Técnicas de Inteligencia Artificial
Tema 1.2

Lógicas

Conocimiento inferencial

Se asume que se puede obtener un comportamiento inteligente mediante la manipulación de estructuras de símbolos.

- Los lenguajes de representación del conocimiento está diseñados para facilitar las operaciones sobre estructuras de símbolos, con una sintaxis y semántica precisa.
- El conocimiento se describe usando la lógica.
- Se genera nueva información a partir de la información actual. Esta nueva información no requiere obtener más datos de ninguna fuente, pero requiere un análisis de la información actual para generar nuevo conocimiento.
  - A partir de un conjunto de relaciones y valores se pueden inferir nuevos valores o relaciones.
  - Además de las relaciones algebraicas, se utilizan los predicados lógicos (deducción matemática).
- Las semánticas de las conectivas lógicas y los mecanismos de inferencia (por ejemplo, la regla del Modus Ponens) pueden utilizarse para obtener nuevo conocimiento.
  - " $\rightarrow$ " (implicación), " $\neg$ " (negación), " $\vee$ " (disyunción), " $\wedge$ " (conjunción).
  - " $\forall$ " (para todos), "$\exists$" (existe).

Conocimiento inferencial

- Ejemplos de predicados lógicos:
  - Firulais es un perro: perro(firulais).
  - Todos los perros son animales: $\forall x : perro(x) \rightarrow animal(x)$
  - Todos los animales viven en tierra o en agua: $\forall x : animal(x) \rightarrow vivir(x,tierra) \vee vivir(x, agua)$
- De los anteriores predicados podemos inferir lo siguiente:
  - Firulais vive en tierra o en agua.
- A medida que se añade más información en forma de objetos y relaciones, se puede deducir más conocimiento.

¿Qué es una lógica?

- Una lógica es un lenguaje con reglas concretas.
  - **Sin ambigüedad** en la representación.
  - Permite comunicación y procesamiento sin ambigüedad.
  - Muy distinto de los lenguajes naturales (como el español).
- Hay muchas formas de traducir entre lenguajes.
  - Una declaración se puede representar en diferentes lógicas.
  - Incluso es posible que se represente de manera diferente en la misma lógica.
- La **expresividad** de una lógica está relacionada con la cantidad de declaraciones que se pueden realizar con ella.
- No debe ser confundida con el razonamiento lógico.
  - Las lógicas son lenguajes, el razonamiento es un proceso (que puede **usar** lógica).

¿Qué es una lógica?

- La lógica se ocupa de la verdad de las declaraciones sobre el mundo.
- Cada declaración es, generalmente, VERDADERA o FALSA.
- **Sintaxis**
  - Reglas para la construcción correcta de frases en la lógica.
  - Define qué símbolos se pueden usar.
  - Define de qué forma de pueden combinar los símbolos para crear oraciones.
- **Semántica.**
  - Cómo se interpretan las oraciones en la lógica (VERDAD o FALSA según su significado en el mundo).
  - Asigna un significado a cada oración.
- **Procedimiento inferencial.**
  - Especifica los métodos para obtener nuevas oraciones a partir de las existentes.

¿Qué es una lógica?

- Es un lenguaje para el razonamiento, una colección de reglas usadas durante el proceso de razonamiento lógico.
  - Los hechos son afirmaciones sobre el mundo que pueden ser verdaderas o falsas.
  - La representación es una expresión (oración) que representa los objetos y las relaciones.
  - Las oraciones se pueden codificar en un programa de ordenador.
- Ejemplo: *“Todos los alumnos miden 2 metros”*
  - Oración válida (sintaxis).
  - Se puede entender su significado (semántica).
  - Esta frase se puede demostrar que es falsa (existe un contraejemplo).

Representación lógica

- El usuario define un conjunto de símbolos primitivos y su semántica asociada.
- La lógica define la forma de juntar los símbolos de forma que el usuario pueda definir oraciones correctas en el lenguaje que representen hechos verdaderos.
- La lógica define formas de inferir nuevas oraciones a partir de las existentes.
- Tipos de lógica:
  - **Lógica proposicional**. FUNDAMENTAL. Estudio de las oraciones y su conectividad.
  - **Lógica de predicados**. FUNDAMENTAL. Estudio de los individuos y sus propiedades.
  - Lógica modal.
    - *Lógica temporal.*
    - *Lógica epistemológica.*
  - Lógica descriptiva.
  - Lógica difusa.

Lógica proposicional

- Las oraciones que o bien son VERDADERAS o FALSAS, pero no ambas, se denominan proposiciones.
- Una oración declarativa expresa un hecho con una proposición como contenido:
  - El cielo es azul.
  - La nieve es fría.
  - 1+1=7.
- Frases que no son proposiciones:
  - *Cierra la puerta*. No, se trata de una orden.
  - *¿Hace frío fuera?* No, se trata de una pregunta.
  - *“x > 2” donde x es variable*. No, ya que x no está definido.
  - *“x = x”.* No, ya que no se tiene conocimiento sobre qué es “x” e “=”. “3=3” o “Agua es igual a agua” no tiene significado.

Lógica proposicional

- Una oración simple es la unidad más pequeña en la lógica proposicional.
  - No contiene otras oraciones como parte de ella.
  - Si la proposición es verdadera, entonces el valor de verdad es “VERDAD”.
  - Si la proposición es falsa, entonces su valor de verdad es “FALSO”.
- Es fundamental para todas las lógicas.
- También conocida como Cálculo Proposicional, Cálculo Sentencial o Álgebra Booleana.
- Indica las formas de unir y/o modificar proposiciones para formar proposiciones más complicadas, así como las relaciones lógicas y las propiedades derivadas de los métodos de combinación y alteración de oraciones.

Lógica proposicional

- **Sintaxis**.
  - Proposiciones. “Hoy hace frío”.
  - Conectivas: unen oraciones simples en compuestas, y unen oraciones compuestas en oraciones compuestas más largas.
  - Proposiciones y conectivas son los elementos básicos de la lógica proposicional.

Conectiva	Expresión en el lenguaje natural	Ejemplo	Símbolo en este artículo	Símbolos alternativos
Negación	no	**No** está lloviendo.	$\neg$	$\sim$
Conjunción	y	Está lloviendo **y** está nublado.	$\wedge$	&
Disyunción	o	Está lloviendo **o** está soleado.	$\vee$	$\mid$
Condicional material	si... entonces	**Si** está soleado, **entonces** es de día.	$\to$	$\supset$
Bicondicional	si y solo si	Está nublado **si y solo si** hay nubes visibles.	$\leftrightarrow$	$\equiv$
Disyunción opuesta	ni... ni	**Ni** está soleado **ni** está nublado.	$\downarrow$	
Disyunción exclusiva	o bien... o bien	**O bien** está soleado, **o bien** está nublado.	$\nleftrightarrow$	$\oplus, \not\equiv, W$

Lógica proposicional

- **Semántica**.
  - Define como las conectivas afecta a la verdad.
  - Tablas de verdad para indicar la verdad de una proposición.

Negación

ϕ	$\neg\phi$
F	V
V	F

Conjunción

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Disyunción

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Condicional

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Bicondicional

ϕ	ψ	$\phi \leftrightarrow \psi$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Disyunción exclusiva

ϕ	ψ	$\phi \not\leftrightarrow \psi$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Lógica proposicional

- **Tautología**. Proposición que es siempre verdadera.
  - (P v ~P) es siempre verdad independientemente del valor de verdad de P.
- **Contradicción**. Proposición que es siempre falsa.
  - (P ^ ~P) es siempre falso independientemente del valor de verdad de P.
- **Contingencia**. Proposición que no es ni tautología ni contradicción.
  - (P v Q) será verdadero o falso dependiendo de los valores de verdad de P y Q.
- **Antecedente y Consecuente**.
  - En las oraciones condicionales $p \to q$, la primera oración (cláusula “si”, p en este caso) se llama antecedente, mientras que la segunda oración (cláusula “entonces”, q en este caso) se llama consecuente.

Lógica proposicional

- **Razonamiento.** El razonamiento lógico es aquel en el que las premisas, si son verdaderas, implican la verdad de la conclusión. Permiten evitar falacias, que son errores en el razonamiento.
  - Se puede representar como una oración compuesta, denominada como el “condicional correspondiente del razonamiento”.
    - Tomar todas las premisas y juntarlas.
    - Convertir esta conjunción en el antecedente de un condicional.
    - Convertir la conclusión del razonamiento en el consecuente.
  - Ejemplo:
    - “Si tienes la contraseña actual (p), puedes logearte en el pc (q)”.
    - “Tienes la contraseña actual (p)”.
    - Por tanto, “Puedes logearte en el pc (q)”.
    - Representación condicional: $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

Lógica proposicional

- Cada razonamiento tiene su correspondiente condicional, y cada oración condicional tiene su correspondiente razonamiento.
- Como el condicional correspondiente al razonamiento es una oración, se trata por tanto de una tautología, una contradicción o una contingencia.
- **Un argumento es válido SI Y SOLAMENTE SI su correspondiente condicional es una tautología**.
- **Dos oraciones son consistentes SI Y SOLAMENTE SI su conjunción no es una contradicción.**
- **Dos oraciones son lógicamente equivalentes SI Y SOLAMENTE SI su tabla de verdad es idéntica**. Son equivalentes si y solamente si si la oración de su equivalencia usando “≡” es una tautología.
- Las tablas de verdad son adecuadas para comprobar la validez, tautología, contradicción, contingencia, consistencia y equivalencia.

Lógica proposicional

- Comprobar la validez de un argumento.

1) Construir la tabla de verdad con las premisas y la conclusión.
2) Encontrar las filas donde todas las premisas sean verdaderas (filas críticas).
3) Comprobar la conclusión de todas las filas críticas.

- Ejemplo:
  - “Si tienes la contraseña actual, puedes logearte en el pc” ($p \rightarrow q$).
  - “Tienes la contraseña actual” (p).
  - Por tanto, “Puedes logearte en el pc” (q).
  - Representación condicional: $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
  - Razonamiento correcto: cuando $(p \rightarrow q) = V \wedge p = V$, entonces $q = V$

$p \rightarrow q$	p	q
V	F	F
V	F	V
F	V	F
V	**V**	**V**

Lógica proposicional

- Ejemplo:
  - “Si tienes la contraseña actual, puedes logearte en el pc” (p->q).
  - “No tienes la contraseña actual” (~p).
  - Por tanto, “No puedes logearte en el pc” (~q).
  - Representación condicional: $(p \rightarrow q) \wedge \sim p \rightarrow \sim q$
  - Razonamiento incorrecto: cuando $(p \rightarrow q) = V \wedge \sim p = V$, entonces $\sim q = F$ en un caso, y $\sim q = V$ en otro caso.

$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	p	q
V	F	F	V	V
F	F	V	V	F
V	V	F	F	V
V	V	V	F	F

Lógica proposicional

- Ejemplo:
  - “Si y solo si tienes la contraseña actual, puedes logearte en el pc” ($p \leftrightarrow q$).
  - “No tienes la contraseña actual” (~p).
  - Por tanto, “No puedes logearte en el pc” (~q).
  - Representación condicional: ($p \leftrightarrow q$) ^ ~p → ~q
  - Razonamiento correcto: cuando ($p \leftrightarrow q$) = V ^ ~p = V, entonces ~q = V.

$p \leftrightarrow q$	~p	~q	p	q
V	F	F	V	V
F	F	V	V	F
F	V	**F**	F	V
V	V	**V**	F	F

Lógica predicativa

- La lógica proposicional combina átomos.
  - Un átomo no contiene conectividad proposicional.
  - No tiene estructura (hoy_está_nublado, a_juan_le_gusta_el_fútbol).
- Los predicados permiten hablar sobre los objetos.
  - Propiedades: estar_nublado(hoy)
  - Relaciones: gustar(juan,fútbol).
  - Pueden ser verdaderos o falsos.
- En la lógica predicativa, cada átomo es un predicado.
  - Ejemplos: Lógica de primer orden o lógicas de mayor orden.

Lógica predicativa

- **Sintaxis**.
  - **Variables** (VAR). Representan cualquier objeto. Últimas letras del alfabeto minúsculas, junto con subíndices.
    - Ejemplos: x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_n, y_n, z_n
  - **Constantes (CONS)**. Conocidos como nombres. Representan objetos concretos. Primeras letras del alfabeto minúsculas con subíndices.
    - Ejemplos: a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_n, b_n, c_n
  - **Funciones (FUNC)**. Transforman objetos. Letras f,g,h con subíndices. En ocasiones se indica la aridad (n.º de argumentos) mediante un superíndice.
    - Ejemplos: f_1, g_1, h_1, f_n^2, g_n^3, h_n^4
  - **Predicados (PRED)**. Representan propiedad y relaciones. Letras mayúsculas.
    - Ejemplos: P, Q, R, K

Lógica predicativa

- **Conectivas**. Se mantienen las mismas conectivas que en la lógica proposicional.

Conectiva	Expresión en el lenguaje natural	Ejemplo	Símbolo en este artículo	Símbolos alternativos
Negación	no	**No** está lloviendo.	$\neg$	$\sim$
Conjunción	y	Está lloviendo **y** está nublado.	$\wedge$	$\&$
Disyunción	o	Está lloviendo **o** está soleado.	$\vee$	$\mid$
Condicional material	si... entonces	**Si** está soleado, **entonces** es de día.	$\rightarrow$	$\supset$
Bicondicional	si y solo si	Está nublado **si y solo si** hay nubes visibles.	$\leftrightarrow$	$\equiv$
Disyunción opuesta	ni... ni	**Ni** está soleado **ni** está nublado.	$\downarrow$	
Disyunción exclusiva	o bien... o bien	**O bien** está soleado, **o bien** está nublado.	$\nleftrightarrow$	$\oplus, \not\equiv, W$

Lógica predicativa

- **Cuantificadores**. Califican los valores de las variables.
  - ∀: Verdad para todos los objetos (Universal).
  - ∃: Existe al menos un objeto (Existencial).
- **Noción de término.** Representación de un objeto.

1) Todos las constantes son términos.
2) Todas las variables son términos.
3) Si f es un functor de aridad n>=1 y $t_1 ... t_n$ son términos, entonces $f(t_1 ... t_n)$ es un término.
4) Nada más es un término.

- **Noción de átomo.** Representación de un valor Verdadero o Falso según interpretación.
  - Cadena de símbolos de la forma: $P^n(t_1,t_2,\dots,t_n)$
  - Siendo P^n un predicado de aridad n, y $t_1,t_2,\dots,t_n$ son términos.

Lógica de primer orden

- **Lógica de predicados de Orden Cero**.
  - Predicados de aridad cero.
  - Proposiciones verdaderas o falsas.
  - **Lógica proposicional**.
- **Lógica de predicados de Primer Orden**.
  - **Cuantificación de variables.**
- Ejemplo: “Todos los informáticos son listos. Juan es informático, luego Juan es listo”.
  - Lógica de predicados de Orden Cero:
    - Tres proposiciones p,q y r independientes.
    - Fórmula “$p \wedge q \rightarrow r$” no válida
  - Lógica de predicados de Orden Uno:
    - $(\forall x\ (\text{Informático}(x) \rightarrow \text{Listo}(x)) \wedge \text{Informático}(\text{Juan})) \rightarrow \text{Listo}(\text{Juan})$

Lógica de primer orden

- Ejemplo: “Cada rosa tiene una espina”.
  - $\forall x\ (rosa(x) \rightarrow \exists y\ (tener(x,y) \wedge espina(y))$
    - Para todo x.
    - Si x es una rosa.
    - Entonces existe un y.
    - X tiene y, y es una espina
- Ejemplo: “Los lunes y los miércoles voy a casa de Juan para cenar”.
  - $\forall x\ (\ (es\_lunes(x)\ v\ es\_miércoles(x)) \rightarrow cenar(yo, casa\_de(juan), x))$
    - Notar el cambio del “y” en lenguaje natural por el “o” lógico. La traducción puede ser problemática.

Lógica modal

- Conjunto de sistemas formales desarrollado inicialmente para representar oraciones sobre necesidad o posibilidad.
- La modalidad cualifica la verdad de una oración.
  - Ejemplo: “Juan está contento habitualmente”.
    - “Habitualmente” sería un modificador de modalidad.
- Tradicionalmente, se representan los siguientes aspectos en la lógica modal, al ser desarrollada inicialmente para tratar con los conceptos de la **Lógica Alethica**:
  - Posibilidad.
  - Necesidad.
- La modalidad se representa utilizando operadores modales.
  - Necesariamente verdad: □
  - Posiblemente verdad: ◊

Lógica modal

- En una lógica modal clásica, cada una puede ser expresada por la otra mediante negaciones:
  - $\Diamond P \leftrightarrow \sim\Box\sim P$
  - $\Box P \leftrightarrow \sim\Diamond\sim P$
- Ejemplo: “Es posible que llueva hoy”.
  - Es *posible* que llueva hoy si y solamente si *no es necesario* que no llueva hoy.
  - Es *necesario* que llueva hoy si y solamente si *no es posible* que no llueva hoy.
- La lógica modal surge de añadir los siguientes principios a la lógica proposicional:
  - Regla de necesidad: Si A es un teorema de la lógica, entonces $\Box A$.
    - Cada teorema de la lógica es necesario.
  - Axioma de distribución (o axioma K): $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.
    - Si es necesario que si A entonces B, si A es necesario, entonces B es necesario.

Lógica modal

- A parte del axioma K, existen otros axiomas que se pueden añadir a una lógica modal para demostrar diferentes teoremas:
  - Axioma T (o M): $\Box A \rightarrow A$.
    - Si es necesario que A, entonces A es el caso.
  - Axioma 4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$.
    - Si es necesario que A, entonces es necesario que A sea necesario.
  - Axioma 5: $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$.
    - Si es posible que A, entonces es necesario que A sea posible.
  - Axioma B: $A \rightarrow \Box\Diamond A$.
    - Si A es el caso, entonces es necesario que A sea posible.

Lógica modal

- Diferentes combinaciones de axiomas dan lugar a diferentes sistemas de lógica modal, en combinación con los axiomas de la lógica proposicional:
  - Sistema K.
    - Axioma K.
    - Llamado en honor a Saul Kripke, es el que menos axiomas utiliza y el más débil, ya que es el que menos teoremas puede demostrar.
  - Sistema T.
    - Axiomas: K, T
  - Sistema S4.
    - Axiomas: K, T, 4
  - Sistema S5.
    - Axiomas: K, T, 5
  - Sistema B.
    - Axiomas: K, T, B

Lógica modal

- Una interpretación para un lenguaje modal es un conjunto ordenado de 3 elementos <W, R, V>:
  - W es un conjunto de mundos posibles.
    - Un mundo posible intenta capturar la idea de una descripción completa del mundo.
    - Conjunto de proposiciones al que si se agregara una proposición más se volvería inconsistente.
  - R es una relación entre mundos posibles llamada relación de accesibilidad.
    - No todo lo posible en un mundo es posible en otro mundo.
    - La función de la relación de accesibilidad es ayudar a expresar una necesidad o posibilidad relativa.
  - V es una función que asigna valores de verdad a proposiciones dentro de cada mundo posible.
    - El valor de verdad puede variar dependiendo del mundo posible donde se evalúe la proposición.
    - Esta función toma pares ordenados <proposición,mundo posible> y devuelve un valor de verdad.
  - A los elementos W,R se los llama el marco de interpretación, y cuando se les suma el tercero se tiene un modelo para el sistema.

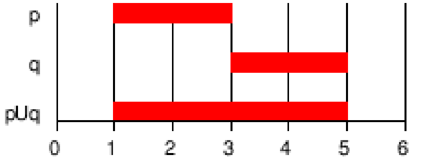
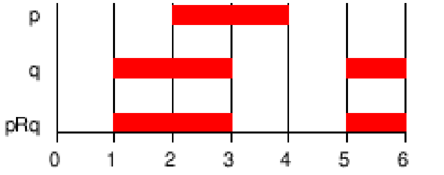
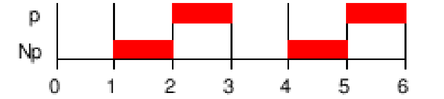
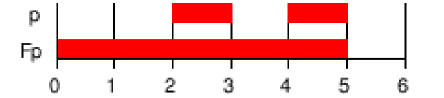
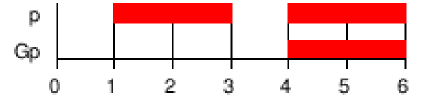
Lógica modal

- Los mundos posibles no tienen ningún papel importante en la definición de los operadores lógicos no modales, salvo que las condiciones de verdad se definen de forma relativa a ellos:
  - V(w,~A) = 1 si y solo si V(w,A) = 0
  - V(w,A^B) = 1 si y solo si V(w,A) = 1 y V(w,B) = 1
- Los mundos posibles juegan un papel clave en las condiciones de verdad de los operadores modales:
  - V(w, □A) = 1 si y solo si para todo mundo posible w* tal que wRw* (w tiene acceso a w*) se cumple que V(w*,A) = 1.
  - V(w, ◊A) = 1 si y solo si en al menos un mundo posible w* tal que wRw* (w tiene acceso a w*) se cumple que V(w*,A) = 1.
  - Si desde un mundo posible w no se puede acceder a ningún otro mundo posible, las fórmulas de la forma □A serán verdaderas en w, mientras que las de la forma ◊A serán falsas.
    - Para que □A sea verdadero, no debe haber ningún mundo posible donde sea falso.
    - Para que ◊A sea verdadero, debe haber al menos un mundo accesible donde sea verdadero.

Lógica temporal

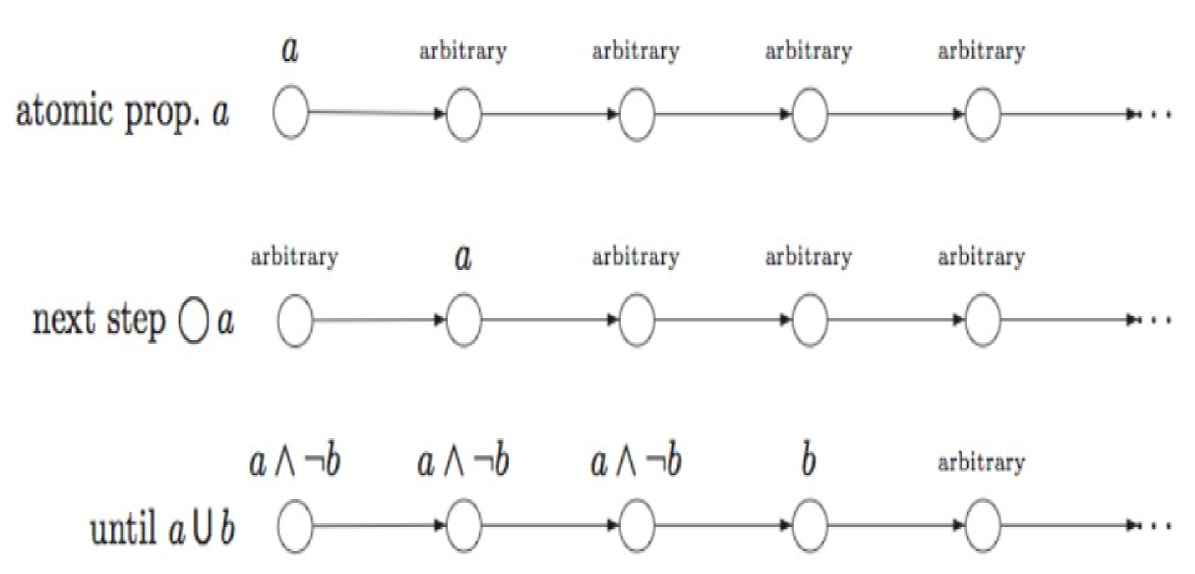
- Permite representar y razonar sobre proposiciones en términos de tiempo.
- Ejemplos:
  - “Siempre tengo hambre”.
  - “Tendré hambre hasta que coma algo”.
- Tiene aplicación en la verificación formal de requerimientos de sistemas hardware o software.
  - Ejemplo: “Cuando una petición es realizada, el acceso a un recurso es finalmente garantizado, pero nunca se garantiza simultáneamente a dos peticiones”.
- Tiene dos tipos de operadores.
  - Operadores lógicos. Heredados de la lógica proposicional.
  - Operadores modales. Estado de verdad temporal de un hecho y relaciones entre hechos.
    - ◊ - Eventualmente. La propiedad se satisface en algún momento del futuro.
    - □ - Siempre. La propiedad se satisface ahora y siempre en el futuro.

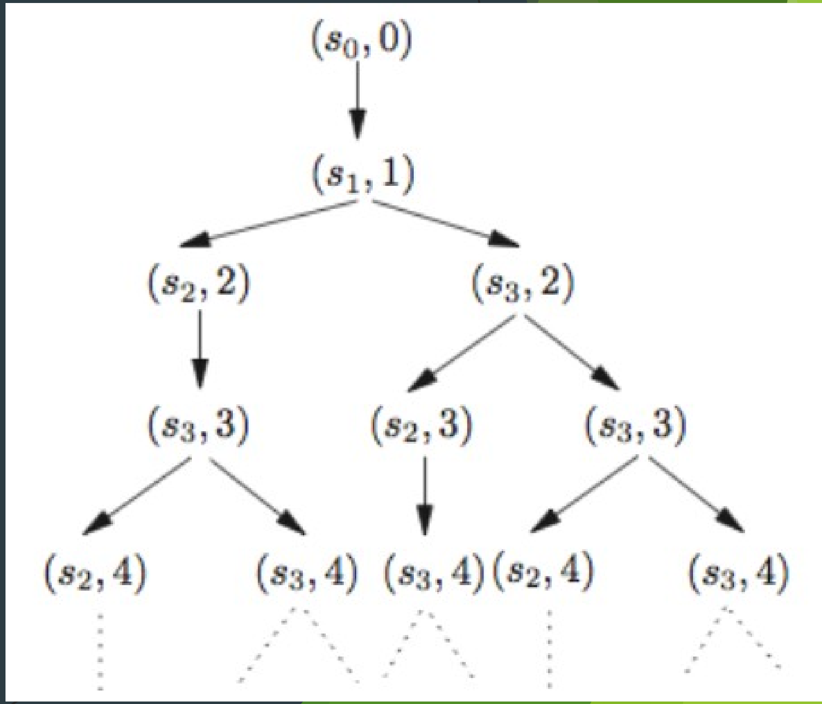
Lógica temporal

Textual	Simbólico	Definición	Explicación	Diagrama'
Operadores binarios				
ϕ **U** ψ	$\phi\,\mathcal{U}\,\psi$	$(B\mathcal{U}C)(\phi) = (\exists i : C(\phi_i) \land (\forall j < i : B(\phi_j)))$	**U**ntil: ψ se cumple en el estado actual o uno posterior, y ϕ se tiene que cumplir hasta esa posición. A partir de esa posición ϕ no es necesario que se siga cumpliendo.	
ϕ **R** ψ	$\phi\,\mathcal{R}\,\psi$	$(B\mathcal{R}C)(\phi) = (\forall i : C(\phi_i) \lor (\exists j < i : B(\phi_j)))$	**R**elease: ϕ releases ψ si ψ se cumple hasta que la primera posición en la cual ϕ se cumple (o siempre si dicha posición no existe).	
Operadores unarios				
X ϕ	$\circ\phi$	$\mathcal{N}B(\phi_i) = B(\phi_{i+1})$	Next: ϕ se cumple en el siguiente estado. (**X** es usado como sinónimo.)	
F ϕ	$\Diamond\phi$	$\mathcal{F}B(\phi) = (true\,\mathcal{U}B)(\phi)$	**F**inally: ϕ eventualmente se cumple (en algún lugar del camino).	
G ϕ	$\Box\phi$	$\mathcal{G}B(\phi) = \neg\mathcal{F}\neg B(\phi)$	**G**lobally: ϕ se tiene que cumplir en todo el camino.	
A ϕ		$(\mathcal{A}B)(\psi) = (\forall \phi : \phi_0 = \psi \to B(\phi))$	**A**ll: ϕ se tiene que cumplir en todos los caminos empezando en el estado actual.	
E ϕ		$(\mathcal{E}B)(\psi) = (\exists \phi : \phi_0 = \psi \land B(\phi))$	**E**xists: existe al menos un camino que parte en el estado actual en el cual ϕ se cumple.	

Lógica temporal

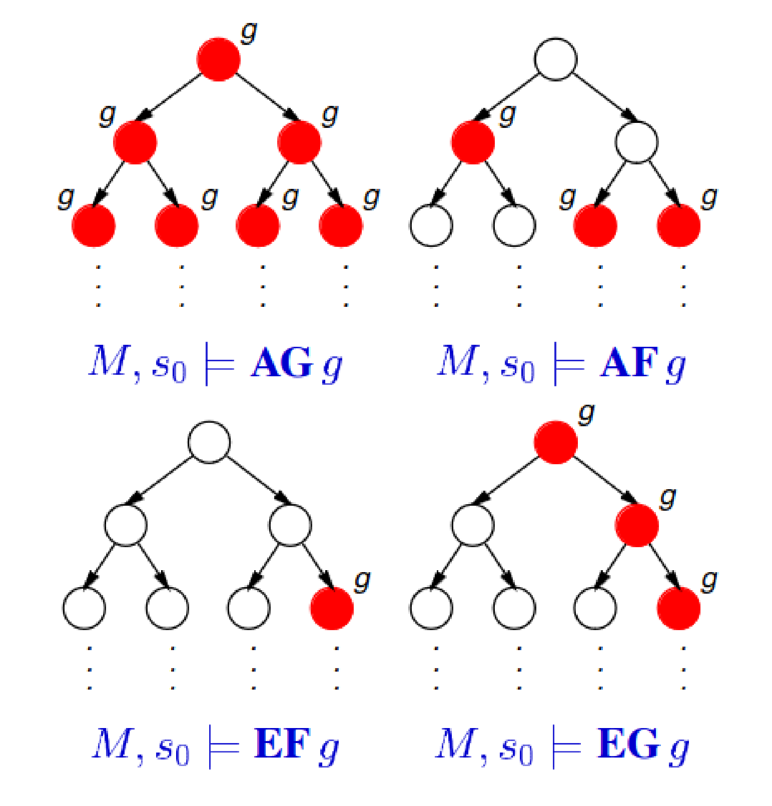
- Subtipos:
  - **Lógica temporal lineal**. Los operadores describen eventos en un único camino de computación.
  - **Lógica temporal de ramificación**. Los operadores temporales cuantifican sobre todos los caminos posibles a partir de un estado.





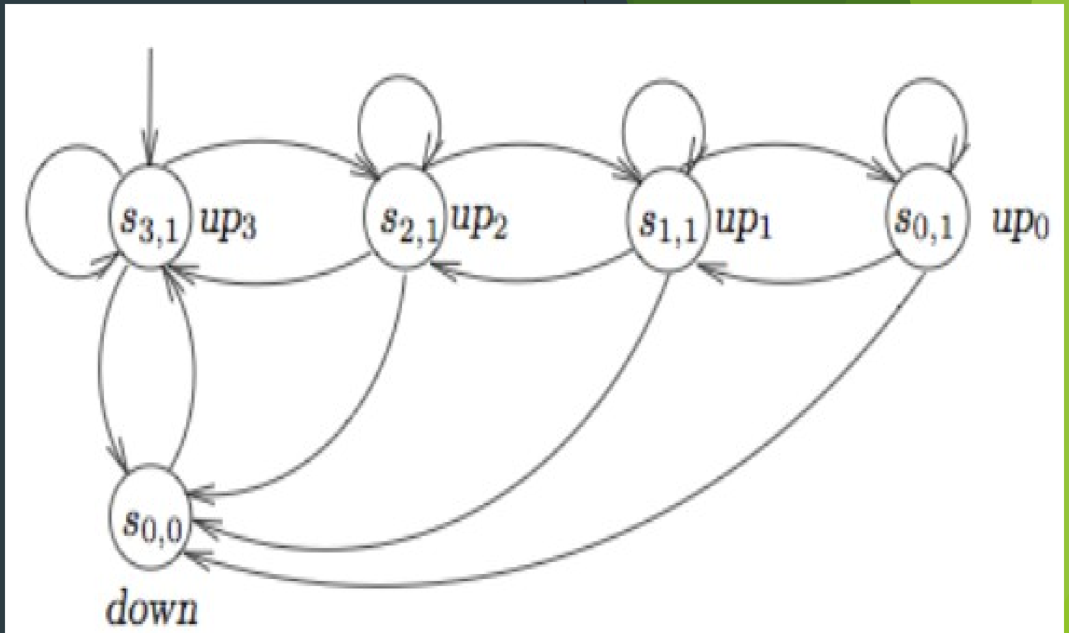
Lógica temporal

- **Computation Tree Logic (CTL*).**
  - Combinación de lógicas temporales de ramificación y lineal.
  - Un cuantificador de camino se incluye como prefijo de una aserción compuesta por una combinación de operadores de tiempo lineal.
- Cuantificadores de camino:
  - A. “Para cada camino”.
  - E. “Existe un camino”.
- Operadores de tiempo lineal:
  - Np. p se cumple en el próximo instante.
  - Fp. p se cumple en algún momento en el futuro.
  - Gp. p se cumple globalmente en el futuro.
  - pUq. p se cumple hasta que q se cumpla.
  - pRq. q se cumple hasta la primera posición en que p se cumple.



Lógica temporal

- El sistema consiste en 3 procesadores y un votante.
- $s_{i,j}$ = i procesadores funcionando, j votantes funcionando.
- Se asume que los procesadores solo falla uno en cada instante, el votante puede fallar en cualquier momento.
- Si el votante falla, se reinicia el estado de completo funcionamiento (3 procesadores bien, up3).
- El sistema funciona si al menos 2 procesadores se mantienen funcionando.



Properties we might like to prove

Property	*Formalization in CTL*	
Possibly the system never goes down	$\exists\Box\, \neg\, down$	Holds
Invariantly the system never goes down	$\forall\Box\, \neg\, down$	Doesn't hold
It is always possible to start as new	$\forall\Box\, \exists\Diamond\, up_3$	Holds
The system always eventually goes down and is operational until going down	$\forall((up_3 \vee up_2)\, \mathrm{U}\, down)$	Doesn't hold

Lógica epistémica

- Permite tratar con la certeza de las oraciones.
- El estado epistémico de una proposición está determinado por la información de un individuo o grupo, un conjunto de datos o las evidencias disponibles.
  - Una proposición que no sea eliminada por la información disponible es epistémicamente posible.
  - Una proposición que está garantizada por la información disponible es epistémicamente necesaria.
- Operadores:
  - $\Box$, $K_i\phi$ - Certeza. “el agente i sabe que ϕ es verdad”.
  - $\Diamond$, $M_i\phi$ - Posibilidad. “Con todo lo que sabe i, es posible que ϕ sea verdad”.
- Axioma de de la verdad o conocimiento. Se admite que si algo es conocido, entonces es verdadero.
  - $T : K\phi \rightarrow \phi$

Lógica epistémica

- El estado epistémico de una proposición no está determinado por leyes lógicas, metafísicas o científicas, solamente por el conocimiento actual que se tiene.
- Ejemplos:
  - “La teoría especial de la relatividad puede ser verdad, o puede ser falsa.”
    - No habla sobre si la verdad y falsedad de la teoría son compatibles con leyes físicas. Solo habla sobre si la verdad y falsedad de la teoría son individualmente compatibles con la información que el hablante conoce.
  - “Dado el ángulo del golpe, el asesino debe medir más de dos metros”.
    - Esta oración es verdadera solamente en el caso de que la altura del asesino está de alguna forma garantizada por el ángulo del golpe. Esta afirmación no trata sobre todas las posibles formas en las que el mundo podría ser, sino simplemente sobre cómo las cosas deben ser a partir de la información que se tiene sobre cómo es el mundo.
- Es común decir que una proposición es epistémicamente posible o necesaria para alguna persona o grupo según su información disponible.
- Este lógica puede variar en el tiempo y entre distintos sujetos y grupos.

Lógica descriptiva

- Lógica más expresiva que la lógica proposicional.
- Problemas de decisión más eficientes que la lógica de primer orden.
- Evolución de las redes semánticas y los sistemas basados en marcos.
- Tiene particular importancia en el formalismo de Ontologías y de la Web Semántica.
- Aplicaciones en bioinformática codificando conocimiento médico.
- Terminología comparada con lógica de primer orden (LPO):

LPO	LD
constante	individuo
predicado unario	concepto
predicado binario	rol

Lógica descriptiva

- **Sintaxis**.
  - C y D son conceptos, a y b individuos, y R es un rol.
  - Si a está R-relacionado con b, entonces b es un R-sucesor de a.

Symbol	Description	Example	Read
$\top$	$\top$ is a special concept with every individual as an instance	$\top$	top
$\bot$	empty concept	$\bot$	bottom
$\sqcap$	*intersection* or *conjunction* of concepts	$C \sqcap D$	C and D
$\sqcup$	*union* or *disjunction* of concepts	$C \sqcup D$	C or D
$\neg$	*negation* or *complement* of concepts	$\neg C$	not C
$\forall$	*universal restriction*	$\forall R.C$	all R-successors are in C
$\exists$	*existential restriction*	$\exists R.C$	an R-successor exists in C
$\sqsubseteq$	Concept *inclusion*	$C \sqsubseteq D$	all C are D
$\equiv$	Concept *equivalence*	$C \equiv D$	C is equivalent to D
$\doteq$	Concept *definition*	$C \doteq D$	C is defined to be equal to D
$:$	Concept *assertion*	$a : C$	a is a C
$:$	Role *assertion*	$(a, b) : R$	a is R-related to b

Lógica descriptiva

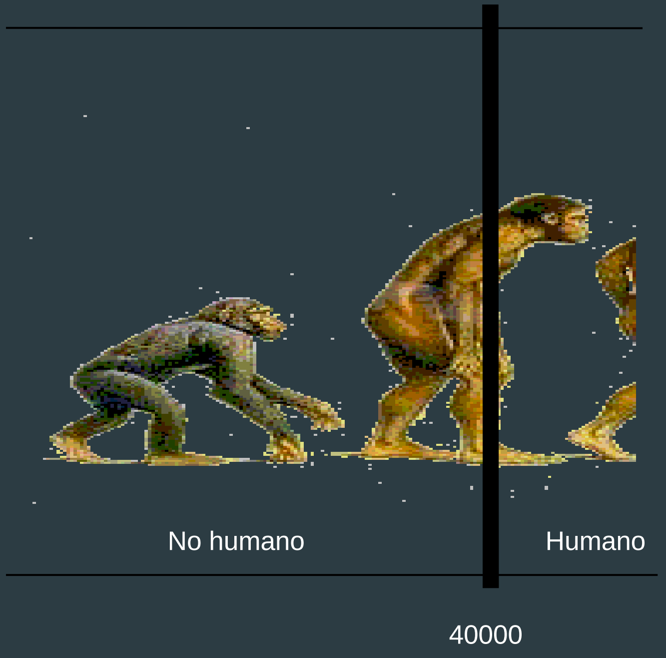
- La base de conocimiento se divide en diferentes partes:
- **Parte asercional (ABox)**. Contiene conocimiento asercional (hechos básicos).
  - Aserciones de concepto:
    - *Actor(angelina)*
  - Aserciones de rol:
    - *casados(angelina, brad)*
- **Parte terminológica**. Notación inspirada por teoría de conjuntos.
  - **TBox.** Contiene declaraciones universales sobre conceptos.
    - Actor $\subseteq$ Artista. Cada actor es un artista. [$\forall x(\text{Actor}(x) \rightarrow \text{Artista}(x))$]
  - **RBox.** Permite modelar características centradas en el rol.
    - Casados $\subseteq$ amar. Indica que estar casado con alguien implica amarle. [$\forall x \forall y(\text{casados}(x, y) \rightarrow \text{amar}(x, y))$]

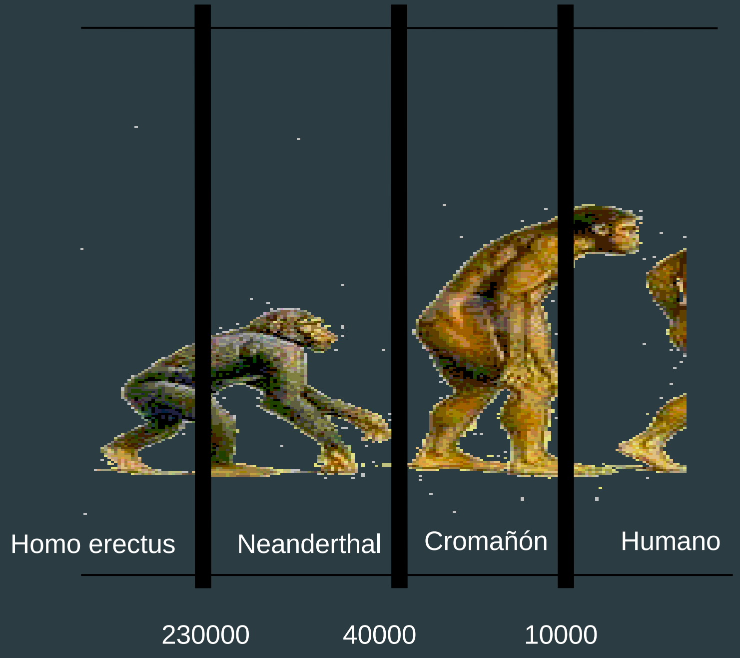
Lógica descriptiva

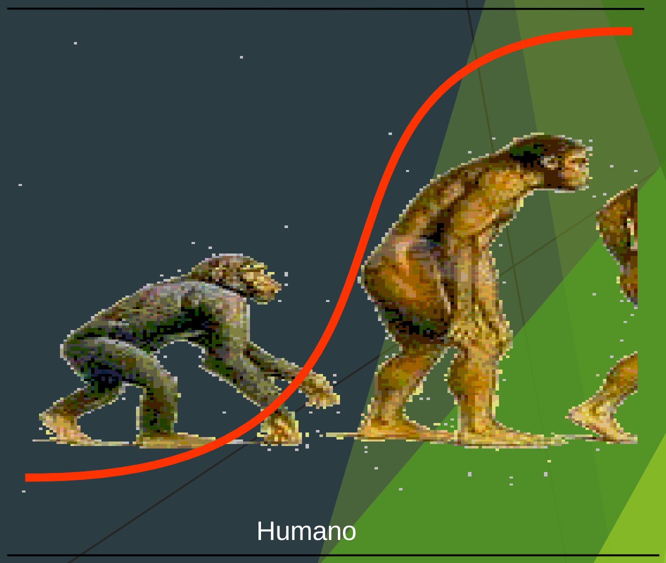
		Syntax	Semantics
ABox:	concept assertion	$C(a)$	$a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
	role assertion	$R(a, b)$	$\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$
	individual equality	$a \approx b$	$a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$
	individual inequality	$a \not\approx b$	$a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$
TBox:	concept inclustion	$C \sqsubseteq D$	$C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
	concept equivalence	$C \equiv D$	$C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
RBox:	role inclusion	$R \sqsubseteq S$	$R^{\mathcal{I}} \subseteq S^{\mathcal{I}}$
	role equivalence	$R \equiv S$	$R^{\mathcal{I}} = S^{\mathcal{I}}$
	complex role inclusion	$R_1 \circ R_2 \sqsubseteq S$	$R_1^{\mathcal{I}} \circ R_2^{\mathcal{I}} \subseteq S^{\mathcal{I}}$
	role disjointness	$Disjoint(R, S)$	$R^{\mathcal{I}} \cap S^{\mathcal{I}} = \emptyset$

Lógica difusa

- La lógica de primer orden no representa el conocimiento de forma “natural”.
- Ejemplo: “Ser humano” desde el punto de vista evolutivo.
  - LPO: Si la especie es más antigua de 315000 años entonces humano es falso.
  - LPO multivaluada: Se definen intervalos, pero el concepto de pertenencia es binario.
  - Lógica difusa: Representación del conocimiento más natural.



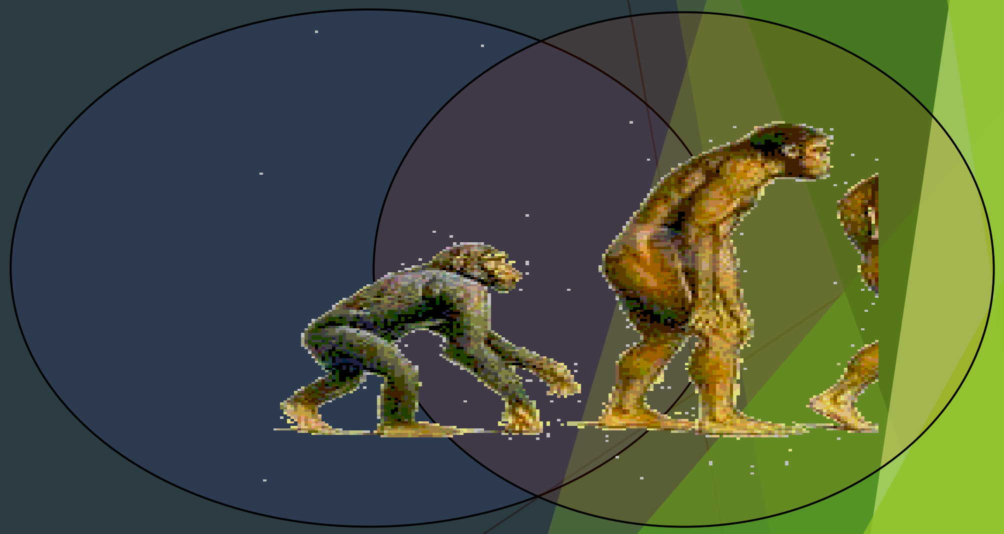




Lógica difusa

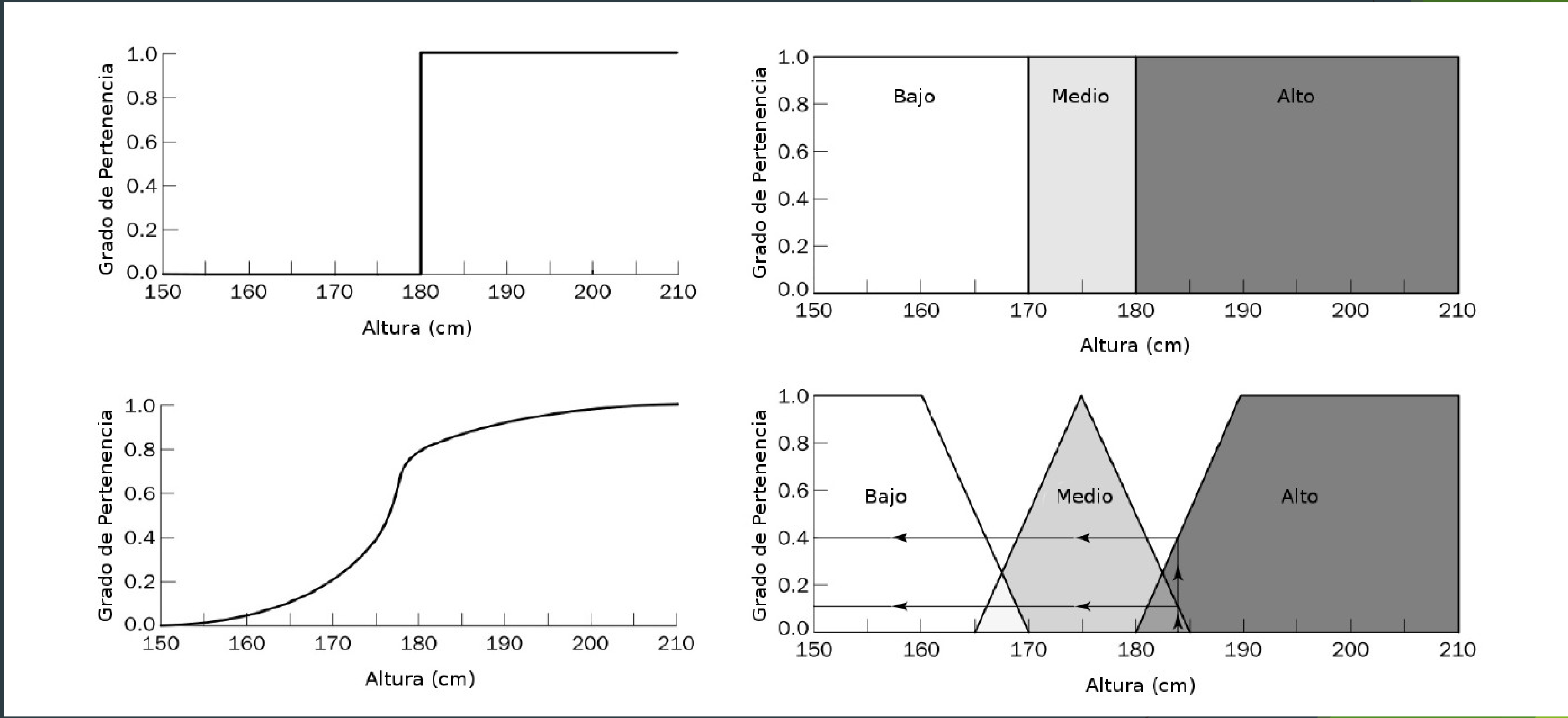
- **Función de pertenencia.**
  - Valor de pertenencia de una variable a un conjunto difuso como una relación en el intervalo [0,1]
  - B={(x, μB(x)) / x ∈ X}

$M_{B:}\, X \rightarrow [0, 1]$



Lógica difusa

- Ejemplo de función de pertenencia. Altura.



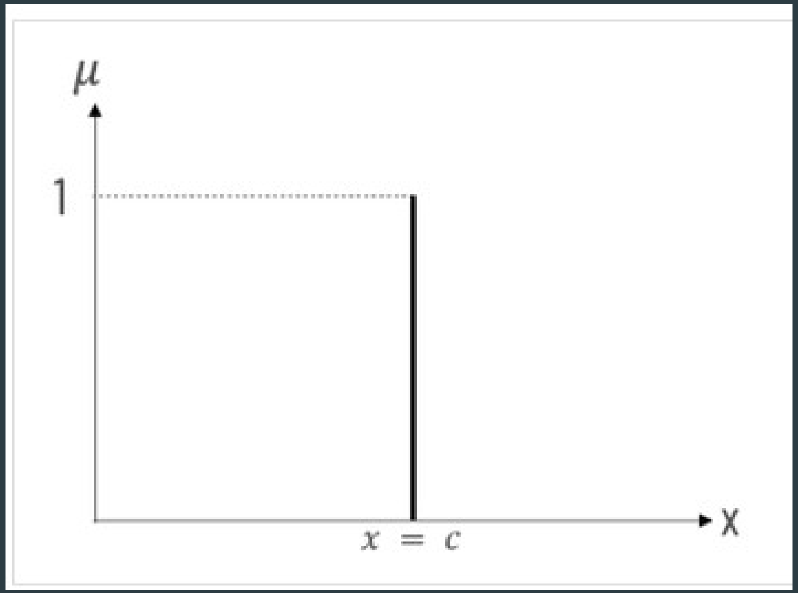
Lógica difusa

- Ejemplo de función de pertenencia. Altura.

Nombre	Altura (cm)	LPO	Fuzzy
Juan	2,05	1	1,0
Tomás	1,95	1	1,0
Carlos	1,87	1	0,95
Pedro	1,80	1	0,82
Andrés	1,79	0	0,71
Paco	1,60	0	0,36

Lógica difusa

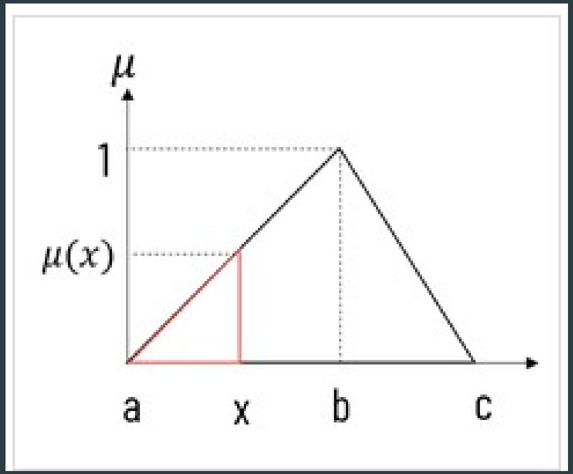
- **Tipos de funciones de pertenencia**.
  - **Singleton**. Imita la lógica tradicional binaria.

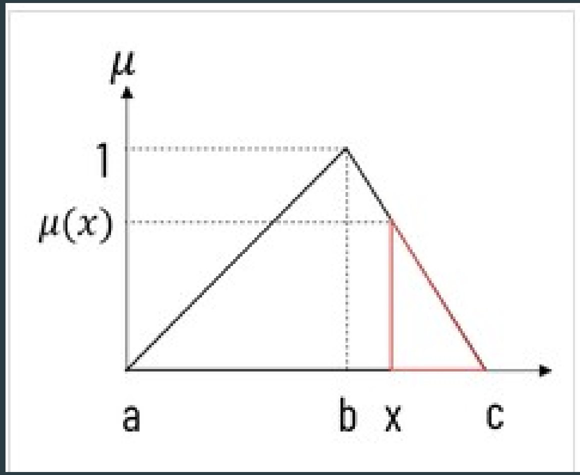


$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Lógica difusa

- **Tipos de funciones de pertenencia**.
  - **Triangular**. Una de las funciones más usadas. El triángulo se define por sus tres parámetros a,b,c, donde c define la base y b define la altura del triángulo.



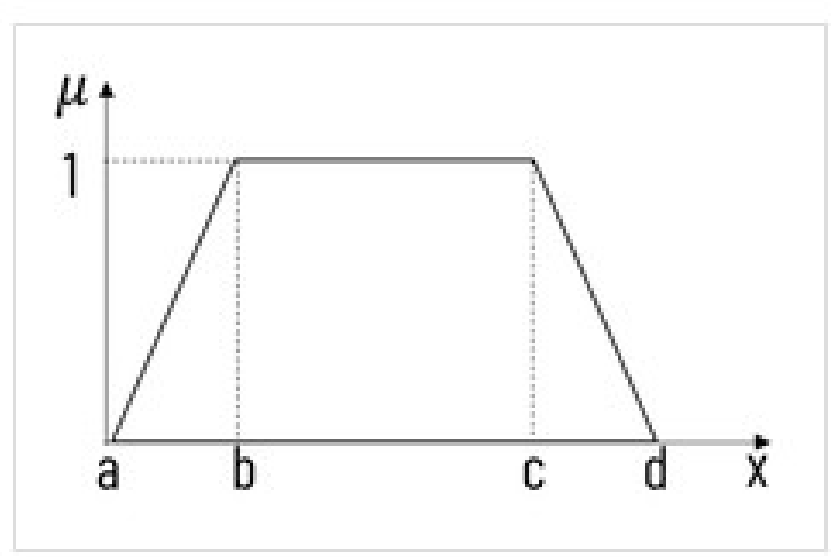


$$\mu_{triangle}(x;a,b,c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases}$$

$$= \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

Lógica difusa

- **Tipos de funciones de pertenencia**.
  - **Trapezoidal**. Se define por sus 4 parámetros a,b,c,d. La región b-c representa el mayor valor de pertenencia que se puede tener. Entre a-b y c-d se puede aplicar la función de triángulo.

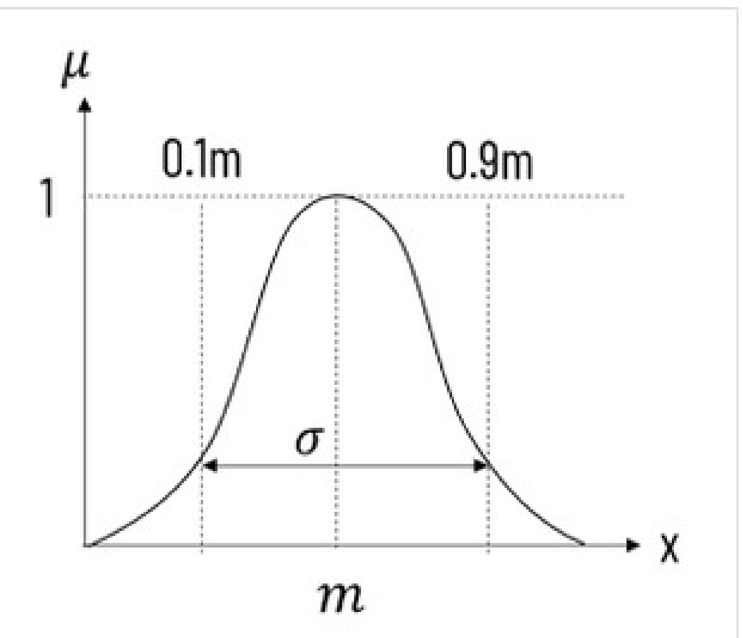


$$\mu_{trapezoidal}(x;a,b,c,d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases}$$

$$= \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

Lógica difusa

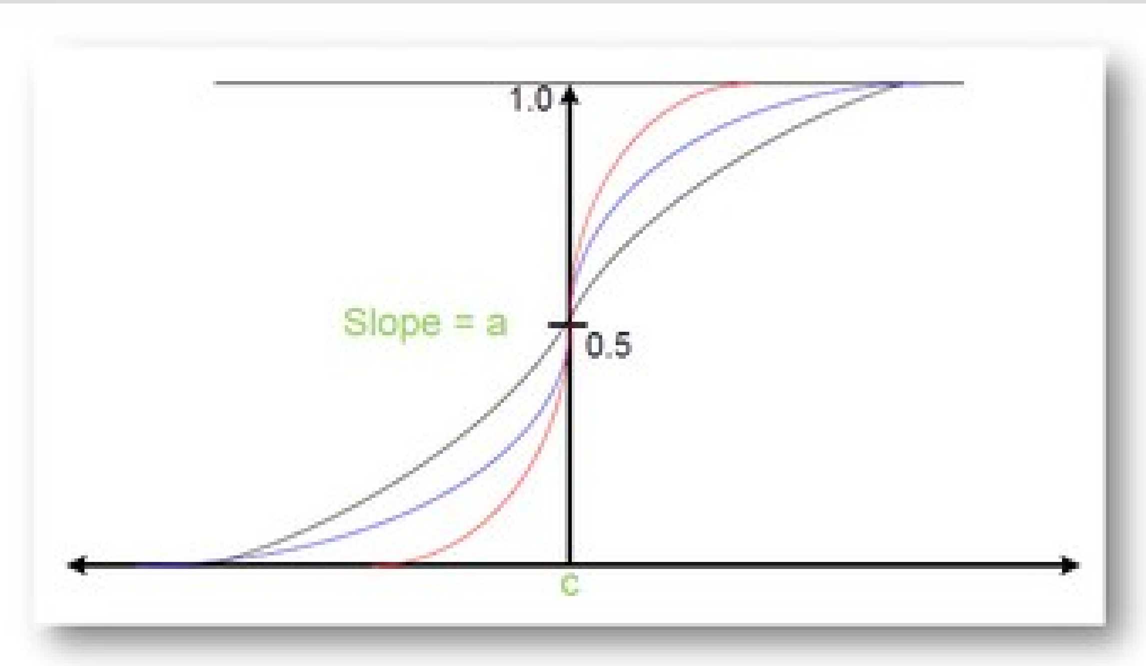
- **Tipos de funciones de pertenencia**.
  - **Gaussiana**. Se define por la media m (centro de la curva gausianna) y σ, que representa la amplitud de la curva.



$$\mu_{gaussian}(x; m, \sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Lógica difusa

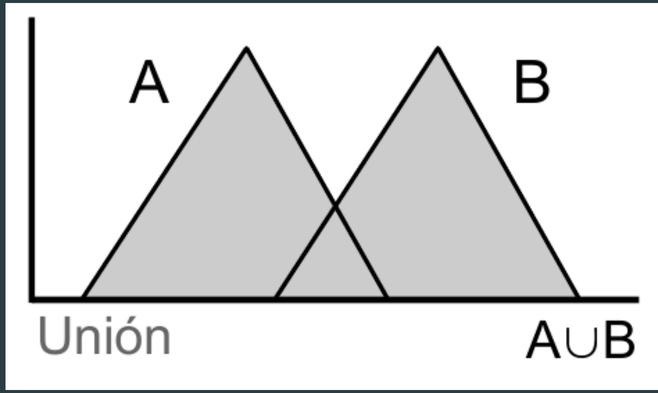
- **Tipos de funciones de pertenencia**.
  - **Sigmoide**. Ampliamente utilizada en tareas de clasificación en machine learning. Se define por sus parámetros a y c, donde a controla la pendiente en el punto de corte x=c.

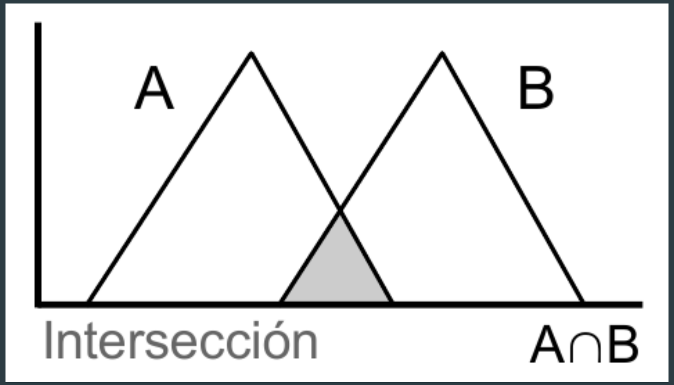


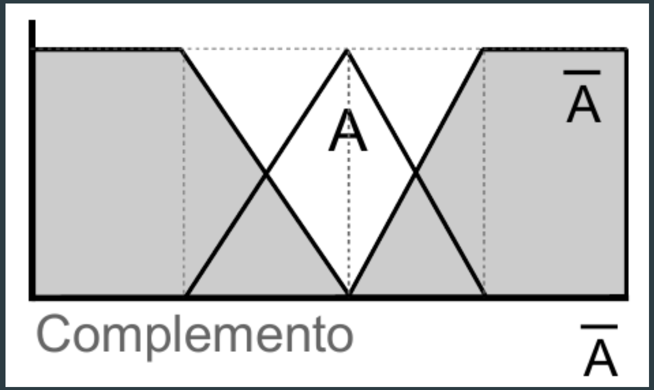
$$\mu_{sigmoid}(x; a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$

Lógica difusa

- **Operaciones entre conjuntos difusos**.

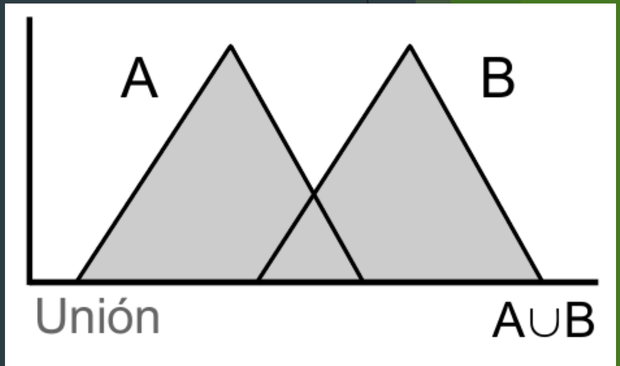






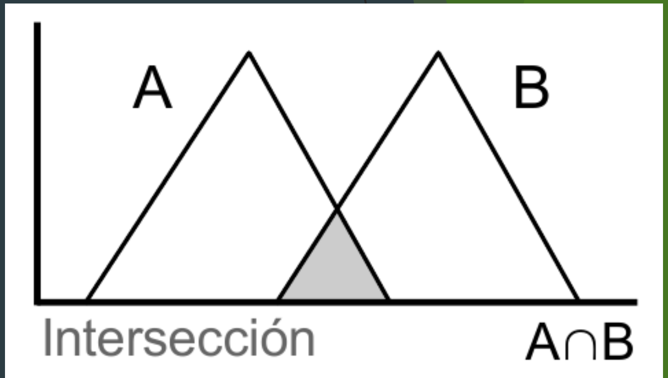
Lógica difusa

- **Operación de unión.**
  - $\mu_{A \cup B}(x) = \perp [\mu_A(x), \mu_B(x)]$
  - Axiomas
    - Elemento Neutro: $\perp(a, 0) = a$
    - Conmutatividad: $\perp(a, b) = \perp(b, a)$
    - Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $\perp(a, b) \leq \perp(c, d)$
    - Asociatividad: $\perp(\perp(a, b), c) = \perp(a, \perp(b, c))$
  - T-conormas más utilizadas
    - Máximo: $\perp(a, b) = \max(a, b)$
    - Producto: $\perp(a, b) = (a + b) - (a \times b)$
    - Suma limitada (o de Lukasiewick): $\perp(a, b) = \min(a + b, 1)$



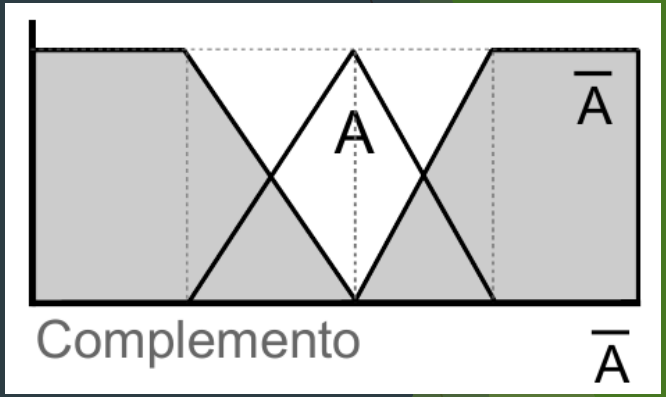
Lógica difusa

- **Operación de intersección**.
  - $\mu_{A\cap B}(x) = T[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
  - Axiomas
    - Elemento unidad: $T(a, 1) = a$
    - Conmutatividad: $T(a, b) = T(b, a)$
    - Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $T(a, b) \leq T(c, d)$
    - Asociatividad: $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$
  - T-conormas más utilizadas
    - Mínimo: $T(a, b) = \min(a, b)$
    - Producto algebraico: $T(a, b) = ab$
    - Diferencia limitada (o de Lukasiewick): $T(a, b) = \max(0, a + b - 1)$



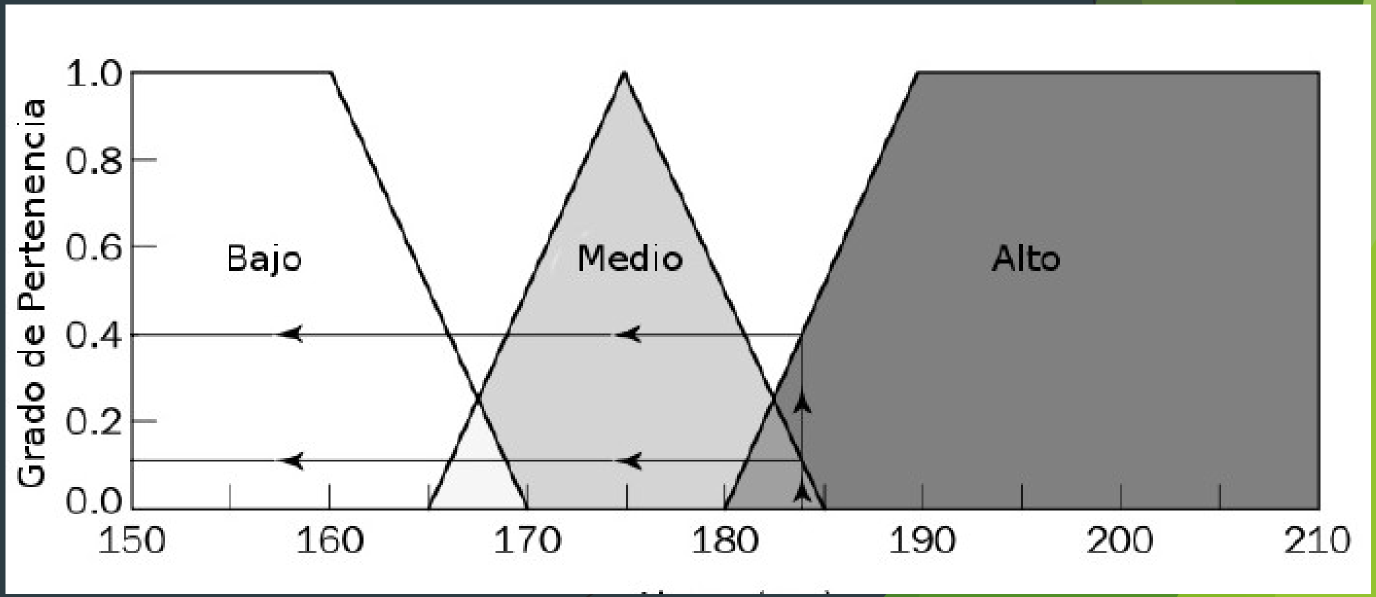
Lógica difusa

- **Operación de negación.**
  - $\mu_A (x) = 1 - \mu_A (x)$
  - Axiomas
    - Condiciones límite o frontera: $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$
    - Monotonicidad: $\forall a, b \in [0, 1]$ si $a < b$ entonces $c(a) \geq c(b)$
    - c es una función contínua
    - c es involutiva $\forall a \in [0, 1]$ tenemos $c(c(a)) = a$



Lógica difusa

- **Variables lingúísticas**.
  - Palabras o sentencias que se enmarcan en un lenguaje determinado.
  - Incluye términos, dominio y conjuntos difusos.
  - Ejemplo: Variante lingüística altura.
    - Términos: Bajo, medio, alto.
    - Dominio: enteros [0,220]
    - Conjuntos difusos:



Lógica difusa

- **Modificadores lingüísticos**.
  - Se aplican sobre variables lingüísticas.
  - Modifican el significado de los conjuntos difusos