

Métodos de Estatística Aplicada com Python

Aula 6

Carlos Góes¹

¹Pós-Graduação em Ciência de Dados
Instituto de Educação Superior de Brasília

2017

Sumário

- 1 Funções
 - Definição e notação
 - Representações algébrica e gráfica
 - Derivadas: intuição
- 2 Probabilidade: noções e inferência
 - Definição e notação
 - Inferência
 - Teorema de Bayes e probabilidade condicional
- 3 Probabilidade: funções e distribuições
 - Funções de probabilidade
 - A distribuição normal

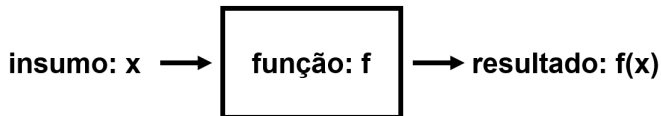
Sumário

- 1 Funções
 - Definição e notação
 - Representações algébrica e gráfica
 - Derivadas: intuição
- 2 Probabilidade: noções e inferência
 - Definição e notação
 - Inferência
 - Teorema de Bayes e probabilidade condicional
- 3 Probabilidade: funções e distribuições
 - Funções de probabilidade
 - A distribuição normal

Funções

Definição e notação

- Funções matemáticas são como uma máquina que toma determinados insumos e entrega um resultado



Funções

Definição e notação

- Denota-se uma função que depende da variável x como uma *função de x* .
- Por exemplo:

$$\text{se } f(x) \equiv x^2,$$

então :

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$f(10) = (10)^2 = 100$$

$$f(-100) = (-100)^2 = 10000$$

etc..

(1)

Funções

Definição e notação

- Denota-se uma função que depende da variável x como uma *função de x* .
- Por exemplo:

$$\text{se } f(x) \equiv x^2,$$

então :

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$f(10) = (10)^2 = 100$$

$$f(-100) = (-100)^2 = 10000$$

etc..

(2)

Funções

Definição e notação

- É razoavelmente intuitivo ir do conceito de uma função matemática para uma função computacional, definindo:

```
def f(x):  
    return x ** 2
```

ou

```
f = lambda x: x ** 2
```

podemos ver os resultados

```
print(f(4), f(-10), f(100))
```

Funções

Definição e notação

- É sempre possível combinar funções.
- Por exemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{se} & f(x) \equiv x^2, \\ \text{e :} & g(x) \equiv \sqrt{x} \\ \text{então, quanto seria :} & \\ & f(g(x))? \end{array} \quad (3)$$

Funções

Definição e notação

- É sempre possível combinar funções.
- Por exemplo:

$$\begin{aligned} \text{se} \quad f(x) &\equiv x^2, \\ \text{e :} \quad g(x) &\equiv \sqrt{x} \\ \text{então :} \\ f(g(x)) &= f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x \end{aligned} \tag{4}$$

Funções

Definição e notação

- Testando no python:

```
f = lambda x: x ** 2
```

```
g = lambda x: np.sqrt(x)
```

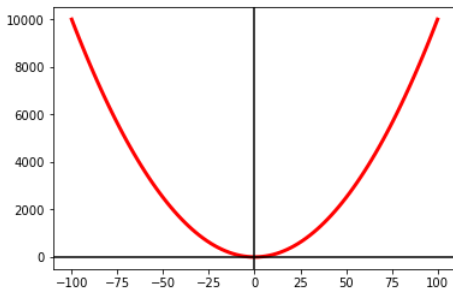
- Podemos ver os resultados

```
print(f(4), g(4), f(g(4)))
```

Funções

Representações algébrica e gráfica

- Funções univariadas têm sempre representações algébricas e gráficas.
- Essas duas representações são equivalentes.
- Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ tem a seguinte representação gráfica:



- O que ela significa?

Funções

Representações algébrica e gráfica

- Que pode ser reproduzida no Python

```
f = lambda x: x ** 2
```

```
x = np.linspace(-100,100,101)
```

```
y = f(x)
```

```
plt.xlabel('x')
```

```
plt.ylabel(r'$f(x) = x^2$')
```

```
plt.plot(x,y, color='red', linewidth=3)
```

```
plt.axhline(0, color='black')
```

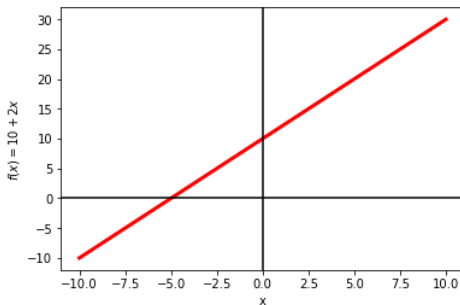
```
plt.axvline(0, color='black')
```

```
plt.show()
```

Funções

Representações algébrica e gráfica

- O mesmo vale para outras funções.
- Por exemplo, a função $f(x) = 10 + 2x$ tem a seguinte representação gráfica:



- Em qual número a linha cruza o eixo vertical?
- E o eixo horizontal?

Funções

Representações algébrica e gráfica

- Que pode ser reproduzida no Python

```
f = lambda x: np.sin(x)
```

```
x = np.linspace(-10,10,1000)
```

```
y = f(x)
```

```
plt.xlabel('x')
```

```
plt.ylabel(r'$f(x) = \sin(x)$')
```

```
plt.plot(x,y, color='red', linewidth=1)
```

```
plt.axhline(0, color='black')
```

```
plt.axvline(0, color='black')
```

```
plt.show()
```

Funções

Derivadas: intuição

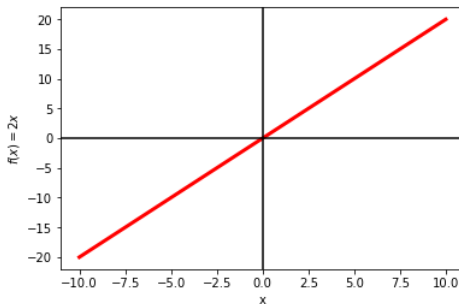
- Um conceito importante para compreender funções em estatística (em especial em relações associativas) é o de derivadas.
- Esse não é um curso de cálculo, mas é importante que saibamos a intuição.
- Em poucas palavras, a derivada de uma função é a sensibilidade do resultado de uma função à mudança no insumo daquela função.
- A notação matemática é a seguinte:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{quanto } y \text{ muda}}{\text{quando } x \text{ muda}} \quad (5)$$

Funções

Derivadas: intuição

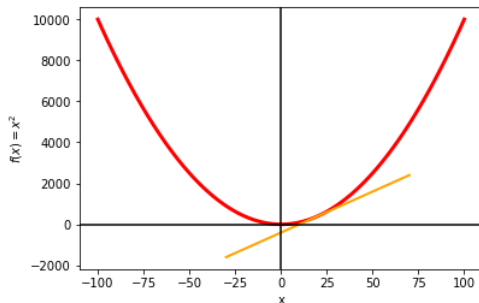
- Graficamente, podemos observar as mesmas relações.
- A derivada está relacionada à mudança relativa entre as variáveis.



Funções

Derivadas: intuição

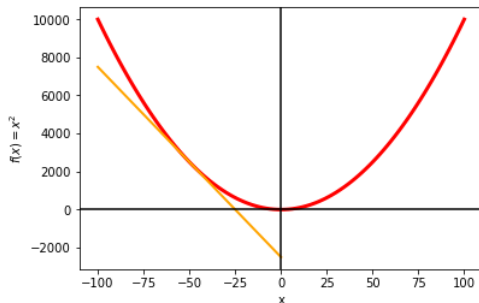
- Quando sua função não é uma variação constante, a derivada é a tangente da função em determinado ponto
- Quando a curva tem inclinação positiva (negativa), a derivada também é positiva (negativa).



Funções

Derivadas: intuição

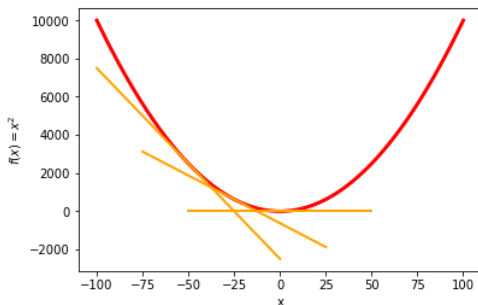
- Quando sua função não é uma variação constante, a derivada é a tangente da função em determinado ponto
- Quando a curva tem inclinação positiva (negativa), a derivada também é positiva (negativa).



Funções

Derivadas: intuição

- Dependendo da inclinação da curva de tangente, a derivada é maior ou menor.



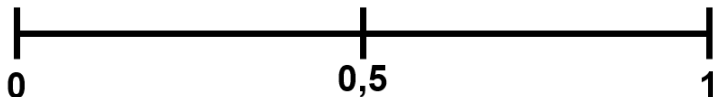
Sumário

- 1 Funções
 - Definição e notação
 - Representações algébrica e gráfica
 - Derivadas: intuição
- 2 Probabilidade: noções e inferência
 - Definição e notação
 - Inferência
 - Teorema de Bayes e probabilidade condicional
- 3 Probabilidade: funções e distribuições
 - Funções de probabilidade
 - A distribuição normal

Probabilidade: noções e inferência

Definição e notação

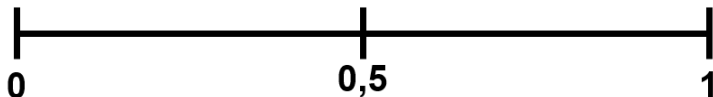
- A probabilidade de um evento denota a frequência relativa de longo prazo de um evento
- Ou seja, nossa melhor resposta para qual é a chance de um evento ocorrer
- A probabilidade deve ser vista num espectro que vai de zero (0% de chance de ocorrer) a um (100% de chance de ocorrer).



Probabilidade: noções e inferência

Definição e notação

- A probabilidade de um evento denota a frequência relativa de longo prazo de um evento
- Ou seja, nossa melhor resposta para qual é a chance de um evento ocorrer
- A probabilidade deve ser vista num espectro que vai de zero (0% de chance de ocorrer) a um (100% de chance de ocorrer).



Probabilidade: noções e inferência

Definição e notação

- Algumas vezes, sabemos a probabilidade de um evento por construção.
- Em um dado não viciado, a probabilidade do resultado ser qualquer um dos lados é igual: uma em seis, ou 16,6%.
- Em notação matemática:

$$Pr(1) = Pr(2) = Pr(3) = Pr(4) = Pr(5) = Pr(6) \quad (6)$$

$$Pr(1) = \frac{1}{6} = 0,1666 \quad (7)$$

Probabilidade: noções e inferência

Definição e notação

- Como sabemos isso?

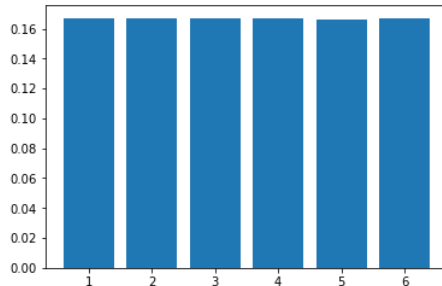
```
x = [random.randint(1,6) for i in range(0,1000000)]
```

```
plt.hist(x,  
        bins=[0.5+i for i in range(0,7)],  
        normed=True,  
        rwidth=0.8)  
plt.show()
```


Probabilidade: noções e inferência

Definição e notação

- Como sabemos isso?



Probabilidade: noções e inferência

Probabilidade simples

- Para eventos mutuamente excludentes:
 - a probabilidade de A não ocorrer é igual:

$$Pr(\bar{A}) = 1 - Pr(A) \quad (8)$$

- Ex: qual a probabilidade de o dado não tirar um?

$$Pr(\bar{1}) = 1 - Pr(1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad (9)$$

- a probabilidade de A ou B ocorrerem, se A e B forem independentes, é igual a probabilidade de A ocorrer mais a probabilidade de B ocorrer

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) \quad (10)$$

- Ex: qual a probabilidade de o dado tirar um ou seis?

$$Pr(1 \cup 6) = Pr(1) + Pr(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \quad (11)$$

Probabilidade: noções e inferência

Probabilidade simples

- Para eventos mutuamente independentes:
 - a probabilidade de A e B ocorrerem é a multiplicação de suas probabilidades marginais:

$$Pr(A \cap B) = Pr(A) * Pr(B) \quad (12)$$

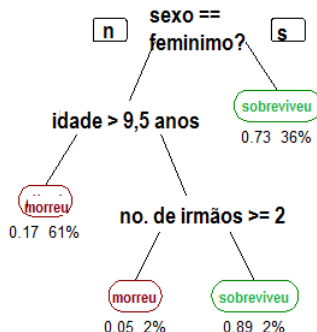
- Ex: qual a probabilidade de um dado tirar seis duas vezes seguidas?

$$Pr(6 \cap 6) = Pr(6) * Pr(6) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \quad (13)$$

Probabilidade: noções e inferência

Relevância

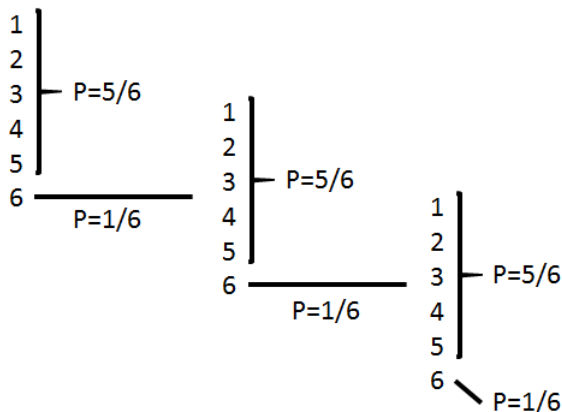
- Por que isso importa?
- Porque muitas vezes, ao escrever algoritmos de classificação, nós utilizamos essas noções de probabilidade marginal.



Probabilidade: noções e inferência

Relevância

- O que é diretamente relacionado à noção de probabilidade



Probabilidade: noções e inferência

Probabilidade condicional

- Por enquanto, falamos de eventos independentes
- Mas o que muda quando incluímos outras informações não independentes?
- Por exemplo, nós sabemos que há 1,3 bilhões de católicos no mundo, de tal modo que a probabilidade de um humano aleatório ser católico é:

$$P(\text{Católico}) = \frac{1,3\text{bilhões}}{7\text{bilhões}} = 18,6\%$$

Probabilidade: noções e inferência

Probabilidade condicional

- Mas a probabilidade de você ter determinada religião é independente de onde você nasceu?
- Você acha que a probabilidade de alguém ser católico é a mesma no Brasil e na Arábia Saudita?
- Qual é a probabilidade de alguém ser católico, sabendo que ele é brasileiro?

$$P(\text{Católico}|\text{Brasileiro}) = \frac{126\text{milhões}}{210\text{milhões}} = 60\%$$

Probabilidade: noções e inferência

Probabilidade condicional

- Isso é equivalente a:

$$P(\text{Católico}|\text{Brasileiro}) = \frac{P(\text{Católico} \cap \text{Brasileiro})}{P(\text{Brasileiro})} = \frac{\frac{126mi}{7bi}}{\frac{210mi}{7bi}} = \frac{126mi}{210mi}$$

- Generalizando:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (14)$$

Probabilidade: noções e inferência

Probabilidade condicional

- O que significa que podemos também fazer o caminho inverso

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \quad (15)$$

- Ou seja, se soubermos a probabilidade de alguém ser Católico, dado que alguém é brasileiro; e soubermos a probabilidade de alguém ser brasileiro, podemos derivar a probabilidade de alguém ser católico e brasileiro!

$$\begin{aligned} P(\text{Católico} \cap \text{Brasileiro}) &= P(\text{Católico} | \text{Brasileiro}) P(\text{Brasileiro}) \\ &= \frac{126mi}{210mi} \cdot \frac{210mi}{7bi} = \frac{126mi}{7bi} \\ &= 1,8\% \end{aligned}$$

Probabilidade: noções e inferência

Teorema de Bayes

- O Teoremas de Bayes se constroi sobre essas noções de probabilidade condicional - e nos ajuda a chegar a inferências probabilísticas quando só temos informação parcial
- Dado que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- E:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

Probabilidade: noções e inferência

Teorema de Bayes

- Podemos concluir que:

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- E, portanto:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Probabilidade: noções e inferência

Teorema de Bayes

- O que isso significa?
- Exemplo prático:

INTERNACIONAL

Qual a probabilidade de um muçulmano ser terrorista?

Por Carlos Góes [@goescarlos](#) · Em 14/11/2015



Probabilidade: noções e inferência

Teorema de Bayes

- Pelo Teorema de Bayes:

$$P(\text{terrorista}|\text{muçulmano}) = \frac{P(\text{muçulmano}|\text{terrorista})P(\text{terrorista})}{p(\text{muçulmano})}$$

- Ou seja: A probabilidade de um muçulmano ser terrorista = (probabilidade de um terrorista ser muçulmano * a probabilidade de um ser humano ser terrorista) / a probabilidade de um ser humano ser muçulmano.

Probabilidade: noções e inferência

Teorema de Bayes

- Como chegar nesses termos?
- Digamos que 75% de todos os terroristas são muçulmanos – historicamente é bem menos, mas tudo bem, erremos pra cima.
- Há cerca de 400 casos de terrorismo registrados por ano. Se cada um deles foi cometido por cinco pessoas diferentes, a expectativa de vida média dos terroristas fosse de 80 anos e nenhum deles morrer no atentado, haveria $400 * 5 * 80 = 160$ mil terroristas no mundo. A probabilidade de alguém aleatório ser terrorista seria igual a $160.000 / 7.000.000.000 = 0.002\%$. Seguramente esse número exagera bastante pra cima.
- Cerca de 25% da população mundial é muçulmana. Então a probabilidade de um humano selecionado aleatoriamente ser muçulmano é de 0.25.

Probabilidade: noções e inferência

Teorema de Bayes

- Portanto:

$$\begin{aligned}P(\text{terrorista}|\text{muculmano}) &= \frac{P(\text{muculmano}|\text{terrorista})P(\text{terrorista})}{p(\text{muculmano})} \\&= \frac{75\% \cdot 0,002\%}{25\%} \\&= 0,006\%\end{aligned}$$

- Conclusão: Provavelmente esse número exagera pra cima. Mas, mesmo que ele fosse certo, isso significaria que a gente estaria julgando 99,994% dos muçulmanos pelos atos dos 0,006%.

Sumário

- 1 Funções
 - Definição e notação
 - Representações algébrica e gráfica
 - Derivadas: intuição
- 2 Probabilidade: noções e inferência
 - Definição e notação
 - Inferência
 - Teorema de Bayes e probabilidade condicional
- 3 Probabilidade: funções e distribuições
 - Funções de probabilidade
 - A distribuição normal

Probabilidade: funções e distribuições

Funções de probabilidade

- Se nós organizarmos todo o universo amostral (todas as possibilidades de resultado em nosso experimento) e as probabilidades referentes a ele, teremos uma função de probabilidade.
- Como chegamos numa função de probabilidade?

Probabilidade: funções e distribuições

Funções de probabilidade

- Imagine que nosso experimento seja jogar uma moeda (com dois lados: cara - C - e coroa - K) duas vezes seguidas.
- Quais são as possibilidades de resultado, o nosso espaço amostral (S)?
- $S = \{CC, CK, KC, KK\}$
- Qual a probabilidade referente a cada um desses resultados?

x	2 caras	cara + coroa	2 coroas
p(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Probabilidade: funções e distribuições

Funções de probabilidade

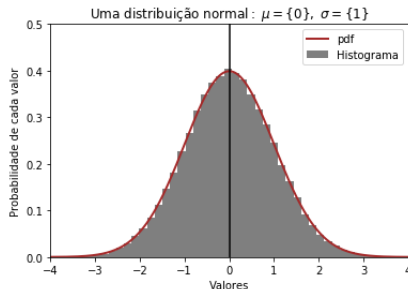
- Do mesmo modo que probabilidades sempre variam entre 0 e 1, a soma de todos os resultados possíveis (e mutuamente excludentes) em uma função de probabilidade tem de ser igual a um.
- Nesse caso:

$$p(2 \text{ caras}) + p(\text{cara} + \text{coroa}) + p(2 \text{ coroas}) = 1$$

Probabilidade: funções e distribuições

A distribuição normal

- Ao repetir um mesmo experimento diversas vezes, podemos observar empiricamente qual é a probabilidade de cada resultado, no longo prazo
- E podemos também aproximar os nossos resultados empíricos com uma função contínua, que resulta na probabilidade de cada possível valor infinitesimal



Probabilidade: funções e distribuições

A distribuição normal

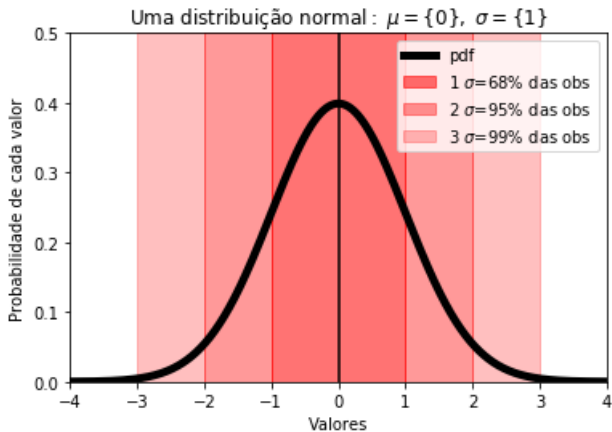
- A distribuição normal define-se, matematicamente, da seguinte forma:

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- O mais importante, contudo, é entender a regularidade quanto a proporção probabilística em cada intervalo seu.
 - 68% das distribuições estão entre ± 1 desvio padrão da média
 - 95% das distribuições estão entre ± 2 desvios padrões da média
 - 99% das distribuições estão entre ± 3 desvios padrões da média

Probabilidade: funções e distribuições

A distribuição normal



Probabilidade: funções e distribuições

A distribuição normal

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy
import pandas as pd

mu = 0
sigma = 1
draws = 100000
bins = 50

x = np.random.normal(mu, sigma, draws)
pdf = scipy.stats.norm.pdf(x)
df = pd.DataFrame(data=[x, pdf], index=['x', 'pdf']).T
df = df.sort_values('x')
```

Probabilidade: funções e distribuições

A distribuição normal

```
fig = plt.figure()
```

```
plt.plot('x', 'pdf', data=df,  
        color='black', linewidth=5)
```

```
# areas sombreadas
```

```
plt.axvspan(xmin=-1,xmax=1,color='red',alpha=.55, label=r'1 $')  
plt.axvspan(xmin=-2,xmax=-1,color='red',alpha=.4, label=r'2 $')  
plt.axvspan(xmin=1,xmax=2,color='red',alpha=.4)  
plt.axvspan(xmin=-3,xmax=-2,color='red',alpha=.25, label=r'3 $')  
plt.axvspan(xmin=2,xmax=3,color='red',alpha=.25)
```

```
# linha preta
```

```
plt.axvline(x=0, color='black')
```


Probabilidade: funções e distribuições

A distribuição normal

```
plt.legend(loc=1)
plt.xlabel('Valores')
plt.ylabel('Probabilidade de cada valor')
plt.title(r'$\mathrm{Uma\ distribuição\ normal:}\ \mu=\{0\},\ \sigma=\{1\}$')
plt.axis([-4, 4, 0, 0.5]) # eixos
plt.grid(False)
plt.show()
```