $x_0=1.5$，计算结果见下表。

k	x_k	k	x_k
1	1.481 248 034	4	1.467 047 973
2	1.472 070 573 0	5	1.466 243 010
3	1.468 817 314	6	1.465 876 820

由于 $|x_6-x_5|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$，故可取 $x^*\approx x_6=1.466$。选择迭代格式 $\varphi(x)=\sqrt{x^3-1}$，用 Aitken 加速，得到迭代格式

$$x_{k+1}=\varphi(\varphi(x_k))-\frac{[\varphi(\varphi(x_k))-\varphi(x_k)]^2}{\varphi(\varphi(x_k))-2\varphi(x_k)+x_k}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{x_k^3-1})^3-1}-\frac{\left[\sqrt{(\sqrt{x_k^3-1})^3-1}-\sqrt{x_k^3-1}\right]^2}{\sqrt{(\sqrt{x_k^3-1})^3-1}-2\sqrt{x_k^3-1}+x_k}$$

取 $x_0=1.5$，计算结果见下表。

k	1	2	3
x_k	1.494 894 8	1.465 410 6	1.465 571 2

由于 $|x_3-x_2|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$，故 $x^*\approx x_3=1.465\ 571\ 2$。经 Aitken 加速，知迭代格式收敛且速度加快。

6－17 研究$\sqrt{a}$的 Newton 迭代格式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right),\quad x_k>0,\quad k=0,1,2$$

证明：对一切 $k=1,2,\cdots$，有 $x_k\geqslant\sqrt{a}$，且序列 $x_1,x_2,\cdots$ 是递减的。

证明 方法一。用数列的方法。因 $x_0>0$，由 $x_k=\frac{1}{2}\left(x_{k-1}+\frac{a}{x_{k-1}}\right)$，知 $x_k>0$，且

$$x_k=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_{k-1}}-\sqrt{\frac{a}{x_{k-1}}}\right)^2+\sqrt{a}\geqslant\sqrt{a},\quad k=1,2,3,\cdots$$

又由

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2x_k^2}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{a}{2a}=1,\quad\forall k\geqslant 1$$

故 $x_{k+1}\leqslant x_k$，即 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单减且有下界 $\sqrt{a}$。根据单调有界原理知，$\{x_k\}$ 有极限，易证其极限为 $\sqrt{a}$。

方法二。设 $f(x)=x^2-a\ (a>0)$，易知 $f(x)=0$，在 $[0,+\infty]$ 内有唯一实根 $x^*=\sqrt{a}$，对 $f(x)$ 应用牛顿迭代法，得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right),\quad k=0,1,2,\cdots$$

根据牛顿迭代法收敛性定理知，当 $x_0\sqrt{a}$ 时，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 单减，有下界 $\sqrt{a}$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\sqrt{a}$，当 $x_0\in(0,\sqrt{a})$，有

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x_0}-\sqrt{\frac{a}{x_0}}\right]^2+\sqrt{a}>\sqrt{a}$$

此时，从 x_1 起，$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单减有下界 $\sqrt{a}$，且极限仍为 $\sqrt{a}$。

6－18 用 Newton 法求下列方程的根，要求 $|x^{(k)}-x^{(k-1)}|<10^{-5}$。

(1) $x^3-x^2-x-1=0$，取 $x_0=0$；

(2) $x=e^{-x}$，取 $x_0=0$；

(3) $\tan x-\cos x=\frac{1}{2}$，取 $x_0=0$。

解 略。

6－19 若 $f(x)$ 在零点 ξ 的某个领域中有二阶连续导数，且 $f'(\xi)\neq 0$。试证：对由 Newton 迭代法产生的 $x_k\ (k=0,1,2,\cdots)$，成立

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}=-\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$$

证明 牛顿迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,\cdots$

其迭代函数为

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)},\quad f(\xi)=0$$

且有

$$x_{k+1}-x_k=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad f'(\xi)\neq 0$$

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k-1})^2}=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\left[\frac{f'(x_{k-1})}{f(x_{k-1})}\right]^2=-\frac{f(x_k)-f(\xi)}{[f(x_{k-1})-f(\xi)]^2}\cdot\frac{[f'(x_{k-1})]^2}{f(x)}$$

$$= -\frac{f'(\varepsilon_k)[f'(x_{k-1})]^2}{f'(x_k)[f'(\varepsilon_{k-1})]^2}\cdot\frac{(x_k-\xi)}{(x_{k-1}-\xi)^2}$$

其中 ε_k 介于 x_k 与 ξ 之间，ε_{k-1} 介于 x_{k-1} 与 ξ 之间，根据斯蒂芬森迭代收敛性定理，有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k-1})^2} = -\lim_{k\to\infty}\frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)}\left[\frac{f'(x_{k-1})}{f'(\varepsilon_{k-1})}\right]^2\frac{x_k-\xi}{(x_{k-1}-\xi)^2} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$$

6-20　若 $f(x)=e^x-e^{-x}=0$，容易验证 $x=0$ 是方程的唯一根。若用 Newton 法求此方程的根，问收敛阶为多少？此例说明了什么？

解　略。

6-21　用弦截法求下列方程的根。

(1) $xe^x-1=0$，取初值 $x_0=0.5, x_1=0.6$；

(2) $x^3-3x^2-x+9=0$，取初值 $x_0=-2, x_1=-1.5$；

(3) $x^3-2x-5=0$，取 $x_0=2, x_1=3$。

要求误差 $|x^{(k)}-x^{(k-1)}|<10^{-5}$。

解　(1)　$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})=x_k-\frac{x_ke^{x_k}-1}{x_ke^{x_k}-x_{k-1}e^{x_{k-1}}}(x_k-x_{k-1})$$

计算结果如下表(取初值 $x_0=0.5, x_1=0.6$)。

k	1	2	3	4
x_{k+1}	0.565 315 1	0.567 094 6	0.567 143 4	0.567 143 3

因为 $|x^{(4)}-x^{(3)}|<10^{-5}$，所以 $x\approx0.567\ 143\ 3$。

(2)
$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$
$$=x_k-\frac{(x_k^3-3x_k^2-x_k+9)(x_k-x_{k-1})}{(x_k^3-3k_k^2-x_k+9)-(x_{k-1}^3-3x_{k-1}^2-x_{k-1}+9)}$$

取初值 $x_0=-2, x_1=-1.5$。计算结果如下表。

k	1	2	3	4
x_{k+1}	-1.52	-1.525 167 1	-1.525 102 1	-1.825 102 0

因为 $|x^{(4)}-x^{(3)}|<10^{-5}$，所以 $x\approx-1.525\ 102\ 0$。

(3) $$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})=x_k-\frac{(x_k^3-2x_k-5)(x_k-x_{k-1})}{(x_k^3-2k_k-5)-(x_{k-1}^3-2x_{k-1}-5)}$$

取初值 $x_0=2, x_1=3$，计算结果如下表。

k	1	2	3	4
x_{k+1}	2.941 176 5	2.346 246 3	2.177 098 9	2.104 848 9
k	5	6	7	
x_{k+1}	2.095 012 7	2.094 554 1	2.094 551 4	

因为$|x^{(7)}-x^{(6)}|<10^{-5}$,所以$x\approx 2.094\ 551\ 4$。

6-22　Heonardo于1225年研究了方程$f(x)=x^3+2x^2+10x-20=0$,并得出了一个根$\alpha=1.368\ 808\ 17$,但当时无人知道他用了什么方法,这个结果在当时是个非常著名的结果,请你构造一种简单迭代来论证此结果。

解　记$f(x)=x^3+2x^2+10x-20$,则$f'(x)=3x^2+4x+10=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{26}{3}$,当$x\in R$时,$f'(x)>0$,又$f(1)=-7<0$,$f(2)=16>0$,所以$f(x)=0$有唯一实根$x^*\in(1,2)$。

用牛顿迭代格式

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, & k=0,1,2,\cdots \\ x_0=1.5 \end{cases}$$

并改写$f(x)=((x+2)x+10)x-20$,$f'(x)=(3x+4)x+10$,求得下表。

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.5	2.875	22.75
1	1.373 626 373	0.101 788 669	21.155 053 72
2	1.368 814 819	$1.415\ 8\times10^{-4}$	21.096 221 30
3	1.368 808 107	-1.6×10^{-8}	21.096 892 2
4	1.368 808 107		

所以$x^*\approx 1.368\ 808\ 107$。

6-23　应用Newton法求方程。$\cos(x)\cosh(x)-1=0$的头五个非零的正根。

解　略。

6-24　用二分法求方程$2e^{-x}-\sin x=0$在区间[0,1]内的根,要求

$$|x^{(k)}-x^*|<\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

解　设$f(x)=2e^{-x}-\sin x$,则$f(0)=2>0$,$f(1)=-0.105\ 751\ 9<0$。又因为$f'(x)=-(2e^{-x}+\cos x)$,故$f(x)$在$0<x<1$内单减,且有唯一根。根据二分法的误差估计式$|x_n-x^*|\leqslant\dfrac{1}{2^{n+1}}(b-a)$,知

$$|x^{(k)}-x^*| = \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) < \frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

解得 $k>16.609\,64$,故至少应二分 17 次。

具体计算结果见下表。

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号
0	0	1	0.5	-
1	0.5	1	0.75	-
2	0.75	1	0.875	-
3	0.875	1	0.937 5	+
4	0.875	0.937 5	0.906 25	-
5	0.906 25	0.937 5	0.921 875	+
6	0.906 25	0.921 875	0.914 062 5	-
7	0.914 062 5	0.921 875	0.917 968 8	-
8	0.917 968 8	0.921 875	0.919 921 9	-
9	0.919 921 9	0.921 875	0.920 989 4	-
10	0.920 898 4	0.921 875	0.921 386 7	+
11	0.920 898 4	0.921 386 7	0.921 142 6	+
12	0.920 898 4	0.921 142 6	0.921 020 5	-
13	0.921 020 5	0.921 142 6	0.921 081 5	+
14	0.921 020 5	0.921 081 5	0.921 051	+
15	0.921 020 5	0.921 051	0.921 035 8	+
16	0.921 020 5	0.921 035 8	0.921 028 1	+
17	0.921 020 5	0.921 028 1	0.921 024 3	-

即 $x\approx x^*=0.921\,024\,3$。

6-25　使用二分法求 $x^3-2x-5=0$ 在区间[2,3]上的根,要求

$$|x^{(k)}-x^*| < \frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

解　设 $f(x)=x^3-2x-5$,有 $f(2)=-1<0, f(3)=16>0$。又因为 $f'(x)=3x^2-2$,当 $x\in[2,3]$ 时,$f(x)$单增,且有唯一根。根据二分法的误差估计式 $|x_n-x^*|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$,知

$$|x^{(k)}-x^*| = \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) < \frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

解得 $k>16.609\ 64$,故至少应二分 17 次。

具体计算结果见下表。

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$符号
0	2	3	2.5	+
1	2	2.5	2.25	+
2	2	2.25	2.125	+
3	2	2.125	2.062 5	−
4	2.062 5	2.125	2.093 75	−
5	2.093 75	2.125	2.109 375	+
6	2.093 75	2.109 375	2.101 562 5	+
7	2.093 75	2.101 562 5	2.097 656 3	+
8	2.093 75	2.097 656 3	2.095 703 1	+
9	2.093 75	2.095 703 1	2.094 726 6	+
10	2.093 75	2.094 726 6	2.094 238 3	−
11	2.094 238 3	2.094 726 6	2.094 482 4	−
12	2.094 482 4	2.094 726 6	2.094 604 5	+
13	2.094 482 4	2.094 604 5	2.094 543 5	−
14	2.094 543 5	2.094 604 5	2.094 574	+
15	2.094 543 5	2.094 574	2.094 558 7	+
16	2.094 543 5	2.094 558 7	2.094 551 1	−
17	2.094 551 1	2.094 558 7	2.094 554 9	+

即 $x\approx x^*=2.094\ 554\ 9$。

6-26　用幂法计算下列各矩阵的主特征值及对应的特征向量

(1)$A_1=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$; (2)$A_2=\begin{bmatrix}-4&14&0\\-5&13&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$。

当主特征值有三位小数稳定时,迭代终止。

解　(1)取 $u_0=v_0=(1,1,1)^T$,利用幂法公式

$$\begin{cases}v_0=u_0\neq 0\\ v_k=Au_{k-1}\\ u_k=\dfrac{v_k}{\max(v_k)},\quad k=1,2,\cdots\end{cases}$$

计算结果见下表。

k	u_k^T	$\max(v_k)$
0	$(1\quad 1\quad 1)^T$	1
1	$(1\quad 0\quad 1)^T$	1
2	$(1\quad -1\quad 1)^T$	2
3	$(0.75\quad -1\quad 0.75)^T$	4
4	$(0.714\,285\,7\quad -1\quad 0.714\,285\,7)^T$	3.5
5	$(0.708\,333\,3\quad -1\quad 0.708\,333\,3)^T$	3.428 571 4
6	$(0.707\,317\,1\quad -1\quad 0.707\,317\,1)^T$	3.416 666 6
7	$(0.707\,142\,9\quad -1\quad 0.707\,142\,9)^T$	3.414 634 2
8	$(0.707\,113\quad -1\quad 0.707\,113)^T$	3.414 285 8
9	$(0.707\,107\,8\quad -1\quad 0.707\,107\,8)^T$	3.414 226

所以 $\lambda_1 \approx 3.414\,226$。$\lambda_1$ 对应的近似特征向量为

$$x^{(1)} \approx (0.707\,107\,8,\ -1,\ 0.707\,107\,8)^T$$

(2)取 $u_0 = v_0 = (1,1,1)^T$，利用幂法公式计算的结果见下表。

k	u_k^T	$\max(v_k)$
0	$(1\quad 1\quad 1)^T$	1
1	$(1\quad 0.8\quad 0.1)^T$	10
2	$(1\quad 0.75\quad -0.111\,111\,1)^T$	7.2
3	$(1\quad 0.730\,769\,2\quad -0.188\,034\,2)^T$	6.5
4	$(1\quad 0.722\,222\,2\quad -0.220\,850\,5)^T$	6.230 768 8
5	$(1\quad 0.718\,181\,8\quad -0.235\,914\,7)^T$	6.111 110 8
6	$(1\quad 0.716\,216\,2\quad -0.243\,095)^T$	6.054 545 3
7	$(1\quad 0.715\,246\,6\quad -0.246\,587\,6)^T$	6.027 026 8
8	$(1\quad 0.714\,765\,1\quad -0.248\,305\,8)^T$	6.013 252 4
9	$(1\quad 0.714\,525\,1\quad -0.249\,156\,6)^T$	6.006 711 4
10	$(1\quad 0.714\,405\,3\quad -0.249\,579\,5)^T$	6.003 351 4
11	$(1\quad 0.714\,345\,5\quad -0.249\,790\,1)^T$	6.001 674 2
12	$(1\quad 0.714\,315\,6\quad -0.249\,895\,2)^T$	6.000 837

所以 $\lambda_1 \approx 6.000\,837$。$\lambda_1$ 对应的近似特征向量为

$$x^{(1)} \approx (1 \quad 0.714\,315\,6 \quad -0.249\,895\,2)^{T}$$

6-27 用反幂法求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

按模最小的特征值及相应的特征向量,当该特征值有三位小数稳定时,迭代终止。

解 取 $u_0 = v_0 = (1 \quad 1 \quad 1)^{T}$,利用反幂法公式

$$\begin{cases} v_k = A^{-1} v_{k-1} \\ u_k = \dfrac{v_k}{\max(v_k)}, \quad k=1,2,\cdots \end{cases}$$

计算结果见下表。

k	u_k^{T}	$\max(v_k)$
0	$(1 \quad 1 \quad 1)^{T}$	1
1	$(0.434\,782\,4 \quad 1 \quad -0.478\,260\,7)^{T}$	0.219 047 5
2	$(0.190\,183\,9 \quad 1 \quad -0.883\,435\,5)^{T}$	1.012 421 8
3	$(0.184\,275\,5 \quad 1 \quad -0.912\,415\,1)^{T}$	1.212 795 2
4	$(0.183\,147\,7 \quad 1 \quad -0.912\,933)^{T}$	1.229 333 5
5	$(0.183\,196\,5 \quad 1 \quad -0.913\,047\,1)^{T}$	1.229 434 4

所以 $\lambda = \dfrac{1}{1.229\,434\,4} \approx 0.813\,382\,2$,则 $u = (0.183\,196\,5 \quad 1 \quad -0.913\,047\,1)^{T}$。

6-28 已知

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -10 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

有特征值 λ 的近似值 $\bar{\lambda}=4.3$,试用原点位移的反幂法求对应的特征向量 u,并改善 $\bar{\lambda}$。

解 取 $u_0 = v_0 = (1 \quad 1 \quad 1)^{T}$,利用原点位移的反幂法公式

$$\begin{cases} (A-pI)v^{(k)} = u^{(k-1)} \\ u^{(k)} = \dfrac{v^{(k)}}{\max(v^{(k)})}, \quad k=1,2,\cdots \\ \lambda_1 = p + \dfrac{1}{\max(v^{(k)})} \end{cases}$$

经计算,得 $\lambda = 4.317$, $u = (-0.683 \quad 1.000 \quad 0.158)^{T}$。

6-29 试用 SOR 方法(取 $\omega = 0.9$)解方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

(1)证明此时 SOR 方法是收敛的；

(2)求满足 $\max\limits_{1\le i\le 3} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le 10^{-5}$ 的解。

证明 (1) $L_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$

$$\rho(L_\omega) < 1$$

所以此时 SOR 方法收敛。

(2)SOR 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \omega\left(-\dfrac{12}{5} - x_1^{(k)} - \dfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \omega\left(2.5 + \dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)} - x_2^{(k)} - \dfrac{1}{2}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \omega\left(\dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{10}x_1^{(k+1)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right) \end{cases}$$

取初始值 $x^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0)^T$，计算如下表所示。

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	−2.16	1.764	0.940 68
2	−3.180 362 4	1.287 512 5	0.997 929
3	−3.12 116 8	1.227 4204	0.982 101 5
4	−3.090 766 4	1.235 3739	0.979 930 1
5	−3.090 198 7	1.237 2741	0.980 174 9
6	−3.090 87	1.237 2030	0.980 240 6
7	−3.090 923 4	1.237 1543	0.980 238 8
8	−3.090 910 9	1.237 1530	0.980 237 2
9	−3.090 908 9	1.237 1541	0.980 237 1

因为 $\max\limits_{1\le i\le 3} |x_i^{(9)} - x_i^{(8)}| \le 10^{-5}$，所以 $x^* = (-3.090\,908\,9 \quad 1.237\,154\,1 \quad 0.980\,237\,1)^T$。

6－30 设有方程组 $Ax = b$，其中 A 为对称正定矩阵，迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}), \quad k = 0,1,2,\cdots$$

试证明：当 $0<\omega<\dfrac{2}{\beta}$ 时，上述迭代法收敛(其中 $0<\alpha<\lambda(A)\leqslant\beta$)。

证明 迭代格式要改写成

$$x^{(k+1)}=(I-\omega A)x^{(k)}+\omega b,\quad k=0,1,2,\cdots$$

故迭代矩阵 $B=I-\omega A$，其特征值 $\mu=1-\omega\lambda(A)$，由 $|\mu|<1$，$|1-\omega\lambda(A)|<1$，得

$$0<\omega<\frac{2}{\lambda(A)}$$

故当 $0<\omega<\dfrac{2}{\beta}$ 时，要有 $0<\omega<\dfrac{2}{\lambda(A)}$，从而有 $|\mu|<1$，$\rho(B)<1$，迭代格式收敛。

6－31 设计用 Jacobi 法、G－S 法和 SOR 法解线性方程组

$$(a_{ij})_{n\times n}x=b$$

的统一算法，在算法中应具有自动选取方法的功能。

解 略。

6－32 对于大型电路的分析，常常归结为求解大型线性方程组，$RI=v$，若

$$R=\begin{bmatrix} 31 & -13 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & 35 & -9 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 31 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 79 & -30 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 57 & -7 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 47 & -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & 41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 27 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & -2 & 29 \end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix} -15 \\ 27 \\ -23 \\ 0 \\ -20 \\ 12 \\ -7 \\ 7 \\ -10 \end{bmatrix}$$

试分别用(1)Jaclbi 迭代法；(2)Gauss－Seidel 迭代法；(3)SOR 法求解

$$I=(i_1\quad i_2\quad i_3\quad i_4\quad i_5\quad i_6\quad i_7\quad i_8\quad i_9)^{\mathrm T}$$

要求 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 9}|i_j^{(k+1)}-i_j^{(k)}|<10^{-5}$。

解 (1)Jacobi 法迭代格式为

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \frac{13}{31}x_2^{(k)} + \frac{10}{31}x_6^{(k)} - \frac{15}{31} \\
x_2^{(k+1)} = \frac{13}{35}x_1^{(k)} + \frac{9}{35}x_3^{(k)} + \frac{11}{35}x_5^{(k)} + \frac{27}{35} \\
x_3^{(k+1)} = \frac{9}{31}x_2^{(k)} + \frac{10}{31}x_4^{(k)} - \frac{23}{31} \\
x_4^{(k+1)} = \frac{19}{79}x_3^{(k)} + \frac{30}{79}x_5^{(k)} + \frac{9}{79}x_9^{(k)} \\
x_5^{(k+1)} = \frac{30}{57}x_4^{(k)} + \frac{7}{57}x_6^{(k)} + \frac{5}{57}x_8^{(k)} - \frac{20}{57} \\
x_6^{(k+1)} = \frac{-7}{47}x_5^{(k)} + \frac{30}{47}x_7^{(k)} + \frac{12}{47} \\
x_7^{(k+1)} = \frac{30}{41}x_6^{(k)} - \frac{7}{41} \\
x_8^{(k+1)} = \frac{5}{27}x_5^{(k)} + \frac{2}{27}x_9^{(k)} + \frac{7}{27} \\
x_9^{(k+1)} = \frac{9}{29}x_4^{(k)} + \frac{2}{29}x_8^{(k)} - \frac{10}{29}
\end{cases}
$$

以下略。

同步训练题

1. 设对称正定阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，试计算 $\|A^{-1}\|_2$，$\|A\|_2$ 和 $\mathrm{Cond}(A)_2$，且找出 b（常数）及扰动 δb，使

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} = \mathrm{Cond}(A)_2 \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|}$$

2. 设 A 为非奇异矩阵，求证

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_\infty} = \min \frac{\|A_y\|_\infty}{\|y\|_\infty}$$

3. 已知方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

分别讨论用 Jacobi 迭代法和 Gauss - Seidel 迭代法求解的收敛性。

4. 已知方程组

$$(1)\begin{cases}x_1+0.4x_2+0.4x_3=1\\0.4x_1+x_2+0.8x_3=2\\0.4x_1+0.8x_2+x_3=1\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=1\\x_1+x_2+x_3=1\\2x_1+2x_2+x_3=1\end{cases}$$

考虑用 Jacobi 迭代法和 Gauss－Seidel 迭代法解此方程组的收敛性。

5. 用 Jacobi 迭代法和 Gauss－Seidel 迭代法解线性方程组

$$\begin{bmatrix}9&-1&-1\\-1&8&0\\-1&0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

使$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty\leqslant10^{-3}$。

6. 已知函数方程$(x-2)e^x=1$。(1)确定有根区间$[a,b]$;(2)构造不动点迭代公式,使之对任意初始近似值$x_0\in[a,b]$,迭代方法均收敛;(3)用所构造的公式计算根的近似值,要求$|x_k-x_{k-1}|<10^{-3}$。

7. 证明方程$x^3-x-1=0$在$[1,2]$上有一个实根x^*,并用二分法求这个根,要求$|x_k-x^*|\leqslant10^{-3}$。若要求$|x_k-x^*|\leqslant10^{-6}$,需二分区间$[1,2]$多少次?

8. 用下列方法求$f(x)=x^3-3x-1=0$在$x_0=2$附近的根,根的准确值$x^*=1.879\ 385\ 24\cdots$要求计算结果准确到四位有效数字。

(1)牛顿法;(2)用弦截法,取$x_0=2,x_1=1.9$;(3)用抛物线法,取$x_0=0,x_1=3,x_2=2$。

9. 已知$x=\varphi(x)$在区间$[a,b]$内只有一个根,而当$a<x<b$时,$|\varphi'(x)|\geqslant k>1$。试问:如何将$x=\varphi(x)$化为适于迭代的形式,并举例说明。

10. 利用反幂法计算矩阵$\begin{bmatrix}6&2&1\\2&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}$最接近 6 的特征值及对应的特征向量。

11. 用原点位移法求$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0.5\\1&1&0.25\\0.5&0.25&2\end{bmatrix}$的主特征值及相应的特征向量。

12. 用 SOR 方法解方程组(分别取松弛因子$\omega=1.03,\omega=1,\omega=1.1$)

$$\begin{cases}4x_1-x_2=1\\-x_1+4x_2-x_1=4\\-x_2+4x_3=-3\end{cases}$$

已知其精确解$\boldsymbol{x}^*=\left(\frac{1}{2}\quad1\quad-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$,要求当$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty=5\times10^{-6}$时迭代终止,并对每一个$\omega$值确定迭代次数。

同步训练题答案

TONG BU XUN LIAN TI DA AN

1. 解 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$，故 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$，从而

$$\|A\|_2 = |\lambda_2| = 3,\quad \|A^{-1}\|_2 = |\lambda_1| = 1,\quad \mathrm{Cond}(A)_2 \approx \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = 3$$

假设 $x + \delta x = y, A(x + \delta x) = b + \delta b$，取 $b = (1\quad -1)^{\mathrm{T}}, \delta b = (1\quad 1)^{\mathrm{T}}$，则解 $Ax = b$，即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

得 $x = \left(\frac{1}{3}\quad -\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$，又解

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得 $y = \left(\frac{4}{3}\quad \frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$，故

$$\delta x = (1\quad 1)^{\mathrm{T}},\quad \frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{3}\sqrt{2}} = 3$$

而

$$\mathrm{Cond}(A)_2 \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} = \mathrm{cond}(A)_2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$$

故

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} = \mathrm{cond}(A)_2 \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

2. 证明 $\|A^{-1}\|_\infty = \max\limits_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \xlongequal{A^{-1}x = y} \max\limits_{y \neq 0} \frac{\|y\|_\infty}{\|Ay\|_\infty} = \max\limits_{y \neq 0} \frac{1}{\frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty}}$

故

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_\infty} = \min_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty}$$

3. 解 由系数矩阵的分解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = D - L - U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & \\ -1 & 0 & \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

知 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$|\lambda I - B_J| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0$$

解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$，由于 $\rho(B_J) = 0 < 1$，故 Jacobi 迭代法收敛。

对 Gauss – Seidel 迭代法，其迭代矩阵为

$$B_G = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

显然，B_G 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 2$，即 $\rho(B_G) = 2$，故 Gauss – Seidel 迭代法分散。

4. 解 (1)对 Jacobi 迭代法，其迭代矩阵为

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - B_J) = \begin{vmatrix} \lambda & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & \lambda & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 0.8)(\lambda^2 - 0.8\lambda - 0.32) = 0$$

解得 $\lambda_1 = 0.8, \lambda_2, \lambda_3 = -0.4 \pm \sqrt{0.48}$，故 $\rho(B) = 0.4 + \sqrt{0.48} \approx 1.092\,8 > 1$，因此 Jacobi 法不收敛。

对 Gauss – Seidel 迭代法，其迭代矩阵为

$$B_G = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.4 & 1 & 0 \\ -0.08 & -0.8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.16 & -0.64 \\ 0 & 0.032 & 0.672 \end{bmatrix}$$

由于 $\rho(B_G) \leqslant \|B_G\|_\infty = 0.8 < 1$，故 Gauss – Seidel 迭代法收敛。

(2)Jacobi 法迭代矩阵为

$$B_J = D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $\det(\lambda I - B_J) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$，解得 $\lambda_{1,2,3} = 0$，故 $\rho(B_J) = 0$，因此 Jacobi 法收敛。对 Gauss – Seidel 法，迭代矩阵为

$$B_G = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_G)=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ 0 & \lambda-2 & 3\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^3=0$$

解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$。

故 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=2>1$，因此 Gauss – Seidel 迭代法不收敛。

5. **解** 系数矩阵按行严格对角占优，故 Jacobi 迭代法与 Gauss – Seidel 迭代法都收敛。Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{9}x_2^{(k)}+\frac{1}{9}x_3^{(k)}+\frac{7}{9}\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{8}x_1^{(k)}+\frac{7}{8}\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{9}x_1^{(k)}+\frac{8}{9}\end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}$，计算结果如下表所示。

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0.777 777 8	0.875 000 0	0.888 888 9
2	0.973 765 4	0.972 222 2	0.975 308 6
3	0.994 170 1	0.996 720 7	0.997 085 0
4	0.999 311 7	0.999 271 3	0.999 352 2
5	0.999 847 1	0.999 914 0	0.999 923 5

因 $\|x^{(5)}-x^{(4)}\|_\infty=0.000\,535\,4<10^{-1}$，故取

$$\boldsymbol{x}^*=(0.999\,847\,1\quad 0.999\,914\,0\quad 0.999\,923\,5)^{\mathrm{T}}$$

Gauss – Seidel 迭代法的迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{9}x_2^{(k)}+\frac{1}{9}x_3^{(k)}+\frac{7}{9}\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{8}x_1^{(k+1)}+\frac{7}{8}\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{9}x_1^{(k+1)}+\frac{8}{9}\end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}$，计算结果如下表所示。

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0.777 777 8	0.972 222 2	0.975 308 6
2	0.994 170 1	0.999 271 3	0.999 352 5
3	0.999 847 1	0.999 980 9	0.999 983 0
4	0.999 996 0	0.999 999 5	0.999 999 6

因 $\| x^{(4)} - x^{(3)} \|_\infty = 0.000\,148\,9 < 10^{-3}$，故取

$$x^* = (0.999\,996\,0 \quad 0.999\,999\,5 \quad 0.999\,999\,6)^T$$

6. **解** (1)令 $f(x)=(x-2)e^x-1$，由于 $f(2)=-1<0$，$f(3)=e^3-1>0$，因此区间$[2,3]$是方程 $f(x)=0$ 的一个有根区间。又 $f'(x)=(x-1)e^x$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$，$f'(1)=0$，$f(1)=-e-1<0$。当 $x>1$ 时，$f(x)$单增；当 $x<1$ 时，$f(x)$单减，故 $f(x)=0$ 在$(-\infty,+\infty)$内有且仅有一根 x^*，即 $x^*\in[2,3]$。

(2)将$(x-2)e^x=1$等价变形为 $x=2+e^{-x}$，$x\in[2,3]$，则 $\varphi(x)=2+e^{-x}$。由于当$x\in[2,3]$时，$2\leqslant\varphi(x)\leqslant3$，$|\varphi'(x)|=|-e^{-x}|\leqslant e^{-2}<1$，故不动点迭代法 $x_{k+1}=2+e^{-x_k}$，$k=0,1,2,\cdots$对 $x_0\in[2,3]$均收敛。

(3)取 $x_0=2.5$，利用 $x_{k+1}=2+e^{-x_k}$ 进行迭代计算，结果如下表所示。

k	x_k	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	2.5	
1	2.082 084 999	0.417 915 001
2	2.124 670 004	0.042 585 005
3	2.119 472 387	0.005 197 617
4	2.120 094 976	0.000 622 589

此时 x_4 满足误差要求，即 $x^*\approx x_4=2.120\,094\,976$。

7. **解** 设 $f(x)=x^3-x-1$，则 $f(1)=-1<0$，$f(2)=5>0$，故方程 $f(x)=0$ 在$[1,2]$上有根 x^*。又因为$f'(x)=3x^2-1$，所以当 $x\in[1,2]$时，$f'(x)>0$，即 $f(x)=0$ 在$[1,2]$上有唯一实根 x^*。用二分法计算，结果如下表所示。

k	x_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号
0	1	2	1.5	+
1	1	1.5	1.25	−
2	1.25	1.5	1.375	+
3	1.25	1.375	1.312 5	−
4	1.312 5	1.375	1.343 8	+
5	1.312 5	1.343 8	1.328 2	+
6	1.312 5	1.328 2	1.320 4	−
7	1.320 4	1.328 2	1.324 3	−
8	1.324 3	1.328 2	1.324 3	+
9	1.324 3	1.326 3	1.325 3	+

此时 $x_9 = 1.325\,3$ 满足 $|x_9 - x^*| \leqslant \frac{1}{2^{10}} \leqslant 0.977\times 10^{-3} \leqslant 10^{-3}$，可以作为 x^* 的近似值。若要求 $|x_k - x^*| \leqslant 10^{-6}$，只需 $|x_k - x^*| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant 10^{-6}$ 即可，解得 $k+1 \geqslant 19.932$，即只需把[1,2]二分 20 次就能满足精度要求。

8. 解 (1)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 1}{3x_k^2 - 3} = \frac{2x_k^3 + 1}{3x_k^2 - 3}$$

解得 $x_0 = 2$, $x_1 = 1.888\,9$, $x_2 = 1.879\,5$。因 $|x_2 - x^*| \approx 1.148\times 10^{-4} < 5\times 10^{-4}$，所以 $x^* \approx 1.879\,5$。

(2) $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 1}{x_k^3 - 3x_k - x_{k-1}^3 + 3x_{k-1}}(x_k - x_{k-1})$$

取 $x_0 = 2, x_1 = 1.9, x_2 = 1.881\,1, x_3 = 1.879\,4$，有 $|x_4 - x^*| \approx 1.476\,0\times 10^{-5} < 5\times 10^{-4}$，所以 $x^* \approx 1.879\,4$。

(3)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}}$$

$$\omega_0 = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$$

取 $x_0 = 0, x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1.905\,0, x_4 = 1.878\,9, x_5 = 1.879\,4$，有

$$|x_4 - x^*| \approx 1.476\,0\times 10^{-5} < 5\times 10^{-4}$$

所以 $x^* \approx 1.879\,4$。

9. 解 方法一。将原方程 $x = \varphi(x)$ 做等价变换，使其变为 $kx - x = kx - \varphi(x)$，进一步可得

$$x = \frac{k}{k-1}x - \frac{\varphi(x)}{k-1}$$

从而得到新的迭代函数 $\Psi(x) = \frac{k}{k-1}x - \frac{\varphi(x)}{k-1}$ 且 $\Psi'(x) = \frac{k}{k-1} - \frac{\varphi'(x)}{k-1}$。

由于 $|\Psi'(x)|$ 在 $[a,b]$ 有望小于 1,从使新的迭代可能收敛。

方法二(反函数方法)。设 $\varphi^{-1}(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的反函数,注意到函数与其反函数的导数互为倒数,即 $[\varphi^{-1}(x)]'=[\varphi'(x)]^{-1}$。由已知条件知 $x\in[a,b]$ 时,$|[\varphi^{-1}(x)]'|\leqslant k^{-1}<1$,所以,将方程 $x=\varphi(x)$ 写成等价形式 $x=\varphi^{-1}(x)$,构造迭代格式 $x_{k+1}=\varphi^{-1}(x_k)$, $k=0,1,2,\cdots$ 可望收敛。

方法三(采用 Aitken 加速法)。根据 Aitken 加速算法,将原迭代格式修改为

$$\begin{cases} y_k=\varphi(x_k),\ z_k=\varphi(y_k) \\ x_{k+1}=z_k-\dfrac{(z_k-y_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}=\varphi(\varphi(x_k))-\dfrac{[\varphi(\varphi(x_k))-\varphi(x_k)]^2}{\varphi(\varphi(x_k))-2\varphi(x_k)+x_k}, \quad k=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

新的迭代算法有望收敛。

方法四(采用 Newton 法)。可以采用 Newton 法将原方程修改为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-\varphi(x_k)}{1-\varphi'(x_k)}=\frac{\varphi(x_k)-x_k\varphi'(x_k)}{1-\varphi'(x)}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

即构造新的迭代函数 $\overline{\varphi}(x)=\dfrac{\varphi(x)-x\varphi'(x)}{1-\varphi'(x)}$,同样可以使算法收敛。

以 $x=x^3-1$ 为例,求该方程在 $[1.0,2.0]$ 区间上的唯一根。由于原迭代函数 $\varphi(x)=x^3-1$ 在 $[1.0,2.0]$ 区间上的导数恒大于 1,故迭代分散。下面分别采用前四种方法进行计算,所得结果见下表(初值均为 $x_0=1.5$)。

迭代次数	方法一 取 $k=6.75$	方法二 反函数法	方法三 Aitken 加速	方法四 Newton 法
1	1.347 82	1.357 21	1.416 29	1.347 83
2	1.330 31	1.330 86	1.355 65	1.325 20
3	1.326 14	1.325 88	1.328 95	1.324 72
4	1.325 08	1.324 94	1.324 80	
5	1.324 81	1.324 76	1.324 72	
6	1.324 74	1.324 73		
7	1.324 72	1.324 72		

10. **解** 令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

根据已知条件,知 $\boldsymbol{B}$ 在零附近有一个模最小的特征值,用反幂法可以确定该特征值与特征向量。

取 $\boldsymbol{u}_0=(1\quad 1\quad 1)^{\mathrm{T}}$,由迭代公式 $\boldsymbol{u}_k=\dfrac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)}$,计算结果列表如下。

k	u_k^T	v_k^T	$\max(v_k)$
0	[1 1 1]	[1 1 1]	1
1	[1.000 0 0.4 0.1]	[1.111 1 0.444 4 0.111 1]	1.111 1
2	[1.0000 0.5714 0.285]	[0.7 0.4 0.2]	0.7
3	[1.000 0 0.506 6 0.230 3]	[0.804 2 0.407 4 0.185 2]	0.804 2
4	[1.000 0 0.528 6 0.245 7]	[0.767 5 0.405 7 0.188 6]	0.767 5
5	[1.000 0 0.521 0 0.241 1]	[0.779 4 0.406 0 0.187 9]	0.779 4
6	[1.000 0 0.523 6 0.242 5]	[0.775 4 0.406 0 0.188 1]	0.775 4
7	[1.000 0 0.522 7 0.242 1]	[0.776 7 0.406 0 0.188 6]	0.776 7
8	[1.000 0 0.523 0 0.242 2]	[0.776 3 0.406 0 0.188 0]	0.776 3
9	[1.000 0 0.522 9 0.242 2]	[0.776 4 0.406 0 0.188 0]	0.776 4

由此$(A-6I)^{-1}$按模最大的特征值为0.776 4 则 $A-6I$ 按模最小的特征值为1.288 0,故矩阵 A 的特征值为6+1.288 0=7.288 0,相应的特征向量为$[1.000\,0 \quad 0.522\,9 \quad 0.242\,2]^T$。

11. 解 取 $p=0.75$,则 $B=A-pI=A-0.75I$,即

$$B=\begin{bmatrix}0.25 & 1 & 0.5\\ 1 & 0.25 & 0.25\\ 0.5 & 0.25 & 1.25\end{bmatrix}$$

对 B 用幂法计算,取初始向量 $v_0=[1 \quad 1 \quad 1]^T$,计算结果见下表。

k	u_k^T(规范化向量)	v_k^T	$\max(v_k)$
0	[1 1 1]	[1 1 1]	1.000 000
5	[0.751 6 0.652 2 1.000 0]	[1.346 4 1.168 3 1.791 4]	1.791 401
6	[0.749 1 0.651 1 1.000 0]	[1.340 1 1.164 6 1.788 8]	1.788 844
7	[0.748 8 0.650 1 1.000 0]	[1.338 3 1.161 9 1.787 3]	1.787 330
8	[0.748 4 0.649 7 1.000 0]	[1.337 3 1.161 3 1.786 9]	1.786 915
9	[0.748 3 0.649 7 1.000 0]	[1.337 0 1.160 8 1.786 7]	1.786 659
10	[0.7482 0.649 7 1.000 0]	[1.336 8 1.160 8 1.786 6]	1.786 591

于是,得 $\lambda_1^{(B)}\approx 1.786\,591$。相应地,矩阵 A 的主特征值为$\lambda_1^{(A)}\approx 1.786\,591+0.75=2.526\,591$,对应特征向量为

$$x_1=(0.748\,2 \quad 0.649\,7 \quad 1.000\,0)^T$$

12. **解** 用 SOR 方法解此方程组的迭代公式为

$$x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \frac{\omega}{4}(1 + x_2^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \frac{\omega}{4}(4 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \frac{\omega}{4}(-3 + x_2^{(k+1)})$$

取初始向量，$\boldsymbol{x}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$

$\omega = 1.03$，迭代 5 次，达到要求，$\boldsymbol{x}^{(5)} = [0.500\,004\,3 \quad 1.000\,000\,1 \quad -0.499\,999\,9]^{\mathrm{T}}$；

$\omega = 1$，迭代 6 次，达到要求，$\boldsymbol{x}^{(6)} = [0.500\,003\,8 \quad 1.000\,002 \quad -0.499\,999\,5]^{\mathrm{T}}$；

$\omega = 1.1$，迭代 6 次，达到要求，$\boldsymbol{x}^{(6)} = [0.500\,003\,5 \quad 0.999\,998\,9 \quad -0.500\,003]^{\mathrm{T}}$。