Daniel Gunna Santana da Silva Souza - 510348

Trabalho I - Cálculo II
Professor: Luiz Otávio
Pontíficia Universidade Católica de Minas Gerais

1)

a) F

b) F

d) V

e) V

f) F

g) F

h) V

i) F

j) F

k) F

l) V

m) V

n) F

o) F

n) V

2) Uma moto e um carro iniciam um movimento retilínio a partir de um mesmo ponto. A moto vai para o sul numa velocidade constante de 50km/h e o carro, para o leste a 40km/h.Qual a taxa com que está crescendo a distância entre ambos uma hora depois do início do movimento?

- Definindo as variáveis:
  a = distância percorrida pela moto.
  b = distância percorrida pelo carro.
  D = distância entre carro e moto.

  Solução:
  A distância entre o carro e a moto pode ser encontrada usando-se:

$$D^2 = a^2 + b^2$$

  Para encontrar a taxa com que a distância entre ambos está crescendo basta derivar em função do tempo :

$$2D\frac{\partial D}{\partial t} = 2a\frac{\partial a}{\partial t} + 2b\frac{\partial b}{\partial t}$$

Como já foi dado, sabemos que $\dfrac{\partial a}{\partial t} = 50\text{Km/h}$ e $\dfrac{\partial b}{\partial t} = 40\text{Km/h}$ (1).

Podemos também determinar a distância entre ambos depois de uma hora:
Carro = 40Km/h x 1h = 40 - a = 40
Moto = 50Km/h x 1h = 50 - b = 50 (2)
$D^2 = 40^2 + 50^2 =$
$D = \sqrt[2]{4100} = 10.\sqrt[2]{41}$

Substuindo (1) e (2) na derivada temos:

$$2.10.\sqrt[2]{41}.\frac{\partial D}{\partial t} = 2.40.40 + 2.50.50$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{8200}{20.\sqrt[2]{41}} =$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{410}{\sqrt[2]{41}} =$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{410.\sqrt[2]{41}}{\sqrt[2]{41}.\sqrt[2]{41}} =$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{410.\sqrt[2]{41}}{41} = 10.\sqrt[2]{41}$$

Assim, a distância está variando a 64,031 Km/h.

3) Um carro passa com uma velocidade constante de 40km/h por um ponto A, seguindo um movimento retilnio para o norte. Ao mesmo tempo, uma moto passa por um ponto B, localizado 10km à direita de A, com uma velocidade constante de 50km/h, seguindo um movimento retilınio para o sul. Determine a taxa com que a distância entre eles varia exatamente uma hora depois.

- Definindo as variáveis:
  a = distância percorrida pela moto.
  b = distância percorrida pelo carro.
  D = distância entre carro e moto. Podemos obter uma relação da distância entre o carro e a moto uma hora depois em um triângulo retângulo de catetos 10 Km e (a+b)Km:

$$D^2 = 10^2 + (a+b)^2$$

As distâncias percorridas após uma hora serão de 40Km para o carro e 50Km para a moto.A distância entre eles será :

$$D^2 = 10^2 + (40+50)^2$$

$$D^2 = 100 + 8100$$

$$D = \sqrt[2]{8200} = 10.\sqrt[2]{82}$$

Para encontra a variação da distância basta derivar a relação:

$$2D\frac{\partial D}{\partial t} = 2(a+b)(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial t})$$

Substituindo $\dfrac{\partial b}{\partial t} = 40$ e $\dfrac{\partial a}{\partial t}$ =50 e as distâncias uma hora depois:

$$2.10.\sqrt[2]{82}.\frac{\partial D}{\partial t} = 2(50+40)(50+40)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{16200}{20.\sqrt[2]{82}} = \frac{810}{\sqrt[2]{82}} = \frac{810\sqrt[2]{82}}{82}$$

Assim a distância esta variando a uma velocidade de 89,44 Km/h.

4) Um tanque de combustível no formato cilíndrico com raio 5m, cuja base circular se encontra no solo, está sendo enchido com diesel a uma taxa de $6m^3$/min. Quão rápido estará aumentando o nível de altura da gasolina:
a) Quando estiver com 30% da sua capacidade completa.
b) Quando estiver com 70% da sua capacidade completa.

O volume de um cilindro regular pode ser obtido através de :

$$V = \pi.r^2.h$$

Derivamos para obtermos a variação :

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \pi(\frac{\partial h}{\partial t}.r + \frac{\partial r}{\partial t}.h)$$

Substituimos então a variação de V = 6 e a de r = 0 e valor de contante de r:

$$6 = \pi(\frac{\partial h}{\partial t}.5 + 0.h)$$

$$6 = \pi(\frac{\partial h}{\partial t}.5 + 0.h)$$

$$6 = \pi\frac{\partial h}{\partial t}.5$$

$$\frac{6}{5\pi} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

Em ambos os casos a altura está variando a $\frac{6}{5\pi}m^3$/min.

5) Uma escada com 9 metros de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 3m/s , quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede, quando a base da escada estiver a:
a) 1 metro da parede?
b) 2 metros da parede?

- Definindo as variáveis:
a = distância do pé da escada até a parede.(2m e 1m)
b = altura da parede.(?)
h = tamanho da escada(9m)

Primeiro precisamos determinar a altura b da parede quando a distância a do pé da escada é igual a 2, podemos encontra-la fazendo:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$9^2 = 2^2 + b^2$$

$$b^2 = 81 - 4 = \sqrt[2]{77}$$

Também pra quando é igual a um metro:

$$b^2 = 81 - 1 = \sqrt[2]{80}$$

Também temos que:

$$b^2 = h^2 - a^2$$

E derivando obtemos a variação de b:

$$2b\frac{\partial b}{\partial t} = 2h\frac{\partial h}{\partial t} - 2a\frac{\partial a}{\partial t}$$

Sabemos que $\dfrac{\partial a}{\partial t} = 3$m/s e que o tamanho da escada não muda portanto $\dfrac{\partial h}{\partial t} = 0$ e que e b = $\sqrt[2]{80}$ quando a = 1.Então substituindo:

$$2\sqrt[2]{80}\frac{\partial b}{\partial t} = 2.9.0 - 2.1.3$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{6}{2\sqrt[2]{80}} = -\frac{3}{\sqrt[2]{80}} = -\frac{3.\sqrt[2]{80}}{2\sqrt[2]{80}.\sqrt[2]{80}} = -\frac{3\sqrt[2]{80}}{80}$$

Para a = 2 e b = $\sqrt[2]{77}$:

$$2\sqrt[2]{77}\frac{\partial b}{\partial t} = 2.9.0 - 2.2.3$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{12}{2\sqrt[2]{77}} = -\frac{6}{\sqrt[2]{77}} = -\frac{6.\sqrt[2]{77}}{2\sqrt[2]{77}.\sqrt[2]{77}} = -\frac{6\sqrt[2]{77}}{77}$$

A variação será de a)0,335410197 m/s e b)0,683763459 m/s

6) Um tanque no formato de cone invertido com raio da base de 2m e 12m de altura está sendo enchido com um água numa taxa de $3m^3$/s. Determine a taxa com que a altura do líquido no cone está aumentando no instante em que h for igual a 4m.
Volume do cone : $V = \frac{\pi.r^2h}{3}$

Para determinar a variação basta derivar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\pi}{3}.(2r\frac{\partial r}{\partial t}.h + \frac{\partial h}{\partial t}.r^2)$$

Porém não é possível determinar $\dfrac{\partial r}{\partial t}$, portanto devemos reescrever r em função de h, usando semelhança de triângulos:

$$\frac{12}{h} = \frac{2}{r}$$

$$12r = 2h$$
$$r = \frac{2h}{12} = \frac{h}{6}$$

Então:

$$V = \frac{\pi}{3}.(\frac{h}{6})^2.h$$
$$V = \frac{\pi}{3}.\frac{h^3}{36}$$

Derivando:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\pi}{108}.3h^2.\frac{\partial h}{\partial t}$$

Substituindo h = 4m e $\frac{\partial V}{\partial t} = 3cm^3/s$ ou $0.03m^3/s$:

$$0,03 = \frac{\pi}{108}.\frac{\partial h}{\partial t}.16$$
$$16\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{3}{108}.\frac{108}{3\pi}/16,$$