2018-2019学年第一学期

计 算 方 法

第九讲：插值法与最小二乘法 - 4

第三章 §5-6

主讲人：张治国

zgzhang@szu.edu.cn

深圳大学 医学部 生物医学工程学院

SHENZHEN UNIVERSITY HEALTH SCIENCE CENTER SCHOOL OF BIOMEDICAL ENGINEERING

上节课回顾

- 介绍了Newton插值法的插值基函数。
- 通过定义均差得到Newton插值公式及其余项的计算公式。
- 对于等距节点插值，通过定义差分得到等距节点的Newton插值公式及其余项的计算公式。
- 与Lagrange插值相比，Newton插值结果相同，但更便于在计算机上实现。

本节课内容

第三章 插值法与最小二乘法

§5 Hermite插值

5-1 两点三次Hermite插值

5-2 插值多项式 $H_3(x)$ 的余项

5-3 分段两点三次Hermite插值

5-4 一般Hermite插值

§6 三次样条插值

6-1 三次样条函数

6-2 三次样条插值多项式

6-3 三次样条插值多项式算法设计

6-4 三次样条插值函数的收敛性

§ 5　Hermite插值

- 问题：分段低次插值法的插值多项式导函数的连续性不好
- 要求：插值函数 $H(x)$ 满足一阶光滑的条件：

$$\begin{cases} H(x_i) = f(x_i), & i = 0,1,\cdots,n \\ H'(x_i) = f'(x_i) = y_i', & i = 0,1,\cdots,n \end{cases} \tag{5.1}$$

- 更一般地，如果要求插值函数具有 m_i 阶 $(m_i = 1,2,\cdots)$ 光滑度，插值函数满足：

$$\begin{cases} H(x_i) = f(x_i), & i = 0,1,\cdots,n \\ H^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), & i = 0,1,\cdots,n;\ j = 1,2\cdots,m_i \end{cases} \tag{5.2}$$

- 称上述插值问题为Hermite插值。

§5　Hermite插值

- 注：满足条件(5.1)的Hermite插值是最简单情形，插值多项式需要满足一共 $2n+2$ 个条件，因此，满足(5.1)的Hermite插值函数为不超过 $2n+1$ 次的多项式。

- 由于高次插值多项式的收敛性和稳定性难以保证，所以节点个数较多时，需要采用分段插值法。

5-1 两点三次Hermite插值

- 已知函数 $f(x)$ 在节点 x_0，x_1上满足

x	x_0	x_1
$f(x)$	y_0	y_1
$f'(x)$	y_0'	y_1'

例如

x	1	2
$f(x)$	2	3
$f'(x)$	0	–1

- 求一个三次Hermite插值多项式 $H_3(x)$，满足

$$\begin{cases} H_3(x_i) = y_i, & i = 0,1 \\ H_3'(x_i) = y_i', & i = 0,1 \end{cases} \tag{5.3}$$

5-1 两点三次Hermite插值

- 设 $\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$ 都是三次多项式，并满足

$$\alpha_j(x_i)=\begin{cases}0 & (j\neq i;\ i,j=0,1)\\ 1 & (j=i;\ i,j=0,1)\end{cases} \tag{5.4}$$

$$\alpha'_j(x_i)=0 \quad (i,j=0,1) \tag{5.5}$$

$$\beta'_j(x_i)=\begin{cases}0 & (j\neq i;\ i,j=0,1)\\ 1 & (j=i;\ i,j=0,1)\end{cases} \tag{5.6}$$

$$\beta_j(x_i)=0 \quad (i,j=0,1) \tag{5.7}$$

5-1 两点三次Hermite插值

- 设 $H_3(x) = a_0\alpha_0(x) + a_1\alpha_1(x) + b_0\beta_0(x) + b_1\beta_1(x)$

  容易计算出 $a_j = y_j \quad (j = 0,1), \quad b_j = y'_j \quad (j = 0,1)$

- 因此

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y'_0\beta_0(x) + y'_1\beta_1(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{1}[a_j\alpha_j(x) + b_j\beta_j(x)] \qquad (5.8)$$

5-1 两点三次Hermite插值

$\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$ 的构造表达式

- 由(5.4)和(5.5)知，节点 x_0, x_1 分别是 $\alpha_1(x),\alpha_0(x)$ 的二重两点，并且 $\alpha_j(x)$ 是三阶多项式，因此可设 $l_j(x)$ 是Lagrange插值基函数并构造 $\alpha_0(x),\alpha_1(x)$ 如下

$$\begin{aligned}\alpha_j(x) &= (ax+b)l_j^2(x)\\ &= (ax+b)\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2,\ i,j=0,1,i\neq j \qquad (5.9)\end{aligned}$$

5-1 两点三次Hermite插值

- 利用 $\alpha_j(x_j)=1,\ \ \alpha_j'(x_j)=0$ ，解出

$$a=-2/(x_j-x_i),\quad b=1+2x_j/(x_j-x_i) \tag{5.10}$$

- 上式代入(5.9)得

$$\alpha_j(x)=\left(1-2\frac{x-x_j}{x_j-x_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2,\ (i,j=0,1;\ \ j\neq i) \tag{5.11}$$

5-1 两点三次Hermite插值

- 类似地，$\beta_0(x), \beta_1(x)$ 构造如下：

$$\beta_j(x) = (cx+d)l_j^2(x)$$

$$= (cx+d)\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2, \quad i, j = 0,1, i \neq j \qquad (5.12)$$

- 解得 $c = 1, \quad d = -x_j$

$$\beta_j(x) = (x-x_j)\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2, \quad (i, j = 0,1; \quad j \neq i) \qquad (5.13)$$

5-1 两点三次Hermite插值

- $\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$ 的具体形式：

$$\alpha_0(x)=\left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2,\quad \alpha_1(x)=\left(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$\beta_0(x)=\left(x-x_0\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2,\quad \beta_1(x)=\left(x-x_1\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

- 两个节点的三次Hermite插值多项式：

$$H_3(x)=y_0\left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1\left(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+y_0'\left(x-x_0\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1'\left(x-x_1\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 \qquad (5.14)$$

5-1 两点三次Hermite插值

- 例1 已知 $f(x)$ 在两个节点上的函数值及导数值如下表，求 $f(x)$ 的三次Hermite插值多项式

x	1	2
$f(x)$	2	3
$f'(x)$	0	-1

- 解：设 $x_0 = 1,\ x_1 = 2$，则

5-1 两点三次Hermite插值

$$\alpha_0(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 = (2x-1)(x-2)^2$$

$$\alpha_1(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 = (5-2x)(x-1)^2$$

$$\beta_0(x) = (x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 = (x-1)(x-2)^2$$

$$\beta_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 = (x-2)(x-1)^2$$

- 因此 $$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y_0'\beta_0(x) + y_1'\beta_1(x)$$
$$= -3x^3 + 13x^2 - 17x + 9$$

5-2 插值多项式 $H_3(x)$ 的余项

- 设

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x)$$

- 由插值条件知

$$R_3(x_i) = R_3'(x_i) = 0, \quad i = 0,1$$

- 因此，节点 x_0 和 x_1 都是 $R_3(x)$ 的二重零点，故设

$$R_3(x_i) = K(x)(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \qquad (5.15)$$

其中 $K(x)$ 为待定函数。

- 类似于Lagrange插值余项的推导，可得到，至少存在一点 $\xi \in [x_0, x_1]$，使 $\varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!K(x) = 0$ 。于是 $K(x) = f^{(4)}(\xi)/4!$，代入(5.15)得到

$$R_3(x_i) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2 (x - x_1)^2$$

5-3 分段两点三次Hermite插值多项式

- 设已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 上的函数值 y_i 和导数值 y_i'，$i = 0,1,\cdots,n$。如果分段函数 $H_h(x)$ 满足

  (1) $H_h(x)$ 在每一个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式；

  (2) $H_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上一次连续可微；

  (3) $H_h(x_i) = y_i$, $H_h'(x_i) = y_i'$, $i = 0,1,\cdots,n$。

  则称 $H_h(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的分段三次Hermite插值多项式。

- 具体推导略（88-89页）。

5-4 一般Hermite插值

- 有时对插值函数在节点 x_i 上的光滑度要求较高，要求节点 x_i 的高阶导数连续，这就成为一般Hermite插值问题。
- 设函数 $f(x)\in C^m[a,b]$（m 次连续可微函数集）在 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上的函数值 $f(x_i)=y_i$ 和 m_i-1 导数值 $f^{(m_i-1)}(x_i)=y_i^{(m_i-1)}$，求满足条件

$$H_M^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n;\ j=0,1,2\cdots,m_i-1$$

  的 M 次多项式 $H_M(x)$，其中 $M+1=\sum_{i=0}^n m_i$，则称 $H_M(x)$ 为 $f(x)$ 关于节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 M 次Hermite插值多项式。
- 对于Hermite插值使用较多的是 $m_i=1, 2, 3$ 的情形，$m_i=1, 2$ 时就是Lagrange插值和 $2n+1$ 次Hermite插值。

§6 三次样条插值

6-1 三次样条插值

- 问题：在实际问题中，因被近似代替的函数 $f(x)$ 不能有拐点，且曲率不能有突变，因此要求插值函数 $P(x)$ 必须二次连续可微且不变号。

- 如果函数 $P(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $m-1$ 次连续可微，则称 $P(x)$ 具有 $m-1$ 阶光滑度。

- 分段两点三次Hermite插值多项式只有一阶光滑度。为构造具有二阶光滑度的插值函数，引入三次样条函数概念。

6-1 三次样条插值

三次样条函数定义

- 定义6.1 如果函数 $S(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足条件：

  1）$S(x), S'(x), S''(x)$ 在 $[a, b]$上连续，记作 $S(x) \in C^2[a,b]$；

  2）在子区间 $[x_k, x_{k+1}](k = 0,1,\cdots,n-1)$ 上是三次多项式，其中 $a \le x_0 < x_1 \cdots < x_n \le b$，则称 $S(x)$ 是 $[a, b]$ 上的三次样条函数；

  3）对于在节点上给定的函数值 $f(x_i) = y_i (i = 0,1,\cdots,n)$，如果 $S(x)$ 满足 $S(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,\cdots,n)$，则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的三次样条插值函数。

6-2 三次样条插值多项式

- 设给定函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的节点为

$$a \le x_0 < x_1 \cdots < x_n \le b$$

及节点上的函数值

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

- 求 $f(x)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，使

$$S(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

6-2 三次样条插值多项式

- 因 $S(x)$ 是 $[a, b]$ 上的分段三次插值多项式，故

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x) & x\in[x_0,x_1] \\ S_1(x) & x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases} \tag{6.2}$$

- $S(x)$满足的条件

i) 插值条件：

$$S_k(x_j)=y_j \quad (j=k,k+1,\quad k=0,1,\cdots,n-1) \tag{6.3}$$

ii) 左右极限条件：

$$\lim_{x\to x_k^-} S^{(p)}(x)=\lim_{x\to x_k^+} S^{(p)}(x) \quad (p=0,1,2;\ k=1,2,\cdots,n-1) \tag{6.4}$$

6-2 三次样条插值多项式

iii) 三类边界条件：在端点处的满足下列要求：

1) 第1类边界条件：$\begin{cases} S'(x_0) = f_0' \\ S'(x_n) = f_n' \end{cases}$ （6.5）

2）第2类边界条件（自然边界条件）：

$$\begin{cases} S''(x_0) = f_0'' \\ S''(x_n) = f_n'' \end{cases} \qquad (6.6)$$

3）第3类边界条件（周期条件）：

设 $f(x)$ 是以 $x_n - x_0$ 为周期，则

$$\lim_{x \to x_0^+} S^{(p)}(x) = \lim_{x \to x_n^-} S^{(p)}(x) \quad (p = 0,1,2) \qquad (6.7)$$

- 注：在(6.3)、(6.4)和(6.5)−(6.7)中之一，共有 $4n$ 条件，可确定 $4n$ 个待定参数，恰好等于参数总数。（算法略）

本节课小结

- 分段插值法无法保证多项式在节点处的连续性。为解决这个问题，本节介绍了Hermite插值法和三次样条插值法。
- Hermite插值法要求插值函数具有一阶（或更高阶）的光滑度（不但节点上的函数值相等，而且对应的导数值也相等）。
- 分段两点三次Hermite插值多项式只有一阶光滑度。三次样条插值得到的函数具有二阶光滑度。

作业

习题三：17

作业上交日期：2018年11月20日

下节课内容

第三章 插值法与最小二乘法

§7 数据拟合的最小二乘法