

Miniproyecto # 2

Transición de fase en modelos forestales

Daniel Estrada Acevedo

Instituto de Física—Universidad de Antioquia

Resumen

En el presente trabajo se estudia el problema de percolación dinámica para simular la propagación del fuego en un incendio forestal. En el modelo planteado, la extensión del fuego se simula como un proceso de percolación por enlace con probabilidad de propagación estático e isotópico (p), en el cual, solo considera para la evolución del sistema a los primeros vecinos. Se trabajó con una red cuadrada que no supero los 1400x1400 nodos de red, sin embargo, con esto se pudo estimarse algunos parametros del sistema como el umbral de percolación, los exponentes criticos para el tiempo de vida del incendio y el tamaño de los clusters, y también, se calcularon los exponentes dinámicos, para varios valores de p , del tamaño del cluster y la dimensión fractal de esté último.

Palabras clave— Percolación por enlaces, Modelo de incendio forestal, fractalidad.

1. Introducción

El término percolar usualmente se utiliza para describir el proceso de flujo de un líquido a través de un material poroso, sin embargo, este se puede extender, y en física y otras ciencias es usual usar el término para referirse a procesos de transmisión de información. En el problema del fluido, dependiendo de algunas características del medio, por ejemplo, la porosidad, el fluido percola (atraviesa) el sistema o no, en analogía a esto, en física por ejemplo, se puede decir que hay o no percolación dependiendo si la transmisión de alguna propiedad a través del sistema se da o no, es decir, los términos de fluido y medio se proponen de manera general, donde fluido puede referirse a un líquido, vapor, flujo de calor, corriente eléctrica, infección o cualquier otra propiedades que pueda moverse a través del medio, que puede ser, el espacio poroso entre una roca, un suelo, una población, un arreglo de árboles o el mismo universo.[3][2]

La teoría de percolación ha jugado uno de los papeles más importantes para el entendimiento de sistemas desordenados, porque permite modelar bastante bien sus propiedades macroscópicas a partir de la interconectividad de sus elementos microscópicos, además, los modelos de percolación constituyen el cambio de fase más simple que se puede estudiar, sin mencionar que están estrechamente relacionado con los conceptos de fractalidad e invarianza de escala. De esta forma, los modelos de percolación se convierten en métodos particularmente útiles para abordar los problemas de conductividad hidráulica o eléctrica y el estudio de propiedades eléctricas de sistemas desordenados como los semiconductores amorfos o cristalinos con impurezas, en general, para abordar los llamados fenómenos críticos, en los cuales ciertas propiedades cambian de manera abrupta o bien ciertas propiedades que antes no se apreciaban lo hacen al momento de sobrepasar un punto crítico en alguna variable característica del sistema.[3]

En este trabajo se aborda un modelo de percolación bastante simple conceptualmente, pero que permite un primer acercamiento a los conceptos de umbral de percolación y transiciones bruscas de fase, éste es, el modelo de percolación de un incendio forestal. Específicamente, se trata de un modelo de percolación dinámica por enlace, y constituye un problema de interés para el estudio de los métodos y alternativas de reforestación optimizados para la pervivencia de los bosques ante estas catástrofes naturales.

2. Marco Teórico

Los modelos de percolación se inician con la construcción de una red que representa al medio o a la propiedad que se quiera modelar. Estas redes pueden representar las estructuras de los materiales o bien, las formas en que las propiedades se distribuyen en el medio. Las redes se constituyen de celdas unitarias repartidas en 2D o 3D de forma regular o no, lo que origina dos entidades principales: nodos (o sitios) y enlaces (o lazos).

Percolación por nodos, el retículo se forma por un conjunto de puntos distribuidos por toda la red, cada punto (nodo) puede estar en uno de dos estados, ocupado o vacío con probabilidad p y $q = 1 - p$ respectivamente, los sitios vecinos pueden estar conectados siempre cuando los nodos vecinos estén ocupados también. Los puntos conectados entre sí forman agregados o clusters cuyo tamaño dependerá en gran medida de p . Si todos los nodos de la red están ocupados ($p = 1$), siempre es posible encontrar un camino conexo entre dos nodos distintos siguiendo los enlaces, por el contrario, si hay un número de vacancias suficientemente grande ($p = 0$ o pequeño) será casi imposible encontrar un camino que percole a través del sistema.

Percolación por enlaces, en este caso no se tratan con vacancias en la red, sino que se sitúan todos los nodos y se asigna una probabilidad p de que un nodo esté enlazado con otros, de esta forma, análogo a la percolación por sitios, se formarán clústeres de cierto tamaño dependiente de nuevo de las probabilidades.

En la Figura 1 se presenta un ejemplo de percolación por sitio generado computacionalmente con una red de tamaño 60×50 y con probabilidades de ocupación del 50 % y 60 %, en donde se puede apreciar la aparición de un cluster que se extiende de lado a lado de la red (fenómeno de percolación) para $p > 60\%$.

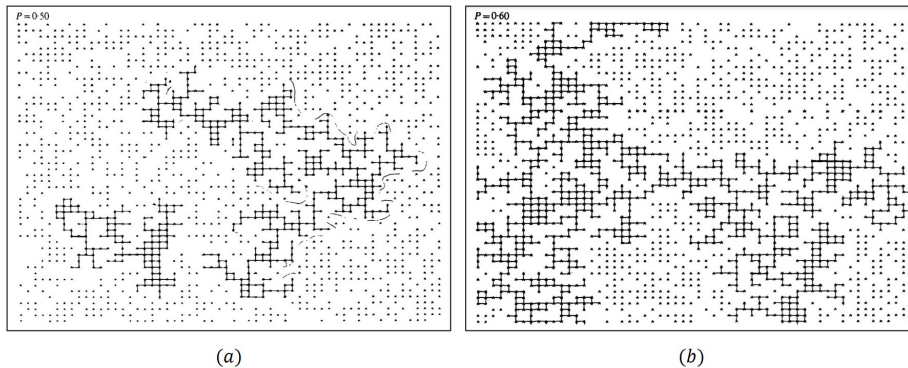


Figura 1: Percolación por sitio: (a) $p < p_c$, (b) $p > p_c$. Imágenes tomadas de [4]

Desde ambas perspectivas del modelo de percolación se puede probar que, para una red de

tamaño infinito, existe un valor crítico de p (p_{cs} **umbral de percolación** de sitio, p_{cb} umbral de percolación enlazada), tal que, si $p < p_c$, se tendrán clusters de nodos interconectados que no se extienden por toda la red, esto es, no se da percolación[3]. En general, el umbral de percolación por sitio difiere del umbral de percolación por enlace y cada tipo de modelo se puede adaptar a diversos problemas según la necesidad o propiedad que se desea estudiar utilizando un modelo u otro o alguna combinación, conocida como percolación mixta[2]. Como muestra de la diferencia entre los umbrales de percolación, en la Figura 2 se presentan dos redes del mismo tamaño y probabilidades de ocupación (fig. 2.a) y de enlace (fig. 2.b) numéricamente iguales, y se aprecia que para un caso ya se ha sobrepasado el umbral de percolación mientras que para el otro no.

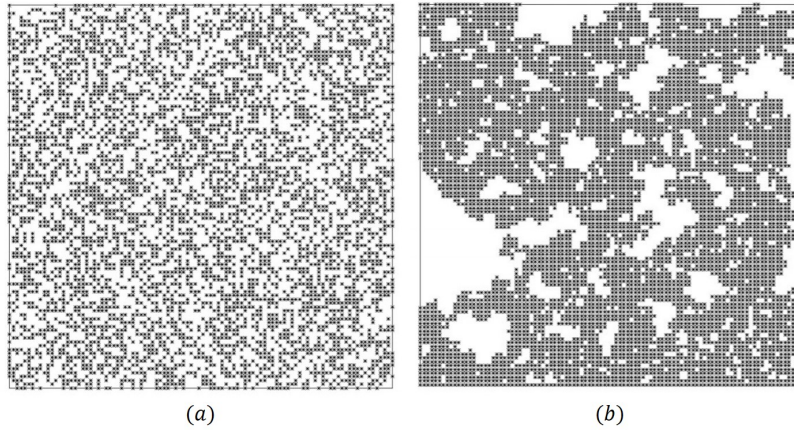


Figura 2: Imagen tomada de [1], el umbral de percolación por sitio de una red cuadrada es de 0.502742, mientras que para la percolación por enlace es 0.5 [3].

Un punto importante a mencionar por las limitaciones computacional existentes en el modelamiento de estos sistemas, es el hecho de que el valor de p_c para redes finitas depende de sus dimensiones, para una red grande (cuando se alcance el limite termodinámico) el valor convergerá a un valor fijo. Esto se da porque, si la red es pequeña, se pueden etiquetar erróneamente un camino como percolantes ya que al no ser la red lo suficientemente grande se pueden alcanzar los bordes fácilmente, a esto se le conoce como efectos de tamaño finito [3].

Además del umbral de percolación, las propiedades topológicas de las redes se caracterizan por varias cantidades importantes que dan cuenta de factores como la probabilidad de formación de clusters de un tamaño definido, la probabilidad de percolación o la longitud de correlación (radio típico de los clusters), y una de las cosas interesante de los procesos de percolación, es que el comportamiento de las redes, cerca del umbral de percolación, es por lo general independiente de la geometría de la red y del tipo de percolación. “*Existe una aparente universalidad que permite que algunas propiedades obedezcan leyes universales de escalamiento cerca del umbral de percolación*” [3]. Estas leyes de escalamiento se caracterizan por ciertos exponentes críticos (que dependen únicamente de la dimensión euclidiana del sistema y las características geométricas) que permiten caracterizar las propiedades de las redes.

Dimensión fractal

Como se mencionó al comienzo de este trabajo, los modelos percolantes están relacionados con la fractalidad, esto es, porque justo en el punto crítico de percolación, se puede probar, que el cluster (agrupación percolante) es un fractal. Si se estudia la masa del sistema percolante, se debe encontrar que esta cantidad crece al aumentar el tamaño lineal de sistema con una ley de potencias[2]

$$M \sim L^d. \quad (1)$$

Particularmente, cuando la agrupación se formó con el valor crítico de p , este exponente no es un número entero, lo cual, implica que el objeto subyacente es invariante de escala, o lo que es lo mismo auto-similar o fractal.

modelo de incendios forestales

La descripción presentada antes de los modelos de percolación por sitios y por enlace se podrían caracterizar como modelos estáticos, sin embargo, los clusters que se forman en cada modelo pueden ser reproducidos de forma dinámica definiendo unas reglas de evolución del sistema que representen alguno de los modelos de percolación. Particularmente, en este trabajo se aborda un modelo de incendios forestales que corresponde a un caso de percolación por enlace construido de forma dinámica.

Se plantea un bosque como una red dos dimensional en cuyos nodos se ubica cada uno de los árboles que constituye el mismo. El incendio se puede propagar por la red con cierta probabilidad (probabilidad de propagación) transmitiéndose desde un árbol a sus vecinos, en este sentido, se definen tres posibles estados para la evolución del bosque:

- se identifica con estado **SANO** a los árboles de la red que no estén quemándose pero que son susceptibles a ser alcanzados por el fuego, gráficamente este estado se identificará con el color **verde**.
- Cuando un árbol es alcanzado por el fuego, se dice que este está en estado **QUEMANDOSE** y en este punto es un potencial propagador del incendio con probabilidad p de transmitir el fuego a cada uno de sus 4 primeros vecinos. Este estado se identificará con el color **rojo**.
- Por último, luego de que un árbol que se está quemando propaga el fuego a sus vecinos, en el paso siguiente de la evolución, este será un árbol **QUEMADO**, en este estado el árbol ya no es susceptible a propagar el incendio y se caracterizará gráficamente con el color **negro**.

La evolución del sistema consiste en recorrer la red de árboles y aleatoriamente hacer que los árboles en estado **QUEMANDOSE** propaguen el fuego con la probabilidad dada (p), en cada paso, los árboles que propagaron el incendio pasan a ser árboles quemados (**QUEMADO**) y los sanos (**SANO**) que fueron incendiados pasan al estado **QUEMANDOSE**. Este proceso se repite hasta que no haya más árboles quemándose. En la Figura 3 se ejemplifica un paso de la simulación, en fig. 3.a se inicia el bosque con un solo árbol rojo, al paso siguiente, este propaga el fuego a sus vecinos con probabilidad p y cambia su estado a quemado, esto resulta en fig. 3.b, 2 árboles rojos y uno negro.

El problema de plantear simulaciones más reales, para el estudio de parámetros que ayuden en la optimización en el control de los incendios forestales, es usual que se aborde, planteando modelos más complejos que incluyan, por ejemplo, un tipo de percolación mixta en un intento por simular una distribución más acertada de árboles en una región boscosa, además, puede llegar a incluirse factores físicos al sistema alterando, por ejemplo, la naturaleza de la probabilidad de propagación, se puede transcender de un valor estático de p a un valor dinámico y anisótropo, permitiendo así, representar fenómenos como la flamabilidad según la especie de los árboles o su humedad, y también, la propagación del incendio considerando la dirección del viento.

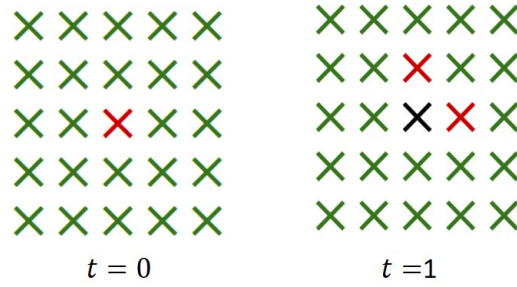


Figura 3: Ejemplificación de dos pasos consecutivos en el algoritmo del modelo de incendio forestal.

3. Resultados

El algoritmo de propagación del incendio forestal se implemento en C++, creando para esto, una clase (`bosque.h`) que contiene las métodos y rutinas necesarios para la simulación del sistema percolante según las reglas que se describieron. Con está clase como base, se corrieron varias simulaciones y se extrajo información para el análisis de algunas propiedades como el umbral de percolación, algunos exponentes críticos y una estimado de la dimensión fractal.

Umbral de percolación

Por tratarse de un problema de percolación por enlace para una red dos dimensional cuadrada, el valor critico para la probabilidad de propagación se espera que esté justo en $\frac{1}{2}$ [4]. Para la estimación computacional del umbral de percolación, es necesario estudiar la variación de un parámetro representativo del sistema que de cuenta de la propiedad de perclación, en este caso, esta variable se toma como el tiempo de vida del fuego del sistema. Recordando que las simulaciones solo se detienen hasta que no hayan más arboles en estado `QUEMANDOSE`, es claro, que en aquellos casos en los que no se de percolación del fuego a través del bosque, el tiempo de vida del incendio (los pasos que le toma a la simulación detenerse) va a ser menor que si el fuego se extiende por largas regiones del bosque hasta atravesarlo, por lo tanto, debe ocurrir un cambio abrupto en el valor de este parámetro cuando se alcance en umbral de percolación.

L	p
50	0.505
100	0.490
200	0.510
400	0.500
500	0.500
800	0.500
1000	0.500
1400	0.500

Cuadro 1: umbral de percolación para diferentes tamaño de red.

Con esto en mente, se corrieron un total de 25 simulaciones para cada valor de p entre 0.2 y 0.8 a pasos de 0.005, se tomó el tiempo de cada simulación y se promedió. Con esto, se

localizó el umbral de percolación como el punto en el cual se daba el cambio abrupto en t . Este proceso se repitió para varios tamaños de red para evitar dar un estimado equivocado por efectos de tamaño finito, los resultados se presentan en la tabla 1, allí se puede apreciar que para arreglos pequeños el valor de p_c es un poco oscilante. En la Figura 4.a se puede visualizar el comportamiento descrito para el parámetro t , de allí, se puede ver que el valor de p_c si se encuentra en 0.5 como se esperaba.

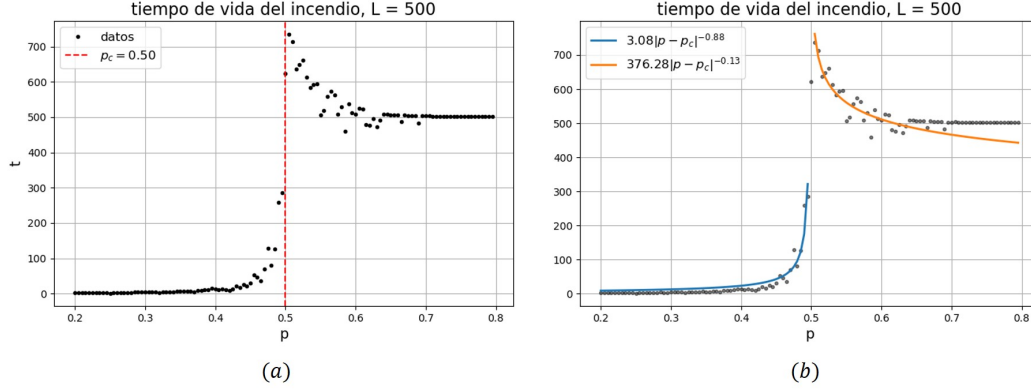


Figura 4: Gráficas de tiempo de simulación contra la probabilidad de propagación. (a) se resalta el cambio de fase en $p = 0.5$, (b) ajuste para obtener el exponente crítico.

Comportamiento crítico en la vecindad de p_c

De este mismo conjunto de datos se puede analizar el comportamiento de la variable t en la vecindad de p_c , para esto, se tomó un subconjunto de datos correspondiente a valores de p en $[0.4, 0.6]$ y se realizó un ajuste por izquierda y por derecha de p_c a la forma funcional

$$t(p) = A|p - p_c|^{\alpha_{\pm}}, \quad (2)$$

donde, las etiquetas \pm del exponente α resaltan la idea de que el comportamiento es diferente para $p < p_c$ y $p > p_c$ por cuestiones de tamaño de la red¹. Del ajuste presentado en la Figura 4.b se obtuvieron como resultado los valores $\alpha_- = -0.88 \pm 0.08$ y $\alpha_+ = -0.13 \pm 0.01$. Cabe resaltar, que aunque la gráfica 4.b se presenta en todo el intervalo original de p , el ajuste solo se hizo con los datos del intervalo ya mencionado.

Ahora, un comportamiento crítico más relevante se obtiene analizando el número de árboles quemados en el sistema (S), está variable, en este caso, da cuenta de la masa de los clusters formados en cada simulación y, como se puede encontrar en la literatura [3] [4], en las cercanías de p_c debe seguir un comportamiento como

$$S \sim |p - p_c|^{\gamma}, \quad (3)$$

donde, teóricamente γ debe valer 2.38[1].

Corriendo la misma cantidad de simulaciones, en los mismos intervalos de probabilidad, pero en este caso solo para $L = 500$, se promedia el numero de arboles quemados (S) en

¹En el limite termodinamico los valores de los exponentes críticos deberían convergen a un solo valor.

función de p y se obtiene una gráfica como la presentada en la Figura 5.a.

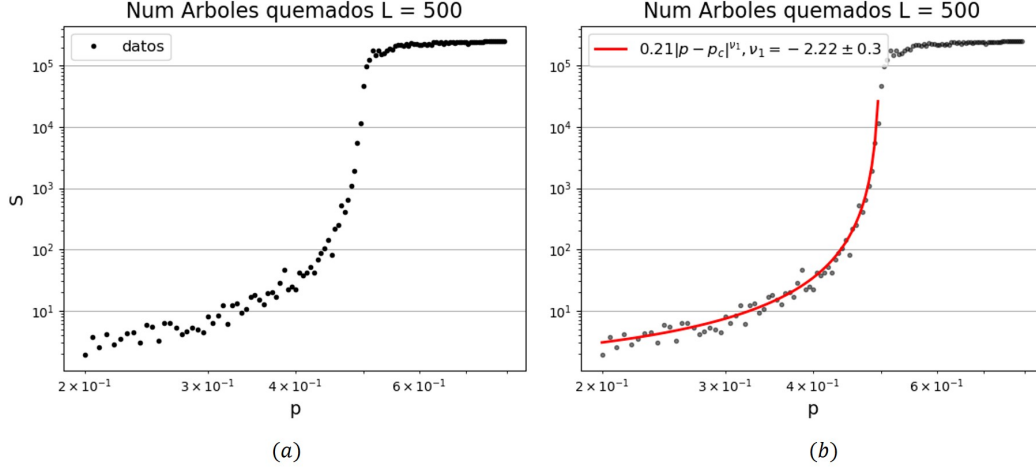


Figura 5: Gráfica de número de árboles quemados contra la probabilidad de propagación. (a) Esquema general del comportamiento de S , (b) ajuste para obtener el exponente crítico.

De nuevo, se evidencia un cambio en el comportamiento del sistema en las cercanías de p_c . Análogo a lo primero, se toma un subconjunto de estos datos alrededor de p_c y se hizo un ajuste (fig. 5.b) a la ecuación 3 por izquierda y se obtuvo el estimado para el exponente crítico $\nu = -2.22 \pm 0.3$, que comparando con el γ teórico, el resultado presenta un error relativo de aproximadamente el 7%.

Comportamiento dinámico del sistema

En el contexto de un modelo práctico del incendio forestal, es necesario poner atención al comportamiento de las variables a cada paso de la simulación, por ello, en la Figura 6 se presenta gráficamente la evolución del incendio en términos del número de árboles en cada uno de los estados definidos.

Es notorio el cambio del comportamiento en la propagación del incendio al cruce del umbral de percolación. Mientras que en la Figura 6.a ($p < p_c$) el fuego se extingue con solo 25 pasos de simulación y algunas centenas de árboles quemados, en la Figura 6.c ($p > p_c$) el fuego se propaga rápidamente alcanzando a quemar la mayor parte del bosque. En la figura 6.b se presenta el caso para $p = p_c$ y se puede apreciar el largo tiempo de duración del incendio, sin embargo, la proporción de árboles quemados no es tan drástica como para valores de p por encima del umbral.

Centrándose ahora solo en el caso de los árboles quemados (S), se espera que, el crecimiento de la masa del cluster en el tiempo sigue la forma funcional [1]

$$S \sim t^{\bar{\nu}}, \quad (4)$$

donde, $\bar{\nu}$ se nombra como exponente dinámico y es un parámetro que da cuenta de la dificultad de propagación del incendio[1].

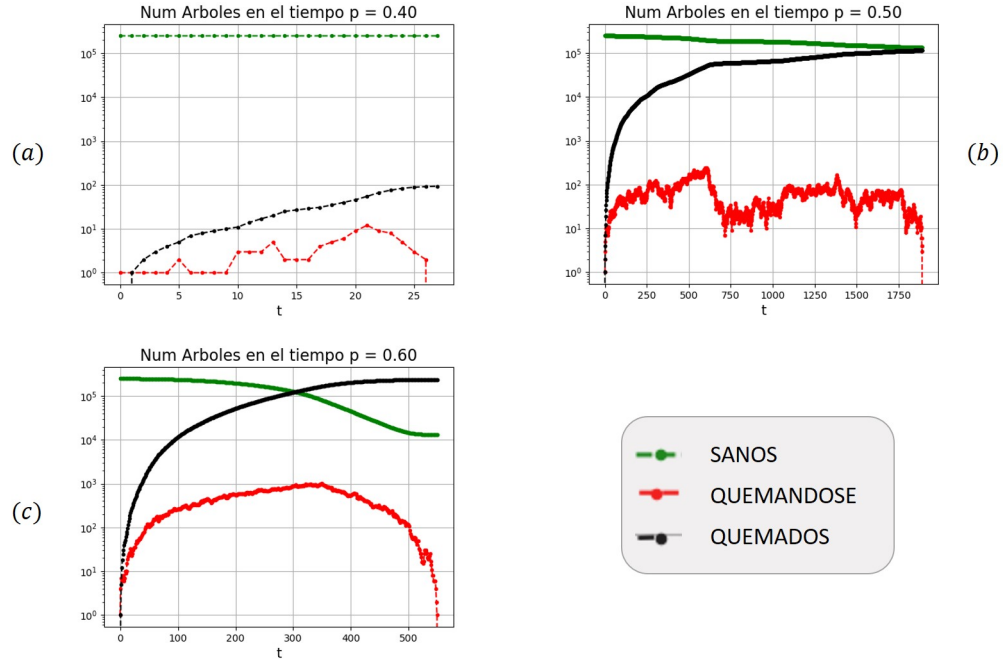


Figura 6: Gráficas de comportamiento del número de árboles del sistema en cada estado en cada paso de la simulación.

Corriendo 25 simulaciones para $p = 0.4, 0.5, 0.6$ en una red de tamaño 500, se promedió el número de árboles quemados en cada paso temporal, con lo cual, se construyó la gráfica de la Figura 7 y se estimó, mediante ajustes lineales del logaritmos de los datos obtenidos, los exponentes dinámicos en cada caso: $\bar{\nu} = 1.13 \pm 0.04$ para $p = 0.4$, $\bar{\nu} = 1.79 \pm 0.01$ para $p = 0.5$ y $\bar{\nu} = 2.251 \pm 0.003$ para $p = 0.6$.

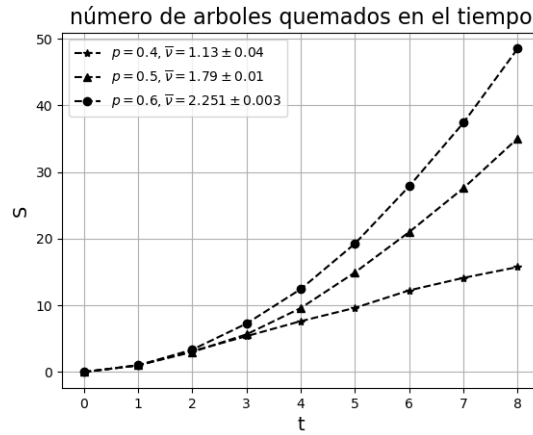


Figura 7: Gráfica del crecimiento del cluster para diferentes valores de probabilidad en función del tiempo

Es importante aclarar que aunque solo aparecen 8 pasos de tiempo en la gráfica, los ajustes se realizaron hasta el mínimo valor de tiempo encontrado en cada p , sin embargo, se grafican solo 8 debido a que éste corresponde al valor mínimo de tiempo de quema de árboles de la probabilidad más baja (se busca que para todas las probabilidades, la gráfica esté en el mismo rango y no que unas salgan más largas que las otras). En lo que respecta a los promedios para cada paso de tiempo, lo que se hizo es lo siguiente: se realizaron 25 corridas para cada valor de la p , pero las series de tiempo de los árboles quemados se tomó solo hasta el mínimo valor (de tiempo) obtenido entre las corridas, de tal forma que los promedios quedaran bien definidos y la estadística fuera coherente sobre todos los casos analizados.

De los valores obtenidos para los exponentes críticos, se puede decir que, comparado con el \bar{v}_{p_c} , la velocidad con la que el incendio se propaga en este sistema es mayor para valores de $p > p_c$.

Dimensión fractal

Para estimar la dimensión fractal del cluster que se forma en p_c , se utilizó como base la propiedad de auto-similaridad de estas estructuras topológicas. La ecuación 1 representa una ley de potencias que no debe depender en general de la escala, es por esto que se posible utilizar este concepto para calcular d [2].

Teniendo en cuenta que la masa de la estructura percolante en este caso se refiere o está relacionada con el número de arboles quemados S , la idea consiste en analizar S en función del tamaño lineal del sistema (l), para esto, se tomaron 25 repeticiones de una configuraciones de 512×512 arboles, con estas, se sacaron porciones parciales de tamaño $l \times l$ y se hizo un conteo del número de árboles quemados. Se formó, luego de hacer un promedio de estas cantidades, un conjunto de valores de la relación $S(l)$ para $l = 10, 20, 50, 100, 200, 400, 500$ y, a partir de estos, se pudo hacer un ajuste lineal de la ecuación 1 en escala logarítmica (Figura 8), con lo cual, se obtuvo como estimado de la dimensión fractal del sistema $d = 1.8 \pm 0.05$ que difiere del valor teórico reportado (1.896) [2][1] por tan solo un 3%.

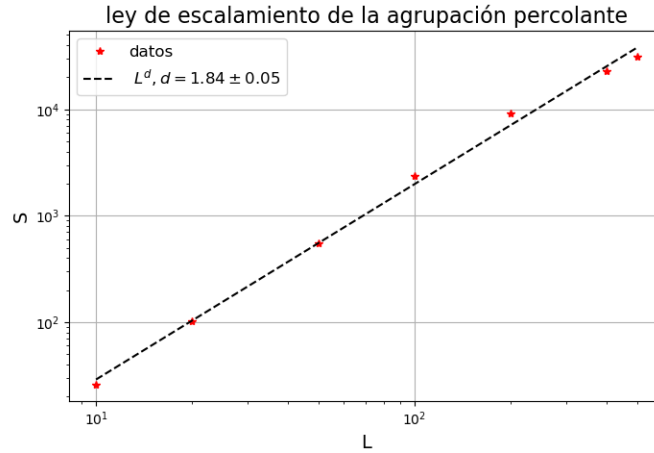


Figura 8: Ajuste lineal del tamaño de cluster (S) en función de la escala de observación de la red en escala logarítmica.

4. Conclusiones

- Del proceso de desarrollo de este trabajo se puede apreciar la potencialidad de los modelos de percolación para abordar problemas multidisciplinarios. En este caso se pudo trabajar un tema de incendios forestales, pero como se comentó al comienzo de este escrito, el concepto es aplicable a modelos de epidemias, simulación en las ciencias de suelos y materiales, entre otros.
-

Referencias

- [1] Daniel Galeano Sancho. “Percolation theory and fire propagation in a forest”. En: 2 (2015). URL: <http://hdl.handle.net/2445/67391>.
- [2] Departamento de electromagnetismo y física de la materia. *Física computacional, Lecciones- Percolación*. URL: <https://ergodic.ugr.es/cphys/LECCIONES/percolacion/percolacion.pdf> (visitado 28-11-2020).
- [3] Revista Mexicana De Ciencias Geológicas ; Pérez-Rea y col. *Modelo híbrido de percolación y elemento finito para el análisis micromecánico de suelos*. Inf. téc. 2. 2009, págs. 335-346.
- [4] Dietrich Stauffer y Amnon Aharony. *Introduction to percolation theory*. London: Taylor & Francis, 2009. ISBN: 0 7484 0253 5.