

2018-2019学年第一学期

计算方法

第十一讲：数值积分与微分 - 1 第四章 § 1

主讲人：张治国

zgzhang@szu.edu.cn



深圳大学医学部 生物医学工程学院

SHENZHEN UNIVERSITY HEALTH SCIENCE CENTER SCHOOL OF BIOMEDICAL ENGINEERING

上节课回顾

- 当观测值有误差时，插值法不适合近似函数，需要使用最小二乘法。
- 介绍了数据拟合和最小二乘法的基本概念和解法（法方程组）。
- 简单介绍了利用正交多项式做最小二乘拟合。
- 拟合一组数据可采用不同函数，然后按误差大小或问题的实际背景决定是否使用计算结果或改变拟合函数。

第三章回顾

- 第三章研究已知函数 $f(x)$ 的某些点 $(x_i, f(x_i))$ 后，求它的近似函数 $P_n(x)$ 的数值方法。
 - 如果要求 $P_n(x_i) = f(x_i)$ ，就用插值法；
 - 如果要求 $P_n(x_i)$ 对所有 $f(x_i)$ 在平方误差最小的原则下最接近，则可以采用最小二乘法。
- 插值方法在实际中用非常广泛的应用（如数据处理、函数求解等），也是许多其它计算方法（如函数逼近、数值微积分等）的基础。

第三章回顾

- 分段多项式插值具有良好的稳定性和收敛性，得到广泛使用。
- 样条函数的理论和应用也得到重视，是实际中重要的方法（第三章只简单介绍三次样条插值）。
- 函数逼近是数值逼近的重要方法，第三章介绍了最基本最重要的最小二乘法。其它重要方法包括快速傅立叶变换。

本章内容

第四章 数值积分与微分

§ 1 Newton-Cotes公式

§ 2 复合求积法

§ 3 Romberg算法

§ 4 Gauss求积法

§ 5 广义积分的数值方法

§ 6 数值微分

本节课内容

第四章 数值积分与微分

§ 1 Newton-Cotes公式

1-1 插值性求积公式及Cotes系数

1-2 低阶Newton-Cotes公式的余项

1-3 Newton-Cotes公式的稳定性

§ 1 Newton-Cotes公式

- 对于积分

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

如果知道 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ ，则由Newton-Leibniz公式有

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- 但是在工程技术和科学研究中, 常会见到以下现象:
 - $f(x)$ 的解析式根本不存在, 只给出了 $f(x)$ 的一些数值
 - $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 求不出来, 如 $F(x)$ 不是初等函数
 - $f(x)$ 的表达式结构复杂, 求原函数较困难

§ 1 Newton-Cotes公式

- 以上这些现象，Newton-Leibniz公式很难发挥作用，只能建立积分的近似计算方法。
- 这类方法很多，最常用的一种方法是数值积分法，利用插值多项式来构造数值求积公式。
- 利用插值方法建立的数值积分法分三种：
 1. 利用等距节点的Lagrange插值多项式建立的Newton-Cotes公式
 2. 利用加速技术建立的Romberg算法
 3. 利用Hermite插值多项式等建立的Gauss型求积公式

1-1 插值型求积公式及Cotes系数

- 问题描述：设 $f(x) \in C[a, b]$ ，求定积分

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (1.1)$$

的近似值。

- 方法：将 $[a, b]$ 进行 n 等分，令 $h = (b - a) / n$ ，称之为步长。取分点

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

为节点，则 $f(x)$ 可表示为其Lagrange插值多项式及其余项之和：

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x) + R_n(x) = L(x) + R_n(x) \quad (1.2)$$

1-1 插值型求积公式及Cotes系数

- 将(1.2)代入(1.1)得

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=0}^n \left(\int_a^b l_k(x)dx \right) f(x_k) + \int_a^b R_n(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + \int_a^b R_n(x)dx \end{aligned}$$

其中

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \left(\prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) dx \quad (1.3)$$

1-1 插值型求积公式及Cotes系数

- 令

$$I_n = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n) \quad (1.4)$$

$$R(I_n) = \int_a^b R_n(x) dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{k=0}^n (x - x_k) dx \quad (1.5)$$

- 则有

$$I = I_n + R(I_n) \quad (1.6)$$

- 以上表明，可以用数值 I_n 近似代替定积分值 I ，其误差为 $R(I_n)$ 。
- 公式(1.4)为插值型求积公式， A_k 为求积系数， $R(I_n)$ 为数值积分的余项。

1-1 插值型求积公式及Cotes系数

简化计算求积系数 A_k

- 设 $x = a + th$, 因 $x \in [a, b]$, 故 $t \in [0, n]$ 。因此

$$x - x_j = (t - j)h \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$x_k - x_j = (k - j)h \quad j, k = 0, 1, \dots, n, \quad j \neq k$$

- 将上述结果代入(1.3)中, 得

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{h(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t - j) dt \\ &= (b - a) \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t - j) dt \end{aligned}$$

1-1 插值型求积公式及Cotes系数

• 令

$$C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t-j) dt \quad (1.7)$$

• 则 $A_k = (b-a)C_k^{(n)}$ (1.8)

• Newton-Cotes求积公式

$$I_n = (b-a) \sum_{k=0}^n C_k^{(n)} f(x_k) \quad (1.9)$$

$C_k^{(n)}$ 称为Cotes系数。其中 n 表示对求积区间 $[a, b]$ 的等分数， k 是节点下标。 $C_k^{(n)}$ 的计算只与 n 有关，与 $f(x)$ 和积分区间无关。

1-1 插值型求积公式及Cotes系数

- $C_k^{(n)}$ 的计算

当 $n = 1$ 时,

$$C_0^{(1)} = -\int_0^1 (t-1)dt = \frac{1}{2}, \quad C_1^{(1)} = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

当 $n = 2$ 时,

$$C_0^{(2)} = \frac{1}{4} \int_0^2 (t-1)(t-2)dt = \frac{1}{6}$$

$$C_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \int_0^2 t(t-2)dt = \frac{4}{6}$$

$$C_2^{(2)} = \frac{1}{4} \int_0^2 t(t-1)dt = \frac{1}{6}$$

1-1 插值型求积公式及Cotes系数

Cotes系数表

n	$C_k^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$				
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

1-1 插值型求积公式及Cotes系数

- Newton-Cotes公式中最重要的 $n = 1, 2, 4$ 的情形:

$$T = I_1 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (1.10)$$

$$S = I_2 = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (1.11)$$

$$C = I_4 = \frac{b-a}{90} [7f(a) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(b)] \quad (1.12)$$

分别称为梯形公式，Simpson公式及Cotes公式。

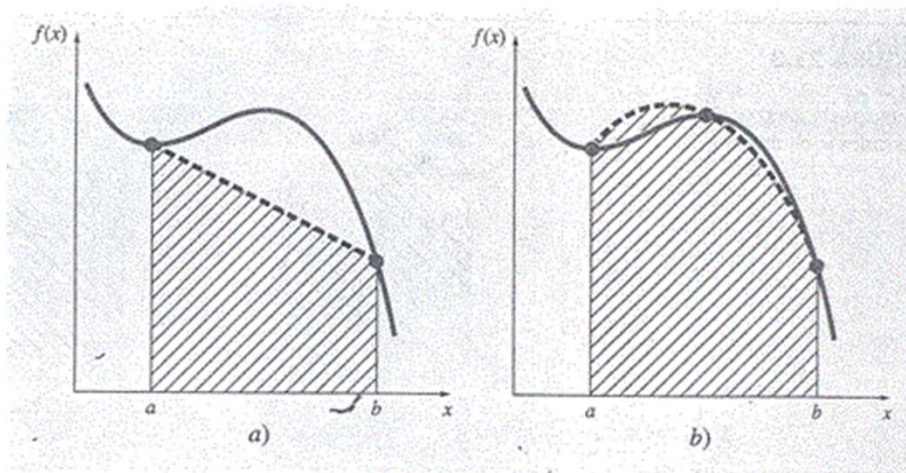
1-1 插值型求积公式及Cotes系数

- 例：用梯形公式和Simpson公式对幂函数 x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$) 和指数函数 e^x 在区间 $[-2, 0]$ 上积分。
- 数值结果列于下表：

函数 $f(x)$	1	x^1	x^2	x^3	x^4	e^x
精确值	2	-2	2.667	-4	6.4	0.865
梯形值	2	-2	4	-8	16	1.135
Simpson值	2	-2	2.667	-4	6.667	0.869

1-1 插值型求积公式及Cotes系数

- 以上结果说明Simpson公式对于较多函数求积分比梯形公式较准确。



- 如果某个求积分公式对于比较多的函数能够准确成立，那么这个公式的使用价值比较大，可以说这个公式的精度比较高。

1-1 插值型求积公式及Cotes系数

定义代数精度的概念：

- **定义1.** 若某个求积公式，对于任何次数不超过 m 的代数多项式都能准确成立，但对于 $m + 1$ 次数代数多项式不能准确成立，则称该求积公式具有 m 次的代数精度。
- 梯形公式，Simpson公式及Cotes公式分别有1、3、5阶代数精度。

1-2 低阶Newton-Cotes公式的余项

- 梯形公式、Simpson公式、Cotes公式的余项分别如下（推导略，见pp124-127）：

1. 梯形公式的余项：

$$R(T) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \quad \eta \in (a, b) \quad (1.14)$$

2. Simpson公式的余项：

$$R(S) = -\frac{b-a}{180} \left(\frac{b-a}{2} \right)^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a, b) \quad (1.15)$$

3. Cotes公式的余项：

$$R(C) = -\frac{2(b-a)}{945} \left(\frac{b-a}{4} \right)^6 f^{(6)}(\eta), \quad \eta \in (a, b) \quad (1.16)$$

1-3 Newton-Cotes公式的稳定性

- 考察Cotes系数

$$C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t-j) dt$$

只与积分区间 $[a, b]$ 的节点 x_j 的划分有关，与函数 $f(x)$ 无关，其值可以精确给定。

- 因此用Newton-Cotes公式计算积分的舍入误差主要由函数 $f(x_k)$ 的计算引起。

1-3 Newton-Cotes公式的稳定性

关于稳定性的结论：

- 即 $\forall k \leq n, C_k^{(n)} > 0$ 时，Newton-Cotes公式是稳定的。
- 事实上，当 $n < 8$ 时， $C_k^{(n)}$ 全为正数，公式都是稳定的。
- 若 $C_k^{(n)}$ 有正有负（如 $n \geq 8$ ），公式的稳定性将无法保证。
- 因此，在实际应用中一般不使用高阶Newton-Cotes公式，而是采用低阶复合求积法（见下节）。

本节课小结

- 为了克服求 $f(x)$ 原函数的困难和便于计算，介绍了利用等距节点的Lagrange插值多项式建立的Newton-Cotes公式。
- 介绍了求积系数 A_k 和Cotes系数 $C_k^{(n)}$ 的计算。
- 简介了Newton-Cotes公式的代数精度、余项、和稳定性。

作业

习题四：1(1)

【选做】 *1(1)-(a)用MATLAB编程实现 (50分)*

作业上交日期：2018年12月4日

下节课内容

第四章 数值积分与微分

§ 2 复合求积法

§ 6 数值微分