2018-2019学年第一学期

计 算 方 法

第四讲：解线性方程组的直接法－2

第二章 §3

主讲人：张治国

zgzhang@szu.edu.cn

深圳大学 医学部 生物医学工程学院

SHENZHEN UNIVERSITY HEALTH SCIENCE CENTER SCHOOL OF BIOMEDICAL ENGINEERING

上节课回顾

- 介绍了解线性方程组的直接法，主要是Gauss消去法（消去和回代）和它的变形直接三角分解法（通过LU分解）。
- 讨论了主元素的作用并介绍了Gauss列主元素消去法以避免小主元引起的误差。
- 简介了Gauss消去法（和Gauss列主元素消去法）的矩阵乘法形式、算法设计、和复杂度。

本节课内容

第二章 解线性方程组的直接法

§3 直接三角分解法

3-1 基本的三角分解法

3-2 部分选主元的Doolittle分解

回顾：Gauss消元法得到$\boldsymbol{LU}$分解

- Gauss消元过程可用矩阵乘法实现，这里我们先考虑不带行交换的消元过程。
- 矩阵 $\boldsymbol{L}_k$ 称为指标是 k 的初等下三角矩阵。

$$\boldsymbol{L}_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & \\ & & -m_{k+1,k} & 1 & & & \\ & 0 & -m_{k+2,k} & & 1 & & \\ & & \vdots & 0 & & \ddots & \\ & & -m_{n,k} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

其中行乘数 $m_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)},\ i = k+1, k+2, \cdots, n$

- 显然 $\boldsymbol{L}_k(\boldsymbol{A}^{(k)}, \boldsymbol{b}^{(k)}) = (\boldsymbol{A}^{(k+1)}, \boldsymbol{b}^{(k+1)})$ ，$\boldsymbol{L}_k \boldsymbol{A}^{(k)} = \boldsymbol{A}^{(k+1)},\ \boldsymbol{L}_k \boldsymbol{b}^{(k)} = \boldsymbol{b}^{(k+1)}$

回顾：Gauss消元法得到LU分解

- 于是， 消元过程可表示为

$$\boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{L}_{n-2}\cdots\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{A}^{(n)},\boldsymbol{b}^{(n)})$$

- 因此 $\boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{L}_{n-2}\cdots\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{(n)}$ ，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{L}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{L}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}^{(n)}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$

  其中

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{L}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{L}_{n-1}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ m_{21} & 1 & & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & \cdots & 1 & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}^{(n)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

- 不带行交换的Gauss消元过程产生了一个单位下三角形矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和一个上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ ，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ 。这称之为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解。

§3 直接三角分解法

- 根据定理2.1，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如果是非奇异矩阵，则必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 或 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{LU}$ 成立，其中 $\boldsymbol{P}$ 是排列矩阵，$\boldsymbol{L}$ 是单位下三角矩阵，$\boldsymbol{U}$ 是非奇异上三角矩阵。

- Gauss消去法可以得到 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的表达式。

- 本节着重研究 $\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{U}$ 的元素和 $\boldsymbol{A}$ 的元素之间的直接关系。

§ 3 直接三角分解法

3-1 基本三角分解法

- Doolittle分解：把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分解成一个单位下三角阵 $\boldsymbol{L}$ 和一个上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的乘积
- 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的各阶顺序主子式均不为0，则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{LU} \quad (3.1)$$

- 行号 $r \le$ 列号 i： $a_{ri}=\sum_{k=1}^{r} l_{rk}u_{ki},\ i=r,\cdots,n;\ r=1,2,\cdots,n$ (3.2)
- 行号 $i >$ 列号 r： $a_{ir}=\sum_{k=1}^{r} l_{ik}u_{kr},\ i=r+1,\cdots,n;\ r=1,2,\cdots,n-1$ (3.3)

基本三角分解法

- Doolittle分解公式

1) 当 $r=1$ 时，解得

(**U**的第1行不变） $u_{1i}=a_{1i},\ i=1,2,\cdots,n$ (3.4)

(**L**的第1列） $l_{i1}=\dfrac{a_{i1}}{u_{11}},\ i=2,3,\cdots,n$ (3.5)

2) 当 $r>1$ 时，行列元素的计算公式

先由(3.2)算 U 的第 r 行，后由(3.3)算 L 的第 r 列

$$u_{ri}=a_{ri}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{ki},\ i=r,\cdots,n;\ r=2,\cdots,n \tag{3.6}$$

$$l_{ir}=\frac{a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{ik}u_{kr}}{u_{rr}},\ i=r+1,\cdots,n;\ r=2,\cdots,n-1 \tag{3.7}$$

由(3.4)−(3.7)式所表示的矩阵分解为Doolittle分解

基本三角分解法

- Crout分解：把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分解成一个下三角阵 $\boldsymbol{L}$ 和一个单位上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的乘积

- 则可以递推得到

先算 $\boldsymbol{L}$ 的第 r 列，
后算 $\boldsymbol{U}$ 的第 r 行

$$l_{ir} = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{ki}, \ i = r, \cdots, n; \ r = 2, \cdots, n \qquad (3.8)$$

$$u_{ri} = \frac{a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}}{l_{rr}}, \ i = r+1, \cdots, n; \ r = 2, \cdots, n-1 \qquad (3.9)$$

基本三角分解法

- Doolittle分解的求解公式
  - 求 $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_r = b_r - \sum_{i=1}^{r-1} l_{ri} y_i , \quad r = 2, \cdots, n \end{cases} \tag{3.10}$$

  - 再求 $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{u_{nn}} \\ x_r = \dfrac{y_r - \sum_{i=r+1}^{n} u_{ri} x_i}{u_{rr}} , \quad r = n-1, \cdots, 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

基本三角分解法

- Crout分解的求解公式
  - 求 $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ y_r = \dfrac{b_r - \sum\limits_{i=1}^{r-1} l_{ri} y_i}{l_{rr}}, \quad r = 2, \cdots, n \end{cases} \tag{3.12}$$

  - 再求 $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_r = y_r - \sum\limits_{i=r+1}^{n} u_{ri} x_i, \quad r = n-1, \cdots, 1 \end{cases} \tag{3.13}$$

基本三角分解法

- 例1. 用Doolittle法解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

解：由公式(3.4)和(3.5)，得

$$(u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}) = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}) = (2,10,0,-3)$$

$$(l_{21}, l_{31}, l_{41})^T = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)^T$$

基本三角分解法

对 $r=2,3,4$，用公式(3.6)，(3.7)计算，得

$$(u_{22},u_{23},u_{24})=(11,-12,17/2) \qquad (l_{32},l_{42})^T=(-3/11,-6/11)^T$$

$$(u_{33},u_{34})=(-3/11,-2/11) \qquad l_{43}=-9 \qquad u_{44}=-4$$

1) 解 $\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$，可得

$$\boldsymbol{y}=(10,20,-17/11,-16)^T$$

2) 解 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$，得

$$\boldsymbol{x}=(1,2,3,4)^T$$

基本三角分解法

- 计算过程中矩阵变化详细情况：

$$
\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r=1}
\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3/2 & -4 & -12 & 13 \\ 1/2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 14 & 9 & -13 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r=2}
\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3/2 & 11 & -12 & 17/2 \\ 1/2 & -3/11 & 3 & -4 \\ 2 & -6/11 & 9 & -13 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r=3}
\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3/2 & 11 & -12 & 17/2 \\ 1/2 & -3/11 & -3/11 & -2/11 \\ 2 & -6/11 & \boxed{-9} & -13 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r=4}
\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3/2 & 11 & -12 & 17/2 \\ 1/2 & -3/11 & -3/11 & -2/11 \\ 2 & -6/11 & -9 & \boxed{-4} \end{bmatrix}
$$

基本三角分解法

- 计算过程中矩阵变化详细情况：

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \xrightarrow{r=4} \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
2 & 10 & 0 & -3 \\
-3/2 & 11 & -12 & 17/2 \\
1/2 & -3/11 & -3/11 & -2/11 \\
2 & -6/11 & -9 & -4
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}
1 & & & \\
-3/2 & 1 & & \\
1/2 & -3/11 & 1 & \\
2 & -6/11 & -9 & 1
\end{bmatrix}
\qquad
\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}
2 & 10 & 0 & -3 \\
 & 11 & -12 & 17/2 \\
 & & -3/11 & -2/11 \\
 & & & -4
\end{bmatrix}
$$

紧凑格式的Doolittle法

- 紧凑格式的Doolittle法：计算机计算时，用二维数组 A 存放增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$，数组的元素记为 $A(i, j)$, i=1,2,…,n; j=1,2,…,n+1。分解计算得到 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的元素冲掉数组 A 相应位置的元素。
- 如用Doolittle法，则

$$A(r,i) \leftarrow u_{ri},\ \ r = 1,2,\ldots,n; i = r, r+1,\ldots,n+1$$

$$A(i,r) \leftarrow l_{ir},\ \ r = 1,2,\ldots,n-1; i = r, r+1,\ldots,n$$

其中 $u_{r,n+1}$ 为 y_r，用以冲掉 b_r。

紧凑格式的Doolittle法

- 因此，数组 A 元素的计算可按照如下格式进行：

$$\boxed{\begin{array}{l} A(r,i) \leftarrow u_{ri} = A(r,i) - \text{第}r\text{行左方数组元素}A(r,k), k=1,\dots,r-1,\text{与} \\ \text{第}i\text{列上方数组元素}A(k,i), k=1,\dots,r-1,\text{对应元乘积之和} \end{array}} \tag{3.14}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A(i,r) \leftarrow l_{ir} = [A(i,r) - \text{第}i\text{行左方数组元素}A(i,k), k=1,\dots,r-1,\text{与} \\ \text{第}r\text{列上方数组元素}A(k,r), k=1,\dots,r-1,\text{对应元乘积之和}] / A(r,r) \end{array}} \tag{3.15}$$

紧凑格式的Doolittle法

- 由于在计算 $\boldsymbol{U}$ 的方程(3.6)和解 $\boldsymbol{y}$ 的方程(3.10) 遵循相似的规则，因此系数矩阵的Doolittle分解和解方程组 $\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$ 可以同时进行。
- 以 $N=3$ 为例，r 表示分解步数：

$$A=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34} \end{bmatrix} \\ \equiv \\ \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & y_1 \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & y_2 \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & y_3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} r=1 \\ r=2 \\ r=3 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

紧凑格式的Doolittle法

- 紧凑格式的Doolittle分解过程中数组 A 的变化（$N=3$）：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r=1} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ l_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \xrightarrow{r=2} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r=3} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & y_1 \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & y_2 \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & y_3 \end{bmatrix}$$

紧凑格式的Doolittle法

- 例2：用紧凑格式的Doolittle法解例1中的方程组

  解：
  (1) 分解得到 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$，并得到 $\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$ 的解 $\boldsymbol{y}$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\ -3 & -4 & -12 & 13 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ 4 & 14 & 9 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r=1}\begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 10 \quad 0 \quad -3 \quad 10} \\ \boxed{\begin{matrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{matrix}} \begin{matrix} -4 & -12 & 13 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \\ 14 & 9 & -13 & 7 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

紧凑格式的Doolittle法

$$\xrightarrow{r=2} \begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\ -3/2 & 11 & -12 & 17/2 & 20 \\ 1/2 & -3/11 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & -6/11 & 9 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r=3} \begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\ -3/2 & 11 & -12 & 17/2 & 20 \\ 1/2 & -3/11 & -3/11 & -2/11 & -17/11 \\ 2 & -6/11 & -9 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r=4} \begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\ -3/2 & 11 & -12 & 17/2 & 20 \\ 1/2 & -3/11 & -3/11 & -2/11 & -17/11 \\ 2 & -6/11 & -9 & -4 & -16 \end{bmatrix}$$

紧凑格式的Doolittle法

$$\xrightarrow{r=4}\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\ -3/2 & 11 & -12 & 17/2 & 20 \\ 1/2 & -3/11 & -3/11 & -2/11 & -17/11 \\ 2 & -6/11 & -9 & -4 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -3/2 & 1 & & \\ 1/2 & -3/11 & 1 & \\ 2 & -6/11 & -9 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ & 11 & -12 & 17/2 \\ & & -3/11 & -2/11 \\ & & & -4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ -17/11 \\ -16 \end{bmatrix}$$

(2) 解 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$，计算得：

$$\boldsymbol{x}=(1,2,3,4)^T$$

§3 直接三角分解法

3-2 部分选主元的Doolittle分解

- Doolittle分解法的 u_{rr} 或Crout法中的 l_{rr} $(r=1,2,\ldots,n)$称为主元素。
- 为避免“小主元”做除数，算法中需要加入选主元措施。
- 部分选主元Doolittle法：在每一步分解时，先选列主元，再进行分解计算。

部分选主元的Doolittle分解

- 过程描述如下：设用紧凑格式的Doolittle法已完成了第 $r-1$ 步分解

$$A \to \begin{bmatrix} u_{11} & & & & \cdots & u_{1r} & \cdots & u_{1n} & u_{1,n+1} \\ l_{21} & u_{22} & & & & & & & \vdots \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & u_{r-1,r-1} & u_{r-1,r} & \cdots & u_{r-1,n} & u_{r-1,n+1} \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & & l_{r,r-1} & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & a_{r,n+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & l_{n,r-1} & a_{nr} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

部分选主元的Doolittle分解

- 第 r 步分解：首先在数组 A 的第 r 列主对角元以下（含主对角元）选主元，步骤如下：

1. 计算中间量 S_i，并存入 $A(i,r)$，

$$A(i,r) \leftarrow S_i = A(i,r) - \sum_{k=1}^{r-1} A(i,k)A(k,r) \qquad (3.16)$$

由(3.6)得出

$$i = r,\cdots,n;\ r = 1,\cdots,n-1$$

2. 选绝对值最大的S_i，即确定行号 i_r，使满足

$$|S_{i_r}| = \max_{r \le i \le N} |S_i|$$

3. 换行：如果 $i_r \neq r$ ，则交换数组 A 中的第 r 行与 i_r行，其中，新位置主元素仍记为

$$u_{rr} = A(r,r)$$

部分选主元的Doolittle分解

4. 分解计算：

$$A(i,r) \leftarrow l_{ir} = \frac{A(i,r)}{A(r,r)}, \qquad (3.17)$$

由(3.7)得出

$$i = r+1,\cdots,n; r = 1,2,\cdots,n-1$$

$$A(r,i) \leftarrow u_{ri} = A(r,i) - \sum_{k=1}^{r-1} A(r,k)A(k,i), \qquad (3.18)$$

由(3.6)得出

$$i = r+1,\cdots,n+1; r = 1,2,\cdots,n$$

注：以上规定 $\sum_{k=1}^{0} A(r,k)A(k,i) = 0$

部分选主元的Doolittle分解

例：用部分选主元的Doolittle法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & -9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解：用紧凑式数组 A 进行分解如下：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 4 \\ 4 & -9 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{r=1 \\ A(i,1)\leftarrow S_i \\ i=1,2,3}} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 4 \\ -9 & 2 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -9 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{分解}} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & -9 & 2 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 1/2 \\ 1/4 \end{matrix}} & \begin{matrix} -4 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{matrix} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

部分选主元的Doolittle分解

$$\xrightarrow[i=2,3]{\substack{r=2\\ A(i,2)\leftarrow S_i}}\begin{bmatrix}4 & -9 & 2 & 1\\ 1/2 & 1/2 & 6 & 4\\ 1/4 & 5/4 & 3 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}4 & -9 & 2 & 1\\ 1/4 & 5/4 & 3 & 1\\ 1/2 & 1/2 & 6 & 4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{分解}}\begin{bmatrix}4 & -9 & 2 & 1\\ 1/4 & 5/4 & 5/2 & 3/4\\ 1/2 & 2/5 & 6 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r=3\\ \text{分解}}}\begin{bmatrix}4 & -9 & 2 & 1\\ 1/4 & 5/4 & 5/2 & 3/4\\ 1/2 & 2/5 & 4 & 32/10\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 1/4 & 1 & \\ 1/2 & 2/5 & 1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}4 & -9 & 2\\ & 5/4 & 5/2\\ & & 4\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\ 3/4\\ 32/10\end{bmatrix}$$

部分选主元的Doolittle分解

- 紧凑格式的Doolittle法还可用于解矩阵方程（系数矩阵相同的系列方程组）：

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

其中 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m)$

- 用部分选主元Doolittle法解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -8 & -16 \\ -20 & -40 \\ -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{bmatrix}$$

解：

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 & -16 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & -40 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

部分选主元的Doolittle分解

$$\xrightarrow{\substack{r=1 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & -40 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -8 & -16 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{分解}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & -40 \\ 1/2 & -1 & 2 & -1 & -8 & -16 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 1/2 & -1 & 4 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{计算} \\ s_2, s_3, s_4}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & -40 \\ 1/2 & 0 & 2 & -1 & -8 & -16 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 1/2 & 0 & 4 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

部分选主元的Doolittle分解

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & -40 \\ 1/2 & \boxed{2} & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 1/2 & \boxed{0} & 2 & -1 & -8 & -16 \\ 1/2 & \boxed{0} & 4 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{分解}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & -40 \\ 1/2 & \boxed{2} & \boxed{-1/2} & \boxed{3/2} & \boxed{8} & \boxed{16} \\ 1/2 & \boxed{0} & 2 & -1 & -8 & -16 \\ 1/2 & \boxed{0} & 4 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[s_3, s_4]{\text{计算}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & -40 \\ 1/2 & 2 & -1/2 & 3/2 & 8 & 16 \\ 1/2 & 0 & \boxed{1/2} & -1 & -8 & -16 \\ 1/2 & 0 & \boxed{5/2} & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

部分选主元的Doolittle分解

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & -40 \\ 1/2 & 2 & -1/2 & 3/2 & 8 & 16 \\ 1/2 & 0 & \boxed{5/2} & 3 & 4 & 8 \\ 1/2 & 0 & \boxed{1/2} & -1 & -8 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

下省略（详见pp48−50）

最终解得：

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -7 & -14 \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

部分选主元的Doolittle分解

- 由于矩阵三角分解的唯一性，直接三角分解法和Gauss消去法的解是一致的（如果不考虑舍入误差）。
- 解 $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ 对应于消元；解 $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ 对应于回代。
- 直接三角分解法的优势在于
  - （1）内积运算可以采用双精度运算，
  - （2）节省内存。
- 因此，直接三角分解法可为提高解的精度提供方便。

本节课小结

- 介绍了基本的直接三角分解法（主要是Doolittle分解算法），研究 $\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{U}$ 的元素和 $\boldsymbol{A}$ 的元素之间的直接关系。

- 介绍了Doolittle分解法的紧凑格式，可用于解矩阵方程。

- 简介了可避免“小主元”的部分选主元Doolittle分解法。

作业

习题二：9，10（分解 $\boldsymbol{A}$），

13（用紧凑格式Doolittle分解法）

【选做】习题二：10（分解 $\mathbf{B}$，MATLAB编程，40分）

作业上交日期：2018年10月09日

下节课内容

第二章 解线性方程组的直接法

§4 平方根法

§5 追赶法