2018-2019学年第一学期

计 算 方 法

第十四讲：逐次逼近法

第六章 §2-3

主讲人：张治国

zgzhang@szu.edu.cn

深圳大学 医学部 生物医学工程学院

SHENZHEN UNIVERSITY HEALTH SCIENCE CENTER SCHOOL OF BIOMEDICAL ENGINEERING

上节课/上章回顾

- 简单介绍了基于微积分数值方法的常微分方程数值解法。

- 实际计算中，当函数 $f(x, y)$ 不复杂时可采用单步法，其中使用较多的是四阶Runge-Kutta法（稳定、精度高、步长易调，但计算量大且要求函数光滑）。

- 当函数 $f(x, y)$ 较复杂时，建议采用多步法。

本章内容

第六章 逐次逼近法

§1 基本概念

§2 解线性方程组的迭代法

§3 非线性方程组的迭代解法

§4 计算矩阵特征值问题

§5 迭代法的加速

本节课内容

第六章 逐次逼近法

§2 解线性方程组的迭代法

2-1 简单迭代法

2-2 迭代法的收敛性

§3 非线性方程组的迭代解法

3-1 简单迭代法

3-2 Newton迭代法及其变形

3-3 Newton迭代算法

3-4 多根区间上的逐次逼近法

§1 基本概念

- 逐次逼近法也称迭代法，它是对所求问题建立一种规则，按照这种规则可以通过已知元素或已求出的元素计算后继元素，从而形成一个序列，由序列的极限过程去逐步逼近数值问题的精确解。该法在数值计算上有着广泛应用。

- 逐次逼近需要涉及两个元素之间的距离、极限过程的收敛性等概念 ，因此应先明确这些基本概念。请阅读“1-1 向量与矩阵的范数 ”。

§2 线性方程组的迭代法

- 由第二章可知，利用直接法可解线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{2.1}$$

其中，$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^{n}$，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n}$ 。

- 问题：直接法中，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在不断变化，$\boldsymbol{A}$ 的阶数高，则占用内存就大；且程序较复杂，程序设计的技巧较高。

- 迭代法的思路
- 利用迭代法求解(2.1)，先将它变形为如下等价方程组：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f} \tag{2.2}$$

其中，$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{R}^{n}$，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 被称为迭代矩阵。

- 注：利用不同的方法构造(2.2)可得到不同的迭代法。

§2 线性方程组的迭代法

迭代过程

- 取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 代入(2.2)，得

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{f}$$

$$\cdots\cdots$$

- 一般形式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}, \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{2.3}$$

- 称利用(2.3)式求解的方法为求解线性方程的迭代法，或迭代过程或迭代格式。

§ 2 线性方程组的迭代法

迭代收敛

- 当 $k\to\infty$ 时，若由(2.3)所得到的序列 $\boldsymbol{x}^{(k)}\to\boldsymbol{x}^*$，即

$$x_i^{(k)}\to x_i^*\ ,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

  其中，$\boldsymbol{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$，$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$，或写成

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{x}^*\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^*$$

  则称迭代法收敛，否则迭代法发散。

- 若迭代法收敛，则由(2.3)式，

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{f}$$

  即 $\boldsymbol{x}^*$ 为方程组(2.2)的解，从而也是(2.1)的解。

- 注：用迭代法求解就是求向量序列 $\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots$ 的极限向量 $\boldsymbol{x}^*$。

2-1 简单迭代法

- 简单迭代法又称为基本迭代法。可以有多种形式的推广。

- 设线性方程组的一般形式为

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

- 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 为非奇异，且 $a_{ii} \neq 0$ ，上式经移项和变形后有：

2-1 简单迭代法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right] \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - \sum\limits_{j=1,\, j\neq 2}^{n} a_{2j}x_j\right] \\ \cdots\cdots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum\limits_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right] \\ \cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j\right] \end{cases} \qquad (2.4)$$

2-1 简单迭代法

- 即

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \quad k = 0,1,2,\cdots;\ i = 1,2,\cdots,n \qquad (2.5)$$

或

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \quad k = 0,1,2,\cdots;\ i = 1,2,\cdots,n$$

- 即

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i\ , \\ \Delta x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \\ k = 0,1,2,\cdots;\ i = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \qquad (2.6)$$

- 迭代法(2.5)或(2.6)被称为Jacobi迭代法。

2-1 简单迭代法

- (2.5)式可写成矩阵形式：设 $\boldsymbol{D}=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} 0 & & & & & 0 \\ -a_{21} & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ -a_{j1} & & -a_{j,j-1} & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,j-1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & -a_{j-1,j} & \cdots & -a_{j-1,n} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

2-1 简单迭代法

- 则

$$A = D - L - U$$

$$Dx = (L + U)x + b$$

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

- 令 $B_J = D^{-1}(L + U),\ f = D^{-1}b$，则得(2.1)的等价方程组为

$$x = B_J x + f$$

- 迭代格式

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f,\quad k = 0,1,2,\cdots \tag{2.8}$$

2-1 简单迭代法

- 例4 解线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

- 解：将该方程写成Jacobi迭代格式(2.5)：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

2-1 简单迭代法

- 其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.375 & -0.25 \\ -0.363636 & 0 & 0.090909 \\ -0.5 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- 取初始向量 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, 得到

$$x^{(1)} = x^{(0)} + (2.5,3,3)^T = (2.5,3,3)^T$$

2-1 简单迭代法

$$x^{(2)}=\begin{bmatrix}0 & 0.375 & -0.25\\ -0.363636 & 0 & 0.090909\\ -0.5 & -0.25 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.5\\ 3\\ 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2.5\\ 3\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.875\\ 2.363\\ 1\end{bmatrix}$$

$$x^{(3)}=\begin{bmatrix}0 & 0.375 & -0.25\\ -0.363636 & 0 & 0.090909\\ -0.5 & -0.25 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.875\\ 2.363\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2.5\\ 3\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.136\\ 2.045\\ 0.972\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$x^{(10)}=(3.000032,1.999838,0.999881)^T$$

2-1 简单迭代法

Gauss-Seidel迭代法

- 在Jacobi迭代过程中，对已经计算出来的信息未加充分利用。例如，计算 x_i 时 $x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}$ 已经算出。一般来说，后面的计算值 $x_i^{(k+1)}$ 比前面的计算值 $x_i^{(k)}$ 要精确。

- 因此，可对Jacobi迭代法(2.5)作如下改进：

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] \\ k = 0,1,2,\cdots; i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{2.9}$$

2-1 简单迭代法

- 写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

- 整理可得

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

- 即

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

- 令 $\boldsymbol{B}_G = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$， $\boldsymbol{f}_G = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$ ，则

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}_G\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}_G \tag{2.10}$$

- (2.9)和(2.10)称为Gauss-Seidel迭代法，或G-S法。

2-1 简单迭代法

- 另外，G-S法还可写成如下形式：

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right]$$

- 因此

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i \\ \Delta x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \\ k = 0,1,2,\cdots;\ i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{2.10}$$

2-1 简单迭代法

- 例5 将例4中的线性方程组写成G-S迭代格式，并求解

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 2.5 + 0.375 x_2^{(k)} - 0.25 x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3 - 0.363636 x_1^{(k+1)} + 0.090909 x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 3 - 0.5 x_1^{(k+1)} - 0.25 x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

- 取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$ 代入上式，得

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = (2.5, 2.090909, 1.768939)^T$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{x}^{(5)} = (2.999843, 2.000072, 1.000061)^T$$

2-2 迭代法的收敛性

- 设某种迭代格式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

且该方程组的精确解为 $\boldsymbol{x}^*$，则 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$ 。

- 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} &= \boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*) \\ &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} = \cdots = \boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^*$ 是一个非零的不变向量。于是有如下定理。

2-2 迭代法的收敛性

- 定理2.1 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=0$（$\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^*$）的充分必要条件是
$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{O}\text{（零矩阵）}$$
- 定理2.2 迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}$，对任意 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 均收敛的充分必要条件为 $\rho(\boldsymbol{B})<1$。
- 定理2.3 若 $\|\boldsymbol{B}\|<1$，则迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}$ 收敛，且
$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\|\le\frac{\|\boldsymbol{B}\|}{1-\|\boldsymbol{B}\|}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k+1)}\|$$
- 定理2.4 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 中的 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为严格对角占优，即
$$|a_{ii}|>\sum_{j=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\cdots,n$$
则Jacobi法和G-S法均收敛。

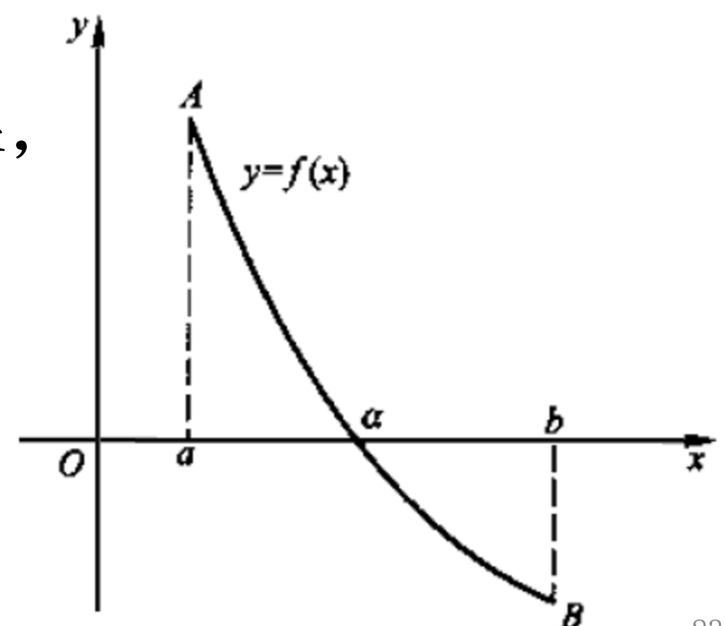
§3 非线性方程的迭代法

- 问题：设非线性方程

$$f(x)=0 \tag{3.1}$$

求一数 α，使 $f(\alpha)=0$，称 α 为方程(3.1)的根。

- 假设：函数 $f(x)$ 是连续的，它在坐标系 Oxy 中的图像为连续曲线（如右图所示），
  - 若在区间 $[a, b]$ 上只有一个根，称 $[a, b]$ 为单根区间；
  - 若在 $[a, b]$ 上有多个根，称为多根区间；
  - 以上统称为有根区间。



3-1 简单迭代法

- 思路：先将方程 $f(x)=0$ 化为一个与它同解的方程

$$x=\varphi(x) \tag{3.2}$$

即 $f(\alpha)=0$ 充分必要条件是 $\alpha=\varphi(\alpha)$。

- 然后，任取一个初始值 x_0，进行如下迭代

$$x_1=\varphi(x_0),\ x_2=\varphi(x_1),\ \cdots,\ x_{k+1}=\varphi(x_k),\ \cdots$$

及迭代公式为

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\quad k=0,1,2,\cdots \tag{3.3}$$

- 称(3.3)为求解非线性方程的简单迭代法，或迭代法或迭代过程或迭代格式，$\varphi(x)$称为迭代函数，x_k称为第 k 步的迭代值或简单迭代值。

3-1 简单迭代法

迭代收敛

- 如果由迭代法产生的数列收敛，即当 $k \to \infty$ 时，
  $x_k \to \alpha$，则称迭代法收敛；否则称发散。

- 显然，收敛时有 $f(\alpha) \equiv 0$，因
  若迭代法收敛：$x_k \to \alpha$，则对(3.3)式取极限，得

$$\alpha = \varphi(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad f(\alpha) = 0$$

3-1 简单迭代法

- 例8 用迭代法求 $f(x)=2x^3-x-1=0$ 的根
- 解：用以下两种方法

1) 化方程为等价方程 $x=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}=\varphi(x)$

- 取初始值 $x_0=0$，则迭代值为

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{0.5}\approx 0.79$$

$$x_2=\sqrt[3]{\frac{x_1+1}{2}}=\sqrt[3]{\frac{1+0.79}{2}}=\sqrt[3]{0.895}\approx 0.964$$

$$x_3=\sqrt[3]{\frac{x_2+1}{2}}=\sqrt[3]{\frac{1+0.964}{2}}=\sqrt[3]{0.982}\approx 0.994,\cdots$$

- 显然，当 $k\to\infty$ 时，$x_k\to 1$，且 $f(1)=0$。

3-1 简单迭代法

2) 化方程为等价方程 $x = 2x^3 - 1 = \varphi(x)$

- 取初始值 $x_0 = 0$，则迭代值为

$$x_1 = 2 \times 0 - 1 = -1$$
$$x_2 = 2 \times (-1)^3 - 1 = -3$$
$$x_3 = 2 \times (-3)^3 - 1 = -55, \cdots$$

- 显然，当 $k \to \infty$ 时，$x_k \to -\infty$ 。故迭代法发散。

- 由上例可以看出，迭代法的收敛与发散，与迭代函数的构造有关。

- 迭代函数的构造方法很多，例如，

$$x = x - f(x) = \varphi(x)$$
$$x = x - k(x) f(x) = \varphi(x), k(x) \neq 0$$

3-1 简单迭代法

迭代法收敛的条件

- **定理3** 设迭代函数 $\varphi(x)$ 满足

  1) 当 $x\in[a,b]$ 时, $a\le\varphi(x)\le b$

  2) 存在数 $0<L<1$，对任意 $x\in[a,b]$，都有 $|\varphi'(x)|\le L$，

  则 $x=\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 内存在唯一根 α，并且对任意初始值 $x_0\in[a,b]$，迭代法

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\quad k=0,1,2,\cdots$$

  收敛于 α，且

$$\text{i)}\quad |x_k-\alpha|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

$$\text{ii)}\quad |x_k-\alpha|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

3-1 简单迭代法

收敛的阶

- 设迭代序列 $x_k \to \alpha, k \to \infty$
- 定义3.1 若存在实数 $p \geq 1$ 和 $c > 0$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}=c \qquad (3.7)$$

则称迭代法为 p 阶收敛。

– 当 $p = 1$ 时称为线性收敛；

– 当 $p > 1$ 时称为超线性收敛；

– 当 $p = 2$ 时称为平方收敛。

3-2 Newton迭代法及其变形

- 构造迭代函数是迭代法中很关键的一步，Newton迭代法（也称Newton-Raphson法）是按照如下方式构造。
- 对一切非线性方程 $f(x)=0$，总可构造如下函数：

$$x=\varphi(x)=x-k(x)f(x), \quad k(x)\neq 0 \tag{3.9}$$

作为方程 $f(x)=0$ 求解的迭代函数。

3-2 Newton迭代法及其变形

- 因 $\varphi'(x)=1-k'(x)f(x)-k(x)f'(x)$ ，且 $|\varphi'(x)|$ 在根 α 附近越小，其局部收敛速度就越快（见226页Taylor展开），故令

$$\varphi'(\alpha)=1-k'(\alpha)f(\alpha)-k(\alpha)f'(\alpha)=1-k(\alpha)f'(\alpha)=0$$

- 若 $f'(\alpha)\neq 0$（即α不是 $f(x)=0$ 的重根），则

$$k(\alpha)=1/f'(\alpha)$$

- 因此，可取 $k(x)=1/f'(x)$ 代入(3.9)，得

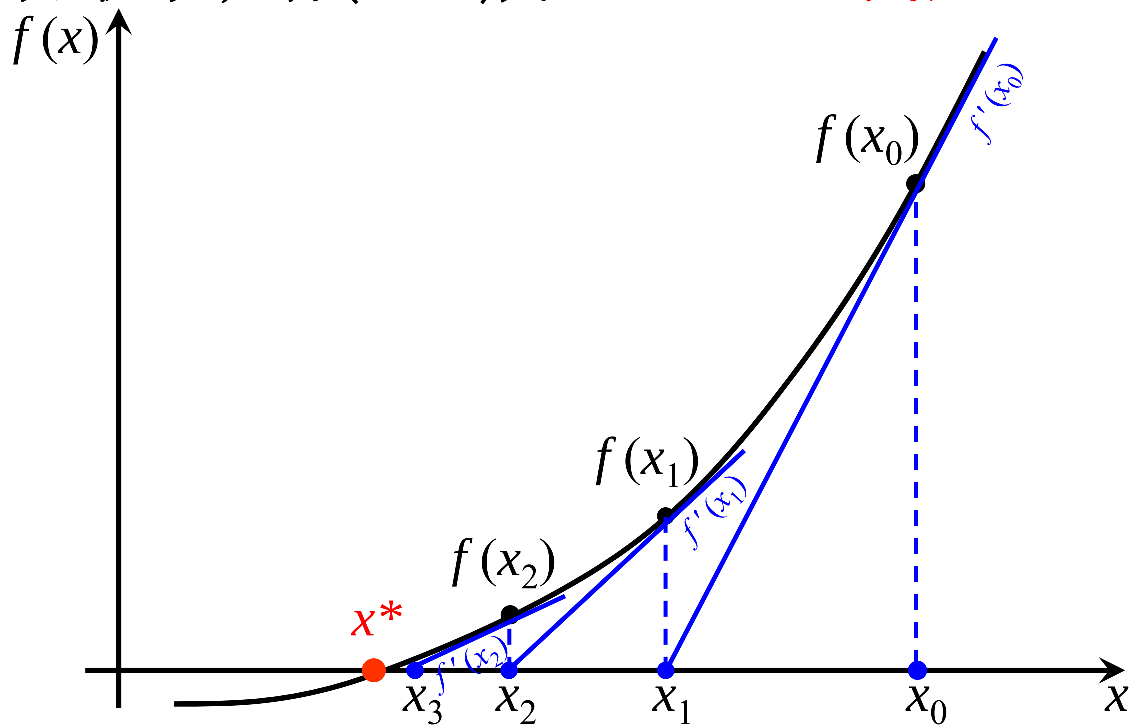
$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

3-2 Newton迭代法及其变形

- 定理3.3 设方程 $f(x)=0$的根为α，且 $f'(\alpha)\neq 0$，则迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\qquad k=0,1,2,\cdots \tag{3.10}$$

至少是平方收敛，称(3.10)为Newton迭代法。



3-2 Newton迭代法及其变形

弦截法

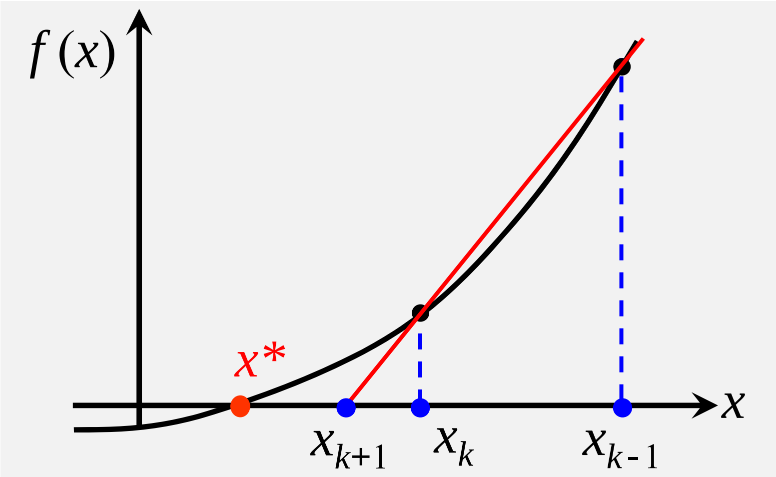
- Newton迭代法需要利用导数 $f'(x)$ ，有时不方便计算。
- 若利用近似等式

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

代入(3.10)，得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 0,1,2,\cdots \quad (3.11)$$

- 称(3.11)式决定的迭代法为弦截法。



3-2 Newton迭代法及其变形

- 例11 用Newton法和弦截法分别计算方程
$$x^3-x-1=0$$
在 $x=1.5$ 附近的根 α。

- 解：
(1) 使用Newton法，取 $x_0=1.5$。迭代公式：
$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1} \tag{3.12}$$

3-2 Newton迭代法及其变形

- 因此

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - x_0 - 1}{3x_0^2 - 1} = 1.5 - \frac{1.5^3 - 1.5 - 1}{3 \times 1.5^2 - 1} \approx 1.34783$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - x_1 - 1}{3x_1^2 - 1} \approx 1.32520$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - x_2 - 1}{3x_2^2 - 1} \approx 1.32472$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^3 - x_3 - 1}{3x_3^2 - 1} \approx 1.32472$$

3-2 Newton迭代法及其变形

(2) 使用弦截法，取 $x_0 = 1.5, x_1 = 1.4$ 。迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

$$= x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{x_k^2 + x_{k-1}x_k + x_{k-1}^2 - 1}$$

因此

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - x_1 - 1}{x_1^2 + x_0 x_1 + x_0^2 - 1} \approx 1.33522$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - x_2 - 1}{x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 - 1} \approx 1.32541$$

$$\vdots$$

3-2 Newton迭代法及其变形

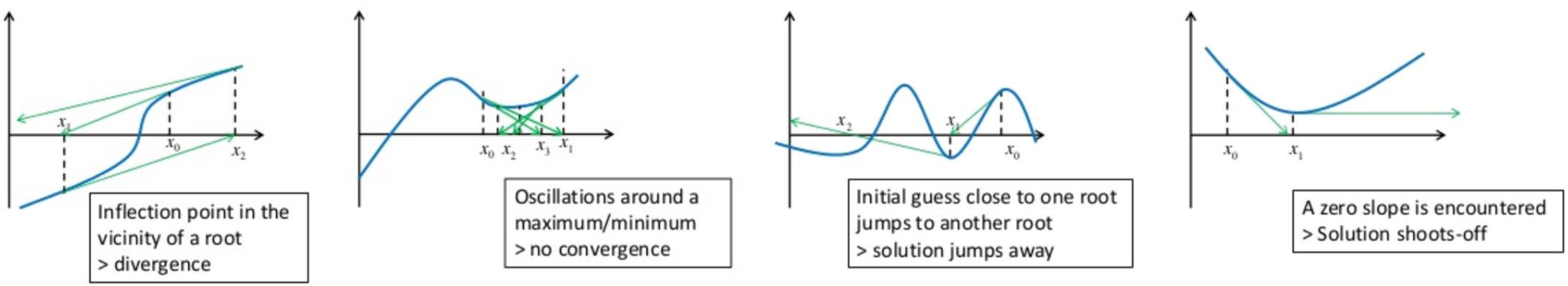
(3) 使用Newton法，取 $x_0 = 0$。利用(3.12) 进行迭代计算，

得 $x_1 = -1,\ x_2 = -0.5,\ x_3 \approx 0.33,\ x_4 \approx -1.44$

可见结果偏离所求的根，且可能不收敛。

- 注：Newton法收敛与否与初始值有关。

Newton法中几种不收敛的情况



3-2 Newton迭代法及其变形

Newton下山法

- 在Newton法中，为了防止迭代发散，增加一个条件

$$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$$

- 为了使$|f(x_k)|$满足这种单调性，引入常数 $\lambda\in(0,1]$，迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_{k-1})} \tag{3.13}$$

- (3.13)决定的迭代法为Newton下山法，λ 称为下山因子。

- 在Newton下山法中，下山因子可采用试算法，如取

$$\lambda=1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots$$

详见230页

3-4 多根区间上的逐次逼近法

- 方程 $f(x)=0$ 在多根区间 $[a, b]$ 上分两种情况：
  一、均为单根；二、有重根（略）。

一、$[a, b]$ 是 $f(x)=0$ 仅有单根的多根区间

- 1. 求单根区间
  - 设 $f(x)=0$ 在$[a, b]$上有 m 个根，将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[b_0,b_1],[b_1,b_2],\cdots,[b_{n-1},b_n]$，$b_0=a,b_n=b$ ，计算 $f(b_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的值。
  - 若 $f(b_i)f(b_{i+1})<0$，则 $f(x)=0$ 在 $[b_i,b_{i+1}]$上至少有一个根。
  - 若这样的有根区间小于 m ，则将这些区间继续对分，对分点为 $b_{i+1/2}$，计算 $f(b_{i+1/2})$，再搜索有根区间，直到有根区间的个数是 m 为止。

3-4 多根区间上的逐次逼近法

- 2. 在单根区间 $[c, d]$ 上求根， $f(c)f(d)<0$
  - 将 $[c, d]$ 对分，设对分点 $x_0=(c+d)/2$。
  - 计算 $f(x_0)$，若 $f(x_0)$与 $f(c)$ 同号，则令 $c_1=x_0$ ，$d_1=d$ ；否则令 $c_1=c$，$d_1=x_0$。
  - 在新的有根区间 $[c_1,d_1]$中，利用上述对分方法重复进行得到新的有根区间$[c_2,d_2]$，继续下去得有根区间$[c_n,d_n]$，其长度 $d_n-c_n=(d-c)/2^n \quad \to \ 0$ 。
  - 因此，当 n 足够大时，d_n-c_n 可达到根的精度要求，则 $x_n=(d_n-c_n)/2$ 可作为根的近似值。
  - 以上求根的方法称为二分法。

3-4 多根区间上的逐次逼近法

- 例13 求 $f(x)=x^2+2x-1=0$ 在 [0, 1] 中的根。
- 解：因 $f(0)=-1<0$，$f(1)=2>0$，所以 $f(x)$ 在 [0, 1] 中有根。下面利用二分法求根。
- 将有根区间 [0, 1] 二等分，得 [0, 0.5]，[0.5, 1]。
- 因 $f(0.5)=0.25>0$，故 $f(x)$ 在 [0, 0.5] 中有根。
- 因 $f(0.25)=-0.435<0$，故 $f(x)$ 在 [0.25, 0.5] 中有根。
- 上述过程重复下去，可得根的近似值。

本节课/本章小结

- 本章主要内容是迭代法，包括线性和非线性方程组的求解。
- 介绍了解线性方程组的简单迭代法，包括：
  - Jacobi迭代法
  - Gauss-Siedel迭代法
- 介绍了非线性方程的多种解法
  - 简单迭代法（适用于单根区间）；
  - Newton迭代法（适用于单根区间）及其改进（弦截法和Newton下山法）；
  - 二分法（适用于均为单根的多根区间）。

本节课/本章小结

- 使用迭代法应注意（1）初始值的选取；（2）收敛速度和参数选择；（3）迭代何时终止。
- Newton法是解非线性方程组最经典的方法，现有不少方法都是Newton法的变形。
- 解大型线性方程组的迭代法比直接法在计算复杂性方面具有优越性。

作业

习题六：9，18(1)，21(1)，22

作业上交日期：2018年12月25日

下节课内容

复 习