

Duel de calculadores: HP és més ràpida que CASIO?

Daniel García Romero, Erick Aramayo Monrroy i Robert Almar Graupera

Juny 2014

RESUM

- **Objectiu:** Estudiar el temps que triga una calculadora model *HP 50g* i una *CASIO FX-9860G* en calcular 20 sumatoris i 20 integrals per tal de confirmar les nostres sospites que la *HP* és més ràpida.
- **Mètodes:** Mitjançant dos emuladors dels corresponents models de calculadores i amb l'ajuda d'un software d'edició i captura de vídeos, hem pogut mesurar els temps de resolució d'ambdues calculadores pels diferents càlculs matemàtics esmentats anteriorment.
- **Resultats:** En la primera prova d'hipòtesi, hem obtingut un valor de l'estadístic de -4.388 i un p-valor de $4.222 \cdot 10^{-5}$, ambdós inferiors al punt crític i al risc, respectivament. Per tant, podem rebutjar que *HP* i *CASIO* són igual de ràpides. En canvi, en la segona prova d'hipòtesi, l'estadístic i el p-valor, amb valors de -1.0797 i 0.1469 respectivament, no ens permeten rebutjar-ho.
- **Discussió:** Podem afirmar que la *HP* és més ràpida que la *CASIO* quan avaluem les integrals i els sumatoris conjuntament, però no quan fem l'anàlisi estadística dels temps de resolució de les integrals. A més a més, hem comprovat que el temps que triga la *HP* en resoldre una integral està relacionat linealment amb el temps que triga en resoldre'n una la *CASIO*.

INTRODUCCIÓ

Actualment, les *CASIO* han monopolitzat el mercat de les calculadores científiques pel seu preu econòmic. Semblaria lògic, per tant, pensar que, per exemple, les calculadores *HP*, com que són més cares, han de ser més ràpides.

Per posar-ho a prova, hem descarregat dos emuladors de les que estan considerades com les millors calculadores de cada marca per tal de veure quina de les dues triga menys temps en calcular una sèrie de sumatoris i integrals.

MATERIAL I MÈTODES

Tindrem una variable resposta que serà el temps de resolució (en segons) i dos variables explicatives: el tipus de calculadora (*HP* o *CASIO*) i el tipus de càlcul matemàtic a resoldre (integral o sumatori). Farem servir 20 sumatoris amb un límit superior relativament alt i 20 integrals de resolució complexa.

Per mesurar els temps de resolució, hem utilitzat dos emuladors, un de la *HP* model 50g i un de la *CASIO* model *FX-9860G*, i un software d'edició i captura de vídeos anomenat *Camtasia* que ens ha permès mesurar el número de *frames* (amb *frame rate* = 30, és a dir, 30 *frames* equivalen a un segon) entre el moment que l'emulador comença a resoldre el sumatori o la integral en qüestió i l'instant que es mostra el resultat.

L'ordinador on s'ha obtingut la mostra té les següents característiques:

→ Sistema operatiu: Windows 7 Home Premium (64 bits)

→ Processador: Intel Core i5-2320 CPU @ 3,00 GHz

→ RAM: 6,00 GB

Pel que fa a les característiques de les calculadores, cal remarcar que són bastant similars malgrat la desigualtat en el preu (139,15 € la *HP* i 109,00 € la *CASIO*): ambdues són programables, poden fer tota mena de càlculs (acompanyats si cal per la seva corresponent representació gràfica), les seves pantalles tenen mides semblants (64 x 128 píxels la *CASIO* i 80 x 131 la *HP*), etc. L'única diferència destacable entre les dues és la memòria de la qual disposa l'usuari, ampliable en el cas de la *HP* mitjançant una targeta SD com la dels mòbils. La *CASIO* ens ofereix 1,5 MB de memòria FLASH ROM i 64 KB de RAM, enfront els 2 MB de memòria FLASH ROM i 512 KB de RAM de la *HP*.

• Anàlisi estadística

Farem dues proves d'hipòtesis: una tenint en compte el total de la mostra i l'altra considerant només els temps obtinguts a partir del càlcul de les integrals. No ens ha semblat prou interessant analitzar el cas dels sumatoris perquè, basant-nos en les dades recollides, la *HP* sempre els resoldrà més ràpidament que la *CASIO*.

Com que les integrals i els sumatoris a calcular són els mateixos per ambdues calculadores, les nostres mostres són aparellades. Això vol dir que caldrà definir una nova variable que anomenarem vector diferència D , que serà la diferència entre la variable *HP* i la variable *CASIO*.

Ambdues proves d'hipòtesis tindran en comú les característiques següents:

1. Hipòtesis:

$$\rightarrow H_0: \mu_D = 0$$

$$\rightarrow H_1: \mu_D < 0 \text{ (unilateral, volem demostrar que la } HP \text{ triga menys que la } CASIO)$$

2. Premisses:

→ Les mostres són aparellades

→ La variable D segueix la distribució normal

3. Estadístic i distribució:

Estadístic	Distrib. sota H_0
$\hat{t} = \frac{\bar{D} - \mu_0}{S_D / \sqrt{n}}$	$\hat{t} \rightarrow t_{n-1}$

4. Construcció de l'interval de confiança:

$$IC(\mu_D, 0.95) = \bar{d} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \sqrt{S_D^2 / n}$$

5. Rebutjarem H_0 si:

$$\rightarrow \hat{t} < -t_{n-1, 1-\alpha}$$

$$\rightarrow p\text{-valor} < \alpha = 0.05$$

RESULTATS

- Descriptiva de les variables implicades en la prova d'hipòtesi I

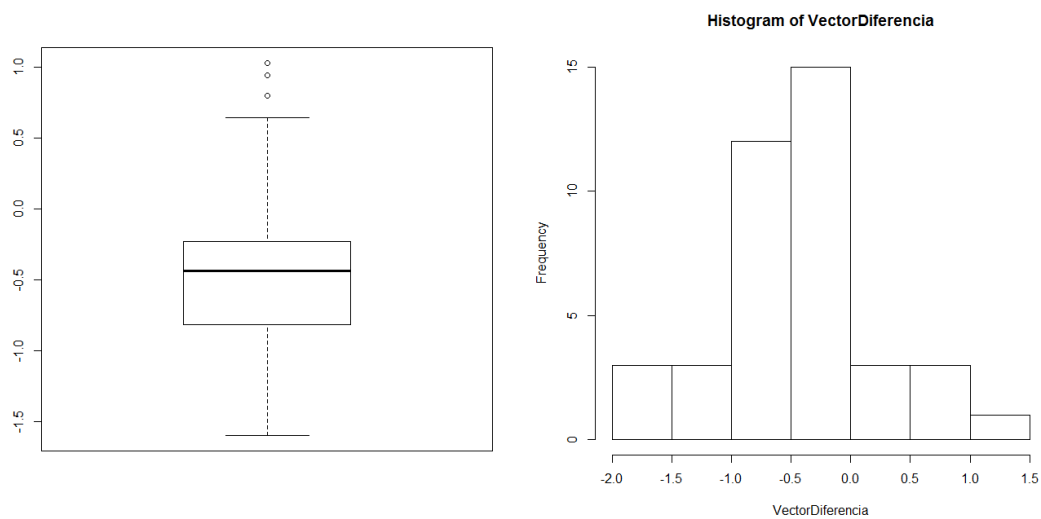


Figura 1: Boxplot i histograma de la variable VectorDiferencia

```
> summary(VectorDiferencia)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
-1.6000 -0.8075 -0.4350 -0.4350 -0.2300  1.0300
```

Figura 2: Output del summary de la variable VectorDiferencia

El *boxplot* i l'output del *summary* (figures 1 i 2) ens indiquen que la *HP*, en el pitjor dels casos observats, trigarà 1.03 segons més que la *CASIO*, i en el millor dels casos, 1.6 segons menys. A més a més, veiem que tant el temps mitjà com la mediana, que comparteixen un valor de -0.435 segons, són negatius, la qual cosa ens fa creure que d'entrada sí que sembla que la *HP* serà més ràpida, però no amb una diferència prou evident. Identifiquem diversos *outliers* quan ens apropem o sobrepassem el segon.

D'altra banda, a l'histograma (figura 1) podem veure la campana de Gauss típica de la distribució normal, amb freqüències baixes als extrems i altes al centre.

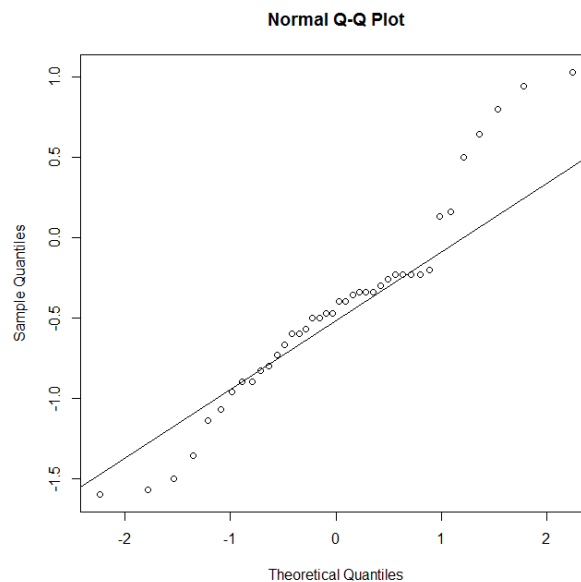


Figura 3: qqnorm de la variable VectorDiferencia

Malgrat que a la figura 3 veiem que la seqüència de punts es desajusta bastant de la referència rectilínia, podem afirmar que la variable *VectorDiferencia* pot ser modelada amb la distribució normal perquè s'intueix una línia recta a la part central, on es concentra la major part dels valors, mentre que als extrems en trobem pocs. A més, considerem que la nostra mostra, formada per 40 valors, és suficientment gran com per assegurar que la mitjana mostral \bar{D} serà normal.

- Càlcul del valor de l'estadístic i del p-valor (i la seva representació gràfica)

```
> t.test(HP, CASIO, alternative = "less", paired = TRUE)

Paired t-test

data: HP and CASIO
t = -4.388, df = 39, p-value = 4.222e-05
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
 -0.6355189 -0.2344811
sample estimates:
mean of the differences
 -0.435
```

Figura 4: *t.test* de la variable *VectorDiferencia* amb $H_1: \mu_D < 0$

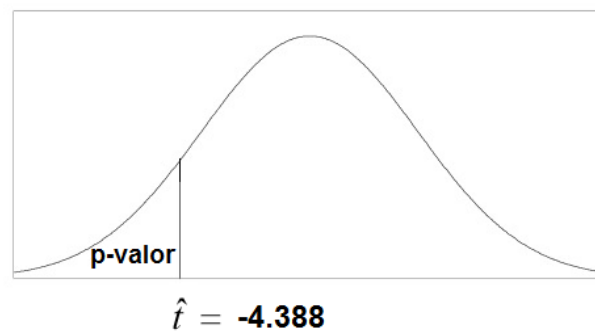


Figura 5: Representació gràfica del p-valor

- Descriptiva de les variables implicades en la prova d'hipòtesi II

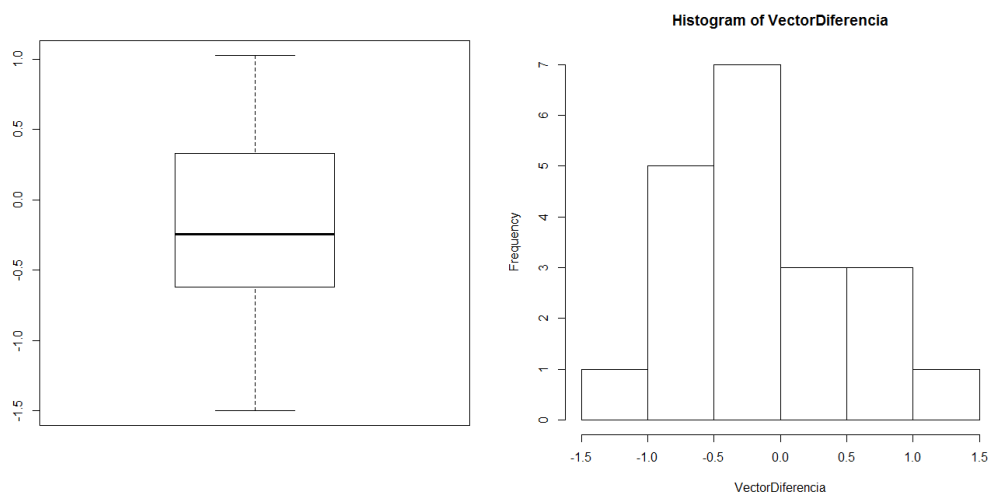


Figura 6: Boxplot i histograma de la variable *VectorDiferencia*

```
> summary(VectorDiferencia)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-1.5000 -0.5950 -0.2450 -0.1645  0.2450  1.0300
```

Figura 7: Output del summary de la variable VectorDiferencia

El *boxplot* i l'output del *summary* (figures 6 i 7) ens indiquen que la *HP*, en el pitjor dels casos observats, trigarà 1.03 segons més que la *CASIO*, i en el millor dels casos, 1.5 segons menys. A més a més, veiem que tant el temps mitjà com la mediana, amb valors de -0.1645 i -0.2450 segons respectivament, són negatius, la qual cosa ens fa creure que d'entrada sí que sembla que la *HP* serà més ràpida resolent integrals, però no amb una diferència suficientment gran.

D'altra banda, a l'histograma (figura 6) podem veure la campana de Gauss típica de la distribució normal, amb freqüències baixes als extrems i altes al centre.

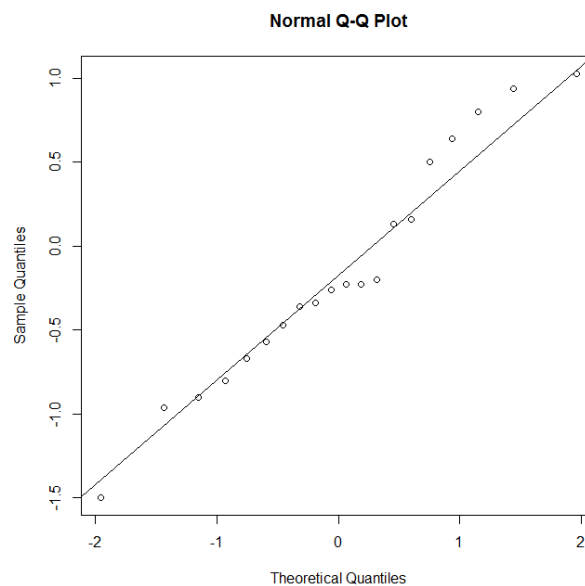


Figura 8: qqnorm de la variable VectorDiferencia

La seqüència de punts sembla seguir una forma rectilínia (figura 8). Per tant, podem assumir normalitat en la variable *VectorDiferencia*.

- Càlcul del valor de l'estadístic i del p-valor (i la seva representació gràfica)

```
> t.test(HP, CASIO, alternative = "less", paired = TRUE)

Paired t-test

data: HP and CASIO
t = -1.0797, df = 19, p-value = 0.1469
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
 -0.4833776  0.1543776
sample estimates:
mean of the differences
 -0.1645
```

Figura 9: *t.test* de la variable *VectorDiferencia* amb $H_1: \mu_D < 0$

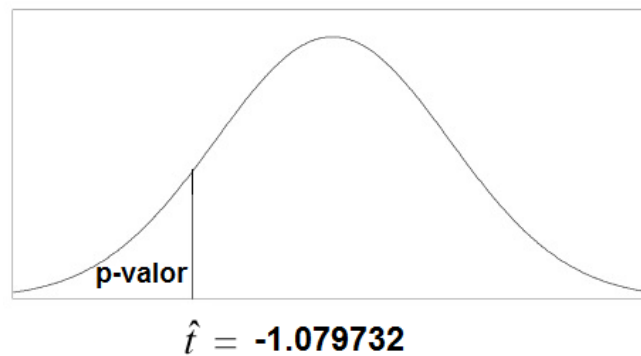


Figura 10: Representació gràfica del p-valor

- Regressió lineal

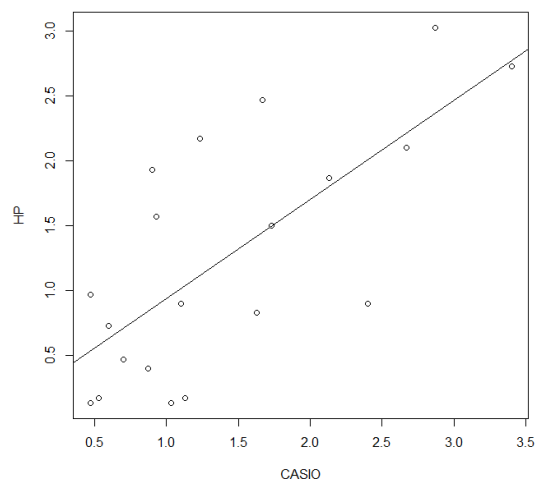


Figura 11: Recta de regressió

Estudiarem si existeix una relació entre els temps de resolució d'integrals de la *HP* i la *CASIO* a través del model de regressió lineal simple.

```
> summary(lm(HP ~ CASIO))

Call:
lm(formula = HP ~ CASIO)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.10618 -0.41266 -0.07638  0.49664  1.07174

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   0.1695     0.2930   0.578 0.570109
CASIO         0.7653     0.1771   4.320 0.000412 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.6682 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.509,    Adjusted R-squared:  0.4818
F-statistic: 18.66 on 1 and 18 DF,  p-value: 0.0004123
```

Figura 12: Output del summary aplicant el model de regressió lineal

La recta de regressió vindrà donada per l'equació $HP = 0.1695 + 0.7653 \text{ CASIO}$. Plantejarem una hipòtesi del tipus $H_0: \beta_1 = 0$ i $H_1: \beta_1 \neq 0$, i si veiem que el valor de l'estadístic és més gran en valor absolut que el percentil de la *t-student* amb $n-2$ graus de llibertat, podrem rebutjar la hipòtesi nul·la i, per tant, confirmarem que el temps que triga la *HP* està relacionat linealment amb el temps que triga la *CASIO*.

$$\hat{t} = \frac{(b_1 - \beta_1)}{S_{b_1}} = 4.32 > t_{18, 0.975} = 2.100922$$

Per veure entre quins valors es troba el paràmetre poblacional β_1 (pendent de la recta de regressió), farem un interval de confiança:

$$IC(95\%, \beta_1) = b_1 \pm t_{n-2, 0.975} \cdot S_{b_1} = [0.3932267138, 1.137373286]$$

Per exemple, pel cas concret de $\beta_1 = 1$, tindriem que per cada segon que trigui més la *CASIO*, la *HP* en trigarà un altre.

DISCUSSIÓ

• Conclusions

En la prova d'hipòtesi I, tenim que $\hat{t} < -t_{39, 0.95}$ i $p\text{-valor} < \alpha = 0.05$. Per tant, podem rebutjar que ambdues calculadores siguin igual de ràpides i acceptar que la *HP* és la més ràpida. Ara bé, la prova d'hipòtesi II ens diu que no podem rebutjar que triguin el mateix en calcular integrals perquè $\hat{t} > -t_{19, 0.95}$ i $p\text{-valor} > \alpha = 0.05$. Podem afirmar, però, que amb una confiança del 95%, la diferència de temps estarà entre -0.4833776 i 0.1543776 segons.

Pel que fa a la regressió lineal que hem aplicat a la prova d'hipòtesi II, hem vist que el temps que triga una està relacionat linealment amb el temps que triga l'altra i que podem afirmar, amb una confiança del 95%, que el valor de β_1 es troba en el rang [0.3932267138, 1.137373286].

• Limitacions de l'estudi

Per fer aquest estudi, hem hagut de suposar que els dos emuladors ens ofereixen un rendiment similar al que obtindríem amb les calculadores físiques. De la mateixa manera, tant el procés de recollida de dades com la selecció de les integrals i els sumatoris ens ha resultat laboriós.

• Treball futur

Per a estudis posteriors, seria convenient augmentar el nombre d'observacions i que les integrals i els sumatoris fossin escollits a l'atzar. També estaria bé millorar la precisió del temps de resolució mitjançant, per exemple, un altre programa d'edició i captura de vídeos que ens permetés usar un *frame rate* més gran.

ANNEX I. Integrals i sumatoris escollits per fer l'estudi

1. $\int_3^8 x^{12} e^{x^2} dx$

2. $\int_0^5 \sqrt{x^x - \sin(\sqrt{x})} dx$

3. $\int_0^2 \ln(\sin(x)) dx$

4. $\int_0^1 \frac{1}{(x \cos(x))^{\tan(x)}} dx$

5. $\int_{\ln(2)}^4 \frac{e^x}{x^5 - \ln(x)} dx$

6. $\int_0^1 (x + \sin^{-1}(x)) dx$

7. $\int_0^{2\pi} -\frac{x^{\sin(x)}}{\sin^2(x)} dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^{-1}(x)}{(\cos^{-1}(x))^{50x}} dx$

9. $\int_1^6 \frac{x^x \ln(x)}{e^{-x \cos(x)}} dx$

10. $\int_0^1 \frac{1}{\tan(\sin(\cos(x^x)))} dx$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)} \ln(x) dx$

12. $\int_1^4 \sin^{-1}(\cos(x)) dx$

13. $\int_2^3 (x-1)^{100} \ln(2x) dx$

14. $\int_0^1 (x - \cos^{-1}(x)) dx$

15. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan(x)}} dx$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin(\ln(x)) dx$

17. $\int_8^{12} \frac{e^x e^{2x + \ln(x)}}{e^{\pi}} dx$

18. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1}(x)}{\cos(x)} dx$

19. $\int_{\frac{\pi}{16}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{-1}(x)}{\sin(x)} dx$

20. $\int_0^1 \frac{1}{\sin(\cos(\tan(x)))} dx$

$$1. \sum_{x=0}^{250} x^3 \sin(x)$$

$$2. \sum_{x=0}^{250} \frac{1}{\cos(x)}$$

$$3. \sum_{x=0}^{200} \sqrt{(x^4 + x^2 + x)(e^x + 1)}$$

$$4. \sum_{x=0}^{300} \sqrt[3]{\tan(x)}$$

$$5. \sum_{x=0}^{500} \frac{\sin(x)}{x - \cos(x)}$$

$$6. \sum_{x=1}^{200} \ln(x + \cos(x))$$

$$7. \sum_{x=0}^{500} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$

$$8. \sum_{x=0}^{150} \cos(x) \sin(x)$$

$$9. \sum_{x=0}^{350} \frac{e^{x/2}}{e^{x/4}}$$

$$10. \sum_{x=0}^{400} \tan^{-1}(\sin(x))$$

$$11. \sum_{x=1}^{200} \ln(x) e^x$$

$$12. \sum_{x=0}^{500} \sin(\tan^{-1}(x))$$

$$13. \sum_{x=0}^{375} x^{\cos(x)}$$

$$14. \sum_{x=0}^{250} \sin(\sin(x))$$

$$15. \sum_{x=1}^{180} (x+1)^{\ln(x)}$$

$$16. \sum_{x=0}^{400} (x-1)^{\sin(x)} (x+1)^{e^2}$$

$$17. \sum_{x=0}^{200} \tan^{-1}(\cos^2(x))$$

$$18. \sum_{x=0}^{350} \sin(\cos(\tan(x)))$$

$$19. \sum_{x=0}^{500} \cos(\cos(x))$$

$$20. \sum_{x=0}^{250} \left(e^x \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

ANNEX II. Mostres obtingudes

INTEGRALS		
ID	HP	CASIO
1	0,9	2,4
2	0,83	1,63
3	2,1	2,67
4	0,97	0,47
5	0,4	0,87
6	0,17	0,53
7	2,17	1,23
8	0,9	1,1
9	0,73	0,6
10	1,93	0,9
11	3,03	2,87
12	2,47	1,67
13	1,5	1,73
14	0,13	0,47
15	1,87	2,13
16	2,73	3,4
17	0,47	0,7
18	0,17	1,13
19	1,57	0,93
20	0,13	1,03

SUMATORIS		
ID	HP	CASIO
1	0,2	0,7
2	0,17	0,4
3	0,23	0,53
4	0,2	1,03
5	0,33	1,9
6	0,1	0,5
7	0,27	1,63
8	0,13	0,47
9	0,2	0,67
10	0,3	0,9
11	0,1	0,33
12	0,13	1,2
13	0,23	1,13
14	0,17	0,77
15	0,13	0,47
16	0,2	1,8
17	0,17	0,57
18	0,23	1,37
19	0,2	0,93
20	0,13	0,63

ANNEX III. Script en R

PROVA D'HIPOTESI I

```
HP <- c(0.9, 0.83, 2.1, 0.97, 0.4, 0.17, 2.17, 0.9, 0.73, 1.93, 3.03, 2.47, 1.5, 0.13,  
1.87, 2.73, 0.47, 0.17, 1.57, 0.13, 0.2, 0.17, 0.23, 0.2, 0.33, 0.1, 0.27, 0.13, 0.2,  
0.3, 0.1, 0.13, 0.23, 0.17, 0.13, 0.2, 0.17, 0.23, 0.2, 0.13)
```

```
CASIO <- c(2.4, 1.63, 2.67, 0.47, 0.87, 0.53, 1.23, 1.1, 0.6, 0.9, 2.87, 1.67, 1.73,  
0.47, 2.13, 3.4, 0.7, 1.13, 0.93, 1.03, 0.7, 0.4, 0.53, 1.03, 1.9, 0.5, 1.63, 0.47, 0.67,  
0.9, 0.33, 1.2, 1.13, 0.77, 0.47, 1.8, 0.57, 1.37, 0.93, 0.63)
```

```
VectorDiferencia = HP - CASIO; VectorDiferencia
```

```
hist(VectorDiferencia); boxplot(VectorDiferencia); summary(VectorDiferencia)
```

```
qqnorm(VectorDiferencia); qqline(VectorDiferencia)
```

```
t = mean(VectorDiferencia) / (sd(VectorDiferencia) / sqrt(40)); t
```

```
puntcritic = -qt(1-0.05,39); puntcritic
```

```
pvalor = pt(t,39); pvalor
```

```
mean(VectorDiferencia) + qt(1-0.05/2,39)*(sd(VectorDiferencia) / sqrt(40))
```

```
mean(VectorDiferencia) - qt(1-0.05/2,39)*(sd(VectorDiferencia) / sqrt(40))
```

```
t.test(HP, CASIO, paired = TRUE)
```

```
t.test(HP, CASIO, alternative = "less", paired = TRUE)
```

PROVA D'HIPOTESI II

```
HP <- c(0.9, 0.83, 2.1, 0.97, 0.4, 0.17, 2.17, 0.9, 0.73, 1.93, 3.03, 2.47, 1.5, 0.13,  
1.87, 2.73, 0.47, 0.17, 1.57, 0.13)
```

```
CASIO <- c(2.4, 1.63, 2.67, 0.47, 0.87, 0.53, 1.23, 1.1, 0.6, 0.9, 2.87, 1.67, 1.73,  
0.47, 2.13, 3.4, 0.7, 1.13, 0.93, 1.03)
```

```
VectorDiferencia = HP - CASIO; VectorDiferencia
```

```

hist(VectorDiferencia); boxplot(VectorDiferencia); summary(VectorDiferencia)

qqnorm(VectorDiferencia); qqline(VectorDiferencia)

t = mean(VectorDiferencia) / (sd(VectorDiferencia) / sqrt(20)); t

puncritic = -qt(1-0.05,19); puncritic

pvalor = pt(t,19); pvalor

mean(VectorDiferencia) + qt(1-0.05/2,19)*(sd(VectorDiferencia) / sqrt(20))

mean(VectorDiferencia) - qt(1-0.05/2,19)*(sd(VectorDiferencia) / sqrt(20))

t.test(HP, CASIO, paired = TRUE)

t.test(HP, CASIO, alternative = "less", paired = TRUE)

# Regressio #

plot(CASIO,HP); M1 = lm(HP ~ CASIO); summary(M1); abline(M1)

par(mfrow=c(2,2))

plot(M1,c(2,1))

hist(rstandard(M1),font.main=1)

plot(1:20,rstandard(M1),type="l")

# Test aparellat de les diferències dels logaritmes dels temps #

HP <- c(0.9, 0.83, 2.1, 0.97, 0.4, 0.17, 2.17, 0.9, 0.73, 1.93, 3.03, 2.47, 1.5, 0.13,
1.87, 2.73, 0.47, 0.17, 1.57, 0.13, 0.2, 0.17, 0.23, 0.2, 0.33, 0.1, 0.27, 0.13, 0.2,
0.3, 0.1, 0.13, 0.23, 0.17, 0.13, 0.2, 0.17, 0.23, 0.2, 0.13)

CASIO <- c(2.4, 1.63, 2.67, 0.47, 0.87, 0.53, 1.23, 1.1, 0.6, 0.9, 2.87, 1.67, 1.73,
0.47, 2.13, 3.4, 0.7, 1.13, 0.93, 1.03, 0.7, 0.4, 0.53, 1.03, 1.9, 0.5, 1.63, 0.47, 0.67,
0.9, 0.33, 1.2, 1.13, 0.77, 0.47, 1.8, 0.57, 1.37, 0.93, 0.63)

LogHP = log(HP); LogCASIO = log(CASIO)

VectorDifLog = LogHP - LogCASIO; VectorDifLog

```

```
qqnorm(VectorDifLog); qqline(VectorDifLog,col = 4)
```

```
HP <- c(0.9, 0.83, 2.1, 0.97, 0.4, 0.17, 2.17, 0.9, 0.73, 1.93, 3.03, 2.47, 1.5, 0.13,  
1.87, 2.73, 0.47, 0.17, 1.57, 0.13)
```

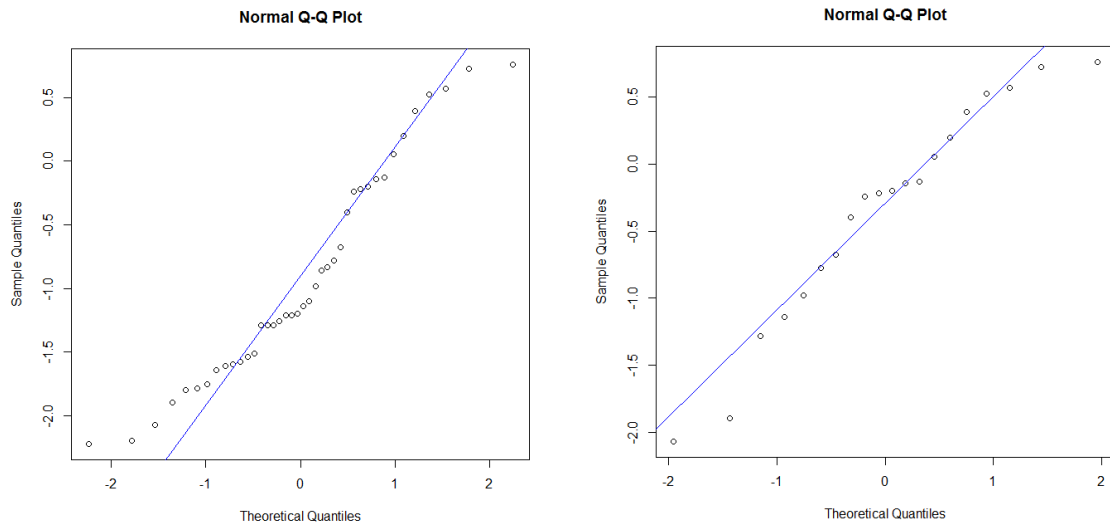
```
CASIO <- c(2.4, 1.63, 2.67, 0.47, 0.87, 0.53, 1.23, 1.1, 0.6, 0.9, 2.87, 1.67, 1.73,  
0.47, 2.13, 3.4, 0.7, 1.13, 0.93, 1.03)
```

```
LogHP = log(HP); LogCASIO = log(CASIO)
```

```
VectorDifLog = LogHP - LogCASIO; VectorDifLog
```

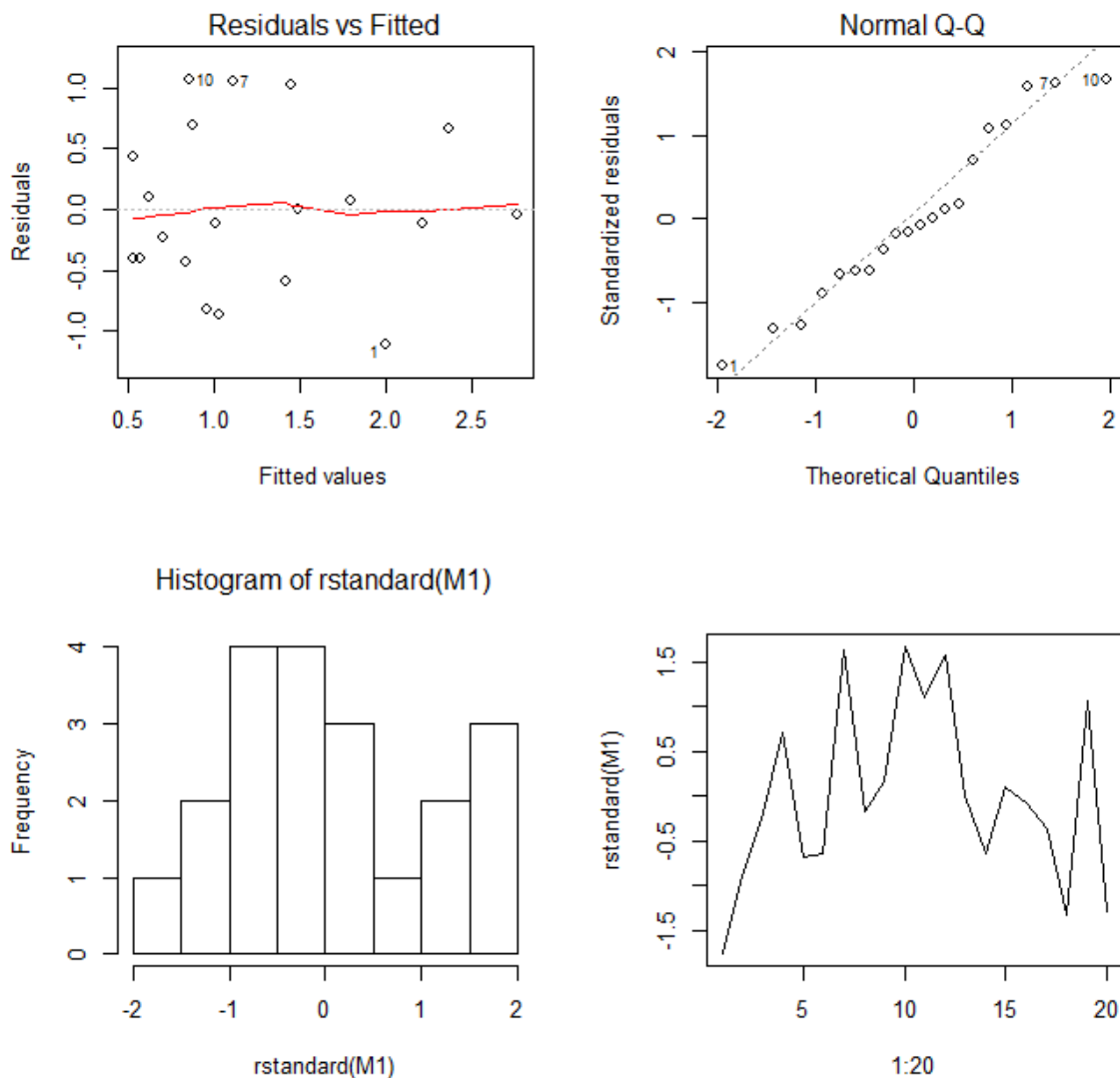
```
qqnorm(VectorDifLog); qqline(VectorDifLog,col = 4)
```


ANNEX IV. Test aparellat de les diferències dels log. dels temps



Aquestes dues gràfiques ens indiquen que també hauria estat correcte fer una transformació logarítmica de les dades i calcular-ne el vector diferència D , ja que compliríem la premissa de normalitat. Com en el cas de les dades sense transformar, veiem que si només tenim en compte les integrals, la seqüència de punts té una forma més o menys rectilínia i, en canvi, en el cas de sumatoris i integrals no és tan evident de veure.

ANNEX V. Validació de les premisses del model lineal



● **Normalitat** : Podem assumir normalitat perquè al *qqplot* veiem que els residus dels temps de resolució d'integrals s'ajusten bastant als quantils teòrics de la distribució normal i perquè a l'histograma identifiquem la campana de Gauss típica de la distribució.

● **Independència** : Les dades no mostren cap patró o tendència. Això és degut al fet que, per una calculadora, fer dos càlculs consecutius implica fer-ne un i després l'altre i, per tant, aquests són independents entre sí.

● **Homoscedasticitat** : Com que sembla que la variabilitat no canvia massa, assumirem que aquesta és constant.