深圳大学医学部生物医学工程学院
本科生课程作业

课程：计算方法

（2018-2019 学年第一学期）

任课教师：张治国

专业（方向）	生物医学工程
年级/班级	2016 级 2 班
学号	2016222042
姓名	陈焕鑫
提交日期	2018 年 10 月 9 日

供助教评分使用	
助教姓名	
收到日期	201__年 ___ 月 ___ 日
评分(0-100)	
评语（如有）	

2. 用 Gauss 消去法求解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-4x_4=1 \\ -x_1+x_2+x_3+3x_4=-2 \\ x_1+3x_2+5x_3-4x_4=-4 \\ x_2+2x_3-x_4=-2 \end{cases}$$

解：依题意，可得增广矩阵，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$，

消元，得 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} & 0 \end{pmatrix}$

回代，得 $\begin{cases} x_1+x_2-4x_4=1 \\ 2x_2+x_3-x_4=-1 \\ 4x_3+x_4=-4 \\ -\frac{7}{8}x_4=0 \end{cases}$，$\therefore x_1=1, x_2=0, x_3=-1, x_4=0$

3. 用 Gauss 列主元素消去法求解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

解：依题意，可得增广矩阵，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 5 & 15 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$,

交换 r_1 和 r_2 两行，得 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 & 5 & 15 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$,

$r_2=r_2-\frac{1}{2}\times r_1$， $r_3=r_3+r_1$， $r_4=r_4-\frac{1}{2}\times r_1$, 得$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 18 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$,

交换 r_2 和 r_3，得$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 18 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$,

$r_3=r_3+\frac{1}{6}\times r_2$， $r_4=r_4-\frac{1}{6}\times r_2$, 得$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$,

$r_4=r_4+r_3$， 得$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$,

回代，得$\begin{cases} 2x_1+5x_2+3x_3-2x_4=3 \\ 3x_2+6x_3+3x_4=18 \\ \frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4=\frac{1}{2} \\ 5x_4=5 \end{cases}$， ∴$x_1=-3$， $x_2=1$， $x_3=2$， $x_4=1$

9. 给出下列矩阵的 LU 分解.

(1)　用 Gauss 消元过程分解 A;

(2)　用 Doolittle 法分解 B.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{pmatrix}.$$

解:

(1)依题意,

$m^{(1)}{}_{21}=\dfrac{a^{(1)}{}_{21}}{a^{(1)}{}_{11}}=2$， $r_2=r_2-m^{(1)}{}_{21}\times r_1$， $m^{(1)}{}_{31}=\dfrac{a^{(1)}{}_{31}}{a^{(1)}{}_{11}}=-1$， $r_3=r_3-m^{(1)}{}_{31}\times r_1$， 得 $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，

$m^{(2)}{}_{21}=\dfrac{a^{(2)}{}_{32}}{a^{(2)}{}_{22}}=\dfrac{1}{2}$ ， $r_3=r_3-m^{(2)}{}_{21}\times r_2$， 得 $A^{(3)}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-2&1\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. 即 $U=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-2&1\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

又 $L=\begin{pmatrix}1&&\\m^{(1)}{}_{21}&1&\\m^{(1)}{}_{31}&m^{(2)}{}_{32}&1\end{pmatrix}$， $\therefore L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$.

(2)依题意，

Doolittle 分解公式为

1） 当 r=1 时，解得

（U 的第一行不变） $u_{1i}=a_{1i},i=1,2,\ldots,n$

（L 的第 1 列） $l_{i1}=\dfrac{a_{i1}}{u_{11}},i=2,3,\ldots,n$

2） 当 r>1 时，行列元素的计算公式

$$u_{ri}=a_{ri}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{ki},i=r,\ldots,n;r=2,\ldots,n$$

$$l_{ir}=\frac{a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{ik}u_{kr}}{u_{rr}},i=r+1,\ldots,n;r=2,\ldots,n-1$$

由 $B=\begin{pmatrix}1&2&6\\2&5&15\\6&15&46\end{pmatrix}$， 可得， $u_{11}=1$， $u_{12}=2$， $u_{13}=6$.

$l_{21}=\dfrac{a_{21}}{u_{11}}=\dfrac{2}{1}=2$ ， $l_{31}=\dfrac{a_{31}}{u_{11}}=\dfrac{6}{1}=6.$

$$u_{22}=a_{22}-\sum_{k=1}^{1}l_{2k}u_{k2}=a_{22}-l_{21}u_{12}=5-2\times2=1,$$

$$u_{23}=a_{23}-\sum_{k=1}^{1}l_{2k}u_{k3}=a_{23}-l_{21}u_{13}=15-2\times6=3$$

$$l_{32}=\frac{a_{32}-\sum_{k=1}^{2-1}l_{3k}u_{k2}}{u_{22}}=\frac{a_{32}-l_{31}u_{12}}{u_{22}}=\frac{15-6\times 2}{1}=3,$$

$$u_{33}=a_{33}-\sum_{k=1}^{3-1}l_{3k}u_{k3}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=46-6\times 6-3\times 3=46-45=1.$$

得，$B=\begin{pmatrix}1&2&6\\2&5&15\\6&15&46\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\6&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&6\\&1&3\\&&1\end{pmatrix}$,

$\therefore L=\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\6&3&1\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1&2&6\\&1&3\\&&1\end{pmatrix}$

10. 试对下列矩阵进行部分主元素 Doolittle 分解.

$A=\begin{pmatrix}-1&4&6\\-3&14&25\\1&0&13\end{pmatrix}$.

解：

$$A=\begin{pmatrix}-1&4&6\\-3&14&25\\1&0&13\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\Leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}-3&14&25\\-1&4&6\\1&0&13\end{pmatrix}\xrightarrow[l_{31}=a_{31}\div u_{11}]{l_{21}=a_{21}\div u_{11}}\begin{pmatrix}-3&14&25\\\frac{1}{3}&4&6\\-\frac{1}{3}&0&13\end{pmatrix}\xrightarrow[l_{32}=a_{32}-l_{31}\times u_{13}]{u_{22}=a_{22}-l_{21}\times u_{12}}\begin{pmatrix}-3&14&25\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&6\\-\frac{1}{3}&\frac{14}{3}&13\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\Leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}-3&14&25\\-\frac{1}{3}&\frac{14}{3}&13\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&6\end{pmatrix}\xrightarrow[u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}]{l_{32}=l_{32}\div u_{22}}\begin{pmatrix}-3&14&25\\-\frac{1}{3}&\frac{14}{3}&\frac{64}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{7}&\frac{5}{7}\end{pmatrix}.$$

$\therefore L=\begin{pmatrix}1&&\\-\frac{1}{3}&1&\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}-3&14&25\\&\frac{14}{3}&\frac{64}{3}\\&&\frac{5}{7}\end{pmatrix}$.

13. 设 Ax=b，其中

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & 10\\ 6 & 8 & 10 & 9\\ 7 & 10 & 8 & 9\\ 5 & 7 & 6 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}26\\ 18\\ 22\\ 9\end{pmatrix},$$

用紧凑格式 Doolittle 方法求解此方程组.

解：分解的到 L 和 U，并得到 Ly=b 的解 y

$$Aug=\begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & 10 & 26\\ 6 & 8 & 10 & 9 & 18\\ 7 & 10 & 8 & 9 & 22\\ 5 & 7 & 6 & 5 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow{r=1}\begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & 10 & 26\\ \frac{6}{5} & 8 & 10 & 9 & 18\\ \frac{7}{5} & 10 & 8 & 9 & 22\\ 1 & 7 & 6 & 5 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow{r=2}\begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & 10 & 26\\ \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & -3 & -\frac{66}{5}\\ \frac{7}{5} & -\frac{1}{2} & 8 & 9 & 22\\ 1 & 0 & 6 & 5 & 9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r=3}\begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & 10 & 26\\ \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & -3 & -\frac{66}{5}\\ \frac{7}{5} & -\frac{1}{2} & -5 & -\frac{13}{2} & -21\\ 1 & 0 & \frac{3}{5} & 5 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow{r=4}\begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & 10 & 26\\ \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & -3 & -\frac{66}{5}\\ \frac{7}{5} & -\frac{1}{2} & -5 & -\frac{13}{2} & -21\\ 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{11}{10} & -\frac{22}{5}\end{pmatrix}$$

$$\therefore U=\begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & 10\\ & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & -3\\ & & -5 & -\frac{13}{2}\\ & & & -\frac{11}{10}\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}26\\ -\frac{66}{5}\\ -21\\ -\frac{22}{5}\end{pmatrix}.$$ 又 Ux=y，可得，$x=\begin{pmatrix}-8\\ 5\\ -1\\ 4\end{pmatrix}$.

附加题：（MATLAB 编程）

1. 用 Gauss 列主元素消去法求解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

解：MATLAB 代码如下（实验结果见附页 1）：

```
clc; clear; close all;
%已知 A 和 b，求解 x
A = [1,2,1,-2;2,5,3,-2;-2,-2,3,5;1,3,2,5];
b = [-1;3;15;9];
[n, ~] = size(A);%求出矩阵 A 的大小
x = zeros(n, 1);
Aug = [A,b];%增广矩阵
for k = 1:n-1
    %求出第 k 列中最大的元素所在的行 r
    [~, r] = max(abs(Aug(k:n, k)));
    r = r + k - 1;
    if r > k  %如果第 k 行的元素不是最大的
        %将第 k 行与第 r 行的元素进行交换
        temp = Aug(k, : );
        Aug(k, : ) = Aug(r, : );
        Aug(r, : ) = temp;
    end
    %需保证对角元素不出现 0
    if Aug(k, k) == 0
        error('对角元素出现 0');
    end
    %Gauss 消元法求上三角矩阵
    for p = k + 1 : n
        Aug(p, : ) = Aug(p, : ) - Aug(k, : )*Aug(p, k)/Aug(k, k)
    end
end
%解上三角方程组
A = Aug(:, 1:n);
b = Aug(:, n+1);
x(n) = b(n)/A(n,n);
for k = n - 1:-1:1
    x(k) = b(k);
    for p = n:-1:k+1
        x(k) = x(k)-A(k,p)*x(p);
    end
    x(k)=x(k)/A(k,k);
end
```

2. 试对下列矩阵进行部分主元素 Doolittle 分解.

$$B=\begin{pmatrix}3&1&6\\2&1&3\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

解：MATLAB 代码如下（实验结果见附页2）：

```
clc;clear;close all;
%已知矩阵 B，将其分解为单位下三角矩阵和上三角矩阵
B = [3,1,6;2,1,3;1,1,1];
[~,n] = size(B);%求出矩阵 B 的大小
%生成零矩阵 u 和 l，分别存放上三角矩阵和下三角矩阵
u = zeros(n,n);
l = zeros(n,n);
%单位下三角矩阵对角线上的元素都为 1
for ii = 1:n
    l(ii, ii) = 1;
end
%部分选主元 Doolittle 分解
for r = 1:n
    %计算第 r 列的中间量
    for i1 = r:n
        for k = 1:r-1
            B(i1,r) = B(i1,r) - B(i1,k)*B(k,r);
        end
    end
    %对第 r 列主对角元以下（含主对角元）选主元
    [~,m] = max(abs(B(r:n, r)));
    m = m + r -1;
    if m > r   %换行
        temp = B(r, :);
        B(r,:) = B(m,:);
        B(m,:) = temp;
    end
    %后续处理
    for i2 = r+1 : n
        B(i2,r) = B(i2,r)./B(r,r);
    end
    for i3 = r+1 : n
        for k = 1:r-1
            B(r,i3) = B(r,i3)-B(r,k)*B(k,i3);
        end
```

```
    end
end
%将部分选主元 Doolittle 分解后的矩阵分解为 l 和 u
for row = 1:n
    for col = 1:n
        if row <= col
            u(row, col) = B(row,col);
        else
            l(row, col) = B(row,col);
        end
    end
end
```

附页：

附加题1的结果如下图所示

```
A =

     1     2     1    -2
     2     5     3    -2
    -2    -2     3     5
     1     3     2     5


b =

    -1
     3
    15
     9

第1次变换
Aug =

    2.0000    5.0000    3.0000   -2.0000    3.0000
         0   -0.5000   -0.5000   -1.0000   -2.5000
         0    3.0000    6.0000    3.0000   18.0000
         0    0.5000    0.5000    6.0000    7.5000

第2次变换
Aug =

    2.0000    5.0000    3.0000   -2.0000    3.0000
         0    3.0000    6.0000    3.0000   18.0000
         0         0    0.5000   -0.5000    0.5000
         0         0   -0.5000    5.5000    4.5000

第3次变换
Aug =

    2.0000    5.0000    3.0000   -2.0000    3.0000
         0    3.0000    6.0000    3.0000   18.0000
         0         0    0.5000   -0.5000    0.5000
         0         0         0    5.0000    5.0000

求得

x =

    -3
     1
     2
     1
```

附加题2的结果如下图所示

```
命令行窗口

B =

     3     1     6
     2     1     3
     1     1     1

上三角矩阵U
u =

    3.0000    1.0000    6.0000
         0    0.6667   -1.0000
         0         0   -0.5000

单元下三角矩阵L
l =

    1.0000         0         0
    0.3333    1.0000         0
    0.6667    0.5000    1.0000
```