深圳大学医学部生物医学工程学院
本科生课程作业

课程：计算方法

（2018-2019 学年第一学期）

任课教师：张治国

专业（方向）	生物医学工程
年级/班级	2016 级 2 班
学号	2016222042
姓名	陈焕鑫
提交日期	2018 年 11 月 6 日

供助教评分使用	
助教姓名	
收到日期	201__年 ___ 月 ___ 日
评分(0-100)	
评语（如有）	

4. 给出 $f(x)=\sin x$ 的等距节点函数表，如用分段线性插值计算$\sin x$ 的近似值，使其截断误差为$\frac{1}{2}\times10^{-4}$，则函数表的步长应取多大？

解：

设 $L_h(x)$为 f(x)的分段线性插值多项式

则 $L_h(x)$的余项为

$$R_1(x)=f(x)-L_h(x)=f(x)-L_h^{(k)}(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_k)(x-x_{k+1}),$$

$$\xi,x\in[x_k,x_{k+1}]\ \text{且}\ \xi\ \text{依赖于 x.}$$

$$\therefore \max|R_1(x)|\le\frac{M_2}{2}\max_{k=0,1,\ldots,n-1}\max_{x_k\le x\le x_{k+1}}|(x-x_k)(x-x_{k+1})|\le\frac{M_2}{8}h^2,$$

其中，$M_2=\max|f''(x)|=\max|\sin''(x)|=\max|-\sin(x)|=1,$

$\therefore \max|R1(x)|\le\frac{h^2}{8}$，为了使其截断误差为$\frac{1}{2}\times10^{-4}$, $\therefore\frac{h^2}{8}\le\frac{1}{2}\times10^{-4}$

解得 h≤0.02

∴要使截断误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-4}$, 需要步长 h≤0.02

14. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$， 在−5≤x≤5 上取 n=10, 按等距节点求分段线性插值函数 $L_n(x)$, 计算各节点中点处的$L_n(x)$与 $f(x)$ 的值

解：

依题意，可得 x 与 f(x)的对应关系为

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	0.0385	0.0588	0.1	0.2	0.5	1	0.5	0.2	0.1	0.0588	0.0385

根据 $L_n^{(k)}(x)=y_k\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+y_{k+1}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},(k=0,1,\ldots,n-1).$ 得，

$$L_n(x)=\begin{cases} L_n^{(0)}=0.0385\times\dfrac{x+4}{-1}+0.0588\times\dfrac{x+5}{1}, x\in[-5,-4],\\ L_n^{(1)}=0.0588\times\dfrac{x+3}{-1}+0.1\times\dfrac{x+4}{1}, x\in[-4,-3],\\ L_n^{(2)}=0.1\times\dfrac{x+2}{-1}+0.2\times\dfrac{x+3}{1}, x\in[-3,-2],\\ L_n^{(3)}=0.2\times\dfrac{x+1}{-1}+0.5\times\dfrac{x+2}{1}, x\in[-2,-1],\\ L_n^{(4)}=0.5\times\dfrac{x-0}{-1}+1\times\dfrac{x+1}{1}, x\in[-1,0],\\ L_n^{(5)}=1\times\dfrac{x-1}{-1}+0.5\times\dfrac{x-0}{1}, x\in[0,1],\\ L_n^{(6)}=0.5\times\dfrac{x-2}{-1}+0.2\times\dfrac{x-1}{1}, x\in[1,2],\\ L_n^{(7)}=0.2\times\dfrac{x-3}{-1}+0.1\times\dfrac{x-2}{1}, x\in[2,3],\\ L_n^{(8)}=0.1\times\dfrac{x-4}{-1}+0.0588\times\dfrac{x-3}{1}, x\in[3,4],\\ L_n^{(9)}=0.0588\times\dfrac{x-5}{-1}+0.0385\times\dfrac{x-4}{1}, x\in[4,5], \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_n(x)=\begin{cases} L_n^{(0)}=0.0203x+0.1403,\ \ x\in[-5,-4],\\ L_n^{(1)}=0.0412x+0.2235,\ \ x\in[-4,-3],\\ L_n^{(2)}=0.1x+0.4, x\in[-3,-2],\\ L_n^{(3)}=0.3x+0.8, x\in[-2,-1],\\ L_n^{(4)}=0.5x+1, x\in[-1,0],\\ L_n^{(5)}=-0.5x+1, x\in[0,1],\\ L_n^{(6)}=-0.3x+0.8, x\in[1,2],\\ L_n^{(7)}=-0.1x+0.4, x\in[2,3],\\ L_n^{(8)}=-0.0412x+0.2235, x\in[3,4],\\ L_n^{(9)}=-0.0203x+0.1403, x\in[4,5], \end{cases}$$

L_n 满足 $L_n(x_i)=y_i$, $(i=0,1,2,\cdots,n)$,

∴$L_n(x)$为 f(x)在[-5,5]上的分段线性插值多项式

由此可得，Ln(x)与 f(x)在各节点中点处的值如下表所示

x	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5
f(x)	0.0471	0.0755	0.1379	0.3077	0.8	0.8	0.3077	0.1379	0.0755	0.0471
$L_n(x)$	0.04864	0.07941	0.15	0.35	0.75	0.75	0.35	0.15	0.07941	0.04864

7.给定数据表

x	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750
f(x)	0.79618	0.77334	0.74371	0.70413	0.65632	0.60228

（1）用前四组数据进行 Newton 插值，并利用公式（4.3）求 Newton 插值多项式的系数；

（3）用（1）中的 Newton 插值多项式计算 f(0.1581)和 f(0.6367)的近似值.

解：

（1）

依题意，可以得到差分表如下所示

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4}]$
0.125	0.79618				
		-0.18272			
0.250	0.77334		-0.21728		
		-0.23704		-0.2697	
0.375	0.74371		-0.3184		0.8329
		-0.31664		0.1468	
0.500	0.70413		-0.26336		
		-0.38248			
0.625	0.65632				

取前四组数据进行 Newton 插值，得到的插值多项式的系数为：

$$f_0 = 0.79618, f[x_0, x_1] = -0.18272, f[x_0, x_1, x_2] = -0.21728, f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -0.2697,$$

插值多项式为：

$$N_3(x) = 0.79618 - 0.18272(x-0.125) - 0.21728(x-0.125)(x-0.25) - 0.2697(x-0.125)(x-0.25)(x-0.375),$$

（3）

$$f(0.1581) \approx N_3(0.1581) = 0.7906.$$

$$f(0.6367) \approx N_3(0.6367) = 0.6457.$$

附加题【7.（3）用 MATLAB 编程实现】

程序代码如下：

```
clc; clear; close all;

xi = 0.1581;     %所要求的插值点
%插值条件如下:
x = 0.125 : 0.125 : 0.750;
y = [0.79618 0.77334 0.74371 0.70413 0.65632 0.60228];

nx = length(x); %向量 x 的长度
ny = length(y); %向量 y 的长度

if nx~=ny  %如果向量 x 和向量 y 的长度不一致，出错
    error('错误，x,y 的长度不一致');
end

Table = zeros(nx);  %初始化均差表
Table(:,1) = y;     %均差表的第一列为 y

for k = 2:1:nx      %从第二列开始，完善均差表.k 为列标
    for h = 1:1:nx-k+1   %h 为行标
        %由课本中的公式（4.5）可得
        Table(h,k) = (Table(h+1,k-1)-Table(h,k-1))/(x(h+k-1)-x(h));
    end
end

fxk  = Table(:,1);
fxk_xk1  = Table(:,2);
fxk_xk2  = Table(:,3);
fxk_xk3  = Table(:,4);
fxk_xk4  = Table(:,5);
fxk_xk5  = Table(:,6);
table(fxk,fxk_xk1,fxk_xk2,fxk_xk3,fxk_xk4,fxk_xk5)%打印出均差表

Para = ones(1,nx);    %初始化插值多项式系数表
Para(1) = Table(1,1); %多项式系数第一个为 f0

for k = 2:1:nx        %从第二项开始要乘上插值基
    for h = 1:1:k-1
        Para(k) = Para(k) * (xi - x(h));
    end
    Para(k) = Para(k)*Table(1,k);
end
%对系数表求和，得到结果
fprintf('当插值点为%f 时，结果为\n',xi)
result = sum(Para)
```

运行程序得到均差表如图 1 所示

6×6 table

fxk	fxk_xk1	fxk_xk2	fxk_xk3	fxk_xk4	fxk_xk5
0.79618	-0.18272	-0.21728	-0.26965	0.83285	-1.2561
0.77334	-0.23704	-0.3184	0.14677	0.047787	0
0.74371	-0.31664	-0.26336	0.17067	0	0
0.70413	-0.38248	-0.19936	0	0	0
0.65632	-0.43232	0	0	0	0
0.60228	0	0	0	0	0

图 1 – 均差表

当 xi 的值设置为 0.1581 时，得到的结果如图 2 所示

```
当插值点为0.158100时，结果为

result =

    0.7903
```

图 2 – xi 为 0.1581 时的结果

当 xi 的值设置为 0.6367 时，得到的结果如图 3 所示

```
当插值点为0.636700时，结果为

result =

    0.6515
```

图 3 – xi 为 0.6367 时的结果