Confiabilidade

Projeto de Estatística, Problema 1

Grupo 16

21/10/2022

Integrantes

Bernardo Maia Coelho

Daniel Henrique Lelis Almeida

Danilo Alves

Miguel Reis de Araújo

O Problema

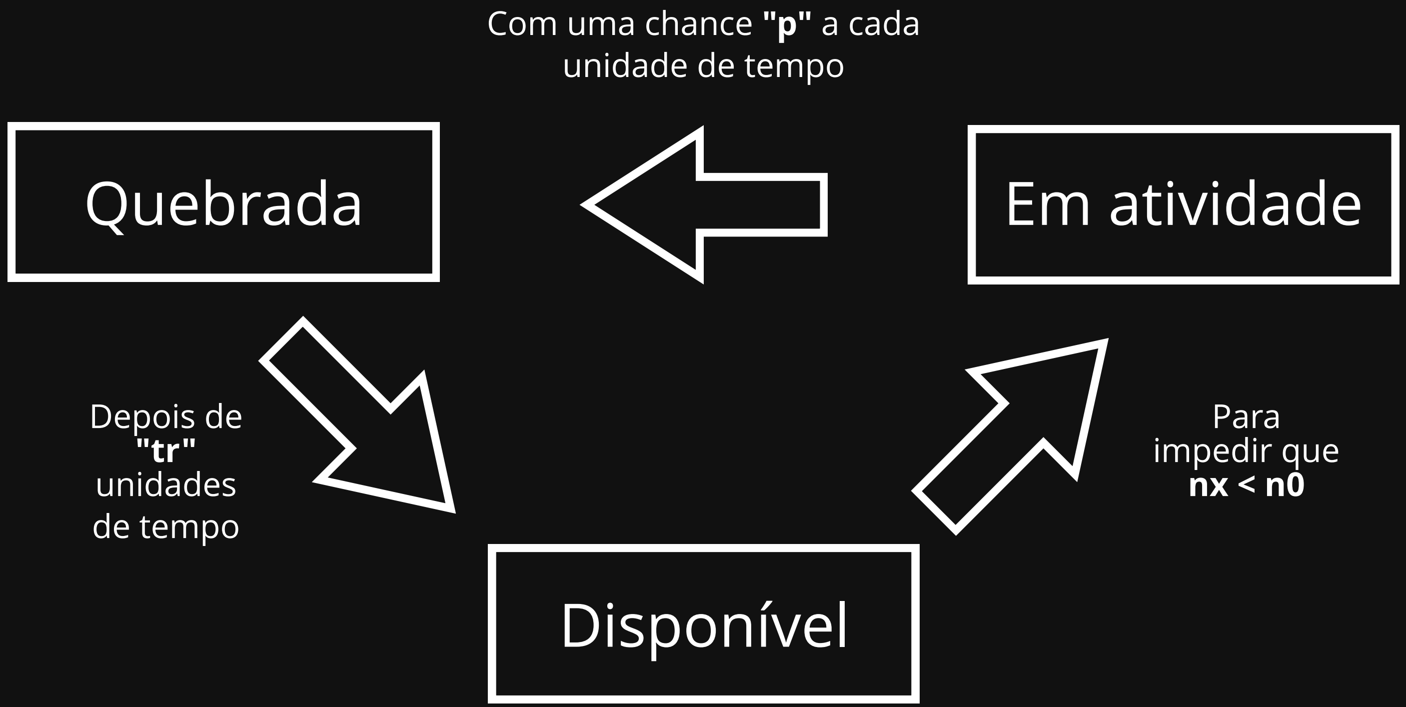
Para uma fábrica funcionar bem, ela precisa ter **“n”** máquinas disponíveis. Caso contrário, a linha de produção entra em colapso.

A cada minuto, toda máquina tem uma chance **“p”** de quebrar.

Por segurança, a fábrica tem **“s”** máquinas reservas que entram em funcionamento imediatamente quando uma máquina em funcionamento quebra.

Por fim, a oficina dessa fábrica demora **“tr”** unidades de tempo para consertar cada máquina.

Estados de Uma Máquina



Pontos de Interesse

- Variável aleatória ***T*** (tempo de colapso)
- Valor esperado de ***T***
- Qual a distribuição de ***T***
- Como depende ***T*** em relação a ***s***
- Quantas máquinas adicionais são necessárias para que **P(T > 10000) < 1%**?

TÓPICOS 1 & 2

Podemos responder essas perguntas de maneira analítica?

O Modelo

Simplificações Necessárias

$$t_R \to \infty$$

$$\beta = 0$$

$\Rightarrow$

Quantos testes serão necessários para obter um número fixo de sucessos?

Binomial Negativa

Binomial Negativa

(**k** falhas, **s** "sucessos")

$$P_1(k; r, p) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k$$

Binomial Negativa

(considerando os *s* primeiros testes, ou seja **t** testes)

$$P_2(k; r, p) = P_1(k-r; r, p) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

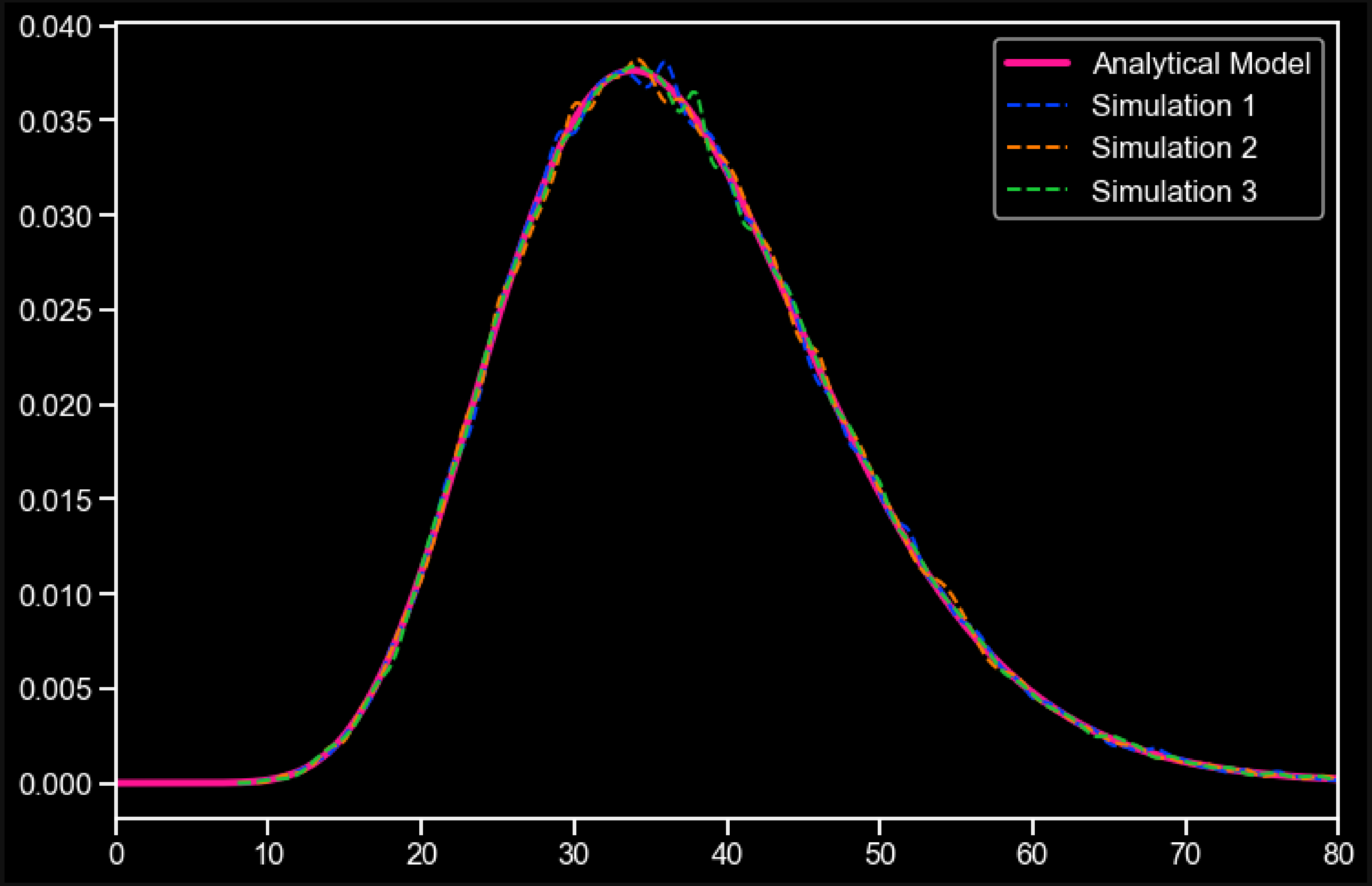
Binomial Negativa

(com **n** testes por ciclo, com desvio do **s**)

$$P_3(t; n, s, p) = \sum_{i=1}^{n} P_2(\underbrace{n \cdot (t-1)}_{\text{offset}} + \underbrace{i}_{\substack{\text{i-ésimo teste}\\ \text{do dia}}}; s+1, p)$$

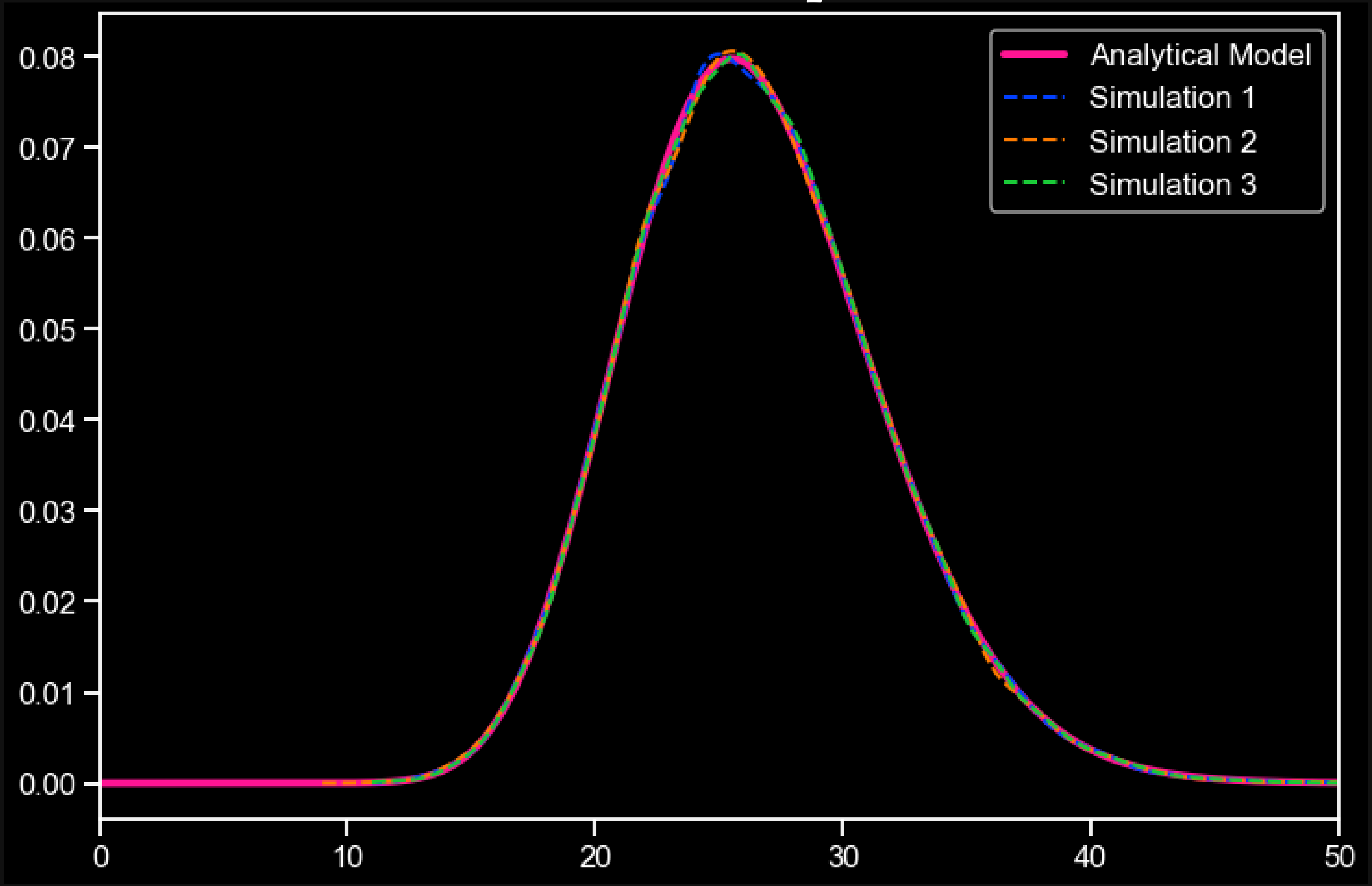
Primeiro Cenário

$$n = 50 \quad s = 10 \quad p = 0.006$$

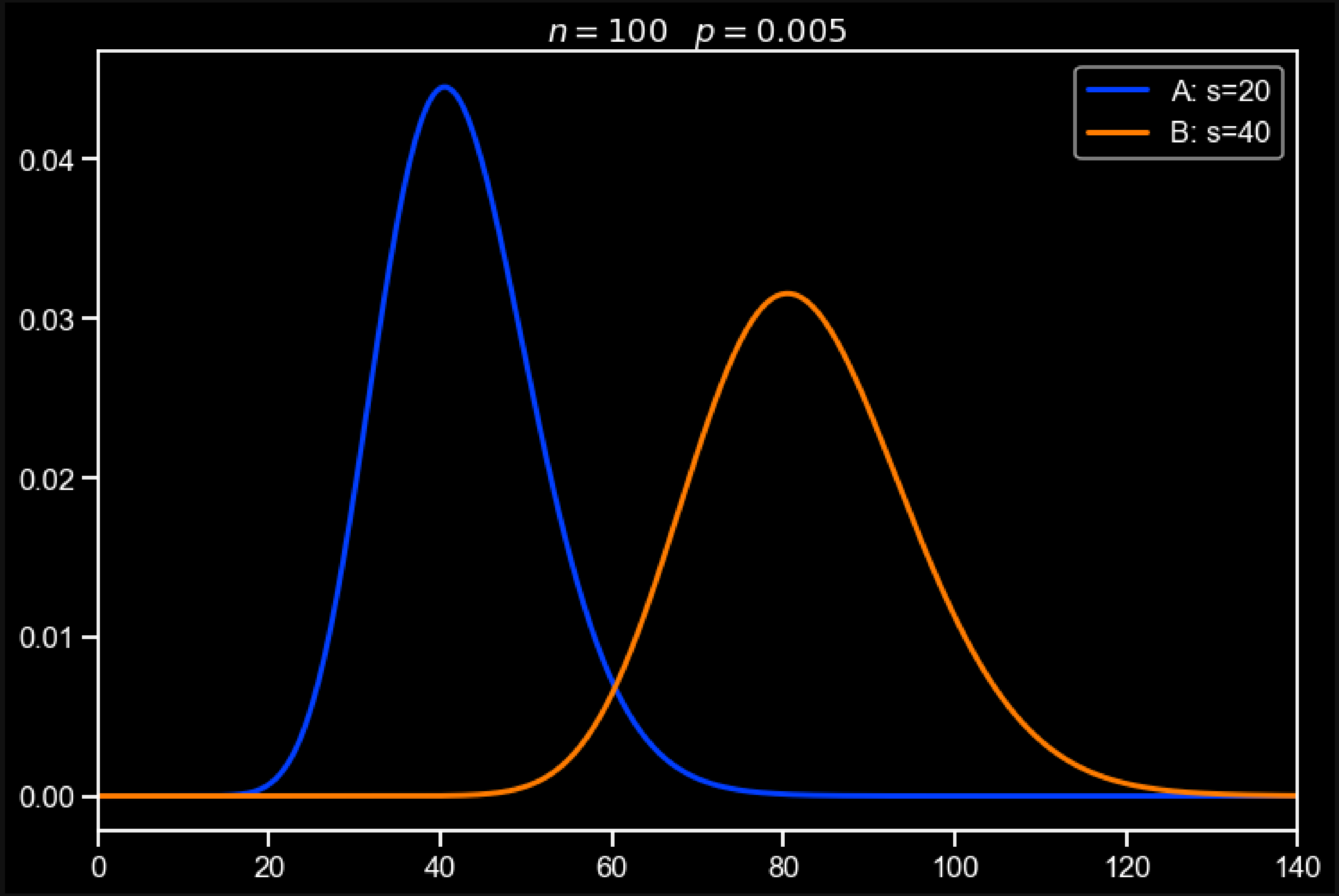


Segundo Cenário

$$n = 100 \;\; s = 25 \;\; p = 0.01$$



A influência de S



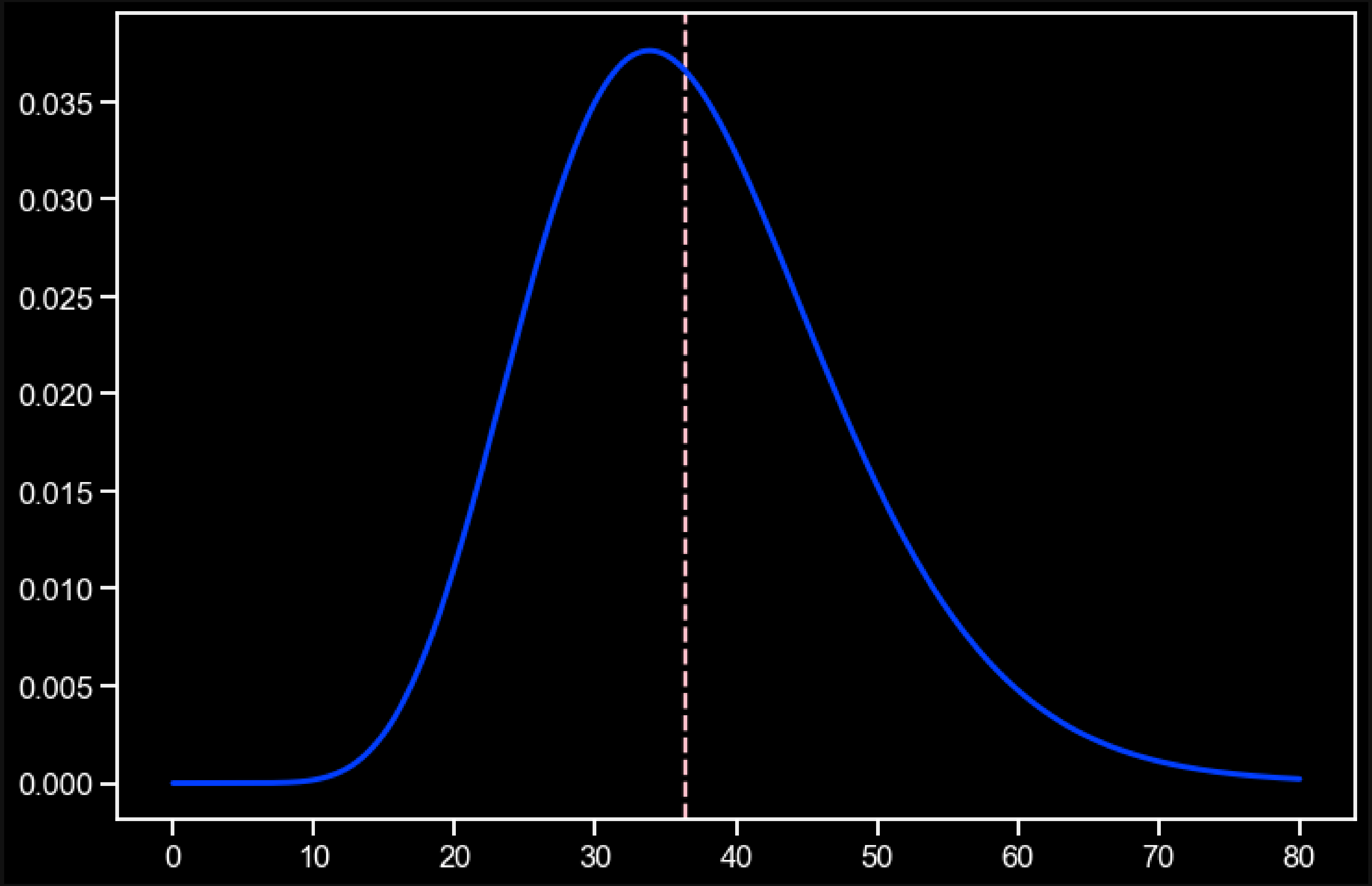
Valor Esperado

$$E = \frac{(s_0+1)(1-p)}{p} \cdot \frac{1}{n}$$

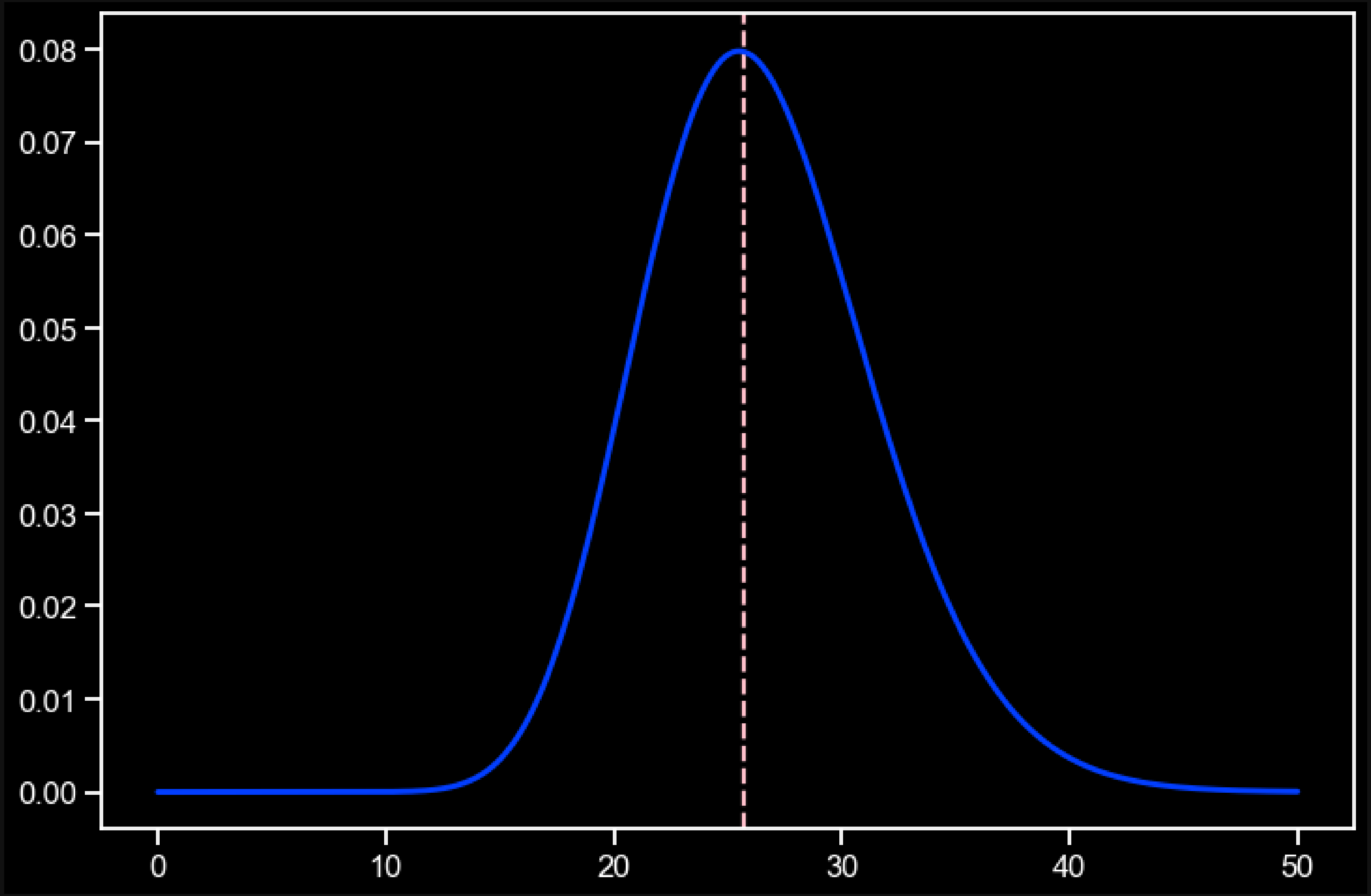
Cenário 1: **36.45**

Cenário 2: **25.74**

Primeiro Cenário



Segundo Cenário



P(T < 10000)

$$CDF:\ I_{1-p}(s_0+1, k+1)$$

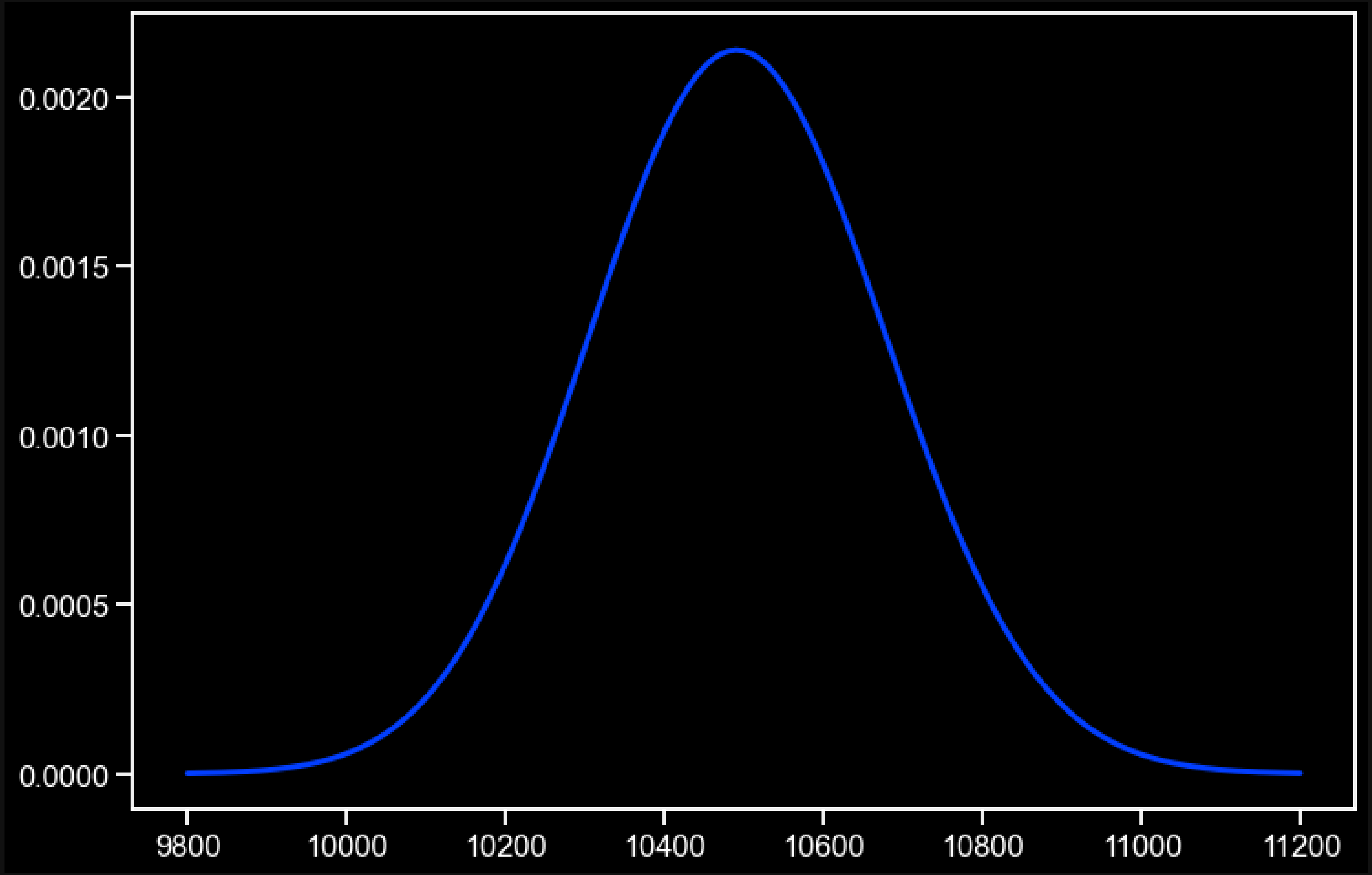
$I_x(a,b) \Rightarrow$ função beta incompleta regularizada

Realizando a busca com $k = 10000 \cdot n$

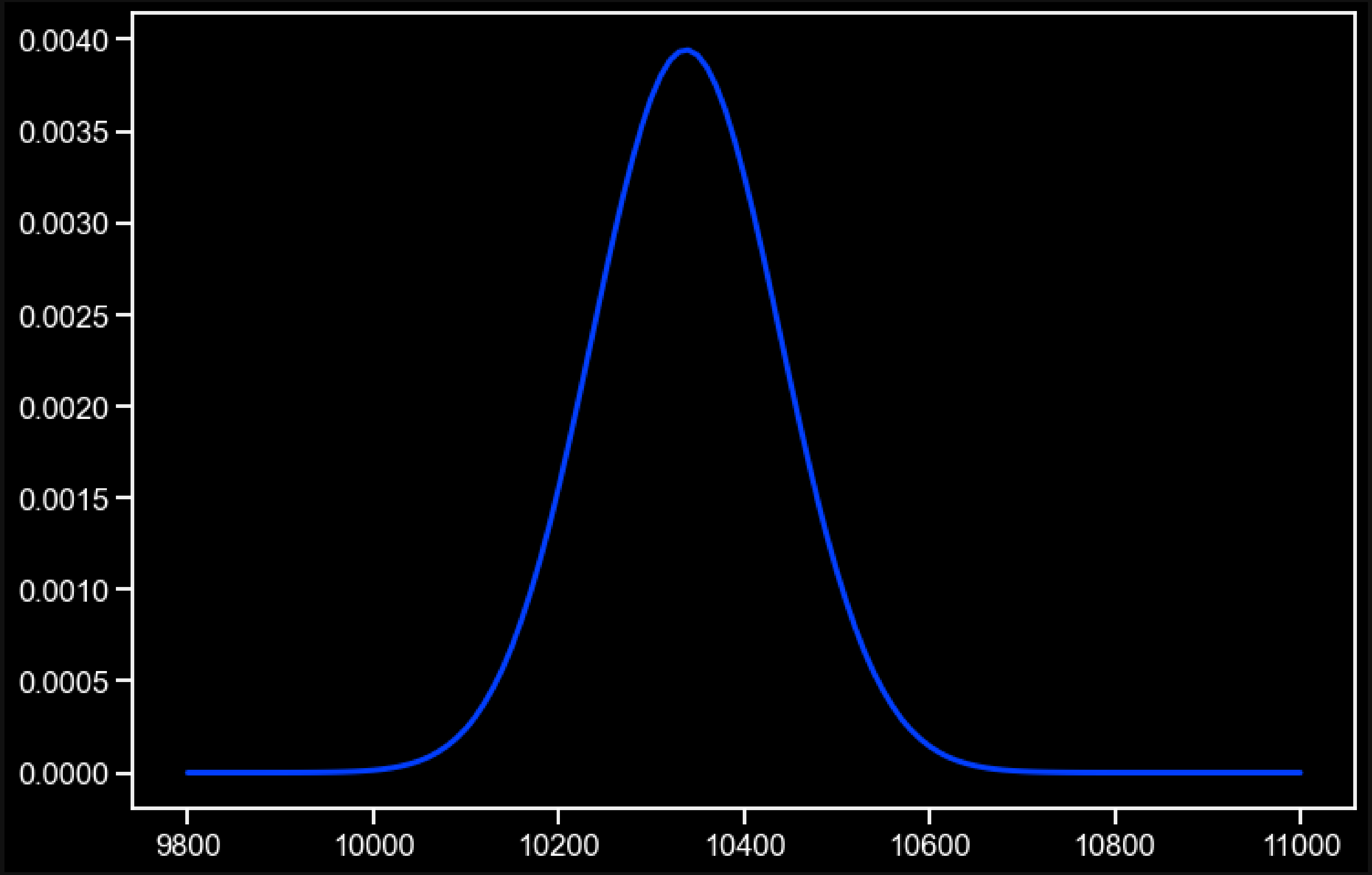
Cenário 1: **3147**

Cenário 2: **10337**

Primeiro Cenário



Segundo Cenário



TÓPICO 3

O dono da fábrica instalou um alarme que deve ser disparado quando o número de máquinas sendo reparadas (quebradas) atingir 80% do número **“s”** de máquinas disponíveis.

Seja **Z** a variável tempo de alerta: o tempo até que o alerta seja disparado.

Como é a distribuição de probabilidade de **Z**?

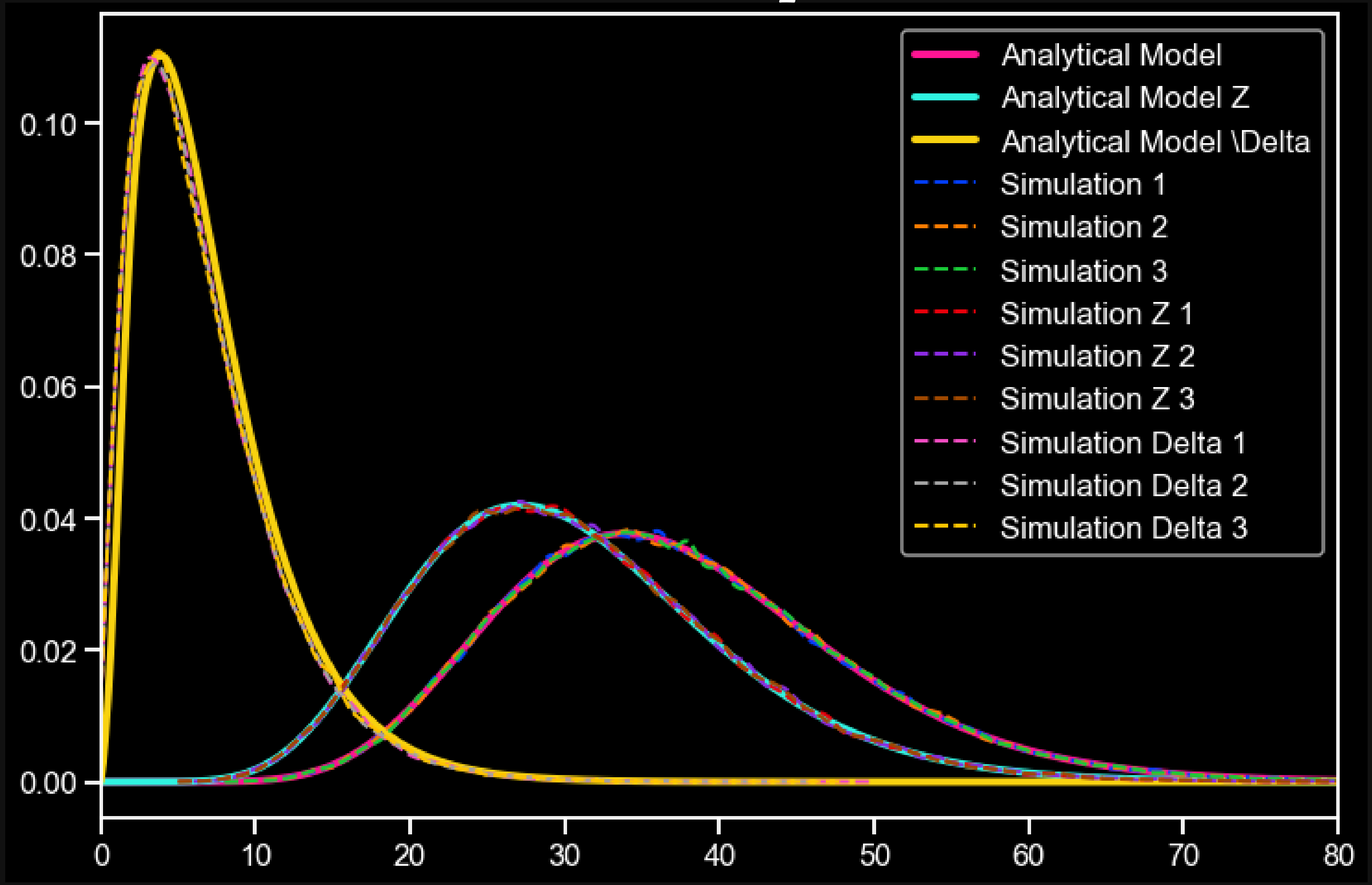
TÓPICO 3

A variável aleatória **Z** seguirá o mesmo modelo de **T**, só que com **s** sendo 80% do valor inicial (arredondado para cima).

Além disso, a distribuição do tempo restante (chamaremos de delta) até o estado crítico, seguirá 20% de **s**, arredondado para baixo.

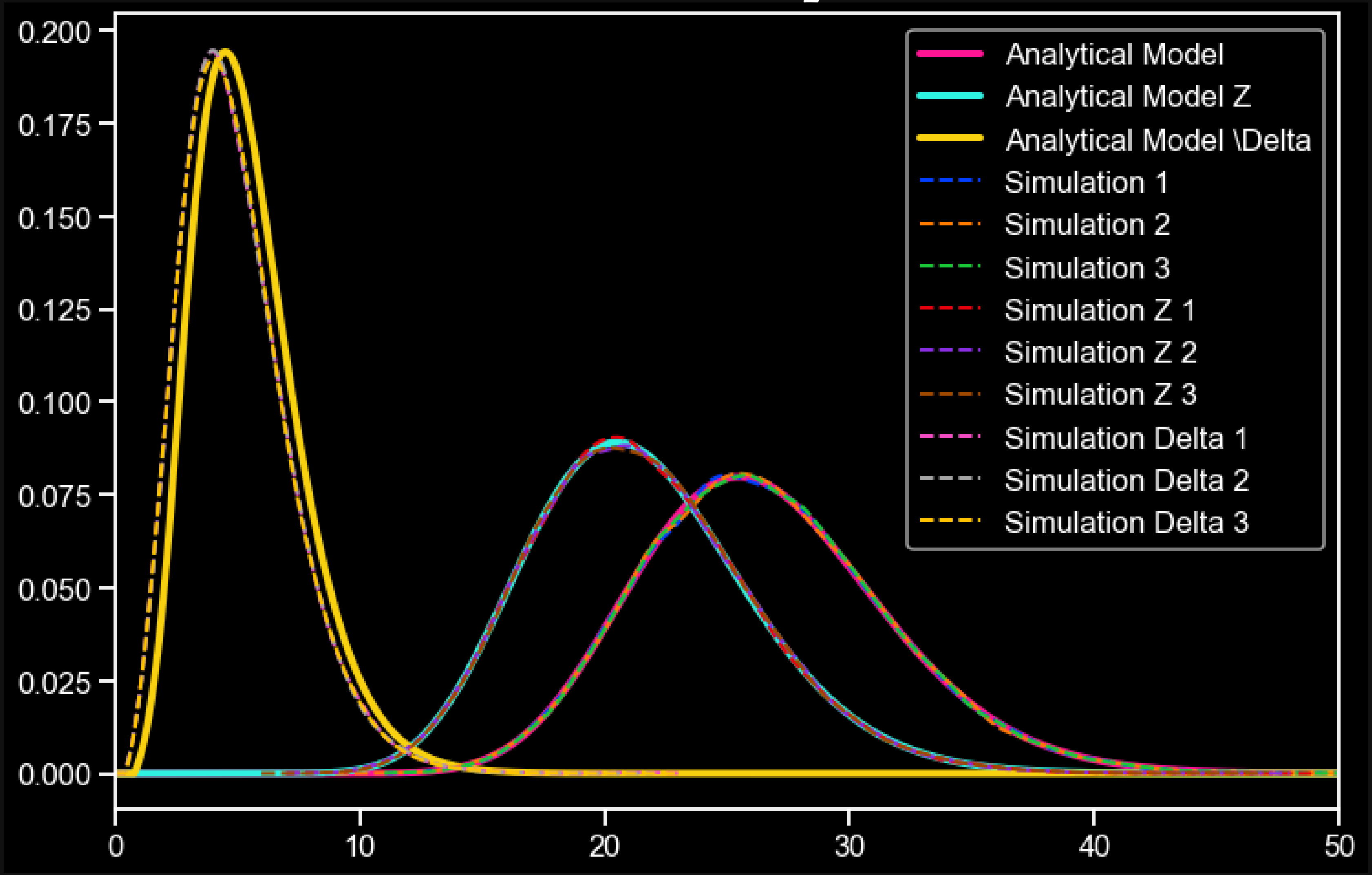
Primeiro Cenário

$$n = 50 \quad s = 10 \quad p = 0.006$$



Segundo Cenário

$$n = 100 \quad s = 25 \quad p = 0.01$$



TÓPICO 4

- **T** e **Z** são variáveis independentes? **Não.**

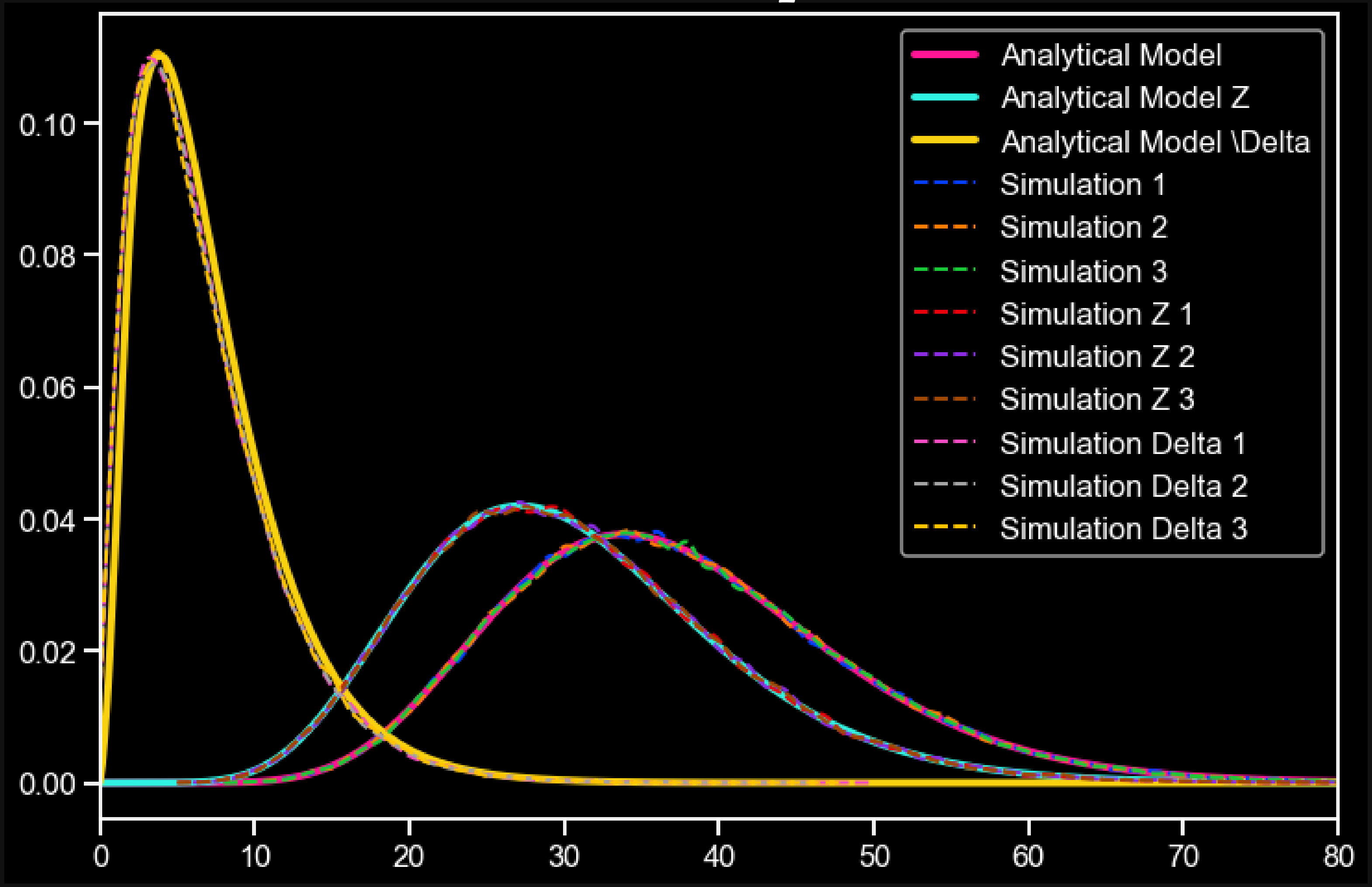
Covariância = **26.792** para $n = 100$, $s = 25$, $p = 0.01$

Covariância = **99.336** para $n = 50$, $s = 10$, $p = 0.006$

Podemos observar essa dependência por meio do modelo de delta nos gráficos anteriores.

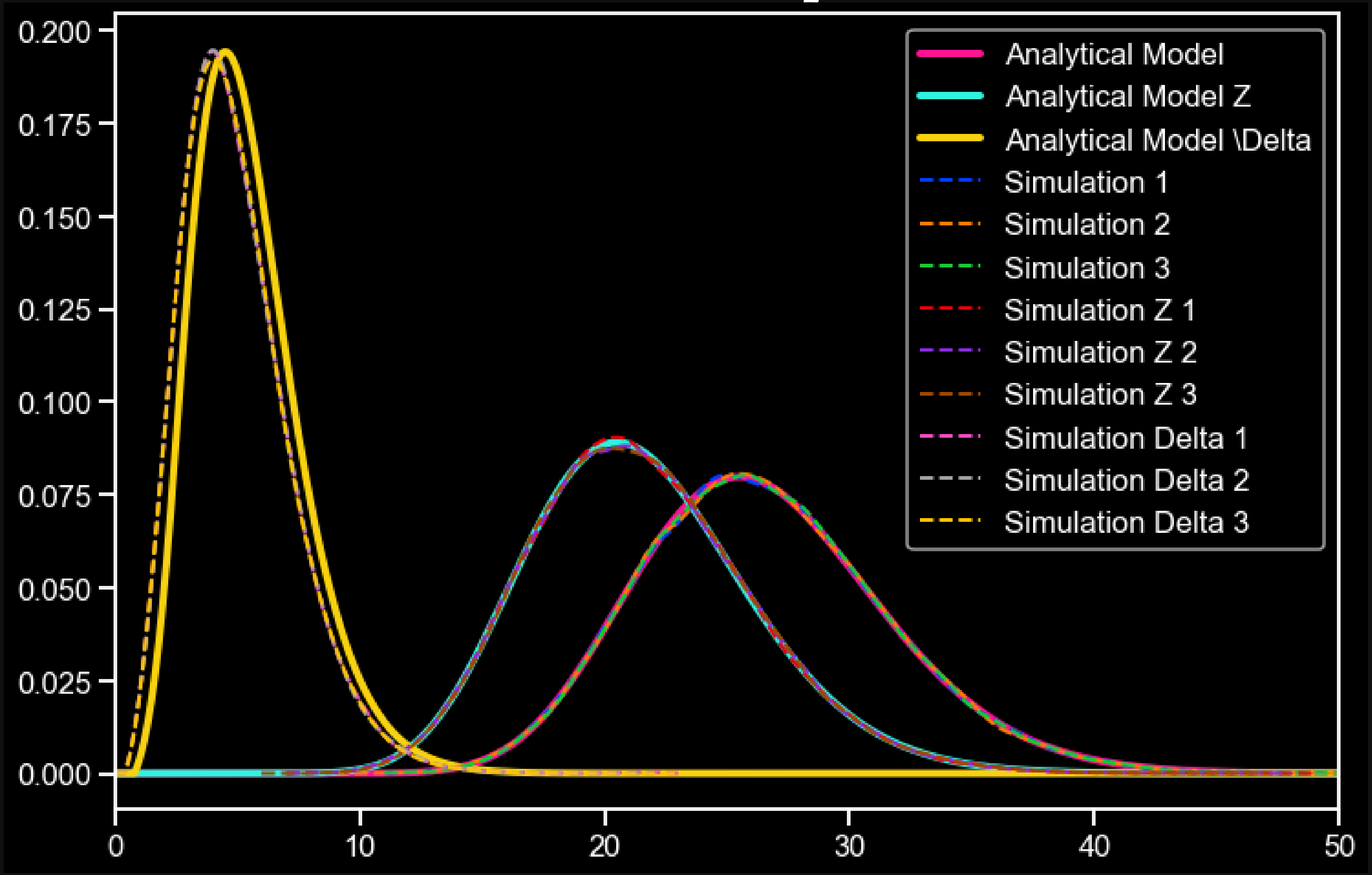
Primeiro Cenário

$$n = 50 \quad s = 10 \quad p = 0.006$$



Segundo Cenário

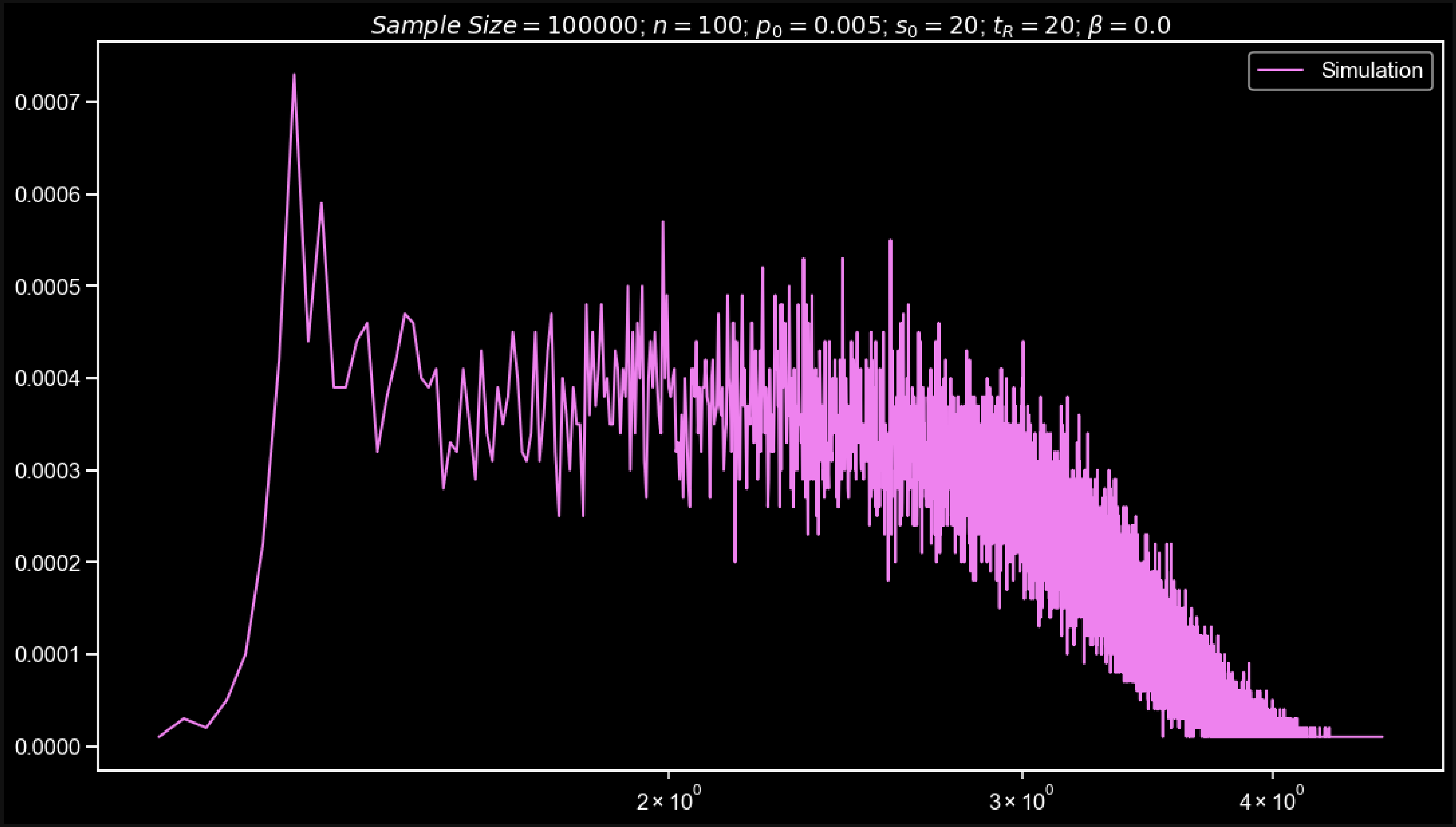
$$n = 100 \quad s = 25 \quad p = 0.01$$



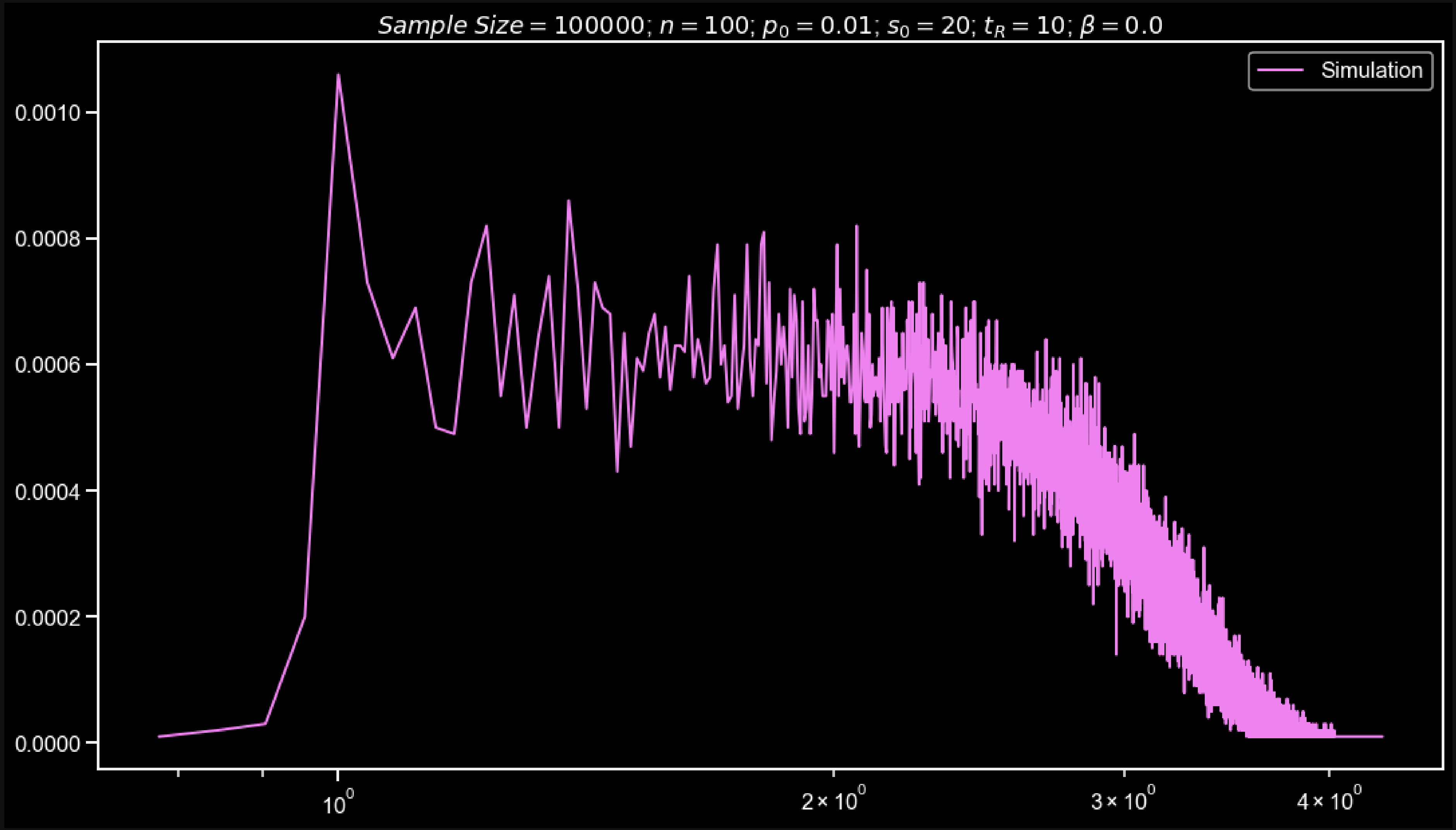
Tópico 5

Simulações

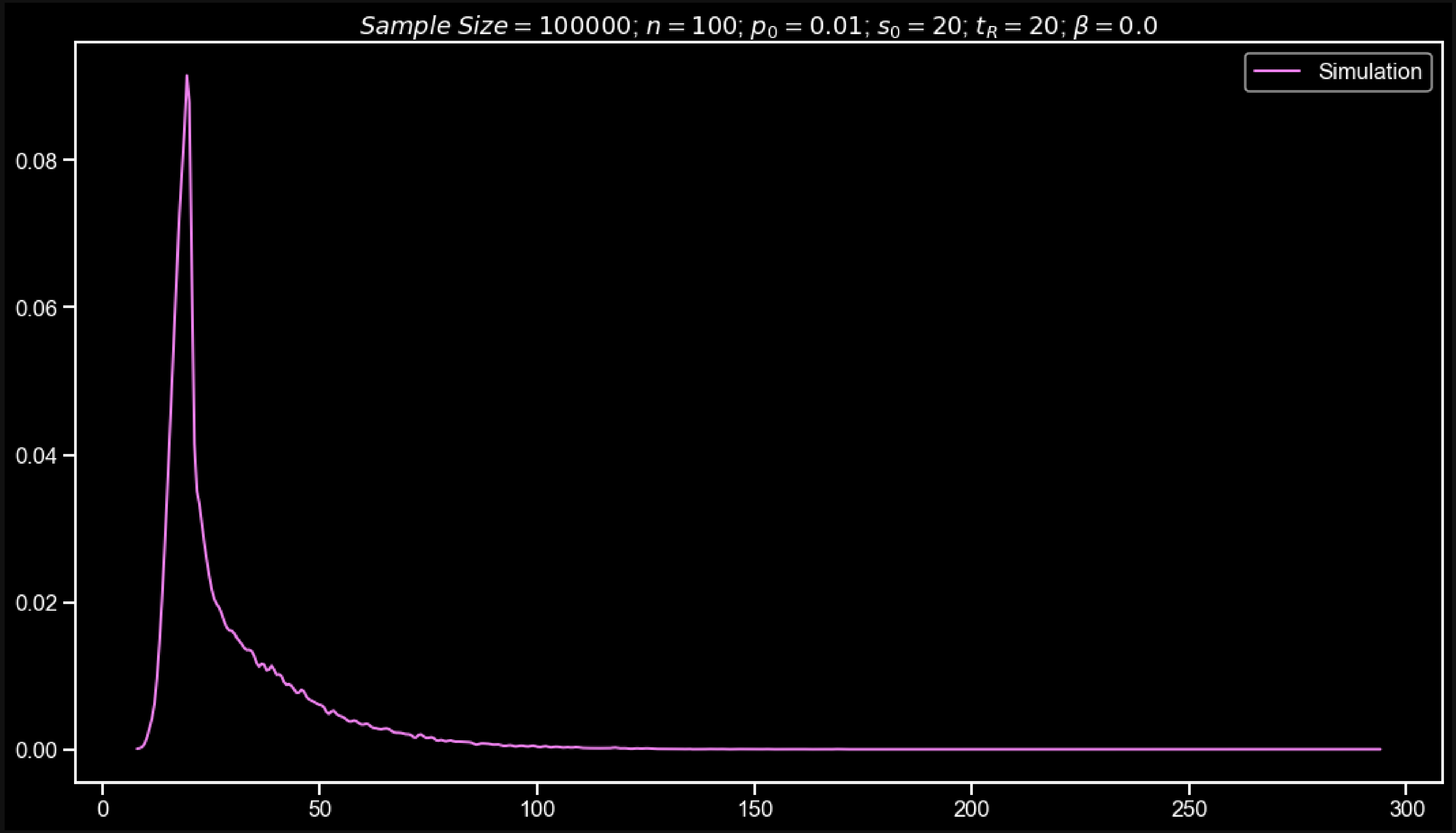
$$t_R \neq 0$$



$Sample\ Size = 100000;\ n = 100;\ p_0 = 0.005;\ s_0 = 20;\ t_R = 20;\ \beta = 0.0$
Simulation
0.0007
0.0006
0.0005
0.0004
0.0003
0.0002
0.0001
0.0000
2×10^0
3×10^0
4×10^0

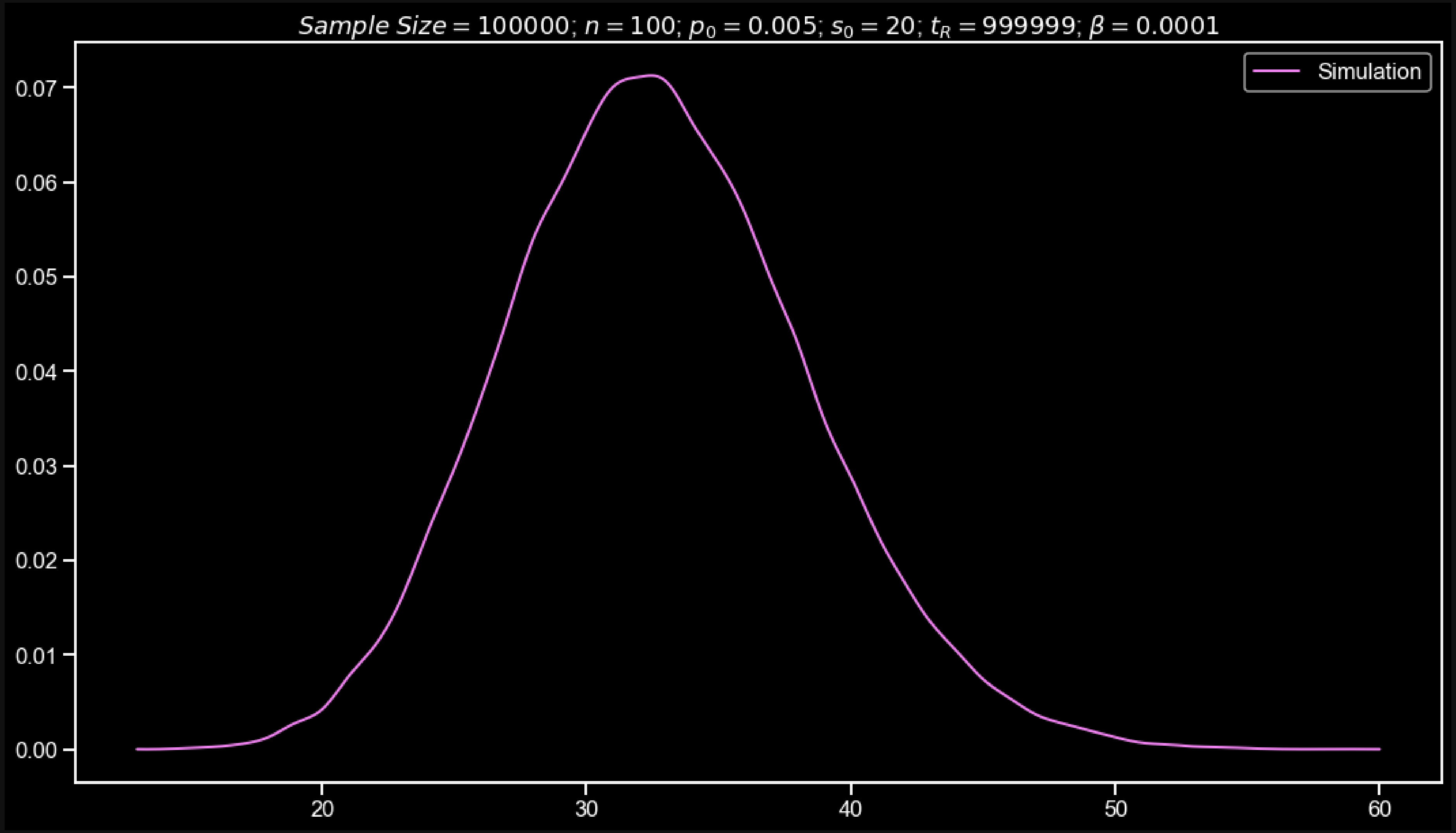


$Sample\ Size = 100000;\ n = 100;\ p_0 = 0.01;\ s_0 = 20;\ t_R = 10;\ \beta = 0.0$
Simulation
0.0010
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0.0000
10^0
2×10^0
3×10^0
4×10^0

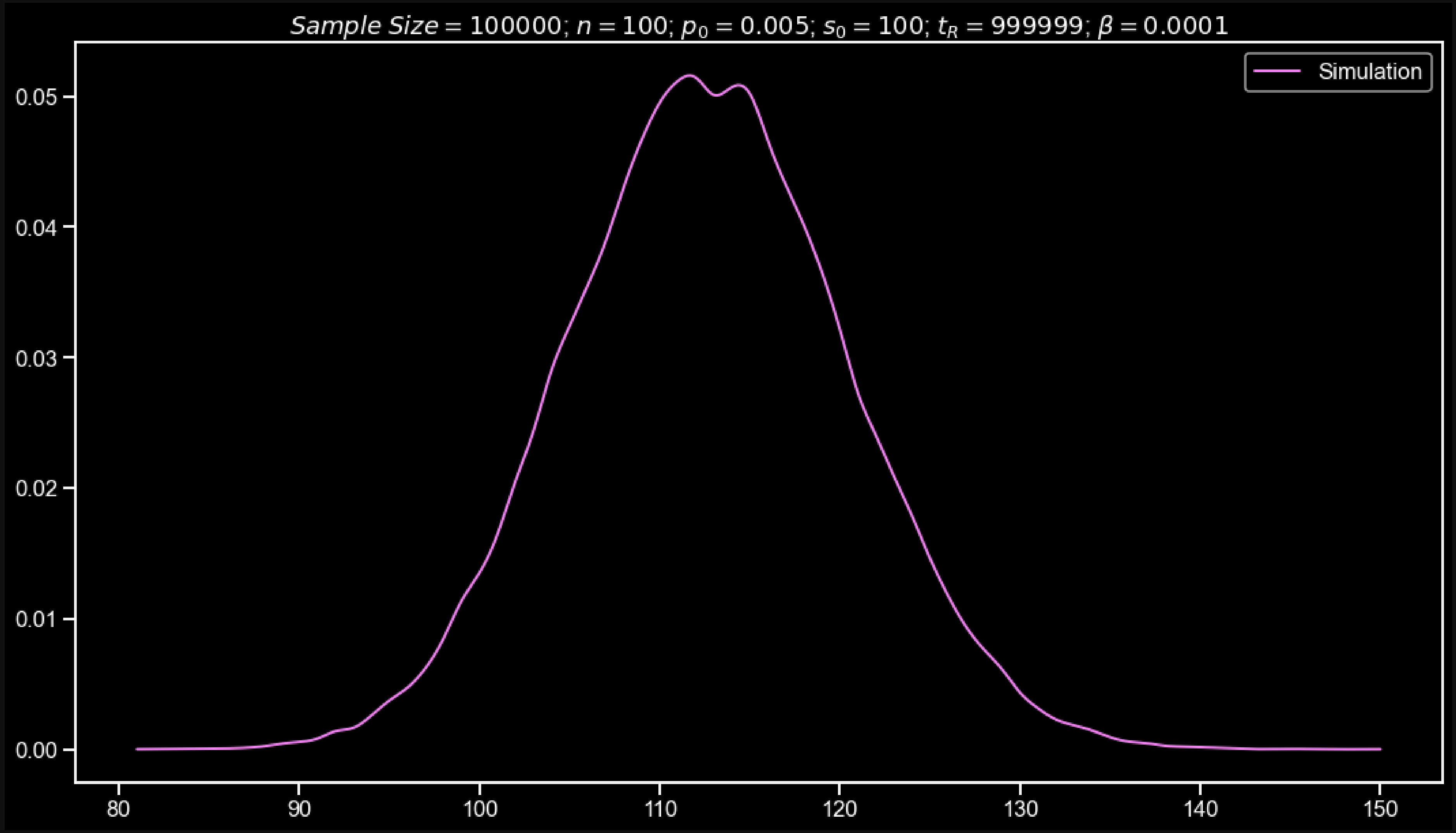


$Sample\ Size = 100000;\ n = 100;\ p_0 = 0.01;\ s_0 = 20;\ t_R = 20;\ \beta = 0.0$
Simulation
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0
50
100
150
200
250
300

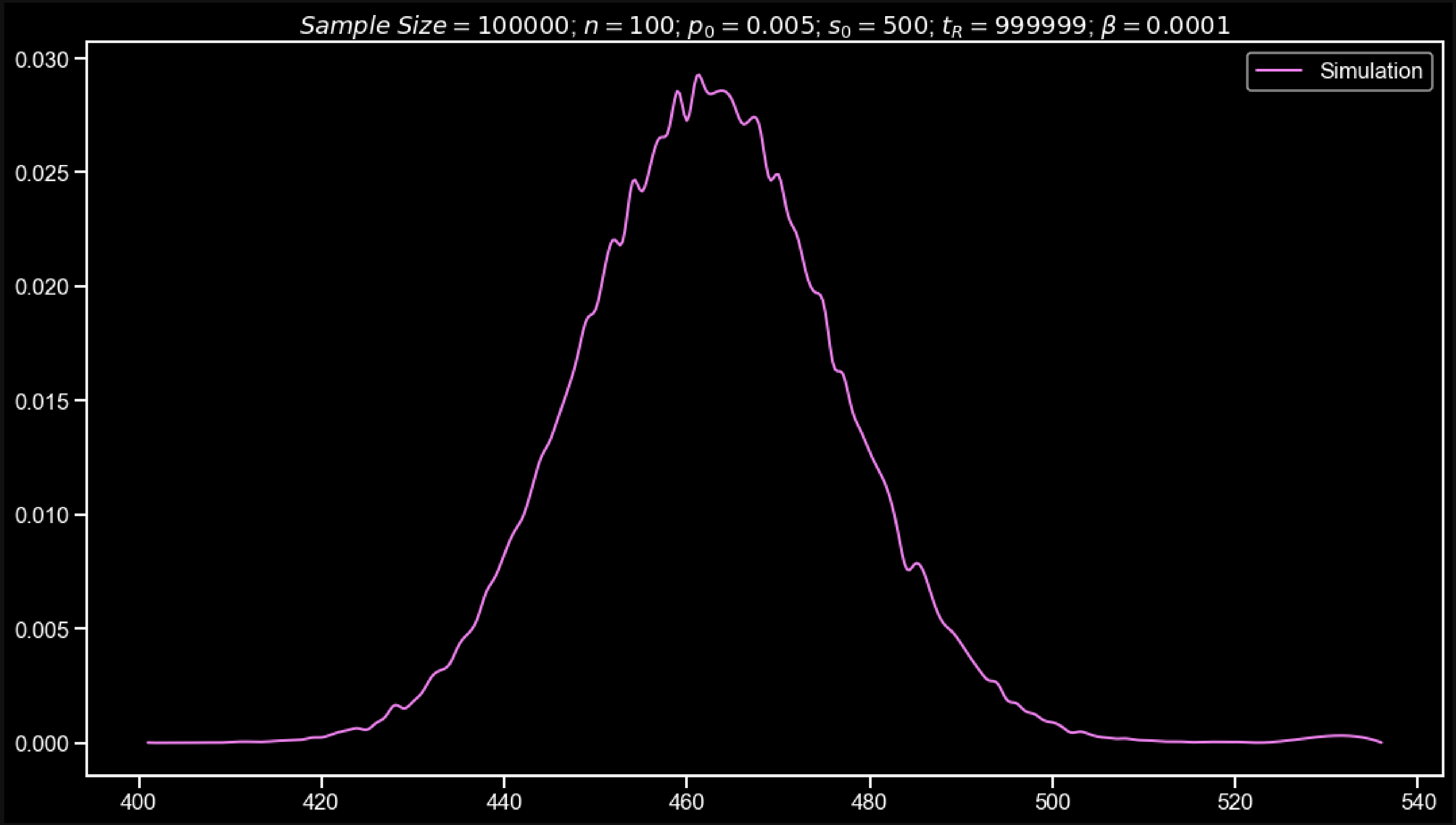
$$\beta \neq \mathbf{0}$$

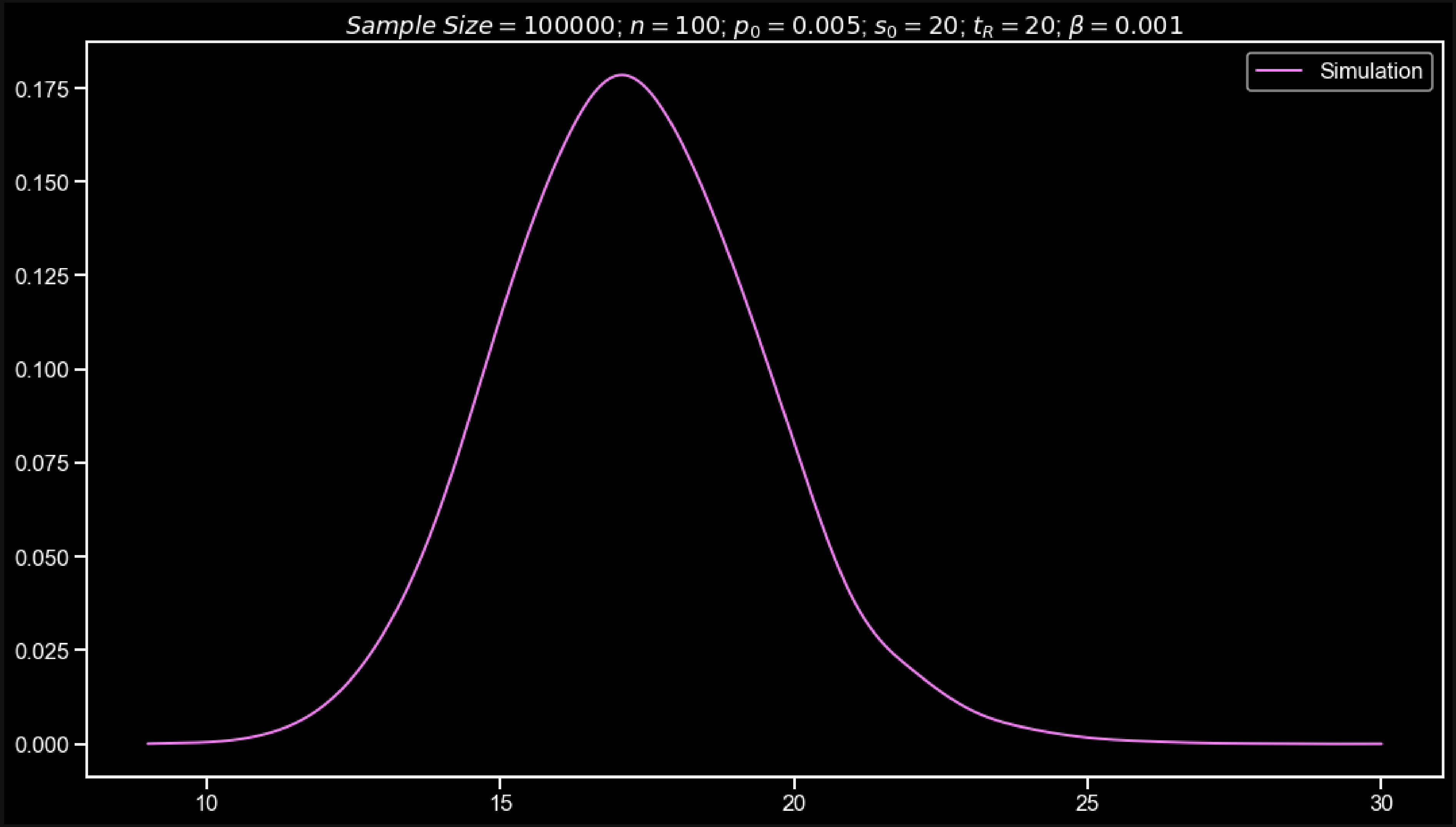


$Sample\ Size = 100000;\ n = 100;\ p_0 = 0.005;\ s_0 = 20;\ t_R = 999999;\ \beta = 0.0001$
Simulation
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
20
30
40
50
60

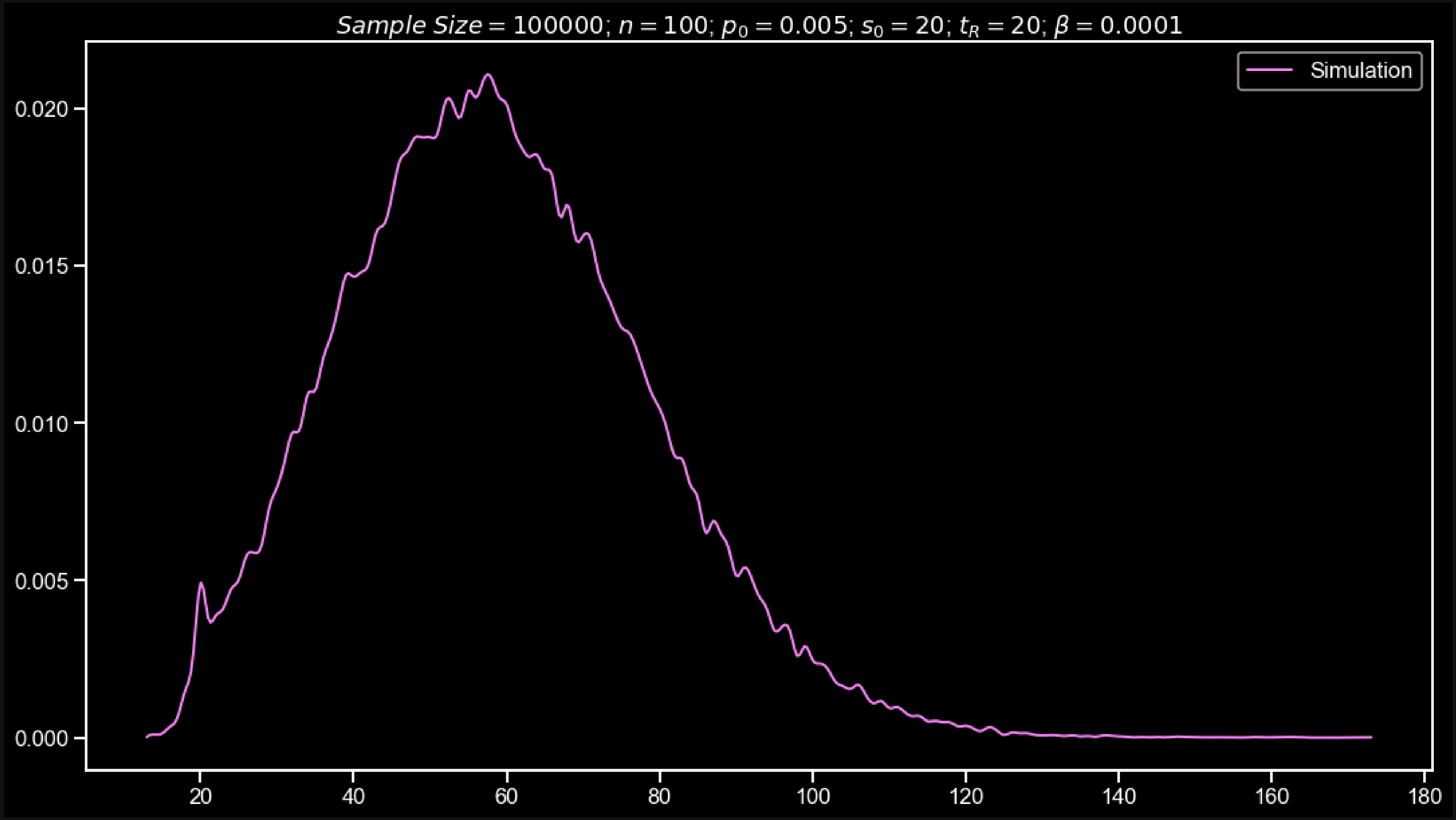

$Sample\ Size = 100000$; $n = 100$; $p_0 = 0.005$; $s_0 = 100$; $t_R = 999999$; $\beta = 0.0001$
Simulation
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
80
90
100
110
120
130
140
150

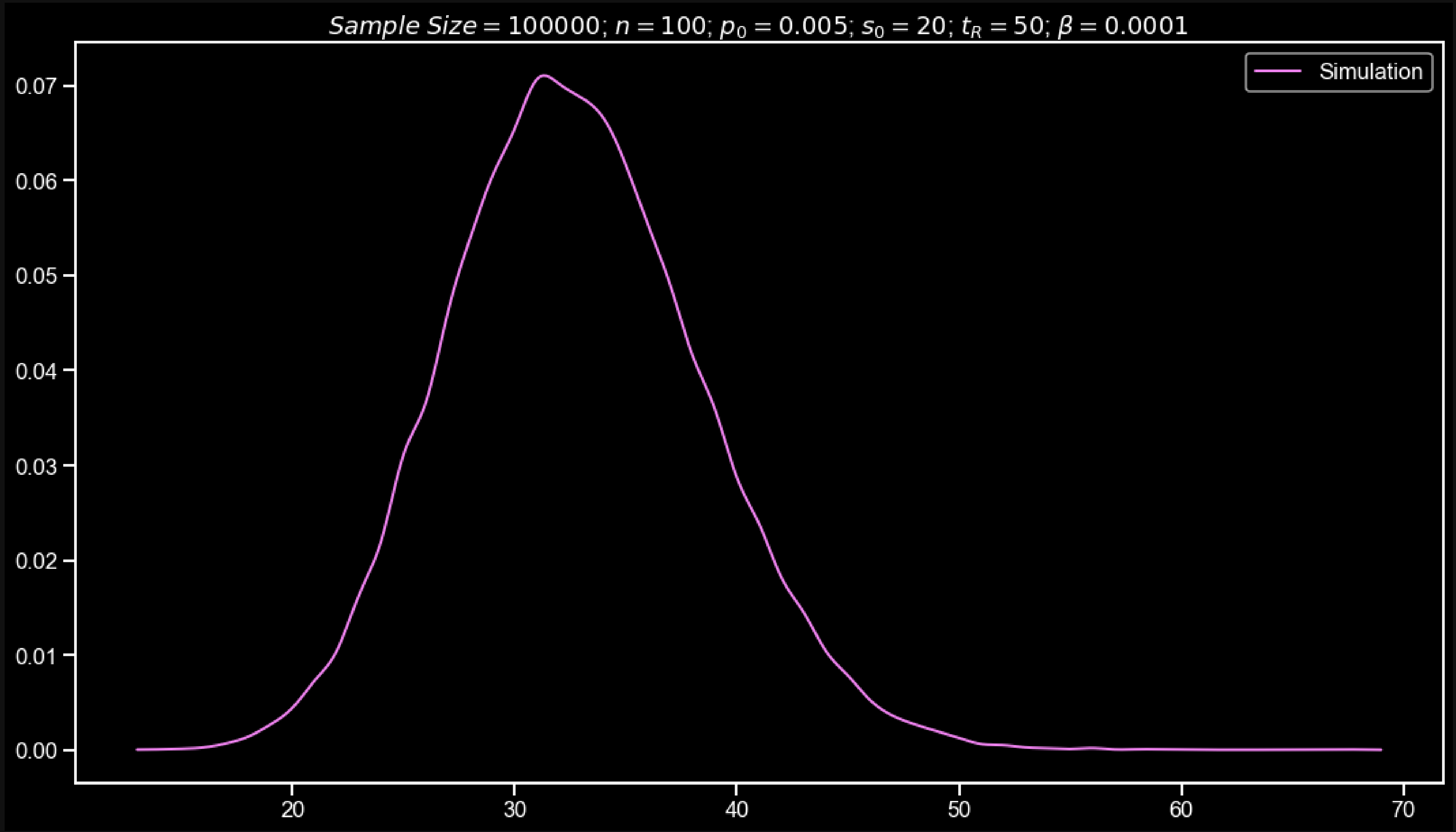
$$t_R \neq 0$$
$$\beta \neq 0$$


$Sample\ Size = 100000$; $n = 100$; $p_0 = 0.005$; $s_0 = 500$; $t_R = 999999$; $\beta = 0.0001$
Simulation
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
400
420
440
460
480
500
520
540



$Sample\ Size = 100000;\ n = 100;\ p_0 = 0.005;\ s_0 = 20;\ t_R = 20;\ \beta = 0.001$
Simulation
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
10
15
20
25
30


$Sample\ Size = 100000$; $n = 100$; $p_0 = 0.005$; $s_0 = 20$; $t_R = 20$; $\beta = 0.0001$
Simulation
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
20
40
60
80
100
120
140
160
180


$Sample\ Size = 100000; n = 100; p_0 = 0.005; s_0 = 20; t_R = 50; \beta = 0.0001$
Simulation
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
20
30
40
50
60
70