2018-2019学年第一学期

计 算 方 法

第三章 插值法与最小二乘法

主讲人：张治国

zgzhang@szu.edu.cn

深圳大学医学部 生物医学工程学院

SHENZHEN UNIVERSITY HEALTH SCIENCE CENTER SCHOOL OF BIOMEDICAL ENGINEERING

本章内容

第三章 插值法与最小二乘法

✓ §1 插值法

1-1 插值问题

1-2 插值多项式存在的唯一性

1-3 插值基函数及Lagrange插值

§2 插值多项式中的误差

2-1 插值余式

✓ 2-2 高次插值多项式的问题

本章内容

第三章 插值法与最小二乘法

§ 3 分段插值法

✔ 3-1 分段线性Lagrange插值

3-2 分段二次Lagrange插值

§ 4 Newton插值

✔ 4-1 均差

✔ 4-2 Newton插值公式及其余项

4-3 差分

4-4 等距节点的Newton插值公式

4-5 Newton插值法算法设计

本章内容

第三章 插值法与最小二乘法

§5 Hermite插值

- ✓ 5-1 两点三次Hermite插值
- 5-2 插值多项式 $H_3(x)$ 的余项
- 5-3 分段两点三次Hermite插值
- 5-4 一般Hermite插值

§6 三次样条插值

- 6-1 三次样条函数
- 6-2 三次样条插值多项式
- 6-3 三次样条插值多项式算法设计
- 6-4 三次样条插值函数的收敛性

本章内容

第三章　插值法与最小二乘法

§7 数据拟合的最小二乘法

✔ 7-1 最小二乘法的基本概念

✔ 7-2 法方程组

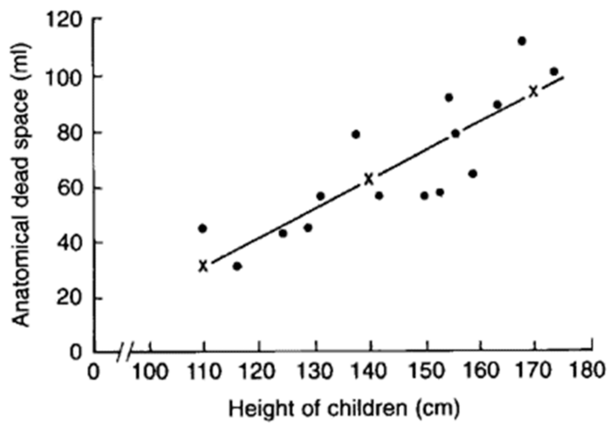
7-3 利用正交多项式作最小二乘拟合

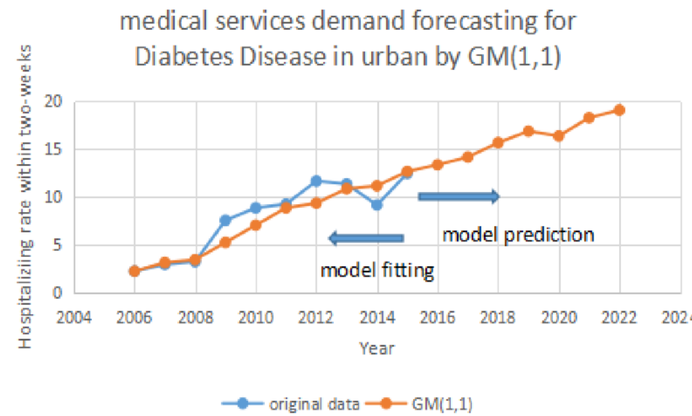
§1 插值法

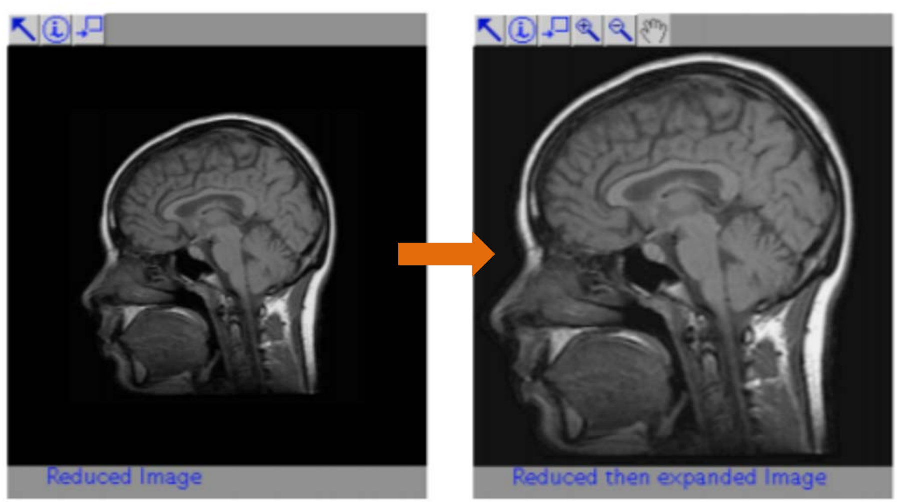
- 科学计算的很多问题和函数有关。但由于计算机硬件系统只能提供四则运算和逻辑运算，所以除了代数多项式和有理分式等少数函数关系式之外，绝大多数函数不能直接用计算机进行数值计算。
- 因此，需要研究能在计算机上实现的函数近似代替已知函数，并进行数值计算的问题。
- 插值法和数据拟合的最小二乘法是近似代替与计算的基本的并且是有效的方法。
- 基本出发点：根据函数 $f(x)$ 的一组数据，按照某种规则构造简单易算的函数 $P(x)$ 去近似 $f(x)$ 。

§ 1 插值法

- 插值在生物医学工程领域被非常广泛地应用：从有限的观测数据样本中估计出定量的函数关系，并预测出新数据







1-1 插值问题

- 问题描述：通过实验或者测量，获得函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$上的一组互异的点 $\{x_i\}$ 上的函数值 $\{y_i\}$, $i=0,1,\cdots,n$。

- 寻找一个简单易算的函数 $P(x)$，使得

$$P(x_i)=y_i \quad , \qquad i=0,1,\cdots,n \tag{1.1}$$

并以 $P(x)$ 近似代替 $f(x)$。

- 上述问题称为插值问题，按条件(1.1)求函数 $f(x)$的近似表达式的方法称为插值法，称条件(1.1)为插值条件，$P(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数，$(i=0,1,\cdots,n)$ 为插值节点，所属的区间 $[a,b]$ 为插值区间。

1-1 插值问题

- 一个特点：$y=P(x)$和 $y=f(x)$的曲线在 Oxy 平面上至少有 $n+1$个交点：$(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$，而在非节点处，$P(x)$ 和 $f(x)$可以有偏差，即 $P(x)$ 是 $f(x)$ 的近似值。

- 常见插值函数：插值函数应是在计算机上能进行直接计算的，包含多项式和有理函数。

1-1 插值问题

- 多项式：由变量和常数系数通过有限次加减法、乘法以及自然数幂次的乘方运算得到的代数表达式。
- 有理函数：通过多项式的加减乘除得到的函数。
- 常用插值函数是 n 次代数多项式，简称（代数）插值多项式， 相应的求插值多项式的方法称为多项式插值。

1-1 插值问题

- 多项式的优点：
  - 多项式中的运算都是四则运算，可在计算机上执行；
  - 多项式微分和原函数演算后仍是多项式；
  - 可以逼近各种函数，可以估算逼近误差；
  - 可以用别的多项式（特别是正交多项式）作为基函数进行表达，从而简化求表达式系数的运算。

1-2 代数插值多项式的存在唯一性

- 设

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{1.2}$$

是满足条件(1.1)的 $f(x)$ 的插值多项式，即

$$P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \cdots, P(x_n) = y_n$$

- 故

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

1-2 代数插值多项式的存在唯一性

- 上式是关于待定参数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的 n 阶线性方程组，其系数矩阵的行列式

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

称为Vandermonde行列式。

1-2 代数插值多项式的存在唯一性

- 若 $x_i \neq x_j$（当 $i \neq j$），则 $V \neq 0$ 。此时，(1.2)有唯一解，即满足插值条件(1.1)的函数 $f(x)$ 的代数插值多项式存在且唯一。
- 注：求解线性方程组的方法一般不便于用来求 $f(x)$ 的插值多项式，因为直接求解线性方程组的数值解计算量大、步骤多而易使舍入误差增大。

1-3 插值基函数及Lagrange插值

- 由线性空间理论，全体次数小于等于 n 的代数多项式构成的 $n+1$ 维线性空间 $P_n[x]$ 中的基底是不唯一的，故它可写成多种形式。

- 例如，$1, x, x^2, \cdots, x^n$ 为 $P_n[x]$的一组基，则(1.2)式 $P(x)_n$坐标为$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 。另由$P(x)_n$ 在 c 点的 $n+1$ 阶Taylor展开，$P_n(x) = P_n(c) + P_n'(c)(x-c) + \cdots + \dfrac{P_n^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$，可知 $1, (x-c), (x-c)^2, \cdots, (x-c)^n$ 也是 $P_n[x]$ 的一组基。

1-3 插值基函数及Lagrange插值

- 在 $P_n[x]$ 中定义一种特殊的基称为插值基函数，为 $n+1$ 个线性无关的特殊代数多项式：

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$$

- 则插值多项式可表示为

$$P_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) \qquad (1.3)$$

- 注意：虽然不同的插值基函数会组成不同形式的插值多项式，但插值多项式是唯一的。

1-3 插值基函数及Lagrange插值

- 三种形式的插值多项式：

  1. Lagrange插值 §1－§3

  2. Newton插值 §4

  3. Hermite插值 §5

1–3 插值基函数及Lagrange插值

- Lagrange插值设在区间 $[a, b]$上，$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为给定的一组互异的节点，构造 n 次多项式

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}, \qquad j = 0,1,\cdots,n \tag{1.4}$$

称为 n 次Lagrange插值基函数。

1-3 插值基函数及Lagrange插值

- 则 $l_j(x)$ 满足

$$l_j(x_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j,\\ 1 & i=j\ ,\end{cases} \qquad i,j=0,1,\cdots,n \tag{1.5}$$

- (1.5)式说明 $l_j(x)$ 只与插值节点有关。

- 用 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 的线性组合表示 n 次多项式：

$$P_n(x)=a_0l_0(x)+a_1l_1(x)+\cdots+a_nl_n(x) \tag{1.6}$$

其中，$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为待定参数。

1–3 插值基函数及Lagrange插值

- 对每个 $i=0,1,\cdots,n$ ，令

$$P_n(x_i)=a_0 l_0(x_i)+a_1 l_1(x_i)+\cdots+a_n l_n(x_i)=\sum_{j=0}^{n} a_j l_j(x_i)=y_i$$

- 利用(1.5)得到

$$a_i=y_i\ ,\quad i=0,1,\cdots,n$$

- 代入(1.6)得到多项式

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \qquad (1.7)$$

称为Lagrange插值多项式。

- 一个Lagrange插值多项式要有 $n+1$ 个 n 次Lagrange插值基函数组合而成，其组合系数恰好是节点上的函数值。

1-3 插值基函数及Lagrange插值

- 例1：给定 $f(x)=\sqrt{x}$ 的函数表如下：

x	144	169	255
$y=f(x)$	12	13	15

写出二次Lagrange插值基函数，并用二次Lagrange插值多项式计算 $f(175)$ 的近似值。

1-3 插值基函数及Lagrange插值

- 解：设 $x_0=144$，$x_1=169$， $x_2=225$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-169)(x-225)}{2025}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=-\frac{(x-144)(x-225)}{1400}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-144)(x-169)}{4536}$$

1-3 插值基函数及Lagrange插值

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$
$$= 12 l_0(x) + 13 l_1(x) + 15 l_2(x)$$

- 因此 $f(175) = \sqrt{175} \approx L_2(175) = 13.23015873$
- 但是 $\sqrt{175}$ 的准确值为 $f(175) = 13.22875656$

1−3 插值基函数及Lagrange插值

- 特别地， Lagrange插值在 $n=1$ 时为线性插值：只有两个插值节点，为两个一次插值基函数的线性组合。

- 设两节点和函数值为 $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$，则两个节点的一次插值基函数分别为：

$$l_k(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\quad,\qquad l_{k+1}(x)=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

- 由它们组成的一次Lagrange插值多项式为

$$L_1(x)=y_k l_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x)$$

$$=y_k\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+y_{k+1}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

1-3 插值基函数及Lagrange插值

- 例2：对例1中的函数表，用线性插值多项式计算 $f(175)$
- 解：因插值点 x=175 位于 x_1=169 和 x_2=225 之间，故取 x_1 和 x_2 为插值节点。于是

$$L_1(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- 可计算得

$$L_1(175) = 13.21428572$$

- 但是 $\sqrt{175}$ 的准确值为

$$f(175) = 13.22875656$$

- 可以看出 $L_1(175)$ 的误差比 $L_2(175)$ 大。

1-3 插值基函数及Lagrange插值

- 两个问题：

  1. 怎样估计 $L_n(x)$ 近似值代替 $f(x)$ 时所产生的误差?

  2. 是不是插值多项式次数越高，其计算结果就越精确?

§2 插值多项式中的误差

2-1 插值余项

- 估计 $L_n(x)$ 近似值代替 $f(x)$ 时所产生的截断误差
- 在区间 [a, b] 上用插值多项式 $P_n(x)$ 近似 $f(x)$ 时应满足：

$$R_n(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) = 0 \ , \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

- 设 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 。因此，$R_n(x)$ 在 [a, b] 上至少有 $n+1$ 个零点，可设

$$\begin{aligned} R_n(x) &= K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \\ &= K(x)\omega_{n+1}(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $K(x)$ 为待定函数。

2-1 插值余项

- 引进辅助函数 $\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - K(x)\omega_{n+1}(t)$
- 设 x 为一个固定值，且 $x \neq x_i (i = 0,1,\cdots,n)$，则 $\varphi(t)$ 在 $x, x_0, x_1, \cdots, x_n$ 共 $n+2$ 个点上取值为0。
- 由Rolle中值定理，导函数 $\varphi'(t)$ 在 (a, b) 上至少有 $n+1$ 个零点。

> Rolle中值定理：如果函数 $g(x)$ 满足以下三个条件，
> (1) 在闭区间 $[c, d]$ 上连续，(2) 在 (c, d) 内可导，(3) $g(c) = g(d)$，
> 则至少存在一个 $\xi \in (c, d)$，使得 $g'(\xi) = 0$。

2-1 插值余项

- 因此，$\varphi''(t)$ 在 (a, b) 上至少有 n 个零点。递推可知，在 (a, b) 上至少有一个点 ξ，使 $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$。因此

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-P_n^{(n+1)}(\xi)-K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi)=0$$

- 由于 $P_n^{(n+1)}(\xi)=0$ 和 $\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$，于是

$$f^{(n+1)}(\xi)-K(x)\cdot(n+1)!=0\,, \qquad K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

- 代入(2.1)，得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\,, \qquad \xi\in(a,b) \qquad (2.2)$$

- 称 $R_n(x)$ 为 n 次插值多项式 $P_n(x)$ 的余项或截断误差。

2-1 插值余项

- 定理1.1：设 $f(x)$ 在含节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 的区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 次可微，$P_n(x)$ 是 $f(x)$ 关于给定的 $n+1$ 个节点的 n 次插值多项式，则对于任意 $x\in[a,b]$，存在与 x 有关的 $\xi\in(a,b)$ 使(2.2)式成立，即n 次插值多项式 $P_n(x)$ 的余项或截断误差为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \qquad \xi\in(a,b)$$

2-1 插值余项

- 特别地，若 $M_{n+1}=\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|$

  则由(2.2)得，

$$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)| \tag{2.3}$$

- 从而

$$\max_{a\le x\le b}|R_n(x)|=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}|\omega_{n+1}(x)| \tag{2.4}$$

- 因

$$\max_{a\le x\le b}|\omega_{n+1}(x)|=\max_{a\le x\le b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

  所以当节点数大于插值多项式的次数时，应当选取靠近 x 的节点做插值多项式，误差会小。

2-1 插值余项

- 例：利用余项公式(2.3)估计前例中 $L_1(175)$ 和 $L_2(175)$ 的误差。
- 解：因 $f''(x)=-x^{-3/2}/4$ ， $f'''(x)=3x^{-5/2}/8$ ，

  故 $$M_2=\max_{169\le x\le 225}|f''(x)|=|f''(169)|\le 1.14\times 10^{-4}$$
  $$M_3=\max_{144\le x\le 225}|f'''(x)|=|f'''(144)|\le 1.51\times 10^{-6}$$

  于是 $$|R_1(175)|\le \frac{M_2}{2}|(175-169)(175-225)|\le 1.71\times 10^{-2}$$
  $$|R_2(175)|\le \frac{M_3}{3!}|(175-144)(175-169)(175-225)|\le 2.34\times 10^{-3}$$

- 可见， $L_2(175)$ 比 $L_1(175)$ 的误差小。

2-2 高次插值多项式的问题

- 上例提出了一个问题：在指定的插值区间上，用 $f(x)$ 的插值多项式近似代替 $f(x)$，其误差是否会随着插值节点的加密（多项式的次数增高）而减小?

- 答案：对于某些函数，适当地提高插值多项式的次数会提高替代精度。当函数 $f(x)$ 是连续函数时，加密插值点数虽然使插值函数与被插值函数在更多节点上的取值相等，但由于插值多项式在某些非节点处的振荡可能加大，因而可能使在非节点处的误差变得很大。

- Runge发现：误差并不一定会随插值节点加密而减少。

2-2 高次插值多项式的问题

- 例如，对于函数 $f(x)=1/(x^2+1)$ ， $-5\le x\le 5$ ，

  取等距的插值节点：

$$x_k=-5+kh\ ,\quad h=10/n,\ \ k=0,1,\cdots,n$$

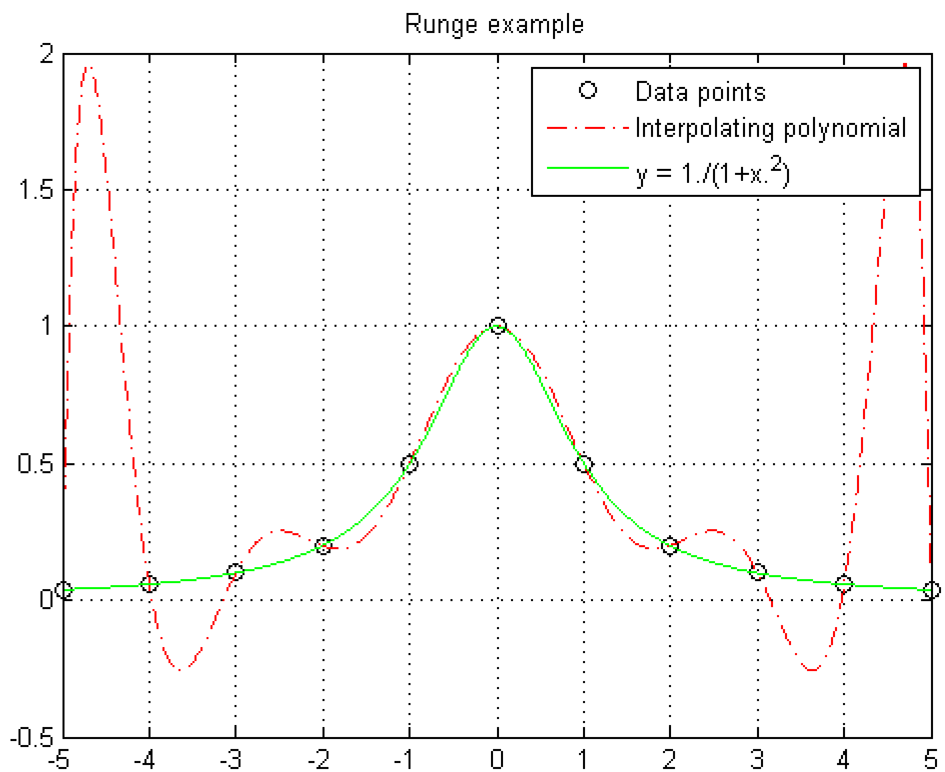
  得到Lagrange插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)\cdot\frac{1}{1+x_k^2}\qquad(2.5)$$

- 则在节点等距的条件下，当 $n\to\infty$ 时，由(2.5)式表示的多项式 $L_n(x)$ 只在 $|x|\le 3.63$ 内收敛，之外发散到无穷。

2-2 高次插值多项式的问题

- 多项式不收敛的现象称作Runge现象。



- Runge现象说明并非多项式的次数越高，精度就越高。

§3 分段插值法

- 设给定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的节点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b \tag{3.1}$$

及其对应的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，要求插值多项式 $P(x)$ 满足

$$P(x_i) = y_i \ , \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{3.2}$$

- 当 n 较大时，为克服高次插值多项式的弊端，将 $[a, b]$ 划分为若干个插值子区间，区间的分点取在节点上，在每一个子区间上做 $f(x)$ 的低次插值多项式。
- 所有插值子区间上的插值多项式构成了 $[a, b]$ 上的分段函数，称为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的分段插值多项式。

3-1 分段线性Lagrange插值

- 取相邻的两个节点 x_k, x_{k+1} 形成一个插值子区间 $[x_k, x_{k+1}]$
- 做线性插值多项式：对每个 $k = 0,1,\cdots,n-1$

$$L_h^{(k)}(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \qquad (3.3)$$

- 令

$$L_h(x) = \begin{cases} L_h^{(0)}(x) & x \in [x_0, x_1] \\ L_h^{(1)}(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \cdots\cdots & \\ L_h^{(n-1)}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \qquad (3.4)$$

- 由(3.3)和(3.4)，得 $L_h(x_i) = y_i$ ， $i = 0,1,\cdots,n$。
- 称 $L_h(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的分段线性插值多项式。

3-1 分段线性Lagrange插值

- $L_h(x)$ 的余项为

$$R_1(x) = f(x) - L_h(x) = f(x) - L_h^{(k)}(x)$$
$$= \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_k)(x - x_{k+1}) \qquad (3.5)$$

- 因此，如果

$$M_2 = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|, \quad h = \max_{0 \le k \le n-1} h_k, \quad h_k = x_{k+1} - x_k$$

则

$$\max_{a \le x \le b} |R_1(x)| \le \frac{M_2}{2} \max_{a \le x \le b} |(x - x_k)(x - x_{k+1})| \le \frac{M_2}{8} h^2 \qquad (3.6)$$

3-1 分段线性Lagrange插值

- 分段线性插值多项式 $y = L_h(x)$ 的图形是连接平面上的点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ 的一条折线。因此，在节点处 $y = L_h(x)$ 往往出现尖拐点，使得分段线性插值函数的光滑性不好。

- 但是，可以证明（过程略）：$\lim_{h \to 0} L_h(x) = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致成立。即 $L_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$ 。

3-1 分段线性Lagrange插值

- 对于给定的一组数据 (x_i, y_i) $(i = 0,1,\cdots,n)$，设节点按

  $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 排列，对于插值点 $x = u$，有

$$v = L_h^{(k)}(u) = y_k \frac{u - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{u - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \ u \in [x_k, x_{k+1}] \quad (3.7)$$

- 问题：对于给定的插值点 $x = u$，公式(3.7)中的下标 k 如何确定?

3-1 分段线性Lagrange插值

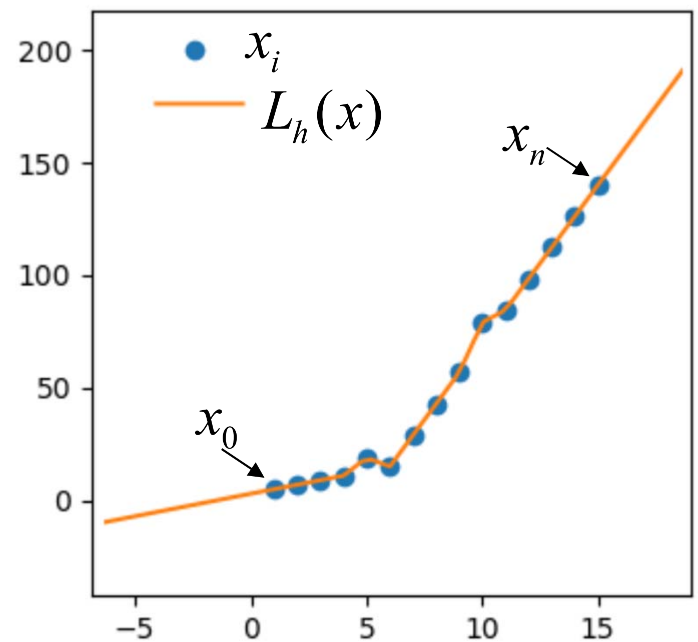
- 方法：

  1) 若点 u 位于两节点 x_i, x_{i+1} 之间，则取这两节点内插；

  2) 当 $u < x_0$ 或 $u > x_n$ 时，则需要外推，
  前者取 $x_0, x_1 (k=0)$ ， 后者取 $x_{n-1}, x_n (k=n-1)$ 。

- 归纳如下：

$$k = \begin{cases} 0 & u \le x_0 \\ i & x_i < u \le x_{i+1},\ 1 \le i \le n-1 \\ n-1 & u \ge x_n \end{cases}$$



3-2 分段二次Lagrange插值

- 当给定的函数表中节点远多于3时，采用分段二次插值法可以提高计算精度。

- 给定插值点 $x = u$，应取靠近 u 的三个节点做二次插值多项式。

- 分段二次插值的计算公式：

$$v = L_h^{(k)}(u) = \sum_{j=k}^{k+2} y_j \left(\prod_{r=k, r\neq j}^{k+2} \frac{u - x_r}{x_j - x_r} \right) \tag{3.8}$$

3-2 分段二次Lagrange插值

- 当 $u\in[x_k,x_{k+1}]$，另一个节点取 x_{k-1} 还是 x_{k+2}，需要判断 u 偏向区间的哪一侧。当 u 靠近 x_k 时，补选 x_{k-1} 为节点，否则补选 x_{k+2} 为节点。

- 外推：当 u 靠近 x_0 而 $u<x_1$ 时，应取 x_0，x_1，x_2 为节点；当 u 靠近 x_n 而 $u>x_{n-1}$ 时，应取 x_{n-2}，x_{n-1}，x_n 为节点。

- 综上，选取靠近 u 的相邻三个节点（确定 k）的方法：

$$k=\begin{cases}0 & u<x_1\\ i-1 & x_i<u\le x_{i+1} \quad and \quad |u-x_i|\le|u-x_{i+1}|,\ i=1,2,\cdots,n-1\\ i & x_i<u\le x_{i+1} \quad and \quad |u-x_i|>|u-x_{i+1}|,\ i=1,2,\cdots,n-2\\ n-2 & u>x_{n-1}\end{cases}$$

3-2 分段二次Lagrange插值

- 例：给出 $y = f(x)$ 的数据如下：

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.30	0.40	0.55	0.65	0.80	1.05
y_i	0.30163	0.41075	0.57815	0.69675	0.87335	1.18885

用分段二次插值多项式计算 $f(x)$ 在 $x = 0.36, 0.42, 0.75,$ 0.98 处的近似值。

3-2 分段二次Lagrange插值

- 解：因 $u_1 = 0.36 \in [0.30, 0.40]$，应该取 $x_0 = 0.30$，$x_1 = 0.40$，$x_2 = 0.55$；
- 因 $u_2 = 0.42 \in [0.40, 0.55]$，且它靠近0.40，故仍取 $x_0 = 0.30$，$x_1 = 0.40$，$x_2 = 0.55$。
- 于是，计算 $f(0.36)$ 和 $f(0.42)$ 的分段二次插值公式：

$$L_h(u) = \sum_{j=0}^{2} y_j \prod_{r=0, r\neq j}^{2} \frac{u - x_r}{x_j - x_r}$$

- 因此

$$f(0.36) \approx L_h(0.36) = 0.36671$$

$$f(0.42) \approx L_h(0.42) = 0.43243$$

3-2 分段二次Lagrange插值

- 同样分析，在 $x = 0.75$，0.98 处，应该选取如下3点：
$x_3 = 0.65, x_4 = 0.80, x_5 = 1.05$。
- $f(0.75)$ 和 $f(0.98)$ 的插值公式：

$$L_h(u) = \sum_{j=3}^{5} y_j \prod_{r=3, r\neq j}^{5} \frac{u - x_r}{x_j - x_r}$$

- 因此

$$f(0.75) \approx L_h(0.75) = 0.81344$$

$$f(0.98) \approx L_h(0.98) = 1.09764$$

§4 Newton插值

- 设已知函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值依次为：$f_0, f_1, \cdots, f_n$。

- Newton插值法的插值基函数：

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_j(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1}) = \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i), \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{4.1}$$

§ 4 Newton插值

- 利用它们组合成如下形式的 n 次多项式：

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \qquad (4.2)$$

其中，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为待定参数。

- 比如：

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

§ 4 Newton插值

- 插值多项式满足条件：

$$P_n(x_i) = f_i, \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

- 即 $$P_n(x_i) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{k=0}^{j-1}(x_i - x_k) = f_i, \quad i = 0,1,\cdots,n$$

- 因此解方程可得

$$a_0 = f_0, \qquad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0},$$

$$a_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}, \qquad \cdots\cdots$$

- 为得到参数 a_i 的一般表达式，引入均差的定义。

4-1 均差

- 定义4.1 设 $f(x)$ 在互异的节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值为 $f_0, f_1, \cdots, f_n$，称

$$f[x_i, x_k] = \frac{f_k - f_i}{x_k - x_i}, \quad k \neq i$$

为 $f(x)$ 关于 x_i, x_k 的一阶均差（差商）。

称 $$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j}, \qquad i \neq j \neq k$$

为 $f(x)$ 关于 x_i, x_j, x_k 的二阶均差。

一般地，称

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

为 $f(x)$ 关于 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的k 阶均差。

4-1 均差

- 利用数学归纳法可证 $f(x)$ 关于点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的 k 阶均差是 $f(x)$ 在这些点上的函数值的线性组合（过程略），即

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] = \sum_{j=0}^{k} f(x_j) \prod_{i=0, i\neq j}^{k} \frac{1}{x_j - x_i} \qquad (4.4)$$

- 上式表明：均差与节点的排列顺序无关。
- 对调 $f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k]$ 中任意两个节点的位置，结果不变。

4-1 均差

- 因此，均差具有对称性：

$$f[x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n]=f[x_0,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n],\quad i\neq j$$

- 进而可推导出：

$$\begin{aligned}
f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k] &= f[x_{k-1},x_1,\cdots,x_0,x_k] \\
&= \frac{f[x_{k-1},x_1,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_{k-1},x_1,\cdots,x_{k-2},x_0]}{x_k-x_0} \\
&= \frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

- 利用上式可推导出均差表（下页）。

4-1 均差

- 均差的列表计算：均差表（以 $n = 4$ 为例）

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4}]$
x_0	f_0				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	f_3		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	f_4				

4-2 Newton插值公式及其余项

- 设 $x \in [a,b], x \neq x_i (i=0,1,\cdots,n)$，由一阶均差定义得

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0), \qquad x \neq x_0 \qquad (4.6)$$

- 由(4.5)可知

$$f[x, x_0, \cdots, x_k] = \frac{f[x, x_0, \cdots, x_{k-1}] - f[x_0, x_1, \cdots, x_k]}{x - x_k}$$

继而得到

$$f[x, x_0, \cdots, x_{k-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] + f[x, x_0, \cdots, x_k](x - x_k) \quad (4.7)$$

$(k = 1, 2, \cdots, n)$

4-2 Newton插值公式及其余项

- 利用(4.7)将(4.6)递推展开为

$$f(x)=f(x_0)+\{f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)\}(x-x_0)$$

$$=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x,x_0,x_1](x-x_1)(x-x_0)$$

$$=\cdots$$

$$=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2]\prod_{j=0}^{1}(x-x_j)+\cdots$$

$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n]\prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)+f[x,x_0,\cdots,x_n]\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

- 即

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}f[x_0,x_1,\cdots,x_k]\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)+f[x,x_0,\cdots,x_n]\prod_{j=0}^{n}(x-x_j) \tag{4.8}$$

$$=N_n(x)+R_n(x)$$

4-2 Newton插值公式及其余项

- 因此有 $N_n(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}f[x_0,x_1,\cdots,x_k]\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$ (4.9)

$$R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n]\prod_{j=0}^{n}(x-x_j) \qquad (4.10)$$

- 因为 $R_n(x_i)=f[x_i,x_0,\cdots,x_n]\prod_{j=0}^{n}(x_i-x_j)=0$，所以

$$N_n(x_i)=f(x_i), \qquad i=0,1,\cdots,n$$

- $N_n(x)$ 满足插值条件，称之为 $f(x)$ 的 n 次Newton插值多项式，并称 $R_n(x)$ 为 $N_n(x)$ 的插值余项。

4-2 Newton插值公式及其余项

- 由于插值多项式的唯一性，n 次Lagrange插值多项式和 n 次Newton插值多项式是等价的。因此余项的估计

$$R_n(x) = f[x, x_0, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (4.11)$$

其中，$\xi \in (a,b)$ 且依赖于 x。

- 同时得到均差与导数的关系：

$$f[x, x_0, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

- 视 x 为一个节点，对于 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k], k = 0,1,\cdots,n$ ，可推广得出，必存在一个位于节点间的 ξ，使

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \qquad (4.12)$$

4-2 Newton插值公式及其余项

- 余项公式(4.10)的计算需要 $f(x)$ 的值，并不实用。
- 因为 k 阶均差接近常数时， $k+1$ 阶均差就会接近于0，此时有 $f(x) \approx N_k(x)$ 。
- 实用的余项近似公式：

$$
\begin{aligned}
R_k(x) &= f(x) - N_k(x) \\
&\approx f[x_0, x_1, \cdots, x_{k+1}] \prod_{j=0}^{k} (x - x_j)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

- 上式可以直接利用均差表估计误差。

4-2 Newton插值公式及其余项

- Newton插值注意事项

1. 在Newton插值法中，应避免使用高阶插值多项式。
2. 在采用分段插值时，应选择靠近插值点的节点作为分段插值公式中的节点。先判断插值点 x 所在的子区间，结合插值多项式次数，选择靠近 x 的节点。

4-2 Newton插值公式及其余项

- 例1 已知 $f(x)$ 的函数表如下表所示，用分段三次Newton插值多项式计算 $f(0.596)$ 的近似值，并估计误差。
- 解：首先，生成均差表。

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}, x_{i+5}]$
0.4	0.41075					
		1.116				
0.55	0.57815		0.28			
		1.186		0.1973		
0.65	0.69675		0.35892		0.03146	
		1.27573		0.21303		-4.9231×10^{-4}
0.80	0.88811		0.43348		0.03114	
		1.38410		0.2286		
0.90	1.02652		0.52492			
		1.51533				
1.05	1.25382					

4-2 Newton插值公式及其余项

- 解：插值点 $x = 0.596$，可选择节点0.40, 0.55, 0.65, 0.80。

  因此

$$N_3(x) = 0.41075 + (x - 0.4)\{1.116 + (x - 0.55)[0.28 + 0.1973(x - 0.65)]\}$$

$$f(0.596) \approx N_3(0.596) = 0.63191$$

- 截断误差

$$|R_3(x)| \approx 0.03146 \cdot |(x - 0.40)(x - 0.55)(x - 0.65)(x - 0.80)|$$

- 故 $$|R_3(0.596)| \approx 4.656 \times 10^{-6}$$

4-2 Newton插值公式及其余项

- 当 x 位于表末：$x_{n-1}<x<x_n$ 时，为提高精度，采用公式：

$$
\begin{aligned}
N_n(x) &= f(x_n)+f[x_n,x_{n-1}](x-x_n)+f[x_n,x_{n-1},x_{n-2}](x-x_n)(x-x_{n-1}) \\
&\quad +\cdots+f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_0](x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1) \\
&= f(x_n)+\sum_{k=1}^{n} f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-k}]\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_{n-j}) \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

- 因

$$
f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-k}]=f[x_{n-k},\cdots,x_{n-1},x_n]
$$

故(4.14)中的各阶均差都可在均差表中找到。

- Newton插值与Lagrange插值方法比较：当增加一个节点时，Newton插值法的公式只需增加一项，且前面计算结果可用，因此更便于计算机上实现。

4-3 差分

- 等距节点插值是常见的插值方法，设有 $n+1$ 个等距的插值节点：$x_k = x_0 + kh$ ，$k = 0,1,\cdots,n$，其中 $h = (x_n - x_0)/n$ 为步长。

- 差分的定义

  定义4.2　设 $f(x)$ 在等距节点 $x_k = x_0 + kh$, $k = 0,1,\cdots,n$，上的函数值为 f_k，称

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k \qquad (4.15)$$

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1} \qquad (4.16)$$

  分别为 $f(x)$ 在 $x = x_k$ 处的一阶向前差分和一阶向后差分。符号 Δ 和 ∇ 分别称为向前差分算子和向后差分算子。

4-3 差分

- 一般称 $f(x)$ 在两个相邻节点 $x_k, x_{k+1}(x_{k-1})$ 上的 $m-1$ 阶向前（后）差分的差为 $f(x)$ 在 $x=x_k$ 处的 m 阶向前（后）差分，记作

$$\Delta^m f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k \tag{4.17}$$

$$\nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1} \tag{4.18}$$

- 利用数学归纳法可得出一个关系 (4.19)

$\Delta^m f_k = \nabla^m f_{k+m}$ ，m 为任意正整数

4-3 差分

- 当节点等距时，均差 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 可用 k 阶差分表示：

$$f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta f_0}{h}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\Delta f_1-\Delta f_0}{2h^2}=\frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$$

- 一般地 $$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{\Delta^k f_0}{k!h^k},\quad (k=1,2,\cdots) \tag{4.20}$$
- 类似地，可得

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_k,x_{k-1},\cdots,x_0]=\frac{\nabla^k f_k}{k!h^k},\quad (k=1,2,\cdots) \tag{4.21}$$

- 根据均差与导数关系，由(4.20)可得

$$\Delta^k f_0=h^k f^{(k)}(\xi),\quad \xi\in(x_0,x_k) \tag{4.22}$$

4-4 等距节点的Newton插值公式

- 设节点 $x_k = x_0 + kh,\quad k = 0,1,\cdots,n$，记 $x = x_0 + th,\quad t > 0$。

  则 $x - x_k = (t-k)h,\quad k = 0,1,\cdots,n$ 。

- 由(4.20)式，得

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k]\prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j) = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k} t(t-1)\cdots(t-k+1)h^k$$

$$= \frac{\Delta^k f_0}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(t - j)$$

4-4 等距节点的Newton插值公式

- 因此由(4.9)，Newton插值公式可简化为Newton向前（差分）插值公式

$$N_n(x_0+th)=f_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta^k f_0}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(t-j) \qquad (4.23)$$

余项可表示为

$$R_n(x_0+th)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}t(t-1)\cdots(t-n)h^{n+1}=\frac{\Delta^{n+1}f_0}{(n+1)!}t(t-1)\cdots(t-n) \qquad (4.25)$$

- 类似地，Newton向后（差分）插值公式

$$N_n(x_n+th)=f_n+\sum_{k=1}^{n}\frac{\nabla^k f_0}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(t+j) \qquad (4.26)$$

相应的余项可表示为

$$R_n(x_n+th)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}t(t+1)\cdots(t+n)h^{n+1}=\frac{\nabla^{n+1}f_n}{(n+1)!}t(t+1)\cdots(t+n) \qquad (4.28)$$

4-4 等距节点的Newton插值公式

- 向前插值公式和向后插值公式的各阶向前向后差分计算可以列出差分表，以 $n=4$ 为例：

$f(x_k)$	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$
$f(x_0)$				
	Δf_0			
$f(x_1)$		$\Delta^2 f_0$		
	Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
$f(x_2)$		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$
	Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
$f(x_3)$		$\Delta^2 f_2$		
	Δf_3			
$f(x_4)$				

- 利用向前、向后差分的关系（4.19），计算向前、向后差分可用同一张表。

4-4 等距节点的Newton插值公式

- 例2 给定 $f(x) = \cos(x)$ 的函数表如下：

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x_k)$	1.0000	0.99500	0.98007	0.95534	0.92106	0.87758	0.82534

- 用四次Newton插值法计算 $\cos(0.048)$ 及 $\cos(0.566)$ 的近似值，并估计误差。

4-4 等距节点的Newton插值公式

- 解：首先制作差分表

$f(x_k)$	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$	$\Delta^5 f_k$	$\Delta^6 f_k$
1.0000						
	-0.00500					
0.99500		-0.00993				
	-0.01493		0.00013			
0.98007		-0.00980		0.00012		
	-0.02473		0.00025		-0.00002	
0.95534		-0.00955		0.00010		0.00001
	-0.03428		0.00035		-0.00001	
0.92106		-0.00920		0.00009		
	-0.04348		0.00044			
0.87758		-0.00876				
	-0.05224					
0.82534						

4-4 等距节点的Newton插值公式

- 易知 $h=0.1$，当 $x=0.048$ 时， $t=\dfrac{x-x_0}{h}=0.48$

$$N_4(x_0+th)=f_0+\Delta f_0 t+\frac{\Delta^2 f_0}{2!}t(t-1)+\frac{\Delta^3 f_0}{3!}t(t-1)(t-2)+\frac{\Delta^4 f_0}{4!}t(t-1)(t-2)(t-3)$$

$$=f_0+t\left(\Delta f_0+(t-1)\left(\frac{\Delta^2 f_0}{2!}+(t-2)\left(\frac{\Delta^3 f_0}{3!}+(t-3)\left(\frac{\Delta^4 f_0}{4!}\right)\right)\right)\right)$$

$$=1.0000+0.48\cdot\left(-0.00500-0.52\left(\frac{-0.00993}{2}-1.52\left(\frac{0.00013}{6}-2.53\times\frac{0.00012}{24}\right)\right)\right)$$

$$=0.99884\approx\cos(0.048)$$

$$|R_4(0.0048)|\le\left|\frac{M_5}{5!}t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\right|h^5=1.5845\times10^{-7}$$

$$M_5=|\sin 0.6|=0.565$$

§ 5 Hermite插值

- 问题：分段低次插值法的插值多项式导函数的连续性不好
- 要求：插值函数 $H(x)$ 满足一阶光滑的条件：

$$\begin{cases} H(x_i) = f(x_i), & i = 0,1,\cdots,n \\ H'(x_i) = f'(x_i) = y_i', & i = 0,1,\cdots,n \end{cases} \tag{5.1}$$

- 更一般地，如果要求插值函数具有 m_i 阶 $(m_i = 1,2,\cdots)$ 光滑度，插值函数满足：

$$\begin{cases} H(x_i) = f(x_i), & i = 0,1,\cdots,n \\ H^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), & i = 0,1,\cdots,n;\ j = 1,2\cdots,m_i \end{cases} \tag{5.2}$$

- 称上述插值问题为Hermite插值。

§ 5 Hermite插值

- 注：满足条件(5.1)的Hermite插值是最简单情形，插值多项式需要满足一共 $2n+2$ 个条件，因此，满足(5.1)的Hermite插值函数为不超过 $2n+1$ 次的多项式。

- 由于高次插值多项式的收敛性和稳定性难以保证，所以节点个数较多时，需要采用分段插值法。

5-1 两点三次Hermite插值

- 已知函数 $f(x)$ 在节点 x_0，x_1上满足

x	x_0	x_1
$f(x)$	y_0	y_1
$f'(x)$	y'_0	y'_1

例如

x	1	2
$f(x)$	2	3
$f'(x)$	0	-1

- 求一个三次Hermite插值多项式 $H_3(x)$，满足

$$\begin{cases} H_3(x_i) = y_i, & i = 0,1 \\ H'_3(x_i) = y'_i, & i = 0,1 \end{cases} \tag{5.3}$$

5-1 两点三次Hermite插值

- 设 $\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$ 都是三次多项式，并满足

$$\alpha_j(x_i)=\begin{cases}0 & (j\neq i;\ i,j=0,1)\\ 1 & (j=i;\ i,j=0,1)\end{cases} \tag{5.4}$$

$$\alpha'_j(x_i)=0 \quad (i,j=0,1) \tag{5.5}$$

$$\beta'_j(x_i)=\begin{cases}0 & (j\neq i;\ i,j=0,1)\\ 1 & (j=i;\ i,j=0,1)\end{cases} \tag{5.6}$$

$$\beta_j(x_i)=0 \quad (i,j=0,1) \tag{5.7}$$

5-1 两点三次Hermite插值

- 设 $H_3(x) = a_0\alpha_0(x) + a_1\alpha_1(x) + b_0\beta_0(x) + b_1\beta_1(x)$

  容易计算出 $a_j = y_j \quad (j = 0,1), \quad b_j = y'_j \quad (j = 0,1)$

- 因此

$$\begin{aligned} H_3(x) &= y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y'_0\beta_0(x) + y'_1\beta_1(x) \\ &= \sum_{j=0}^{1}[a_j\alpha_j(x) + b_j\beta_j(x)] \qquad (5.8) \end{aligned}$$

5-1 两点三次Hermite插值

$\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$ 的构造表达式

- 由(5.4)和(5.5)知，节点 x_0,x_1 分别是 $\alpha_1(x),\alpha_0(x)$ 的二重两点，并且 $\alpha_j(x)$ 是三阶多项式，因此可设 $l_j(x)$ 是Lagrange插值基函数并构造 $\alpha_0(x),\alpha_1(x)$ 如下

$$\begin{aligned}\alpha_j(x) &= (ax+b)l_j^2(x) \\ &= (ax+b)\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2,\ i,j=0,1,i\neq j\end{aligned} \tag{5.9}$$

5-1 两点三次Hermite插值

- 利用 $\alpha_j(x_j)=1,\ \ \alpha_j'(x_j)=0$，解出

$$a=-2/(x_j-x_i),\quad b=1+2x_j/(x_j-x_i) \tag{5.10}$$

- 上式代入(5.9)得

$$\alpha_j(x)=\left(1-2\frac{x-x_j}{x_j-x_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2,\ (i,j=0,1;\ \ j\neq i) \tag{5.11}$$

5-1 两点三次Hermite插值

- 类似地，$\beta_0(x), \beta_1(x)$ 构造如下：

$$\beta_j(x) = (cx+d)l_j^2(x)$$

$$= (cx+d)\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2, \quad i, j = 0,1, i \neq j \qquad (5.12)$$

- 解得 $c = 1, \quad d = -x_j$

$$\beta_j(x) = (x-x_j)\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2, \quad (i, j = 0,1; \quad j \neq i) \qquad (5.13)$$

5-1 两点三次Hermite插值

- $\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$ 的具体形式：

$$\alpha_0(x)=\left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2,\quad \alpha_1(x)=\left(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$\beta_0(x)=\left(x-x_0\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2,\quad \beta_1(x)=\left(x-x_1\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

- 两个节点的三次Hermite插值多项式：

$$H_3(x)=y_0\left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1\left(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+y_0'\left(x-x_0\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1'\left(x-x_1\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 \qquad (5.14)$$

5-1 两点三次Hermite插值

- 例1 已知 $f(x)$ 在两个节点上的函数值及导数值如下表，求 $f(x)$ 的三次Hermite插值多项式

x	1	2
$f(x)$	2	3
$f'(x)$	0	-1

- 解：设 $x_0 = 1,\ x_1 = 2$，则

5-1 两点三次Hermite插值

$$\alpha_0(x)=\left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(2x-1)(x-2)^2$$

$$\alpha_1(x)=\left(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=(5-2x)(x-1)^2$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(x-1)(x-2)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=(x-2)(x-1)^2$$

- 因此 $$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)+y_1'\beta_1(x)$$
$$=-3x^3+13x^2-17x+9$$

5-2 插值多项式 $H_3(x)$ 的余项

- 设

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x)$$

- 由插值条件知

$$R_3(x_i) = R_3{}'(x_i) = 0, \quad i = 0,1$$

- 因此，节点 x_0 和 x_1 都是 $R_3(x)$ 的二重零点，故设

$$R_3(x_i) = K(x)(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \qquad (5.15)$$

其中 $K(x)$ 为待定函数。

- 类似于Lagrange插值余项的推导，可得到，至少存在一点 $\xi \in [x_0, x_1]$，使 $\varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!K(x) = 0$ 。于是 $K(x) = f^{(4)}(\xi)/4!$，代入(5.15)得到

$$R_3(x_i) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2 (x - x_1)^2$$

5-3 分段两点三次Hermite插值多项式

- 设已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 上的函数值 y_i 和导数值 y_i'，$i = 0,1,\cdots,n$。如果分段函数 $H_h(x)$ 满足

  (1) $H_h(x)$ 在每一个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式；

  (2) $H_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上一次连续可微；

  (3) $H_h(x_i) = y_i$, $H_h'(x_i) = y_i'$, $i = 0,1,\cdots,n$。

  则称 $H_h(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的分段三次Hermite插值多项式。

- 具体推导略（88-89页）。

5-4 一般Hermite插值

- 有时对插值函数在节点 x_i 上的光滑度要求较高，要求节点 x_i 的高阶导数连续，这就成为一般Hermite插值问题。
- 设函数 $f(x)\in C^m[a,b]$（m 次连续可微函数集）在 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上的函数值 $f(x_i)=y_i$ 和 m_i-1 导数值 $f^{(m_i-1)}(x_i)=y_i^{(m_i-1)}$，求满足条件

$$H_M^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n;\ j=0,1,2\cdots,m_i-1$$

的 M 次多项式 $H_M(x)$，其中 $M+1=\sum_{i=0}^{n}m_i$，则称 $H_M(x)$ 为 $f(x)$ 关于节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 M 次Hermite插值多项式。

- 对于Hermite插值使用较多的是 $m_i=1, 2, 3$ 的情形，$m_i=1, 2$ 时就是Lagrange插值和 $2n+1$ 次Hermite插值。

§6 三次样条插值

6-1 三次样条插值

- 问题：在实际问题中，因被近似代替的函数 $f(x)$ 不能有拐点，且曲率不能有突变，因此要求插值函数 $P(x)$ 必须二次连续可微且不变号。

- 如果函数 $P(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $m-1$ 次连续可微，则称 $P(x)$ 具有 $m-1$ 阶光滑度。

- 分段两点三次Hermite插值多项式只有一阶光滑度。为构造具有二阶光滑度的插值函数，引入三次样条函数概念。

6-1 三次样条插值

三次样条函数定义

- 定义6.1 如果函数 $S(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足条件：

  1）$S(x), S'(x), S''(x)$ 在 $[a, b]$上连续，记作 $S(x) \in C^2[a,b]$；

  2）在子区间 $[x_k, x_{k+1}](k=0,1,\cdots,n-1)$ 上是三次多项式，其中 $a \le x_0 < x_1 \cdots < x_n \le b$，则称 $S(x)$ 是 $[a, b]$ 上的三次样条函数；

  3）对于在节点上给定的函数值 $f(x_i)=y_i (i=0,1,\cdots,n)$ ，如果 $S(x)$ 满足 $S(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n)$，则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的三次样条插值函数。

6-2 三次样条插值多项式

- 设给定函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的节点为

$$a \le x_0 < x_1 \cdots < x_n \le b$$

及节点上的函数值

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

- 求 $f(x)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，使

$$S(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

6-2 三次样条插值多项式

- 因 $S(x)$ 是 $[a, b]$ 上的分段三次插值多项式，故

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x) & x\in[x_0,x_1] \\ S_1(x) & x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases} \tag{6.2}$$

- $S(x)$满足的条件

i) 插值条件：

$$S_k(x_j)=y_j \quad (j=k,k+1, \quad k=0,1,\cdots,n-1) \tag{6.3}$$

ii) 左右极限条件：

$$\lim_{x\to x_k^-} S^{(p)}(x)=\lim_{x\to x_k^+} S^{(p)}(x) \quad (p=0,1,2;\ k=1,2,\cdots,n-1) \tag{6.4}$$

6-2 三次样条插值多项式

iii) 三类边界条件：在端点处的满足下列要求：

1) 第1类边界条件：$\begin{cases} S'(x_0) = f_0' \\ S'(x_n) = f_n' \end{cases}$ （6.5）

2）第2类边界条件（自然边界条件）：

$$\begin{cases} S''(x_0) = f_0'' \\ S''(x_n) = f_n'' \end{cases} \qquad (6.6)$$

3）第3类边界条件（周期条件）：

设 $f(x)$ 是以 $x_n - x_0$ 为周期，则

$$\lim_{x \to x_0^+} S^{(p)}(x) = \lim_{x \to x_n^-} S^{(p)}(x) \quad (p = 0,1,2) \qquad (6.7)$$

- 注：在(6.3)、(6.4)和(6.5)−(6.7)中之一，共有 $4n$ 条件，可确定 $4n$ 个待定参数，恰好等于参数总数。（算法略）

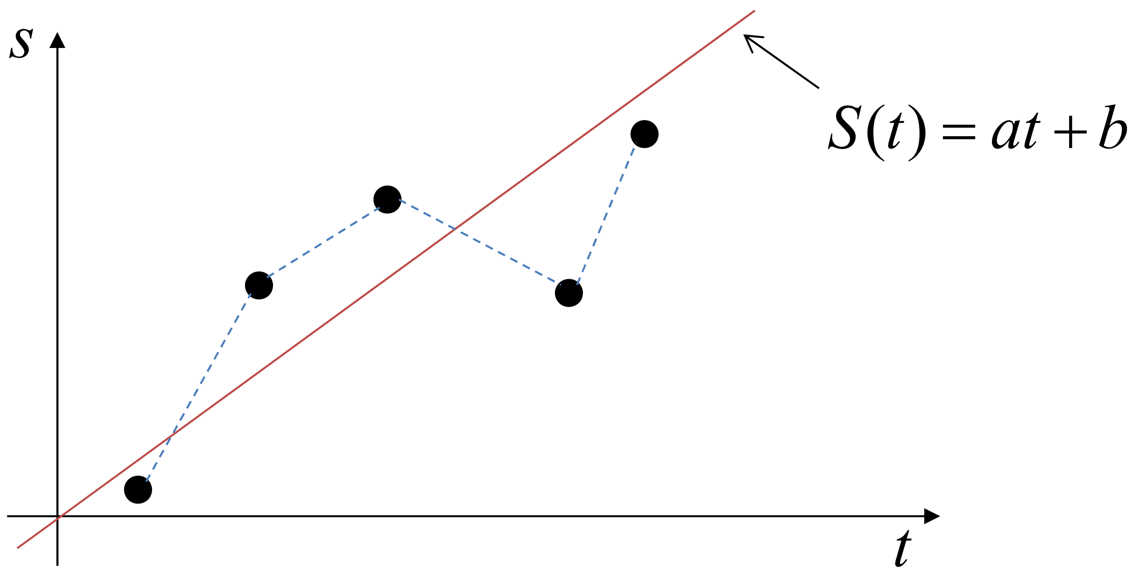
§7 数据拟合的最小二乘法

- 问题：在自然科学社会科学等领域内，为确定客观存在的变量之间的函数关系，需要根据大量实验、观测、或调查所得的数据建立函数关系式。但是，在实际中，观测数据往往带有随机误差（噪声），且有时无法重新采集。

- 如果利用有误差数据进行插值求函数的近似表达式，必然将噪声引入函数关系式中。
  - 插值条件要求在节点上，插值结果等于观测值。

§ 7 数据拟合的最小二乘法

- 例：若测试某物体的直线运动，测得的时间和速度数据为 $(t_i, s_i)(i=0,1,\cdots,m)$，其真实线性函数为 $S(t)=at+b$。由于测试有误差，这些数据没有落在一条直线上。因此，利用插值法会得到不符合实际的结果。



7-1 最小二乘法的基本概念

- 直线的一般形式

$$S(t)=at+b \tag{7.1}$$

其中 a 和 b 为参数。

- 思路：利用数据 $(t_i,s_i)(i=0,1,\cdots,m)$，在某种标准下确定 a 和 b，使 $S(t)$ 尽可能靠近该组数据点。

- 标准：令 $\delta_i=S(t_i)-s_i$，ω_i 表示测试数据 (t_i,s_i) 的重度，称为权系数（通常情况下都为1）。

- 利用 $\|\delta\|_2^2=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\delta_i^2=\sum_{i=0}^{m}\omega_i[S(t_i)-s_i]^2$

作为衡量 $S(t)$ 与数据 $(t_i,s_i)(i=0,1,\cdots,m)$ 偏离大小的度量标准，对于求解(7.1)较为方便。

7-1 最小二乘法的基本概念

问题的一般情形：

- 设 $(x_i, y_i)(i=0,1,\cdots,m)$ 为给定的一组数据，$\omega_i > 0$ 为各点的权系数，要求在函数类

$$\Phi = span\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$$

$$= \{a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x), a_i \in R\}$$

中，求一函数

$$S^*(x) = a_0^*\varphi_0(x) + a_1^*\varphi_1(x) + \cdots + a_n^*\varphi_n(x) \quad (n \le m) \quad (7.2)$$

满足

$$\|\delta\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \omega_i [S^*(x_i) - y_i]^2 = \min_{S \in \Phi} \sum_{i=0}^{m} \omega_i [S(x_i) - y_i]^2 \quad (7.3)$$

其中，$S(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$ 为 Φ 中任意函数。

7-1 最小二乘法的基本概念

- 根据(7.3)求函数的方法称为数据拟合的最小二乘法。
- $S^*(x)$称为最小二乘解。
- $S(x)$ 为拟合函数。
- 数据拟合的最小二乘法问题可以转化为一个解方程组（称为法方程组）的问题。

7-2 法方程组

- 令 $\phi(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i [S(x_i) - y_i]^2$

$$= \sum_{i=0}^{m} \omega_i [\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) - y_i]^2$$

- 求最小二乘解的关键是求待定系数 $a_j^*(j = 0, 1, \cdots, n)$ 。

- 由极值的必要条件，得

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

- 即 $\sum_{i=0}^{m} \omega_i [\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) - y_i] \varphi_k(x_i) = 0, \ k = 0, 1, \cdots, n$

7-2 法方程组

- 因此

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{m}\omega_i\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\right)\cdot a_j=\sum_{i=0}^{m}\omega_i y_i\varphi_k(x_i),\ k=0,1,\cdots,n \qquad (7.4)$$

- 定义内积

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) \qquad (7.5)$$

$$(f,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i y_i\varphi_k(x_i) \qquad (7.6)$$

其中 $\varphi_r=(\varphi_r(x_0),\varphi_r(x_1),\cdots,\varphi_r(x_m)),\quad r=0,1,\cdots,n$

$$f=(y_0,y_1,\cdots,y_m)$$

7-2 法方程组

- 则得 $$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(f,\varphi_k),\qquad k=0,1,\cdots,n \tag{7.7}$$

  称为函数系 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 在离散点 $x_0,x_1,\cdots,x_m$ 上的法方程组，其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,\varphi_0)\\ (f,\varphi_1)\\ \vdots\\ (f,\varphi_n)\end{bmatrix} \tag{7.8}$$

- 因为 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是函数类 Φ 的基，故线性无关。
- 法方程组(7.8)的系数行列式称为基函数 $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{n}$ 组成的Gram行列式，为非零，故(7.8)的解 $a_j=a_j^*(j=0,1,\cdots,n)$ 存在且唯一。

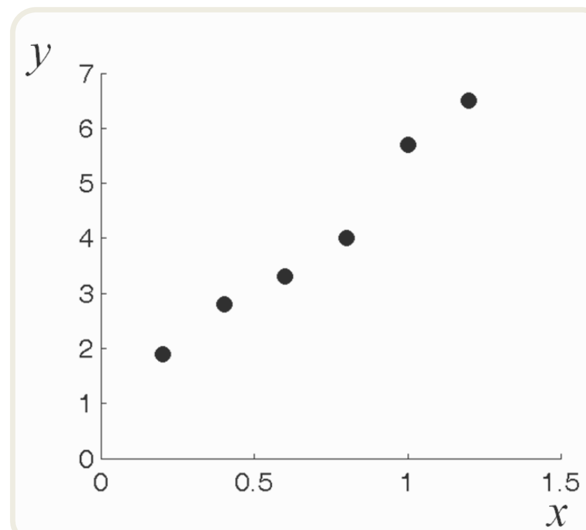
7-2 法方程组

- 例1 求拟合下列数据的最小二乘解。

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
y_i	0.9	1.9	2.8	3.3	4.0	5.7	6.5

- 解：设线性拟合函数为 $P_1(x)=a_0+a_1x$
- 则所取的基函数为 $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x$
- 从数据可知，$n=1, m=6, \omega_i=1, i=0,1,\cdots,6$

$n+1$：基函数的个数
$m+1$：观测值的个数



7-2 法方程组

- 建立法方程组：由(7.5)和(7.6)，得

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i\varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i=7$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i x_i=4.2$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i\varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i x_i^2=3.64$$

$$(f,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i f(x_i)\varphi_0(x_i)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i y_i=25.1$$

$$(f,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i f(x_i)\varphi_1(x_i)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i x_i y_i=20.18$$

7-2 法方程组

- 因此，法方程组为

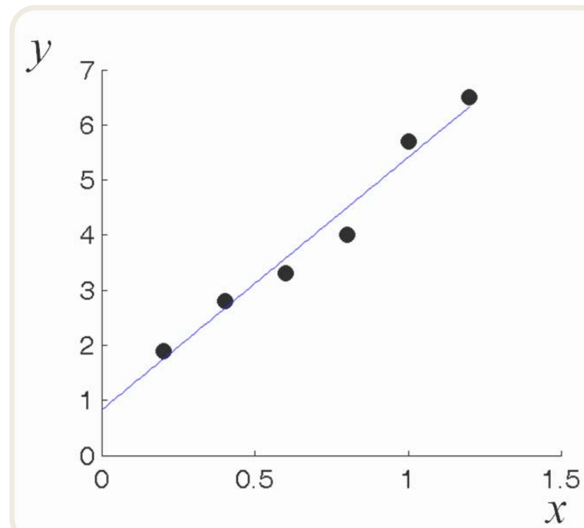
$$\begin{bmatrix} 7 & 4.2 \\ 4.2 & 3.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.1 \\ 20.18 \end{bmatrix}$$

- 解上述线性方程组，得

$$a_0 = 0.843, \quad a_1 = 4.57$$

- 从而最小二乘解是：

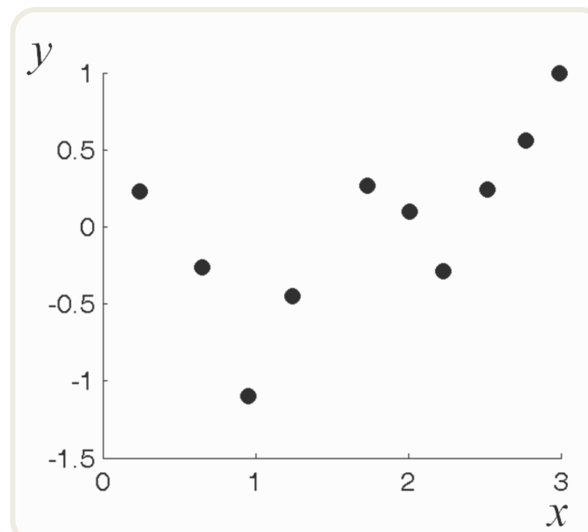
$$P_1(x) = 0.843 + 4.57x$$



7-2 法方程组

- 例2　求拟合下列数据的最小二乘解

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	–0.26	–1.10	–0.45	0.27	0.10	–0.29	0.24	0.56	1.00
ω_i	1	1	0.8	0.9	1	1	1	1	0.9	0.9



- 基函数为

$$y = \ln x,\ \ y = \cos(x),\quad y = e^{x}$$

7-2 法方程组

- 解：设拟合函数和基函数为

$$S(x) = a\ln x + b\cos(x) + ce^x \quad , \qquad n = 2, m = 9$$

$$\varphi_0(x) = \ln x,\ \varphi_1(x) = \cos(x),\quad \varphi_2(x) = e^x$$

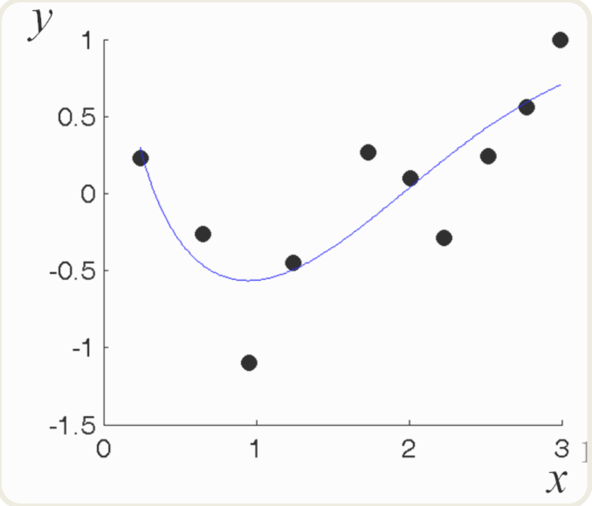
- 由(7.5)和(7.6)计算，并建立法方程组：

$$\begin{bmatrix} 6.5651 & -5.1453 & 59.407 \\ -5.1453 & 4.8457 & -45.969 \\ 59.407 & -45.969 & 934.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4881 \\ -2.0891 \\ 24.619 \end{bmatrix}$$

- 解得

$$a = -0.99480,\quad b = -1.1957,\quad c = 0.030752$$

$$S(x) = -0.99480\ln x - 1.1957\cos(x) + 0.030752e^x$$



7-2 法方程组

- 如拟合函数是待定参量的线性函数，则称为线性最小二乘拟合。

- 上述两个例子都是线性最小二乘拟合。

- 常见线性最小二乘拟合所选的函数类还有多项式类：以

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

为拟合函数，基底为 $\varphi_j(x) = x^j \ (j = 0,1,\cdots,n)$ 。

7-2 法方程组

- 则有 $$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^{j+k},\quad (j,k=0,1,\cdots,n)$$
$$(f,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^{k} y_i,\quad (k=0,1,\cdots,n)$$
- 因此，法方程组(7.8)为

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m}\omega_i & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i & \cdots & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^n \\ \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^n & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m}\omega_i y_i \\ \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^n y_i \end{bmatrix} \qquad (7.10)$$

- 当 n 较大时，(7.10)的解对数据微小变化非常敏感，属于“病态”问题。为避开求解(7.10)，可以考虑使用正交多项式为基。

7-3 利用正交多项式作最小二乘拟合

正交多项式作基底：

- 定义7.1 设给定点集 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 及各点的权系数 $\{\omega_i\}_{i=0}^m$ ，如果多项式族 $\{P_k(x)\}_{k=0}^n$ 满足：

$$(P_k, P_j) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i P_k(x_i) P_j(x_i) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ A_k > 0, & j = k \end{cases}$$

则称 $\{P_k(x)\}_{k=0}^n$ 为关于点集 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 的带权 $\{\omega_i\}_{i=0}^m$ 的正交多项式族。

- 定义7.2 设 $P_k(x)$ 是最高次项系数不为零的 k 次多项式，如果多项式族 $\{P_k(x)\}_{k=0}^n$ 满足：

$$(P_k, P_j) = \int_a^b \rho(x) P_k(x) P_j(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ A_k > 0, & j = k \end{cases} \qquad (7.11)$$

则称 $\{P_k(x)\}_{k=0}^n$ 在 $[a, b]$ 上带权正交，$P_k(x)$ 是 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的 k 次正交多项式。

7-3 利用正交多项式作最小二乘拟合

- 当取点集 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 带权 $\{\omega_i\}_{i=0}^m$ 正交的多项式族 $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)$ 作为拟合多项式的基底时，其最小二乘解为 n 次多项式

$$g_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \cdots + a_n P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x) \qquad (7.18)$$

- 其中，当 $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)$ 为关于点集 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 的带权 $\{\omega_i\}_{i=0}^m$ 的正交多项式族时，则有

$$a_k = (f, P_k)/(P_k, P_k) \qquad k = 0,1,\cdots,n \qquad (7.19)$$

本章重点

- 了解插值的基本概念
- 了解各类插值法和最小二乘法的作用和性质，能够根据不同需求选择适当的方法
- 掌握Lagrange插值（包括分段插值法）和Newton法的计算
- 掌握最小二乘法的计算