Taller 2

Transformada de Fourier, Laplace y Z Señales y Sistemas 2025

Nombre: Daniel David Giraldo Clavijo

Encuentre la función de densidad espectral para las siguientes señales (sin aplicar propiedades)

a) $e^{-a|t|}$, $a \in \mathbb{R}^+$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-jwt}\, dt \qquad |t| = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ -t & t < 0 \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(-t)} \cdot e^{-jwt}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a(t)} \cdot e^{-jwt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{at-jwt}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{jwt}\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{at-jwt}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at-jwt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t(a-jw)}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{t(-a-jw)}\, dt$$

$$= \frac{e^{t(a-jw)}}{a-jw}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{t(-a-jw)}}{-a-jw}\Bigg|_{0}^{\infty}$$

exponente negativo

$$= \left(\frac{e^{0(a-jw)}}{a-jw} - \cancel{\frac{e^{-\infty(a-jw)}}{a-jw}} \right) + \left(\cancel{\frac{e^{\infty(-a-jw)}}{-a-jw}} + \frac{e^{0(-a-jw)}}{a+jw} \right)$$

$$= \frac{1}{a-jw} + \frac{1}{a+jw}$$

$$\boxed{X(w) = \frac{1}{a-jw} + \frac{1}{a+jw}}$$

b. $\mathcal{F}\{\cos(w_c t)\}$; $w_c \in \mathbb{R}$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_c t)\, e^{-jwt}\, dt \quad , \quad \cos(w_c t) = \frac{e^{jw_c t} + e^{-jw_c t}}{2}$$

$$x(w) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{jw_c t} + e^{-jw_c t}\right) e^{-jwt}\, dt$$

$$x(w) = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{jw_c t} \cdot e^{-jwt}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jw_c t} \cdot e^{-jwt}\, dt\right]$$

Como no converge, usamos la propiedad de Delta de Dirac:

$$x(w) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{e^{jw_c t}\} + \mathcal{F}\{e^{-jw_c t}\}\right] \quad , \quad \mathcal{F}\{e^{-jw_0 t}\} = 2\pi\,\delta(w - w_0)$$

$$x(w) = \frac{1}{2}\left[2\pi\,\delta(w - w_c) + 2\pi\,\delta(w + w_c)\right]$$

$$\boxed{x(w) = \pi\left[\delta(w - w_c) + \delta(w + w_c)\right]} \;//$$

esto es igual a $\cos(w_0 t)$ según la tabla

c) $\mathcal{F}\{\text{Sen}(w_s t)\}$, $w_s \in \mathbb{R}$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sen}(w_s t) \cdot e^{-jwt}\, dt \quad , \quad \text{Sen}(w_s t) = \frac{e^{jw_s t} - e^{-jw_s t}}{2j}$$

$$x(w) = \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{jw_s t} - e^{-jw_s t}\right) e^{-jwt}\, dt$$

$$x(w) = \frac{1}{2j}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{jw_s t} \cdot e^{-jwt}\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jw_s t} \cdot e^{-jwt}\, dt\right]$$

Como no converge, usamos la propiedad delta de dirac

$$x(w) = \frac{1}{2j}\left[\mathcal{F}\{e^{jw_s t}\} - \mathcal{F}\{e^{-jwt}\}\right] \quad , \quad \mathcal{F}\{e^{jw_0 t}\} = 2\pi\,\delta(w - w_0)$$

$$X(w) = \frac{1}{2j}\left[2\pi\delta(w-w_s) - \delta(w+w_s)\right] \quad , \quad \frac{1}{j} = -j$$

$$X(w) = -j\pi\left[\delta(w-w_s) - \delta(w-w_s)\right]$$

$$\boxed{X(w) = j\pi\left[\delta(w+w_s) - \delta(w-w_s)\right]}$$

d. $\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_c t)\}, \quad w_c \in \mathbb{R}, \quad f(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(w_c t)\cdot e^{-jwt}\,dt \quad , \quad \cos(w_c t) = \frac{e^{jw_c t} + e^{-jw_c t}}{2}$$

$$X(w) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(e^{jw_c t} + e^{-jw_c t}\right)\cdot e^{-jwt}\,dt$$

$$X(w) = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{jt(w_c - w)}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-jt(w_c + w)}\,dt\right]$$

$$X(w) = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-jt(w - w_c)}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{jt(w + w_c)}\,dt\right]$$

$$w' = w - w_c \quad ; \quad w'' = w + w_c$$

$$X(w) = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-jtw'}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-jtw''}\,dt\right]$$

$$X(w) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{f(t)\} + \mathcal{F}\{f(t)\}\right]$$

$$X(w) = \frac{1}{2}\left[F(w') + F(w'')\right]$$

$$X(w) = \frac{1}{2}\left[F(w-w_c) + F(w+w_c)\right]$$

$$\boxed{X(w) = \frac{1}{2}\left[F(w-w_c) + F(w+w_c)\right]}$$

e. $\mathcal{F}\{e^{-a|t|^2}\}$; $a \in \mathbb{R}^+$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|^2} \cdot e^{-jwt}\, dt \quad ; \quad |t| \begin{cases} t \; ; & t \geq 0 \\ -t \; ; & t < 0 \end{cases}$$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{0} e^{-a(-t)^2} \cdot e^{-jwt}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-jwt}\, dt$$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{0} e^{-at^2} \cdot e^{-jwt}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-jwt}\, dt$$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-jwt}\, dt$$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 - jwt}\, dt$$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t^2 + \frac{jwt}{a}\right)}\, dt$$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(\left(t + \frac{jw}{2a}\right)^2 - \left(\frac{jw}{2a}\right)^2\right)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t + \frac{jw}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{jw}{2a}\right)^2}$$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t + \frac{jw}{2a}\right)^2 - \frac{w^2}{4a}}\, dt$$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t + \frac{jw}{2a}\right)^2} \cdot e^{-\frac{w^2}{2a}}\, dt$$

$$x(w) = e^{-\frac{w^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t + \frac{jw}{2a}\right)^2}\, dt$$

$u = t + \frac{jw}{2a}$; $du = dt$

Cambiamos los limites debido al cambio de variable

$$x(w) = e^{-\frac{w^2}{2a}} \int_{-\infty + \frac{jw}{2a}}^{\infty + \frac{jw}{2a}} e^{-au^2}\, du$$ → El desplazamiento complejo no interfiere en los limites.

$$x(w) = e^{-\frac{w^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\, du$$ → Integral de Gauss

$$x(w) = e^{-\frac{w^2}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \rightarrow \boxed{x(w) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{w^2}{2a}}}$$ //

f. $\mathcal{F}\{A\,\text{rect}_\tau(t)\}$ $A, d \in \mathbb{R}$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} A\,\text{rect}_\tau(t) \cdot e^{-jwt}\, dt$$

$$x(w) = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{jwt}\, dt$$

$$x(w) = A \left[\frac{e^{-jwt}}{-jw} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \right]$$

$$x(w) = A \left[\frac{e^{-jw\tau/2}}{-jw} - \frac{e^{jw\tau/2}}{-jw} \right]$$

$$x(w) = -\frac{A}{jw} \left[e^{-jw\tau/2} - e^{jw\tau/2} \right]$$

$$x(w) = \frac{2A}{w} \left[\frac{e^{jw\tau/2} - e^{-jw\tau/2}}{2j} \right]$$

$$x(w) = \frac{2A}{w}\, \text{Sen}\, w\frac{\tau}{2}$$

$$x(w) = \frac{\cancel{2}A \cdot \frac{\tau}{\cancel{2}}\ \text{Sen}\left(w\frac{\tau}{2}\right)}{w \cdot \tau/2}$$

$$\boxed{X(w) = A \cdot \tau \cdot \text{Sen}\left(\frac{w\tau}{2}\right)}$$

2. Aplique las propiedades de la transformada de Fourier para resolver:

a) $\mathcal{F}\{e^{-jw_1 t}\cos(w_c t)\}$, $w_1, w_c \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot y(t)\} = \frac{1}{2\pi}[X(w) * Y(w)]$$

Entonces,

$$X(w) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jw_1 t} \cdot e^{-jwt}\,dt * \int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_c t) \cdot e^{-jwt}\,dt\right.$$

$$X(w) = \frac{1}{2\pi}\left[\mathcal{F}\{e^{-jwt}\} * \mathcal{F}\{\cos(w_c t)\}\right]$$

$$X(w) = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi\,\delta(w-w_1) * \pi[\delta(w-w_c) + \delta(w+w_c)]\right]$$

$$X(w) = \frac{2\pi * \pi}{2\pi}\left[\delta(w-w_1) * [\delta(w-w_c) + \delta(w+w_c)]\right]$$

$$X(w) = \pi\left[\delta(w-w_1) * \delta(w-w_c) + \delta(w-w_1) * \delta(w+w_c)\right]$$

$$\boxed{X(w) = \pi[\delta(w-w_1-w_c) + \delta(w-w_1+w_c)]}$$

b) $\mathcal{F}\{u(t)\cos^2(w_c t)\}$; $w_c \in \mathbb{R}$

$$\cos^2(w_c t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(w_c t)$$

Entonces:

$$\mathcal{F}\left\{u(t) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(w_c t)\right)\right\}$$

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}u(t)\cos(W_c t) \right\}$$

Aplicando propiedad de linealidad

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}\{u(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{u(t)\cos(W_c t)\}$$

$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{u(t)\} + \mathcal{F}\{u(t)\cos(W_c t)\}\right]$$

Primera: $\mathcal{F}\{u(t)\}$; $u(w) = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$

Segunda: $\mathcal{F}\{u(t)\cdot\cos(W_c t)\} = \frac{1}{2\pi}\left[\mathcal{F}\{u(t)\} * \mathcal{F}\{\cos(W_c t)\}\right]$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[U(w) * \pi[\delta(w - w_c) + \delta(w + w_c)]\right]$$

Propiedad de convolución con Delta de Dirac

$$= \frac{1}{2\cancel{\pi}}\left[\cancel{\pi}[u(w - 2W_c) + u(W + 2W_c)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[U(w - 2W_c) + U(W + 2W_c)\right]$$

Entonces

$$\mathcal{F}\{u(t).\cos^2(W_c t)\} = \frac{1}{2}U(w) + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[U(W - 2W_c) + U(W + 2W_c)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}U(w) + \frac{1}{4}\left[U(w - 2W_c) + U(W + 2W_c)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}\right) + \frac{1}{4}\left[\pi\delta(w - 2W_c) + \frac{1}{j(w - 2W_c)} + \pi\delta(w + 2W_c) + \frac{1}{j(w + 2W_c)}\right]$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}\delta(w) + \frac{1}{2jw} + \frac{1}{4}\left[\pi\delta(w - 2W_c) + \frac{1}{j(w - 2W_c)} + \pi\delta(w + 2W_c) + \frac{1}{jw + 2W_c}\right]}$$ //

c. $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{7}{w^2+6w+45}\cdot\frac{10}{\left(8+\frac{jw}{3}\right)^2}\right\} = z(t)$

$$\mathcal{F}^{-1}\{x(w)\cdot y(w)\} = 2\pi\, x(t)\cdot y(t)$$

Entonces

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{7}{w^2+6w+45}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{7}{(w+3)^2+6^2}\right\} = \frac{7}{6}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{6}{(w+3)^2+6^2}\right\}$$

Aplicando la formula: $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{b}{(w+a)^2+b^2}\right\} = \pi e^{-at}\,\text{Sen}(bt)\,u(t)$

$$x(t) = \frac{7}{6}\pi e^{-3t}\,\text{Sen}(bt)\cdot u(t)$$

Ahora

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(jw+a)^2}\right\} = te^{-at}\,u(t)$$

$$y(t) = 90te^{-24t}$$

Entonces $z(t) = 2\pi\left[\frac{7\pi}{6}e^{-3t}\,\text{sen}(6t)\cdot u(t)\cdot 90te^{-24t}\cdot u(t)\right]$

$$\boxed{z(t) = 2\pi\,u(t)\left[\frac{7\pi}{6}e^{-3t}\,\text{Sen}(6t)\cdot 90te^{-24t}\right]}$$

d) $\mathcal{F}\{3t^3\}$

Por propiedad de la tabla: $t^n f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} i^n \frac{d^n}{dw^n} \hat{f}(w)$

Cuando $f(t) = 1$

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\,\delta(w) \text{ (por la definición de la delta)}$$

Entonces: $3t^3 f(t) = 3t^3$

$$\mathcal{F}\{3t^3\} = 3 \cdot \mathcal{F}\{t^3\} = 3 \cdot i^3 \frac{d^3}{dw^3}(2\pi\,\delta(w))$$

$$= 3 \cdot (-j)\, 2\pi\, \delta^{(3)}(w) = -6\pi j \cdot \delta^{(3)}(w)$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{3t^3\} = -6\pi j \cdot \delta^3(w)}$$

e) $\frac{B}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a^2 + (w - nw_0)^2} + \frac{1}{a + j(w - nw_0)} \right)$

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(w - nw_0) \quad \text{si} \quad x(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

multiplicación de una señal periodica $F(t)$ por un tren de impulsos periodico.

$$X(w) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(w - nw_0)$$

constante de escala D

función de forma base en frecuencia es

$$F(w) = \frac{1}{a^2 + w^2} + \frac{1}{a + j(w)}$$

$F(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\}$; Como $F(w)$ Aplicando la propiedad de linealidad ya que $F(w)$ es una suma.

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+w^2}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+jw}\right\}$$

Aplicamos la propiedad de par de transformada para el primer termino

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2+w^2} \rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+w^2}\right\} - e^{-at} \, u(t)$$

Entonces la funcion base $F(t)$ es:

$$f(t) = \frac{1}{2a} e^{-a|t|} + e^{-at} \, u(t)$$

Construimos la función final en el dominio del tiempo

$$x(t) = B.\, f(t)\left(\sum_{N=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right)$$

$$x(t) = B\left(\frac{1}{2a} e^{-a|t|} + e^{-at} u(t)\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

$$x(t) = B\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(kT) - \delta(t-kT) \quad , \quad F(kT) = \frac{1}{2a} e^{-a|kT|} + e^{-akT} u(kT)$$

$$\boxed{x(t) = B\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2a} e^{-a|kT|} + e^{-akT} u(kT)\right)\delta(t-kT)}$$

Modulación AM

$$c(t) = A_c \cos(2\pi F_c t)$$

$$y(t) = \left(1 + \frac{m(t)}{A_c}\right) \cdot c(t)$$

Hallar el espectro $Y(w)$ de $y(t)$

Expandimos la señal

$$y(t) = \left(\frac{1 + m(t)}{A_c}\right). A_c \cos(2\pi F_c t) + m(t) \cos(2\pi F_c)$$

$$Y(w) = \mathcal{F}\{A_c \cos(2\pi F_c t)\} + \mathcal{F}\{m(t)\cdot \cos(2\pi F_c t)\}$$

Transformada de la portadora:

$$\mathcal{F}\{\cos(w_c t)\} = \pi[\delta(w-w_c) + \delta(w+w_c)]$$

$$\mathcal{F}\{A_c \cos(2\pi F_c t)\} = \pi A_c[\delta(w-w_c) + \delta(w+w_c)]$$

con $w_c = 2\pi F_c$

Transformada del producto mensaje × coseno:

Usamos la propiedad de modulación:

$$\mathcal{F}\{m(t)\cdot \cos(w_c t)\} = \frac{1}{2}[M(w-w_c) + M(w+w_c)]$$

$$\boxed{Y(w) = \pi A_c[\delta(w-w_c) + \delta(w+w_c)] + \frac{1}{2}[M(w-w_c) + M(w+w_c)]}$$