

2018-2019学年第一学期

计算方法

第五章 常微分方程数值解法

主讲人：张治国

zgzhang@szu.edu.cn



深圳大学医学部 生物医学工程学院

SHENZHEN UNIVERSITY HEALTH SCIENCE CENTER SCHOOL OF BIOMEDICAL ENGINEERING

本章内容

第五章 常微分方程数值解法

§ 1 引言

✓ 1-1 基于数值微分的求解公式

1-2 截断误差

✓ 1-3 基于数值积分的求解公式

§ 2 Runge-Kutta法

2-1 Runge-Kutta法

2-2 四阶Runge-Kutta算法

§ 3 线性多步法

§ 4 常微分方程数值解法的进一步讨论

§ 1 引言

- 微分方程定义

1. 含有未知函数的导数（微分）的方程，称为微分方程
2. 未知函数为一元函数的微分方程，称为常微分方程
3. 未知函数为多元函数的微分方程，称为偏微分方程

- 问题：实际中需要求解常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

- 上述方程等价于积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t)) dt \quad (1.3)$$

§ 1 引言

- 当 $f(x, y)$ 在矩形区域 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 中连续, 并且对变量 y 满足Lipschitz条件, 即对任意 $x \in [a, b], y \in [c, d]$ 都有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

其中 L 为常数, 则初值问题(1.1)、(1.2)的解存在且唯一。

- 所谓常微分方程的数值解就是求 $y(x_k)$ 在区间 $[a, b]$ 中一系列离散点 (或节点)

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$$

上 $y(x_k)$ 的近似值 $y_k (k = 1, 2, \cdots, n)$, 这些近似值就是(1.1)、(1.2)的数值解。

- 求解计算这些近似值的方法称为该方程数值方法。由数值方法计算所得的数值解统称为计算解。

§ 1 引言

- 在计算时，从初始条件 $y(a) = y_0$ 出发，先求 y_1 ，再从 y_0, y_1 求出 y_2 ，以此递推求出所有 $y_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 。这种顺着节点的排列顺序一步步地向前推进的求解方法，称为**步进法**。
 - 如果计算 y_k 时只利用了 y_{k-1} ，这种方法称为**单步法**。
 - 如果计算 y_k 时利用了 $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-p}$ ，这种方法称为**多步法**。

§ 1 引言

- 下面重点介绍单步法。
- 将求解区间 $[a, b]$ 分成 n 等分, 令

$$\frac{b-a}{n} = h, \quad x_i - x_{i-1} = h, i = 1, 2, \dots, n, \quad x_0 = a$$

即 $x_i = a + ih$ 。

- 因此数值解法就是求 $y(x_i)$ 的计算值 y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ 。

1-1 基于数值微分的求解公式

- 在(1.1)–(1.2)中，利用[两点数值微分公式](#)(6.5)（153页），得

$$\begin{aligned}[a, x_1]: \quad \frac{1}{h}(y_1 - y_0) &= y'(a) + \frac{h}{2} y''(\eta_0) \\ &= y'(x_1) - \frac{h}{2} y''(\xi_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[x_1, x_2]: \quad \frac{1}{h}(y_2 - y_1) &= y'(x_1) + \frac{h}{2} y''(\eta_1) \\ &= y'(x_2) - \frac{h}{2} y''(\xi_1) \\ &\dots\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[x_j, x_{j+1}]: \quad \frac{1}{h}(y_{j+1} - y_j) &= y'(x_j) + \frac{h}{2} y''(\eta_j) \\ &= y'(x_{j+1}) - \frac{h}{2} y''(\xi_j) \\ &\dots\dots\end{aligned} \tag{1.6}$$

其中 $y_j = y(x_j)$, $j = 2, 3, \dots, n-1$ 。

1-1 基于数值微分的求解公式

- 由(1.6)式的前半部分的公式和(1.1)–(1.2)，得

$$\frac{1}{h}(y_{j+1} - y_j) = y'(x_j) + \frac{h}{2} y''(\eta_j) \approx f(x_j, y(x_j))$$

- 因此

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} e_{j+1}(h) = \frac{h^2}{2} y''(\eta_j) \approx \frac{h^2}{2} y''(x_j) \end{cases} \quad (1.8)$$

- (1.7)称为前进Euler求解公式或Euler法。
- 注意：(1.7)中 $y_j = y(x_j)$, $y_{j+1} \approx y(x_{j+1})$ 。

1-1 基于数值微分的求解公式

- 后退Euler求解公式：由(1.6)后半部分公式得，

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1}, y_{j+1}) & (1.9) \\ e_{j+1}(h) \approx -\frac{h^2}{2} y''(\xi_j) \approx -\frac{h^2}{2} y''(x_{j+1}) & (1.10) \end{cases}$$

其中 $y_j = y(x_j)$, $y_{j+1} \approx y(x_{j+1})$ 。

- 前进Euler求解公式(1.7)是关于 y_{j+1} 的一个直接计算公式，这类计算公式称为显式；后退Euler求解公式(1.9)的右端含有未知量 y_{j+1} ，这类计算公式称为隐式。

1-1 基于数值微分的求解公式

- 预测-校正系统（显式与隐式结合方法求解）

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) \quad \text{前进Euler求解公式 (1.7)}$$

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1}, y_{j+1}) \quad \text{后退Euler求解公式 (1.8)}$$

$$\begin{cases} \bar{y}_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) & \text{预测值} \\ y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1}, \bar{y}_{j+1}) & \text{校正值} \\ y(x_0) = y_0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.12)$$

1-1 基于数值微分的求解公式

- 例1 取 $h = 0.1$ ，求解初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y}, & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- 解：已知 $x_0 = a = 0$, $y_0 = 1$, $n = 1/h = 10$,

$$f(x, y) = y - 2x/y$$

1-1 基于数值微分的求解公式

- 利用Euler法求解，公式为

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) = y_j + h \left(y_j - \frac{2x_j}{y_j} \right), \quad j = 0, 1, \dots, 9$$

- 因此，

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h \left(y_0 - \frac{2x_0}{y_0} \right) = 1.1000$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h \left(y_1 - \frac{2x_1}{y_1} \right) \approx 1.1918$$

.....

$$y_{10} = y_9 + hf(x_9, y_9) = y_9 + h \left(y_9 - \frac{2x_9}{y_9} \right) \approx 1.7848$$

1-3 基于数值积分的求解公式

- 因为
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x))dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} y'(x)dx = y(x_k) - y(x_{k-1})$$

因此

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x))dx \quad (1.13)$$

- 若 y_{k-1} 已知，则由(1.13)可求出 y_k 。

- 令 $y(x_{k-1}) = y_{k-1}$ ，并利用矩形求积公式得

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x))dx \approx y(x_{k-1}) + hf(x_{k-1}, y(x_{k-1}))$$

或 $y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1})$ 。

- 上式即为Euler求解公式，又可称为矩形法。

1-3 基于数值积分的求解公式

一. 梯形公式

- 若在(1.13)中，利用梯形公式(1.10)（见123页）：

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x)) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)]$$

- 则
$$y(x_k) \approx y(x_{k-1}) + \frac{h}{2} [f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)]$$
- 令
$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2} [f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)] \quad (1.14)$$
- (1.14)称为梯形求解公式或梯形法。

1-3 基于数值积分的求解公式

- 梯形法为隐式，可将其显化，采用预测-校正系统

$$\begin{cases} \bar{y}_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}) \\ y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}[f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, \bar{y}_k)] \\ y_0 = x_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

- (1.15)称为改进的Euler求解公式，或改进Euler法。
- 改进Euler法还可以写作

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}[f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}))] \quad (1.16)$$

1-3 基于数值积分的求解公式

- 例3 用Euler法、梯形法以及改进Euler法求解

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

其中步长 $h = 0.1$ ，计算至 $x = 0.5$ 。

- 解：设 $f(x, y) = -y + x + 1$,

$$x_0 = a = 0, y_0 = 1, n = 5, b = 0.5$$

- 1) Euler法：计算公式为

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + h(x_{k-1} - y_{k-1} + 1) = hx_{k-1} + (1-h)y_{k-1} + h \\ &= 0.1x_{k-1} + 0.9y_{k-1} + 0.1 \end{aligned}$$

1-3 基于数值积分的求解公式

- 2) **梯形法**: 计算公式为

$$y_k = y_{k-1} + 0.5h[(x_{k-1} - y_{k-1} + 1) + (x_k - y_k + 1)]$$

解得

$$y_k = \frac{(2-h)y_{k-1} + h(x_{k-1} + x_k) + 2h}{2+h}$$
$$= \frac{1.9y_{k-1} + 0.1(x_{k-1} + x_k) + 0.2}{2.1}$$

- 3) **改进Euler法**: 计算公式为

$$y_k = y_{k-1} + 0.5h[(x_{k-1} - y_{k-1} + 1)$$
$$+ (-y_{k-1} - h(x_{k-1} - y_{k-1} + 1) + x_k + 1)]$$
$$= 0.905y_{k-1} + 0.045x_{k-1} + 0.05x_k + 0.095$$

- 计算结果见172页表5-1。可见梯形法和改进Euler法比Euler法精度高。

1-3 基于数值积分的求解公式

二. Simpson公式

$$\begin{aligned} & \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x)) dx \\ & \approx \frac{h}{6} \left[f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, y\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)\right) + f(x_k, y(x_k)) \right] \\ & = \frac{h}{6} \left[f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{h}{2}, y\left(x_{k-1} + \frac{h}{2}\right)\right) + f(x_{k-1} + h, y(x_{k-1} + h)) \right] \end{aligned}$$

• 令

$$\begin{aligned} y_k = y_{k-1} + \frac{h}{6} & \left[f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{h}{2}, y\left(x_{k-1} + \frac{h}{2}\right)\right) \right. \\ & \left. + f(x_{k-1} + h, y(x_{k-1} + h)) \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

• 上式是隐式，不便计算，需要显化。

§ 2 Runge-Kutta法

- 将改进Euler公式(1.15)改写为

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}[K_1 + K_2] \\ K_1 = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ K_2 = f(x_n, y_{n-1} + hK_1) \\ y_0 = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

- 也称为二阶Runge-Kutta法，简记为二阶R-K法。
- 利用不同的显化方法，对Simpson公式(1.17)进行各种显化，可得到其它R-K法。

2-1 Runge-Kutta法

- 由拉格朗日微分中值定理,

$$y'(\xi_{n-1}) = \{y(x_{n-1} + h) - y(x_{n-1})\} / h$$

- 故

$$y(x_{n-1} + h) = y(x_{n-1}) + hy'(\xi_{n-1})$$

- 因此, 利用 x_{n-1} 代替 ξ_{n-1} , 得

$$y(x_{n-1} + h) \approx y(x_{n-1}) + hy'(x_{n-1}) = y(x_{n-1}) + hf(x_{n-1}, y(x_{n-1}))$$

- 令 $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$, 即为Euler公式(1.7)。

2-1 Runge-Kutta法

- 直观上, 当 h 越小, x_{n-1} 与 ξ_{n-1} 越接近。故

$$y(x_{n-1} + \frac{h}{2}) \approx y_{n-\frac{1}{2}} = y_{n-1} + \frac{h}{2} f(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad (2.2)$$

- 又 (参见175页图5-1)

$$\begin{aligned} y'(\xi_{n-1}) &= \overline{HD} \approx \overline{FC} + \overline{EC} \\ &= y'(x_{n-1} + 0.5h) + y'(x_{n-1} + 0.5h) - y'(x_{n-1}) \\ &= 2y'(x_{n-1} + 0.5h) - y'(x_{n-1}) \\ &= 2f(x_{n-1} + 0.5h, y(x_{n-1} + 0.5h)) - f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) \end{aligned}$$

- 因此

$$\begin{aligned} y(x_{n-1} + h) &= y(x_{n-1}) + hy'(\xi_{n-1}) \\ &= y_{n-1} + hy'(\xi_{n-1}) \\ &= y_{n-1} + h[2f(x_{n-1} + 0.5h, y_{n-0.5}) - f(x_{n-1}, y_{n-1})] \end{aligned} \quad (2.3)$$

2-1 Runge-Kutta法

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{6} \left[f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{h}{2}, y\left(x_{k-1} + \frac{h}{2}\right)\right) + f(x_{k-1} + h, y(x_{k-1} + h)) \right] \quad (1.17)$$

- 利用(2.2)和(2.3)对(1.17)进行显化，得

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6}[K_1 + 4K_2 + K_3] \\ K_1 = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ K_2 = f(x_{n-1} + 0.5h, y_{n-1} + 0.5hK_1) \\ K_3 = f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + h(2K_2 - K_1)) \end{cases} \quad (2.4)$$

- 称为三阶Runge-Kutta法或三阶R-K法。

2-1 Runge-Kutta法

- 为了再提高精度，若用

$$\begin{cases} K_1 = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ K_2 = f(x_{n-1} + 0.5h, y_{n-1} + 0.5hK_1), & y(x_{n-1} + 0.5h) \approx y_{n-1} + 0.5K_1 \\ K_3 = f(x_{n-1} + 0.5h, y_{n-1} + 0.5hK_2), & y(x_{n-1} + 0.5h) \approx y_{n-1} + 0.5K_2 \\ K_4 = f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + hK_3), & y(x_{n-1} + h) \approx y_{n-1} + hK_3 \end{cases}$$

代入(1.17)式中的右端，得

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + \frac{h}{6} \left[f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{h}{2}, y\left(x_{k-1} + \frac{h}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + f(x_{k-1} + h, y(x_{k-1} + h)) \right] \\ &\approx y_{n-1} + \frac{h}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \end{aligned}$$

2-1 Runge-Kutta法

- 最终可得如下求解公式：

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ K_2 = f(x_{n-1} + 0.5h, y_{n-1} + 0.5hK_1), \\ K_3 = f(x_{n-1} + 0.5h, y_{n-1} + 0.5hK_2), \\ K_4 = f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + hK_3), \end{array} \right. \quad (2.6)$$

以上称为四阶Runge-Kutta法或四阶R-K法，也称经典R-K法。

2-1 Runge-Kutta法

- 例：使用三阶、四阶R-K法计算初值问题：

$$\begin{cases} y' = y^2, x \in [0, 0.5] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的部分计算解 y_1, y_2, y_3 ，其中 $h = 0.1$ 。

- 解：(1) 三阶R-K法

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_{n-1}, y_{n-1}) = y_{n-1}^2 \\ K_2 = f(x_{n-1} + 0.5h, y_{n-1} + 0.5hK_1) = (y_{n-1} + 0.5hy_{n-1}^2)^2 \\ K_3 = f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + h(2K_2 - K_1)) = (y_{n-1} + h(2K_2 - K_1))^2 \end{cases}$$

2-1 Runge-Kutta法

- 当 $n = 1$
$$\begin{cases} K_1 = f(x_0, y_0) = y_0^2 = 1 \\ K_2 = f(x_0 + 0.5h, y_0 + 0.5hK_1) = (y_0 + 0.5hy_0^2)^2 = 1.102500 \\ K_3 = f(x_0 + h, y_0 + h(2K_2 - K_1)) = (y_{n-1} + h(2K_2 - K_1))^2 \approx 1.255520 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \approx 1.111092 \end{cases}$$
- 当 $n = 2$
$$\begin{cases} K_1 = f(x_1, y_1) = y_1^2 = 1.111092^2 \approx 1.234525 \\ K_2 = f(x_1 + 0.5h, y_1 + 0.5hK_1) = (y_1 + 0.5hy_1^2)^2 = 1.375502 \\ K_3 = f(x_1 + h, y_1 + h(2K_2 - K_1)) = (y_1 + h(2K_2 - K_1))^2 \approx 1.594512 \\ y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \approx 1.249943 \end{cases}$$
- 当 $n = 3$: 略

2-1 Runge-Kutta法

- (2) 四阶R-K法

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_{n-1}, y_{n-1}) = y_{n-1}^2 \\ K_2 = f(x_{n-1} + 0.5h, y_{n-1} + 0.5hK_1) = (y_{n-1} + 0.5hK_1)^2 \\ K_3 = f(x_{n-1} + 0.5h, y_{n-1} + 0.5hK_2) = (y_{n-1} + 0.5hK_2)^2 \\ K_4 = f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + hK_3) = (y_{n-1} + hK_3)^2 \\ y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{array} \right.$$

- 当 $n = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_0, y_0) = y_0^2 = 1.000000 \\ K_2 = f(x_0 + 0.5h, y_0 + 0.5hK_1) = (y_0 + 0.5hK_1)^2 = 1.102500 \\ K_3 = f(x_0 + 0.5h, y_0 + 0.5hK_2) = (y_0 + 0.5hK_2)^2 \approx 1.113289 \\ K_4 = f(x_0 + h, y_0 + hK_3) = (y_0 + hK_3)^2 \approx 1.235052 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \approx 1.111111 \end{array} \right.$$

2-1 Runge-Kutta法

- 当 $n = 2$
$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_1, y_1) = y_1^2 = 1.234568 \\ K_2 = f(x_1 + 0.5h, y_1 + 0.5hK_1) = (y_1 + 0.5hK_1)^2 = 1.375551 \\ K_3 = f(x_1 + 0.5h, y_1 + 0.5hK_2) = (y_1 + 0.5hK_2)^2 \approx 1.392138 \\ K_4 = f(x_1 + h, y_1 + hK_3) = (y_1 + hK_3)^2 \approx 1.563313 \\ y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \approx 1.249999 \end{array} \right.$$
- 当 $n = 3$
$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_2, y_2) = y_2^2 = 1.562498 \\ K_2 = f(x_2 + 0.5h, y_2 + 0.5hK_1) = (y_2 + 0.5hK_1)^2 = 1.763913 \\ K_3 = f(x_2 + 0.5h, y_2 + 0.5hK_2) = (y_2 + 0.5hK_2)^2 \approx 1.790766 \\ K_4 = f(x_2 + h, y_2 + hK_3) = (y_2 + hK_3)^2 \approx 2.042258 \\ y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \approx 1.428568 \end{array} \right.$$

本章重点

- 了解基于数值微分和数值积分的Euler求解公式
- 了解显式和隐式的不同，及预测-校正系统
- 了解不同阶数Runge-Kutta方程的不同之处