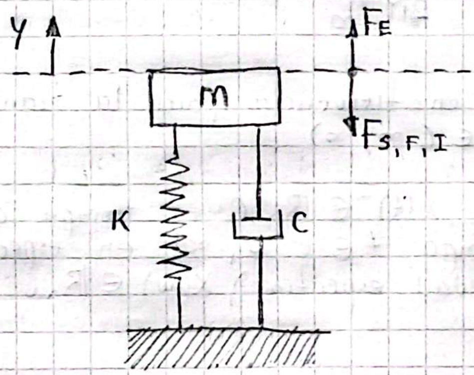
Parcial 2: Transformada de Fourier y Laplace

Daniel David Giraldo Clavijo

1. Encuentre la función de transferencia en lazo abierto que caracteriza el sistema masa, resorte, amortiguador, presentado en la siguiente figura (asuma condiciones iniciales cero):



* Masa m
* Resorte de constante K
* Amortiguador (damper)
* Entrada: Fuerza externa $F_E(t)$
* Salida: desplazamiento $y(t)$

$$\sum_i F_y = m.a$$

F_S : Fuerza del resorte : $k\,y(t)$
F_F : Fuerza de fricción : $c\,\dot{y}(t)$
ma : Fuerza inicial : $m\ddot{y}(t)$
F_E : Fuerza externa : $F_E(t)$

La fuerza total es igual a masa por aceleración, entonces, sumando todas las fuerzas

$$ma = F_E - F_S - F_F$$

$$m\ddot{y}(t) = F_E(t) - ky(t) - c\dot{y}(t)$$

$F_E(t) = m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) \rightarrow$ Ec. diferencial del sistema

Ahora aplicamos Transformada de Laplace, asumiendo condiciones iniciales cero:

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2 Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = s Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

Aplicamos transformada a toda la ecuación

$$ms^2 Y(s) + cs\, Y(s) + k\, Y(s) = F_E(s)$$

Factorizamos $Y(s)$:

$$Y(s)\,(ms^2 + cs + k) = F_E(s)$$

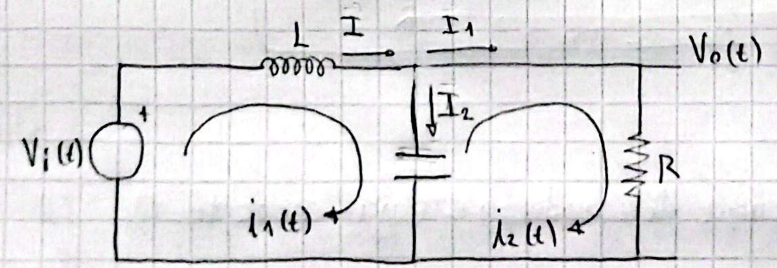
Función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} = \frac{Y(s)}{F_E(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}}$$ //

Encuentre el sistema equivalente del modelo masa, resorte, amortiguador, a partir del siguiente circuito eléctrico:



Haciendo LVK

$$V_i(t) = V_L + V_o$$

$$V_i(t) = L \frac{di(t)}{dt} + V_o(t)$$

La corriente total se divide entre la resistencia y el capacitor

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t)$$

$$i(t) = \frac{V_o(t)}{R} + C\frac{dV_o(t)}{dt}$$

Reemplazando:

$$V_i(t) = L\frac{d}{dt}\left(\frac{V_o(t)}{R} + C\frac{dV_o(t)}{dt}\right) + V_o(t)$$

$$V_i(t) = \frac{L}{R}\frac{dV_o(t)}{dt} + LC\frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + V_o(t)$$

Organizando:

$$LC\frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dV_o(t)}{dt} + V_o(t) = V_i(t)$$

Luego hallamos la función de transferencia

$$LCs^2 V_o(s) + \frac{L}{R} s V_o(s) + V_o(s) = V_i(s)$$

$$V_o(s)\left(LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1\right) = V_i(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}}$$

¿Son equivalentes?

* Función de transferencia del sistema masa - resorte

$$H_{mecanico}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

* Función de transferencia del circuito RLC

$$H_{electrico}(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Las funciones de transferéncia son formalmente equivalentes

$$H(s)_{mecanico} = H(s)_{electrico}$$

$M = LC$
$C = \frac{L}{R}$
$K = 1$

2) Consulte y presente el modelo matematico del proceso de modulación y demudación por amplitud en banda lateral unica (SSB-AM), tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

* Señal mensaje: $m(t)$
* Frecuencia de la portadora: f_c
* Señal portadora: $c(t) = \cos(2\pi f t)$

Modulación SSB-AM

- Dominio en el tiempo

La Señal modulada en banda lateral unica (SSB-AM) se expresa como:

$$s_{SSB}(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) \pm \hat{m}(t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t) \quad (1)$$

Donde:

* $\hat{m}(t)$: es la transformada de Hilbert de $m(t)$
* El signo (+) es para la banda lateral superior (USB)
El signo (−) es para la banda lateral inferior (LSB)

Transformada de Hilbert:

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{\pi t} * m(t)$$

(donde * es la convolución)

Dominio de la frecuencia:

Sea $M(f)$ la transformada de Fourier de $m(t)$

Transformador de Hilbert en frecuencia

$$F\{\hat{m}(t)\} = -j\ \mathrm{Sgn}(f) \cdot M(f)$$

Aplico transformada de fourier para (1)

$$S_{SSB}(t) = \frac{1}{2}[M(f-f_c) \pm j\,\mathrm{sgn}(f-f_c) \cdot M(f-f_c) + M(f+f_c) \pm j\,\mathrm{Sgn}(f+f_c) \cdot M(F+f_c)$$

Para conservar solo la USB o solo la LSB se selecciona una parte del espectro.

Demodulación SSB - AM

Dominio en el tiempo:

Se multiplica la señal SSB recibida por una copia de la portadora

$$y(t) = S_{SSB}(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Desarrollando:

$$\Rightarrow [m(t)\cos(2\pi f_c t) \pm \hat{m}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)] \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Usando identidades trigonometricas:

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$\text{sen}(\theta)\cos(\theta) = \frac{\text{sen}(2\theta)}{2}$$

Entonces:

$$y(t) = \frac{m(t)}{2}\left[1+\cos(4\pi f_c t)\right] \pm \frac{\hat{m}(t)}{2}\,\text{sen}(4\pi f_c t)$$

Se pasa por un filtro pasa-bajos, que elimina los terminos en $2f_c$; y queda:

$$y(t) = \frac{m(t)}{2}$$

Dominio de la frecuencia

La transformada de fourier de la señal demodulada es:

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[S_{SSB}(f-f_c) + S_{SSB}(f+f_c)\right]$$

Luego, al aplicar un filtro pasa bajas de ancho $|f| \leq B$ (donde B es el ancho de banda de la señal de mensaje):

$$Y(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}M(f), & |f| \leq B \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Propiedades utilizadas:

* $F\{\cos(2\pi f_c t)\} = \frac{1}{2}[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)]$
* $F\{\hat{m}(t)\} = -j \cdot \text{sgn}(f) \cdot M(f)$
* $F\{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) \cdot Y(f)$