Daniel Gunna Santana da Silva Souza - 510348

Trabalho I - Cálculo II
Professor: Luiz Otávio
Pontíficia Universidade Católica de Minas Gerais

1)

a) V

b) V

c) V

d) V

e) F

f) V

g) V

h) V

j) V

k) V

l) V

m) F

n) V

2) Um balão voa na direção horizontal a uma altitude de 5km numa região plana com uma velocidade de 30km/h e passa sobre um ponto localizado no solo. Determine a taxa com que a distância entre o balão e este ponto aumenta no instante em que a distância for de 5km.

- Definindo as variáveis:
  a = altura do balão em relação ao solo (constante sempre será 5)
  b = distância do balão em relação ao ponto P.
  D = distância do balão até o ponto P.

  Solução:
  A distância será denotada quando tivermos b = 5 :

$$D^2 = a^2 + b^2$$

$$D^2 = 5^2 + 5^2$$

$$D = \sqrt[2]{50} = 5\sqrt[2]{2}$$

Para sabermos a taxa de variação em função do tempo em um determinado instante x basta derivar a função acima:

$$2D\frac{\partial D}{\partial t} = 2a\frac{\partial a}{\partial t} + 2b\frac{\partial b}{\partial t}$$

Como dado : $\frac{\partial b}{\partial t} = 30$Km/h e a variação da altura não existe,portanto $\frac{\partial a}{\partial t} = 0$.
Então substituindo os dados no instante em que b = 5 Km:

$$2.5\sqrt[2]{2}\frac{\partial D}{\partial t} = 2.5.30 + 2.5.0$$

$$2.5\sqrt[2]{2}\frac{\partial D}{\partial t} = 300$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{300}{10\sqrt[2]{2}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{30}{\sqrt[2]{2}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{30.\sqrt[2]{2}}{10\sqrt[2]{2}.\sqrt[2]{2}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{30.\sqrt[2]{2}}{2} = 15\sqrt[2]{2}$$

Portanto a distância está variando a uma taxa de $15\sqrt[2]{2}$.

3) Está sendo bombeado ar para dentro de uma bola com formato esférico fazendo com que seu volume cresça a uma taxa de $10cm^3/s$. Quão rápido o raio da bola está aumentando quando o raio for de 10cm ?

Sabe-se que o volume da esfera é obtido por:

$$V = \frac{4\pi.r^3}{3}$$

Derivando a função temos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{4\pi}{3}.3r^2\frac{\partial r}{\partial t}$$

Como sabemos $\frac{\partial V}{\partial t} = 10cm^3$/s, e para saber a taxa de variação do raio quando r = 10:

$$10 = 4\pi.r^2\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$10 = 4\pi.10^2\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{10}{400\pi} = \frac{1}{40\pi}$$

Então a variação do raio no decorrer do tempo é de: 0.07853981633.

4) Um carro e uma moto iniciam um movimento a partir de um mesmo ponto. O carro vai para o sul numa velocidade constante de 80km/h e a moto, para o oeste a 90km/h. Qual a taxa com que está crescendo a distância entre ambos três horas depois do início do movimento?

- Definindo as variáveis:
  a = distância percorrida pela moto.
  b = distância percorrida pelo carro.
  D = distância entre carro e moto.

  Solução:
  A distância entre o carro e a moto pode ser encontrada usando-se:

$$D^2 = a^2 + b^2$$

  Para encontrar a taxa com que a distância entre ambos está crescendo basta derivar em função do tempo :

$$2D\frac{\partial D}{\partial t} = 2a\frac{\partial a}{\partial t} + 2b\frac{\partial b}{\partial t}$$

  Como já foi dado, sabemos que $\dfrac{\partial a}{\partial t}$ = 90Km/h e $\dfrac{\partial b}{\partial t}$ = 80Km/h (1).

  Podemos também determinar a distância entre ambos depois de três horas:
  Carro = 80Km/h x 3h = 240 - a = 240
  Carro = 90Km/h x 3h = 270 - b = 270 (2)
  $D^2 = 240^2 + 270^2 =$
  $D = \sqrt[2]{130500} = 30.\sqrt[2]{145}$

  Substuindo (1) e (2) na derivada temos:

$$2.30.\sqrt[2]{145}.\frac{\partial D}{\partial t} = 2.240.80 + 2.270.90$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{87000}{60.\sqrt[2]{145}} =$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1450}{\sqrt[2]{145}} =$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1450.\sqrt[2]{145}}{\sqrt[2]{145}.\sqrt[2]{145}} =$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1450.\sqrt[2]{145}}{145} = 10.\sqrt[2]{145}$$

  Assim, a distância está variando a 120,415 Km/h.

5) Uma escada com 10m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 1m/s , quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede, quando a base da escada estiver a 2m da parede?

- Definindo as variáveis:
  a = distância do pé da escada até a parede.(2m)
  b = altura da parede.(?)
  h = tamanho da escada(10m)

Primeiro precisamos determinar a altura b da parede quando a distância a do pé da escada é igual a 2, podemos encontra-la fazendo:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$10^2 = 2^2 + b^2$$

$$b^2 = 100 - 4 = \sqrt[2]{96} = 4\sqrt[2]{6}$$

Também temos que:

$$b^2 = h^2 - a^2$$

E derivando obtemos a variação de b:

$$2b\frac{\partial b}{\partial t} = 2h\frac{\partial h}{\partial t} - 2a\frac{\partial a}{\partial t}$$

Sabemos que $\frac{\partial a}{\partial t} = 1$m/s e que o tamanho da escada não muda portanto $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ e que e b $=$ $4\sqrt[2]{6}$ quando a $=$ 2.Então substituindo:

$$2.4\sqrt[2]{6}\frac{\partial b}{\partial t} = 2.10.0 - 2.2.1$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{4}{8\sqrt[2]{6}} = -\frac{1}{2\sqrt[2]{6}}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1.\sqrt[2]{6}}{2\sqrt[2]{6}.\sqrt[2]{6}} = -\frac{\sqrt[2]{6}}{12}$$

A escada está escorregando para baixo a uma taxa de 0.20412414523.

6) Um tanque de combustível no formato cilíndrico com raio 1m está sendo enchido com gasolina a uma taxa de 3m3/min. Quão rápido estará aumentando o nível de altura da gasolina no periodo de meia hora?

O volume de um cilindro é obtido por : $V = \pi.r^2.h$

Para encontrarmos a variação da altura basta derivarmos a função acima, e como o raio é sempre constante antes podemos substituí-lo:

$$V = 10^2.\pi.h$$

$$V = 100\pi.h$$

Derivando obtemos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 100\pi.\frac{\partial h}{\partial t}$$

Como foi dados sabemos que $\frac{\partial V}{\partial t} = 3m^3/s$, então subsitituindo:

$$3 = 100\pi.\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{3}{100\pi}$$

Então concluimos que a altura está variando a uma taxa de 0.0942477796 cm.

7) Se uma bola de neve derrete de formato esférico fazendo que a área de sua superfície decresça a uma taxa de $3cm^2/min$, encontre a taxa segundo a qual o raio decresce quando o raio for de 1dm.

A área da esfera é calculada usando-se :

$A = 4\pi r^2$.

Para acharmos a taxa de variação em um determinado instante calculamos:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 4\pi.2r\frac{\partial r}{\partial t}$$

Como $\dfrac{\partial A}{\partial t} = 3cm^2/min$ e queremos saber quanto os raio estará variando quando ele for igual a 1dm então:

$$3 = 4\pi.2.10\frac{\partial r}{\partial t} =$$

$$3 = 80\pi\frac{\partial r}{\partial t} =$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{3}{80\pi}$$

O raio está variando a 0.11780972451 cm.

8) Um tanque no formato de cone invertido com raio da base de 2m e 10m de altura está sendo enchido com um líquido a uma taxa de $2cm^3/s$. Determine a taxa com que a altura do líquido no cone está aumentando no instante em que h for igual a 1cm.

Volume do cone : $V = \frac{\pi.r^2h}{3}$
Para determinar a variação basta derivar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\pi}{3}.(2r\frac{\partial r}{\partial t}.h + \frac{\partial h}{\partial t}.r^2)$$

Porém não é possível determinar $\dfrac{\partial r}{\partial t}$, portanto devemos reescrever r em função de h, usando semelhança de triângulos:

$$\frac{10}{h} = \frac{2}{r}$$

$$10r = 2h$$

$$r = \frac{2h}{10r} = \frac{h}{5}$$

Então:

$$V = \frac{\pi}{3}.(\frac{h}{5})^2.h$$

$$V = \frac{\pi}{3}.\frac{h^3}{25}$$

Derivando:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\pi}{75}.3h^2.\frac{\partial h}{\partial t}$$

Substituindo h = 1m e $\dfrac{\partial V}{\partial t} = 3cm^2/s$ ou $0.03m^2/s$:

$$0,03 = \frac{\pi}{75}.\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{3}{100}.\frac{75}{3\pi} = 0,75\pi$$

9) Quando uma amostra de gás está comprimida a uma temperatura que permanece constante,a pressão P e o volume V satisfazem a equação PV = k, sendo k uma constante. Determine a taxa que está aumentando o volume no instante em que o volume for de $1m^3$ e a pressão de 5kP a, sabendo que a pressão está diminuindo numa taxa de 2kP a/min.

Para obter a variação devemos derivar:

$$\frac{\partial V}{\partial t}.P + \frac{\partial P}{\partial t}.V = 0$$

Substituindo:

$$\frac{\partial V}{\partial t}.5 - 2.1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}.5 = 2 = \frac{2}{5}$$

Está crescendo a uma taxa de 0,4.

11) Um fazendeiro deseja cercar uma área de $1200m^2$ em um campo retangular e então dividi-lo em quatro partes iguais usando cercas paralelas a um dos lados do retângulo. Como ele pode fazer isto de forma que o custo com a cerca seja mínimo?
Temos que :

$A_{terreno} = x.y = 1200$

$C_{cerca} = 6x + 2y$

Então:

$$y = \frac{1200}{x}$$

Substituindo y :

$$C_{cerca} = 6x + 2\frac{1200}{x}$$

Derivando:

$$C'_{cerca} = 6 + \frac{2400}{x^2}$$

Descobrindo pontos críticos:

$$6 - \frac{2400}{x^2} = 0$$

$$-\frac{2400}{x^2} = -6$$

$$6x^2 = 2400$$

$$x = \sqrt[2]{400} = 20$$

Como o domínio é x > 0 a raiz -20 é descartadas.Agora usamos a segunda derivada para determinar sé ponto de minimo

$$C'_{cerca} = 12x$$

$$C''_{cerca}(20) = 12.20 = 240$$

Como $C''_{cerca}(20) > 0$, então 20 é ponto de mínimo. Descobrimos o y substituindo o x:

$$y = \frac{1200}{x}$$

$$y = \frac{1200}{20} = 60$$

Portanto as dimensões devem ser 20 e 60 metros.

12) Deseja-se construir um triângulo retângulo com a menor hipotenusa possível. Sabe-se que a soma da medida de um cateto com o dobro da medida do outro cateto é igual a 6.Determine as medidas dos catetos deste triângulo.

- Definindo as variáveis:
  a = cateto
  b = cateto
  h = hipotenusa
  Pelo teorema de pitágoras : $h^2 = a^2 + b^2$

  Pela relação dada: a + 2b = 6
  Então:

$$a = 6 - 2b$$

Substituindo:

$$h^2 = (6 - 2b)^2 + b^2$$

$$h = \sqrt[2]{(6 - 2b)^2 + b^2}$$

$$h = \sqrt[2]{5b^2 - 24b + 36}$$

Derivando

$$h' = \frac{10b - 24}{2\sqrt[2]{5b^2 - 24b + 36}} = \frac{5b - 12}{\sqrt[2]{5b^2 - 24b + 36}}$$

Achando pontos criticos:

$$\frac{5b - 12}{\sqrt[2]{5b^2 - 24b + 36}} = 0$$

$$\frac{5b}{\sqrt[2]{5b^2 - 24b + 36}} - \frac{12}{\sqrt[2]{5b^2 - 24b + 36}} = 0$$

$$\sqrt[2]{5b^2 - 24b + 36}\frac{5b}{\sqrt[2]{5b^2 - 24b + 36}} = \frac{12}{\sqrt[2]{5b^2 - 24b + 36}}\sqrt[2]{5b^2 - 24b + 36}$$

$$b = \frac{12}{5} = 2,4$$

Substituindo b :

$$a = 6 - 2\frac{12}{5} = 6 - 24/5 = 6 - 4,8 = 1,2$$

Os catetos medem respectivamente 1,2 e 2,4 unidades de medida.

13) Um cilindro circular reto está inscrito em uma esfera de raio 2m. Encontre o maior volume possível de um tal cilindro.

Volume do cilindro: $V = A_{base}.h = \pi.r^2.h$
Se obtivermos um plano resultante do corte de uma seção de sólido podemos perceber a seguinte relação:

$$r^2_{circunferencia} = r^2_{cilindro} + (\frac{h}{2})^2$$

Então escrevendo $r_{cilindro}$ em função de h e substituindo $r_{circunferencia}$temos =

$$r^2_{cilindro} = 4 - (\frac{h^2}{4})$$

Subsituindo na fórmula do volume :

$$V = \pi.h(4 - \frac{h^2}{4}) = 4\pi.h - \frac{\pi.h^3}{4}$$

Podemos observar acima que $h \ni [0, 4]$.
Derivando obtemos:

$$V' = 4\pi - \frac{3\pi.h^2}{4}$$

Achando pontos cricos da função:

$$4\pi - \frac{3\pi.h^2}{4} = 0$$

$$4\pi = \frac{3\pi.h^2}{4}$$

$$4 = \frac{3h^2}{4}$$

$$h = \sqrt[2]{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt[2]{3}} =$$

Calculando segunda derivada:

$$V'' = 4\pi - \frac{3\pi.h^2}{4}$$

$$V'' = -\frac{3}{4}.\pi.2h$$

Subsituindo o ponto critico na segunda derivada percebemos que $V''(\frac{4}{\sqrt[2]{3}}) < 0$ portanto é um ponto de máximo.

Substuindo h no volume obtemos o maior volume possivel que é igual a :

$$V = \pi.\frac{4}{\sqrt[2]{3}}(4 - \frac{\frac{4}{\sqrt[2]{3}}^2}{4}) = \frac{32\pi}{3\sqrt[2]{3}}$$

14) Um engenheiro dispóe de 220m de cerca e deseja cercar um campo retangular nas margens de um rio reto, sem cercar ao longo do rio. Quais as dimensões do campo que tem maior área usando toda cerca disponível?

15) Um empresário deseja produzir caixas de papelão de forma que cada caixa tenha $400cm^2$ de área de superfície. Ele quer que a base seja quadrada, não tenha tampa e que tenha o maior volume possível. Quais as dimensões que ele deve utilizar?

    Temos que :

$$V = x^2.y$$

    E:

$$400 = 4xy + x^2$$

16) Deseja-se construir uma circunferência e um quadrado dispondo de 12m de linha e dividindo-a em duas partes A e B, uma para o quadrado e outra para a circunferência. Determine os valores de A e B de modo que a soma das áreas destas figura seja máxima.