深圳大学医学部生物医学工程学院
本科生课程作业

课程：计算方法

（2018-2019 学年第一学期）

任课教师：张治国

专业（方向）	生物医学工程
年级/班级	2016 级 2 班
学号	2016222042
姓名	陈焕鑫
提交日期	2018 年 10 月 23 日

供助教评分使用	
助教姓名	
收到日期	201__年 ___ 月 ___ 日
评分(0-100)	
评语（如有）	

1. 用平方根法解下列对称正定方程组 Ax=b.

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ -1 & 4.75 & 2.75\\ 1 & 2.75 & 3.5\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}4\\ 6\\ 7.25\end{pmatrix};$$

解：

根据公式，$\begin{matrix} l_{jj}=(a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1} l^2{}_{jk})^{\frac{1}{2}}, j=1,2,\ldots,n \\ l_{ij}=\dfrac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}, i=j+1,\ldots,n \end{matrix}$，可得

$$l_{11}=(a_{11}-0)^{\frac{1}{2}}=2, l_{21}=\frac{a_{21}-0}{l_{11}}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}, l_{31}=\frac{a_{31}-0}{l_{11}}=\frac{1}{2}.$$

$$l_{22}=(a_{22}-\sum_{k=1}^{2-1} l^2{}_{2k})^{\frac{1}{2}}=(a_{22}-l^2{}_{21})^{\frac{1}{2}}=[4.75-(-\frac{1}{2})^2]^{\frac{1}{2}}=(4.5)^{\frac{1}{2}}\approx 2.12,$$

$$l_{32}=\frac{a_{32}-\sum_{k=1}^{2-1} l_{3k}l_{2k}}{l_{22}}=\frac{a_{32}-l_{31}l_{21}}{l_{22}}=\frac{2.75-\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})}{2.12}=\frac{3}{2.12}=1.42,$$

$$l_{33}=(a_{33}-\sum_{k=1}^{3-1} l^2{}_{3k})^{\frac{1}{2}}=(a_{33}-l^2{}_{31}-l^2{}_{32})^{\frac{1}{2}}=[3.5-(\frac{1}{2})^2-(1.42)^2]^{\frac{1}{2}}=1.11$$

∴得到矩阵 L 为$\begin{pmatrix}2 & & \\ -\frac{1}{2} & 2.12 & \\ \frac{1}{2} & 1.42 & 1.11\end{pmatrix}$，矩阵 L^T 为$\begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ & 2.12 & 1.42\\ & & 1.11\end{pmatrix}$

解 Ly=b，得$\begin{cases} 2y_1=4,\\ -\frac{1}{2}y_1+2.12y_2=6,\\ \frac{1}{2}y_1+1.42y_2+1.11y_3=7.25.\end{cases}$

∴矩阵 y 为$\begin{pmatrix}2\\ 3.3\\ 1.41\end{pmatrix}$.

解 $L^T x=y$，得$\begin{cases} 2x_1-\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3=2 \\ 2.12x_2+1.42x_3=3.3, \\ 1.11x_3=1.41 \end{cases}$ 矩阵 x 为$\begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.71 \\ 1.27 \end{pmatrix}$.

2. 用追赶法解三角方程组 AX=F

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix};$$

解：依题意，有

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & \\ & a_3 & b_3 & c_3 \\ & & a_4 & b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha 1 & & & \\ \gamma 2 & \alpha 2 & & \\ & \gamma 3 & \alpha 3 & \\ & & \gamma 4 & \alpha 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta 1 & & \\ & 1 & \beta 2 & \\ & & 1 & \beta 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

根据公式$\begin{cases} \gamma_i=a_i, i=2,\ldots,n \\ \alpha_1=b_1; \alpha_i=b_i-\gamma_i\beta_{i-1}, i=2,\ldots,n, \\ \beta_i=c_i\div\alpha_i, i=1,\ldots,n-1 \end{cases}$ 得

$$\gamma_2=a_2=1, \gamma_3=a_3=1, \gamma_4=a_4=1.$$

$$\alpha_1=b_1=2,$$

$$\beta_1=c_1\div\alpha_1=1\div 2=\frac{1}{2,}$$

$$\alpha_2=b_2-a_2\beta_1=4-1\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2},$$

$$\beta_2=c_2\div\alpha_2=1\div\frac{7}{2}=\frac{2}{7},$$

$$\alpha_3=b_3-a_3\beta_2=4-1\times\frac{2}{7}=\frac{26}{7},$$

$$\beta_3=c_3\div\alpha_3=1\div\frac{26}{7}=\frac{7}{26},$$

$$\alpha_4=b_4-a_4\beta_3=2-1\times\frac{7}{26}=\frac{45}{26}.$$

$$\therefore \text{得到 A 得 } L=\begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & \frac{7}{2} & & \\ & 1 & \frac{26}{7} & \\ & & 1 & \frac{45}{26} \end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \frac{2}{7} & \\ & & 1 & \frac{7}{26} \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

解方程组 Ly=f，$\begin{cases} 2y_1=-3, \\ y_1+\frac{7}{2}y_2=6, \\ y_2+\frac{26}{7}y_3=14, \\ y_3+\frac{45}{26}y=-2 \end{cases} \Rightarrow y=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{15}{7} \\ \frac{83}{26} \\ -3 \end{pmatrix}.$

解方程组 Ux=y，$\begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_2=-\frac{3}{2}, \\ x_2+\frac{2}{7}x_3=\frac{15}{7}, \\ x_3+\frac{7}{26}x_4=\frac{83}{26}, \\ x_4=-3 \end{cases} \Rightarrow x=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$

3. 已知下列表值

x	−1	0	1	2
f(x)	3	1	3	9

试求以-1,0,1,2为节点的 Lagrange 插值多项式，并求 f(0.5)的近似值.

解：设 $x_0=-1$，$x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=2$

线性插值：因插值点 x=0.5位于 $x_1=0$和 $x_2=1$之间，所以取 x_1和 x_2为插值节点

$$L_1(x)=y_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=1\times\frac{x-1}{0-1}+3\times\frac{x-0}{1-0}=1-x+3x=1+2x$$

$\therefore L1(0.5)=1+2\times 0.5=2.$

二次 Lagrange 插值：

取 x_0、x_1和 x_2为插值节点

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{x^2-x}{2},$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=1-x^2,$$
$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}=\frac{x^2+x}{2}.$$

$$\therefore L_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)=3l_0(x)+l_1(x)+3l_2(x)$$

$$L_2(x)=2x^2+1 \quad \therefore L_2(0.5)=2\times 0.5^2+1=1.5$$

三次 Lagrange 插值：

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6},$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{x^3-2x^2-x+2}{2},$$
$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{x^3-x^2-2x}{-2},$$
$$l_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{x^3-x}{6}.$$

$$L_3(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)+y_3l_3(x)=3l_0(x)+l_1(x)+3l_2(x)+9l_3(x)$$

$$L_3(x)=2x^2+1, \quad \therefore L_3(0.5)=1.5.$$

将二次 Lagrange 插值用 MATLAB 实现：

程序代码如下：

```
clc; close all; clear;

x = [-1 0 1];    %插值节点
y = [3 1 3];     %相应的函数值

n = length(x);  %节点数

search_x = 0.5; %所要求的点
result = 0.0;    %结果

for ii = 1 : n
    p = 1.0;
    for jj = 1 : n
        if jj ~= ii
            p = p*(search_x-x(jj))/(x(ii)-x(jj));
        end
    end
    result = p*y(ii) + result;
end
```

运行结果如下图所示：

```
>> result

result =

    1.5000

>>
```

∴使用 MATLAB 实现二次 Lagrange 插值计算所得的结果为1.5.