2018-2019学年第一学期

计 算 方 法

第七讲：插值法与最小二乘法 – 2

第三章 §2-3

主讲人：张治国

zgzhang@szu.edu.cn

深圳大学 医学部 生物医学工程学院

SHENZHEN UNIVERSITY HEALTH SCIENCE CENTER SCHOOL OF BIOMEDICAL ENGINEERING

上节课回顾

- 插值法是函数近似代替与计算的基本且有效的方法之一。数值计算值最常用的是多项式插值。
- 讨论了插值的一系列基本概念（插值法、插值函数、插值节点、插值区间等 ）和性质（如，插值多项式的唯一性）。
- 介绍了Lagrange插值和其特例线性插值。

上节课回顾

- 问题描述：通过实验或者测量，获得函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$上的一组互异的点 $\{x_i\}$ 上的函数值 $\{y_i\}$, $i=0,1,\cdots,n$。寻找一个简单易算的函数 $P(x)$，使得

$$P(x_i)=y_i \quad , \qquad i=0,1,\cdots,n \tag{1.1}$$

并以 $P(x)$ 近似代替 $f(x)$。

- 上述问题称为插值问题，按条件(1.1)求函数 $f(x)$的近似表达式的方法称为插值法，称条件(1.1)为插值条件，$P(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数，$(i=0,1,\cdots,n)$ 为插值节点，所属的区间 $[a,b]$ 为插值区间。

- 常用插值函数是 n 次代数多项式，简称插值多项式。

上节课回顾

- 例：给定 $f(x)=\sqrt{x}$ 的函数表如下：

x	144	169	255
$y=f(x)$	12	13	15

- 利用二次Lagrange插值多项式和线性插值多项式分别计算 $f(175)$ 的近似值得到

$$L_2(175)=13.23015873$$
$$L_1(175)=13.21428572$$

真实值为 $\sqrt{175}=13.22875656$

- 两个问题：

  1. 怎样估计 $L_n(x)$ 近似值代替 $f(x)$ 时所产生的误差？
  2. 是不是插值多项式次数越高，其计算结果就越精确？

本节课内容

第三章　插值法与最小二乘法

§2 插值多项式中的误差

2-1 插值余式

2-2 高次插值多项式的问题

§3 分段插值法

3-1 分段线性Lagrange插值

3-2 分段二次Lagrange插值

§2 插值多项式中的误差

2-1 插值余项

- 估计 $L_n(x)$ 近似值代替 $f(x)$ 时所产生的截断误差
- 在区间 [a, b] 上用插值多项式 $P_n(x)$ 近似 $f(x)$ 时应满足：

$$R_n(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) = 0 \ , \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

- 设 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 。因此，$R_n(x)$ 在 [a, b] 上至少有 $n+1$ 个零点，可设

$$\begin{aligned} R_n(x) &= K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \\ &= K(x)\omega_{n+1}(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $K(x)$ 为待定函数。

2-1 插值余项

- 引进辅助函数 $\varphi(t)=f(t)-P_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t)$
- 设 x 为一个固定值，且 $x\neq x_i(i=0,1,\cdots,n)$，则 $\varphi(t)$ 在 $x,x_0,x_1,\cdots,x_n$ 共 $n+2$ 个点上取值为0。
- 由Rolle中值定理，导函数 $\varphi'(t)$ 在 (a,b) 上至少有 $n+1$个零点。

Rolle中值定理：如果函数 $g(x)$ 满足以下三个条件，
(1) 在闭区间 $[c,d]$ 上连续，(2) 在 (c,d) 内可导，(3) $g(c)=g(d)$，
则至少存在一个 $\xi\in(c,d)$，使得 $g'(\xi)=0$。

2-1 插值余项

- 因此，$\varphi''(t)$ 在 (a, b) 上至少有 n 个零点。递推可知，在 (a, b) 上至少有一个点 ξ，使 $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$。因此

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-P_n^{(n+1)}(\xi)-K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi)=0$$

- 由于 $P_n^{(n+1)}(\xi)=0$ 和 $\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$，于是

$$f^{(n+1)}(\xi)-K(x)\cdot(n+1)!=0, \qquad K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

- 代入(2.1)，得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \qquad \xi\in(a,b) \tag{2.2}$$

- 称 $R_n(x)$ 为 n 次插值多项式 $P_n(x)$ 的余项或截断误差。

2-1 插值余项

- 定理1.1：设 $f(x)$ 在含节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 的区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 次可微，$P_n(x)$ 是 $f(x)$ 关于给定的 $n+1$ 个节点的 n 次插值多项式，则对于任意 $x\in[a,b]$，存在与 x 有关的 $\xi\in(a,b)$ 使(2.2)式成立，即n 次插值多项式 $P_n(x)$ 的余项或截断误差为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \qquad \xi\in(a,b)$$

2-1 插值余项

- 特别地，若 $M_{n+1}=\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|$

  则由(2.2)得，

$$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)| \tag{2.3}$$

- 从而 $$\max_{a\le x\le b}|R_n(x)|=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}|\omega_{n+1}(x)| \tag{2.4}$$

- 因 $$\max_{a\le x\le b}|\omega_{n+1}(x)|=\max_{a\le x\le b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

  所以当节点数大于插值多项式的次数时，应当选取靠近 x 的节点做插值多项式，误差会小。

2-1 插值余项

- 例：利用余项公式(2.3)估计前例中 $L_1(175)$ 和 $L_2(175)$ 的误差。
- 解：因 $f''(x) = -x^{-3/2}/4$ ， $f'''(x) = 3x^{-5/2}/8$ ，

  故 $$M_2 = \max_{169\le x\le 225} |f''(x)| = |f''(169)| \le 1.14\times 10^{-4}$$
  $$M_3 = \max_{144\le x\le 225} |f'''(x)| = |f'''(144)| \le 1.51\times 10^{-6}$$

  于是 $$|R_1(175)| \le \frac{M_2}{2} |(175-169)(175-225)| \le 1.71\times 10^{-2}$$
  $$|R_2(175)| \le \frac{M_3}{3!} |(175-144)(175-169)(175-225)| \le 2.34\times 10^{-3}$$

- 可见， $L_2(175)$ 比 $L_1(175)$ 的误差小。

2-2 高次插值多项式的问题

- 上例提出了一个问题：在指定的插值区间上，用 $f(x)$ 的插值多项式近似代替 $f(x)$，其误差是否会随着插值节点的加密（多项式的次数增高）而减小?

- 答案：对于某些函数，适当地提高插值多项式的次数会提高替代精度。当函数 $f(x)$ 是连续函数时，加密插值点数虽然使插值函数与被插值函数在更多节点上的取值相等，但由于插值多项式在某些非节点处的振荡可能加大，因而可能使在非节点处的误差变得很大。

- Runge发现：误差并不一定会随插值节点加密而减少。

2-2 高次插值多项式的问题

- 例如，对于函数 $f(x)=1/(x^2+1)$ ， $-5\le x\le 5$ ，

  取等距的插值节点：

  $$x_k=-5+kh\ ,\quad h=10/n,\ \ k=0,1,\cdots,n$$

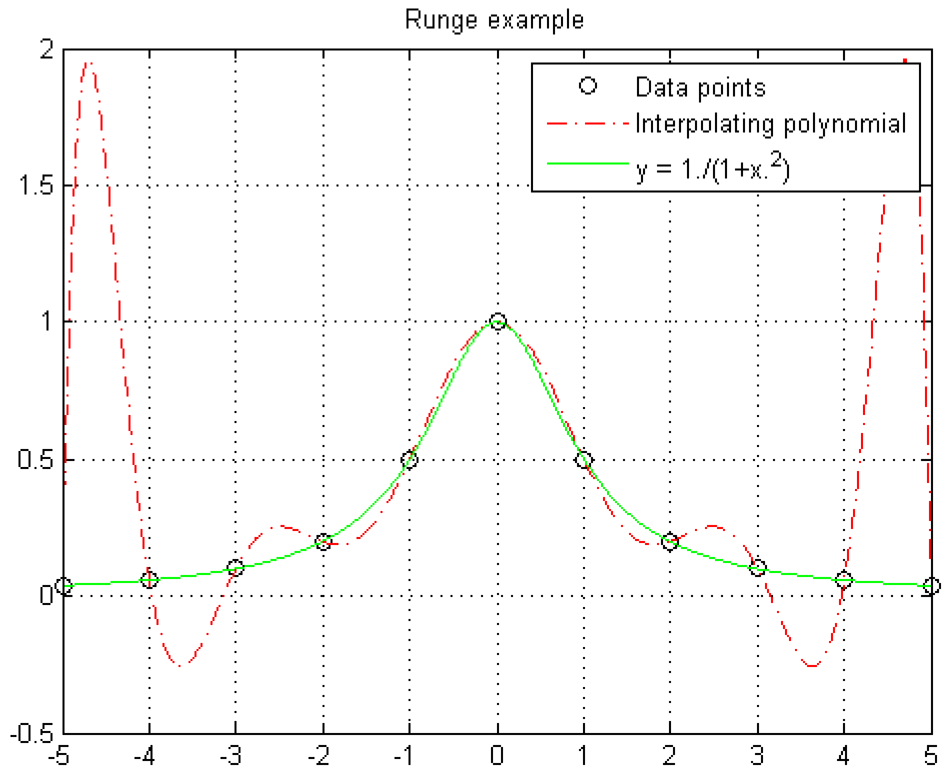
  得到Lagrange插值多项式

  $$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)\cdot\frac{1}{1+x_k^2}\qquad(2.5)$$

- 则在节点等距的条件下，当 $n\to\infty$ 时，由(2.5)式表示的多项式 $L_n(x)$ 只在 $|x|\le 3.63$ 内收敛，之外发散到无穷。

2-2 高次插值多项式的问题

- 多项式不收敛的现象称作Runge现象。



- Runge现象说明并非多项式的次数越高，精度就越高。

§ 3 分段插值法

- 设给定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的节点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b \tag{3.1}$$

及其对应的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，要求插值多项式 $P(x)$ 满足

$$P(x_i) = y_i \ , \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{3.2}$$

- 当 n 较大时，为克服高次插值多项式的弊端，将 $[a, b]$ 划分为若干个插值子区间，区间的分点取在节点上，在每一个子区间上做 $f(x)$ 的低次插值多项式。
- 所有插值子区间上的插值多项式构成了 $[a, b]$ 上的分段函数，称为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的分段插值多项式。

3-1 分段线性Lagrange插值

- 取相邻的两个节点 x_k, x_{k+1} 形成一个插值子区间 $[x_k, x_{k+1}]$
- 做线性插值多项式：对每个 $k=0,1,\cdots,n-1$

$$L_h^{(k)}(x) = y_k \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + y_{k+1}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \tag{3.3}$$

- 令

$$L_h(x) = \begin{cases} L_h^{(0)}(x) & x\in[x_0,x_1] \\ L_h^{(1)}(x) & x\in[x_1,x_2] \\ \cdots\cdots & \\ L_h^{(n-1)}(x) & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases} \tag{3.4}$$

- 由(3.3)和(3.4)，得 $L_h(x_i)=y_i$ ， $i=0,1,\cdots,n$。
- 称 $L_h(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的分段线性插值多项式。

3-1 分段线性Lagrange插值

- $L_h(x)$ 的余项为

$$R_1(x) = f(x) - L_h(x) = f(x) - L_h^{(k)}(x)$$
$$= \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_k)(x - x_{k+1}) \qquad (3.5)$$

- 因此，如果

$$M_2 = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|, \quad h = \max_{0 \le k \le n-1} h_k, \quad h_k = x_{k+1} - x_k$$

则

$$\max_{a \le x \le b} |R_1(x)| \le \frac{M_2}{2} \max_{a \le x \le b} |(x - x_k)(x - x_{k+1})| \le \frac{M_2}{8} h^2 \qquad (3.6)$$

3-1 分段线性Lagrange插值

- 分段线性插值多项式 $y = L_h(x)$ 的图形是连接平面上的点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ 的一条折线。因此，在节点处 $y = L_h(x)$ 往往出现尖拐点，使得分段线性插值函数的光滑性不好。

- 但是，可以证明（过程略）：$\lim_{h\to 0} L_h(x) = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致成立。即 $L_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$ 。

3-1 分段线性Lagrange插值

- 对于给定的一组数据 (x_i, y_i) $(i = 0,1,\cdots,n)$，设节点按

  $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 排列，对于插值点 $x = u$，有

$$v = L_h^{(k)}(u) = y_k \frac{u - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{u - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad u \in [x_k, x_{k+1}] \quad (3.7)$$

- 问题：对于给定的插值点 $x = u$，公式(3.7)中的下标 k 如何确定?

3-1 分段线性Lagrange插值

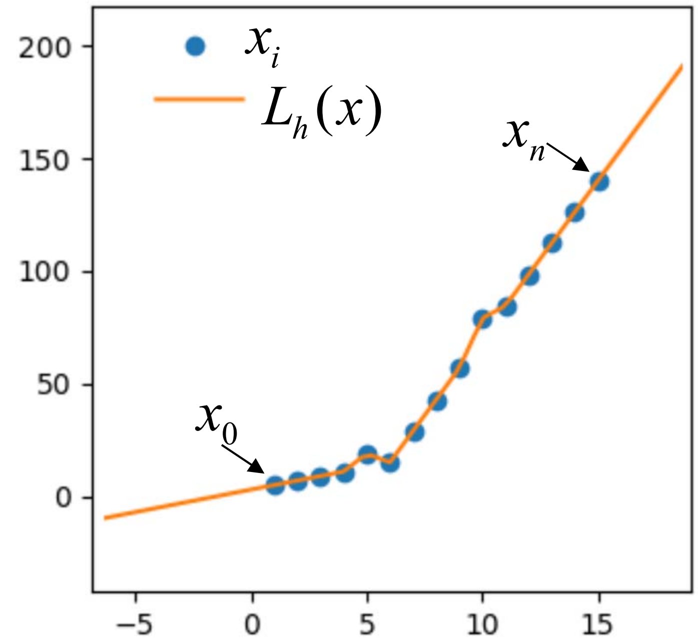
- 方法：

  1) 若点 u 位于两节点 x_i, x_{i+1} 之间，则取这两节点内插；

  2) 当 $u < x_0$ 或 $u > x_n$ 时，则需要外推，
  前者取 $x_0, x_1 (k = 0)$ ， 后者取 $x_{n-1}, x_n (k = n-1)$ 。

- 归纳如下：

$$k = \begin{cases} 0 & u \le x_0 \\ i & x_i < u \le x_{i+1},\ 1 \le i \le n-1 \\ n-1 & u \ge x_n \end{cases}$$



3-2 分段二次Lagrange插值

- 当给定的函数表中节点远多于3时，采用分段二次插值法可以提高计算精度。

- 给定插值点 $x = u$，应取靠近 u 的三个节点做二次插值多项式。

- 分段二次插值的计算公式：

$$v = L_h^{(k)}(u) = \sum_{j=k}^{k+2} y_j \left(\prod_{r=k, r\neq j}^{k+2} \frac{u - x_r}{x_j - x_r} \right) \tag{3.8}$$

3-2 分段二次Lagrange插值

- 当 $u \in [x_k, x_{k+1}]$，另一个节点取 x_{k-1} 还是 x_{k+2}，需要判断 u 偏向区间的哪一侧。当 u 靠近 x_k 时，补选 x_{k-1} 为节点，否则补选 x_{k+2} 为节点。

- 外推：当 u 靠近 x_0 而 $u < x_1$ 时，应取 x_0，x_1，x_2 为节点；当 u 靠近 x_n 而 $u > x_{n-1}$ 时，应取 x_{n-2}，x_{n-1}，x_n 为节点。

- 综上，选取靠近 u 的相邻三个节点（确定 k）的方法：

$$k = \begin{cases} 0 & u < x_1 \\ i-1 & x_i < u \le x_{i+1} \quad and \quad |u - x_i| \le |u - x_{i+1}|,\ i = 1,2,\cdots,n-1 \\ i & x_i < u \le x_{i+1} \quad and \quad |u - x_i| > |u - x_{i+1}|,\ i = 1,2,\cdots,n-2 \\ n-2 & u > x_{n-1} \end{cases}$$

3-2 分段二次Lagrange插值

- 例：给出 $y = f(x)$ 的数据如下：

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.30	0.40	0.55	0.65	0.80	1.05
y_i	0.30163	0.41075	0.57815	0.69675	0.87335	1.18885

用分段二次插值多项式计算 $f(x)$ 在 $x = 0.36, 0.42, 0.75,$ 0.98 处的近似值。

3-2 分段二次Lagrange插值

- 解：因 $u_1 = 0.36 \in [0.30, 0.40]$，应该取 $x_0 = 0.30$，$x_1 = 0.40$，$x_2 = 0.55$；
- 因 $u_2 = 0.42 \in [0.40, 0.55]$，且它靠近0.40，故仍取 $x_0 = 0.30$，$x_1 = 0.40$，$x_2 = 0.55$。
- 于是，计算 $f(0.36)$ 和 $f(0.42)$ 的分段二次插值公式：

$$L_h(u) = \sum_{j=0}^{2} y_j \prod_{r=0, r \neq j}^{2} \frac{u - x_r}{x_j - x_r}$$

- 因此

$$f(0.36) \approx L_h(0.36) = 0.36671$$

$$f(0.42) \approx L_h(0.42) = 0.43243$$

3-2 分段二次Lagrange插值

- 同样分析，在 $x = 0.75$，0.98 处，应该选取如下3点：$x_3 = 0.65, x_4 = 0.80, x_5 = 1.05$。
- $f(0.75)$ 和 $f(0.98)$ 的插值公式：

$$L_h(u) = \sum_{j=3}^{5} y_j \prod_{r=3, r\neq j}^{5} \frac{u - x_r}{x_j - x_r}$$

- 因此

$$f(0.75) \approx L_h(0.75) = 0.81344$$

$$f(0.98) \approx L_h(0.98) = 1.09764$$

本节课小结

- 介绍了如何估计 n 次插值多项式的余项（即截断误差）。
- 指出了高次插值多项式的问题（并非多项式的次数越高，精度就越高）。
- 分段线性和二次Lagrange插值是可以克服高次插值多项式弊端的常用的插值法，但要注意节点的选择。

作业

习题三：4，14（不需要估计误差）

作业上交日期：2018年11月6日

下节课内容

第三章 插值法与最小二乘法

§4 Newton插值