

Marcha Aleatoria - Movimiento Browniano

Daniel Andrés Fajardo Poveda*
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
(Dated: 7 de Febrero de 2023)

Se busca entender el comportamiento de una partícula en marcha aleatoria de forma estadística. Para esto son de utilidad las cadenas de Markov generadas por las variables aleatorias de posición final. Se encontró que la distribución de probabilidad de n pasos a la derecha dados N pasos totales es una distribución binomial con un valor esperado $\langle n \rangle = (0,5)N$ y varianza $\sigma^2 = (0,5)\sqrt{N}$. Por otro lado, utilizando la relación entre posición final, n y N se llegó a la distribución de probabilidad de dichas posiciones finales, en donde el valor esperado $\langle x \rangle = 0$ y la varianza $\sigma^2 = a(\sqrt{N} - N)$.

I. INTRODUCCIÓN

Todo el estudio del comportamiento de partículas en movimiento aparentemente aleatorio comenzó cuando el biólogo Robert Brown se preguntó a que se debían las trayectorias extrañas que tomaban partículas de polen en un fluido. En honor a sus observaciones este tipo de movimientos se conocen también como movimiento Browniano. Este movimiento se debe básicamente a la interacción de las partículas contra las moléculas del fluido. Sin embargo, para la época aun no estaba lista una teoría contundente sobre la estructura atómica y es por ello que los modelos estadísticos tomaron un papel importante en la descripción de este fenómeno.

En este artículo se discutirán los resultados obtenidos y un poco sobre el análisis del movimiento aleatorio de una partícula que se mueve en una dimensión, da un paso a la izquierda o derecha a cada instante τ con igual probabilidad y cuya posición en un tiempo $t = 0$ es $x = 0$.

Como la probabilidad de que se mueva a la izquierda es exactamente igual a la probabilidad de que se mueva a la derecha:

$$P(derecha) = 0,5$$

$$P(izquierda) = 1 - 0,5 = 0,5$$

Entonces es fácil de ver que la probabilidad de que dados N pasos n hayan sido a la derecha y $N - n$ a la izquierda, $P(n, N)$, corresponde a una distribución binomial.

$$P(n, N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} (0,5)^N$$

Además, se puede expresar la posición final de la partícula en términos de n pasos a la derecha y la cantidad N total de pasos. Se obtiene la siguiente relación.

$$x = a(2n - N) \quad (1)$$

En donde a es la longitud de los pasos. Finalmente, se encontraron los valores esperados y las varianzas para de las variables aleatorias n y x :

$$\langle n \rangle = \int n P(n, N) dn = NP(derecha) = (0,5)N$$

$$\langle x \rangle = a[2\langle n \rangle - N] = 0$$

$$\sigma^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$$
$$\sigma_n^2 = NP(derecha)P(izquierda) = (0,5)^2 N$$

$$\sigma_x^2 = a(2\sigma - N) = a(\sqrt{N} - N)$$

II. SIMULACIÓN NÚMERICA

Para la realización de la simulación de una partícula en marcha aleatoria se utilizó en lenguaje de programación python. El código en realidad es bastante sencillo, pero permite dar un primer vistazo al análisis del movimiento browniano de una forma fácil. Este se divide en tres partes: En la primera se define la función que generara la cadena de markov de las variables aleatorias, posiciones finales, y la función que grafica cualquier distribución que se le pasa como entrada de forma normalizada; En la segunda se realiza un número grande de iteraciones para extraer una cantidad importante de posiciones finales con el fin de demostrar que para una cantidad lo suficientemente grande de estas variables aleatorias la distribución de probabilidad tiende a

* Correo institucional: d.fajardo@uniandes.edu.co

comportarse como una distribución Gaussiana; En la ultima parte se creó una lista con distintos valores de N pasos totales y se calculó el valor de la posición esperada $\langle x \rangle$ y varianza $\langle x^2 \rangle$ para cada uno de estos valores N .

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Tras ejecutar la segunda parte del código con cien mil iteraciones se obtuvo la siguiente distribución:

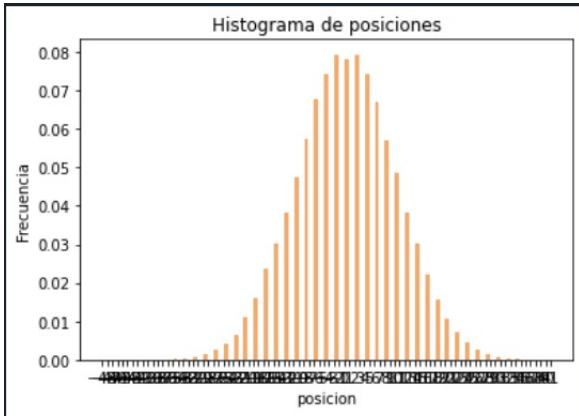


Figura 1. Distribución de probabilidad de las posiciones finales para un número arbitrario de $N = 100$ pasos totales y cien mil iteraciones (cantidad de posiciones finales obtenidas). Fuente: Elaboración propia.

Se encontró, ensayando con distintos valores para las iteraciones totales, que a medida en que se incrementaban las iteraciones, cantidad de variables aleatorias posición final, la distribución de probabilidad se

convergía a una distribución Gaussiana cuyo promedio es $N \langle x \rangle = 0$ y varianza $\sigma^2 = N\sigma_x^2$. Esto permite comprobar la veracidad del teorema central limite a partir de los resultados obtenidos en la simulación.

Finalmente, los valores obtenidos en la tercera parte se registran en la siguiente tabla:

N	5	10	15	20	25	50	100	1000
$\langle x \rangle$	-0.02	-0.03	0.01	0.01	-0.06	-0.00	-0.12	-0.53
$\langle x^2 \rangle$	4.98	10.09	14.92	19.99	25.49	50.04	99.91	1023.94

Cuadro I. En este cuadro aparecen todos los valores para N que se consideraron para realizar distintas distribuciones de probabilidad para las variables aleatorias posición final. Debajo de cada valor N se registraron sus respectivos valores esperados y varianza. Fuente: Elaboración propia.

El valor esperado para la posición x converge a cero, ya que la probabilidad de obtener un paso a la derecha es la misma que la de obtener un paso hacia la izquierda en cada instante de tiempo. Por otro lado, los valores de $\langle x^2 \rangle$, la varianza de x , es proporcional al numero de pasos N . La constante de difusión encontrada es de aproximadamente $D = 0,5$ para todos los N postulados.

IV. CONCLUSIONES

Se comprobó la veracidad del teorema central limite computacionalmente al realizar un alto número de iteraciones y generar la distribución de probabilidad de las posiciones finales obtenidas. Además, para distintos valores de N se demostró que el promedio $\langle x \rangle$ es cercano o igual a cero, que la varianza es proporcional a N y que la constante de difusión es aproximadamente 0,5 para cualquier N .

[1] J. Sanamaría. El movimiento browniano: Un paradigma de la materia blanda y de la biología. *Real Aca-*

demia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, (2013). <https://rac.es/ficheros/doc/01099.pdf>.