Структури от данни в Scheme

матрици, дървета, асоциативни списъци, графи

Трифон Трифонов

Функционално програмиране, 2022/23 г.

15–22 ноември 2022 г.

Представяне на матрици

Можем да представим матрица като списък от списък от елементи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

```
((1 2 3) (4 5 6))
```

Проверка за коректност:

```
(define (all? p? l)
  (foldr (lambda (x y) (and x y)) #t (map p? l)))

(define (matrix? m)
  (and (list? m)
       (not (null? (car m)))
       (all? list? m)
       (all? (lambda (row) (= (length row)
                              (length (car m)))) m)))
```

Базови операции

Брой редове и стълбове

```
(define get-rows length)
(define (get-columns m) (length (car m)))
```

Намиране на първи ред и стълб

```
(define get-first-row car)
(define (get-first-column m) (map car m))
```

Изтриване на първи ред и стълб

```
(define del-first-row cdr)
(define (del-first-column m) (map cdr m))
```

Разширени операции

Намиране на ред и стълб по индекс

```
(define (get-row i m) (list-ref m i))
(define (get-column i m)
  (map (lambda (row) (list-ref row i)) m))
```

Транспониране

Вариант 1 (директна рекурсия):

```
(define (transpose m)
  (if (null? (get-first-row m)) '()
      (cons (get-first-col m)
            (transpose (del-first-col m)))))
```

Вариант 2 (accumulate):

```
(define (transpose m)
  (accumulate cons '() 0 (- (get-columns m) 1) (lambda (i) (get-column i m)) 1+))
```

Аритметични операции

Събиране на матрици

```
(define (sum-vectors v1 v2) (map + v1 v2))
(define (sum-matrices m1 m2) (map sum-vectors m1 m2))
```

Умножение на матрици ($c_{i,j} = \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j^T = \sum_{k=0}^{n} A_{i,k} B_{k,j}$)

```
(define (mult-vectors v1 v2) (apply + (map * v1 v2)))
(define (mult-matrices m1 m2)
  (let ((m2t (transpose m2)))
       (map (lambda (row)
              (map (lambda (column) (mult-vectors row column))
                   m2t))
            m1)))
```

Абстракция със структури от данни

Дефиниция (Абстракция)

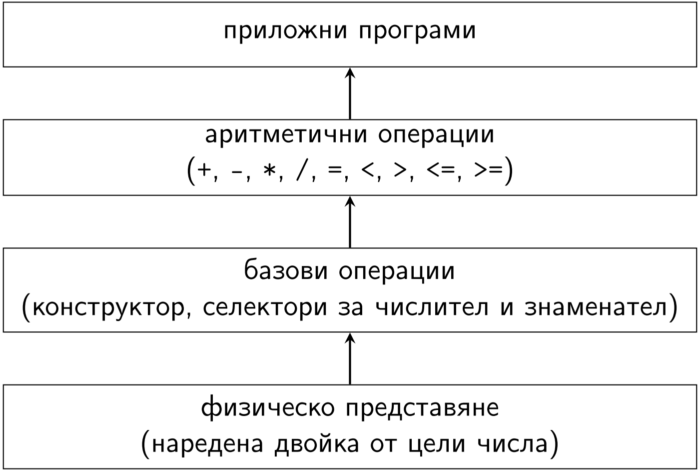
Принцип за разделянето (“абстрахирането”) на *представянето* на дадена структура от данни (СД) от нейното *използване*.

- основен принцип на обектно-ориентираното програмиране
- позволява използването на СД преди представянето ѝ да е уточнено
- предимства:
  - програмите работят на по-високо концептуално ниво със СД
  - позволява алтернативни имплементации на дадена СД, подходящи за различни видове задачи
  - влиянието на промени по представянето е ограничено до операциите, които “знаят” за него
  - подобрения при представянето автоматично се разпространяват до по-горните нива на абстракция

Пример: рационално число

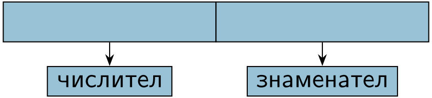
- Логическо описание: обикновена дроб
- Физическо представяне: наредена двойка от цели числа
- Базови операции:
    - конструиране на рационално число
    - получаване на числител
    - получаване на знаменател
- Аритметични операции:
    - събиране, изваждане
    - умножение, деление
    - сравнение
- Приложни програми

Нива на абстракция



Рационални числа

Физическо представяне



Базови операции

- `(define make-rat cons)`
- `(define get-numer car)`
- `(define get-denom cdr)`

По-добре:

```
(define (make-rat n d)
  (if (= d 0) (cons n 1) (cons n d)))
```

Аритметични операции

$$\frac{n_1}{d_1}\frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1 n_2}{d_1 d_2}$$

```
(define (*rat p q)
  (make-rat
    (* (get-numer p) (get-numer q))
    (* (get-denom p) (get-denom q))))
```

$$\frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1 d_2 + n_2 d_1}{d_1 d_2}$$

```
(define (+rat p q)
  (make-rat
    (+ (* (get-numer p)
          (get-denom q))
       (* (get-denom p)
          (get-numer q)))
    (* (get-denom p) (get-denom q))))
```

$$\frac{n_1}{d_1} < \frac{n_2}{d_2} \leftrightarrow n_1 d_2 < n_2 d_1$$

```
(define (<rat p q)
  (< (* (get-numer p) (get-denom q))
     (* (get-numer q) (get-denom p))))
```

Програми с рационални числа

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

```
(define (my-exp x n)
  (accumulate
    +rat (make-rat 0 1) 0 n
    (lambda (i) (make-rat (pow x i) (fact i))) 1+))
```

Нормализация

Проблем: Числителят и знаменателят стават много големи!

Проблем: `(<rat (make-rat 1 2) (make-rat 1 -2))` $\longrightarrow$ `#t`

Идея: Да работим с *нормализирани* дроби $\frac{p}{q}$, където $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+$ и $gcd(p, q) = 1$.

```
(define (make-rat n d)
  (if (or (= d 0) (= n 0)) (cons 0 1)
    (let* ((g (gcd n d))
           (ng (quotient n g))
           (dg (quotient d g)))
      (if (> dg 0) (cons ng dg)
                   (cons (- ng) (- dg))))))
```

Не е нужно да правим каквито и да е други промени!

Аритметични операции

$$\frac{n_1}{d_1}\frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1 n_2}{d_1 d_2}$$

```scheme
(define (*rat p q)
  (make-rat
    (* (get-numer p) (get-numer q))
    (* (get-denom p) (get-denom q))))
```

$$\frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1 d_2 + n_2 d_1}{d_1 d_2}$$

```scheme
(define (+rat p q)
  (make-rat
    (+ (* (get-numer p)
          (get-denom q))
       (* (get-denom p)
          (get-numer q)))
    (* (get-denom p) (get-denom q))))
```

$$\frac{n_1}{d_1} < \frac{n_2}{d_2} \leftrightarrow n_1 d_2 < n_2 d_1$$

```scheme
(define (<rat p q)
  (< (* (get-numer p) (get-denom q))
     (* (get-numer q) (get-denom p))))
```

Нормализация

Проблем: Числителят и знаменателят стават много големи!

Проблем: `(<rat (make-rat 1 2) (make-rat 1 -2))` $\longrightarrow$ `#t`

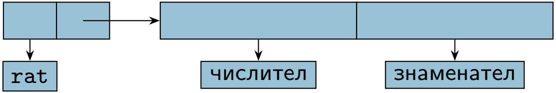
Идея: Да работим с *нормализирани* дроби $\frac{p}{q}$, където $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+$ и $gcd(p, q) = 1$.

```scheme
(define (make-rat n d)
  (if (or (= d 0) (= n 0)) (cons 0 1)
    (let* ((g (gcd n d))
           (ng (quotient n g))
           (dg (quotient d g)))
      (if (> dg 0) (cons ng dg)
                   (cons (- ng) (- dg))))))
```

Не е нужно да правим каквито и да е други промени!

Сигнатура

Проблем: Не можем да различим СД с еднакви представяния! (рационално число, комплексно число, точка в равнината)
Идея: Да добавим "етикет" на обекта




```
(define (make-rat n d)
  (cons 'rat
    (if (or (= d 0) (= n 0)) (cons 0 1)
      (let* ((g (gcd n d))
             (ng (quotient n g))
             (dg (quotient d g)))
         (if (> dg 0) (cons ng dg)
                      (cons (- ng) (- dg)))))))
(define get-numer cadr)
(define get-denom cddr)
```

Проверка за коректност

Вече можем да проверим дали даден обект е рационално число:

```
(define (rat? p)
  (and (pair? p) (eqv? (car p) 'rat)
       (pair? (cdr p))
       (integer? (cadr p)) (positive? (cddr p))
       (= (gcd (cadr p) (cddr p)) 1)))
```

Можем да добавим проверка за коректност:

```
(define (check-rat f)
  (lambda (p)
    (if (rat? p) (f p) 'error)))

(define get-numer (check-rat cadr))
(define get-denom (check-rat cddr))
```

Капсулация на базови операции

Проблем: операциите над СД са видими глобално

Идея: да ги направим “private”

```
(define (make-rat n d)
  (lambda (prop)
    (case prop
      ('get-numer n)
      ('get-denom d)
      ('print (cons n d))
      (else 'unknown-prop))))
```

- `(define r (make-rat 3 5))`
- `(r 'get-numer)` $\longrightarrow$ `3`
- `(r 'get-denom)` $\longrightarrow$ `5`
- `(r 'print)` $\longrightarrow$ `(3 . 5)`

Нормализация при капсулация

```
(define (make-rat n d)
  (let* ((d (if (= 0 d) 1 d))
         (sign (if (> 0 d) 1 -1))
         (g (gcd n d))
         (numer (* sign (quotient n g)))
         (denom (* sign (quotient d g))))
   (lambda (prop)
    (case prop
      ('get-numer numer)
      ('get-denom denom)
      ('print (cons numer denom))
      (else 'unknown-prop)))))
```

- `(define r (make-rat 4 6))`
- `(r 'print)` $\longrightarrow$ `(2 . 3)`

Капсулация на операции с аргументи

```
(define (make-rat n d)
  (let* ((g (gcd n d))
         (d (if (= 0 d) 1 d))
         (sign (if (> 0 d) 1 -1))
         (numer (* sign (quotient n g)))
         (denom (* sign (quotient d g))))
   (lambda (prop . params)
     (case prop
       ('get-numer numer)
       ('get-denom denom)
       ('print (cons numer denom))
       ('* (let ((r (car params))) (make-rat (* numer (r 'get-numer))
                                             (* denom (r 'get-denom)))))
       (else 'unknown-prop)))))
```

- `(define r1 (make-rat 3 5))`
- `(define r2 (make-rat 5 2))`
- `((r1 '* r2) 'print)` $\longrightarrow$ `(3 . 2)`

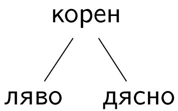
Извикване на собствени операции

```
(define (make-rat n d)
  (let* ((g (gcd n d))
         (d (if (= 0 d) 1 d))
         (sign (if (> 0 d) 1 -1))
         (numer (* sign (quotient n g)))
         (denom (* sign (quotient d g))))
    (define (self prop . params)
      (case prop
        ('get-numer numer)
        ('get-denom denom)
        ('print (cons numer denom))
        ('* (let ((r (car params)))
              (make-rat (* (self 'get-numer) (r 'get-numer))
                        (* (self 'get-denom) (r 'get-denom)))))
        (else 'unknown-prop)))
    self))
```

Извикването на метод на обект чрез препратка `self` или `this` се нарича отворена рекурсия.

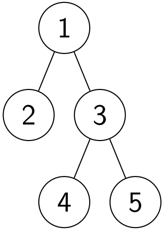
Представяне на двоични дървета

Представяме двоични дървета като вложени списъци от три елемента:



(<корен> <ляво> <дясно>)

Пример:




```
(1 (2 () ())
   (3 (4 () ())
      (5 () ())))
```

Базови операции

Проверка за коректност:

```
(define (tree? t)
  (or (null? t)
      (and (list t) (= (length t) 3))
           (tree? (cadr t))
           (tree? (caddr t))))
```

Конструктори:

```
(define empty-tree '())
(define (make-tree root left right) (list root left right))
```

Селектори:

```
(define root-tree car)
(define left-tree cadr)
(define right-tree caddr)
(define empty-tree? null?)
```

Разширени операции

Дълбочина на дърво:

```
(define (depth-tree t)
  (if (empty-tree? t) 0
      (1+ (max (depth (left-tree t))
               (depth (right-tree t))))))
```

Намиране на поддърво:

```
(define (memv-tree x t)
  (and (not (empty-tree? t))
       (or (and (eqv? x (root-tree t)) t)
           (memv-tree x (left-tree t))
           (memv-tree x (right-tree t)))))
```

Търсене на път в двоично дърво

Задача: Да се намери в дървото път от корена до даден възел x.

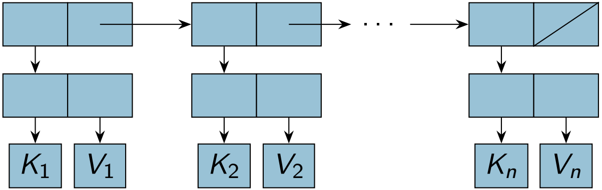
```
(define (path-tree x t)
  (and (not (empty-tree? t))
       (or (and (eqv? x (root-tree t)) (list x))
           (cons#f (root-tree t)
                   (or (path-tree x (left-tree t))
                       (path-tree x (right-tree t)))))))

(define (cons#f h t) (and t (cons h t)))
```

Асоциативни списъци

Дефиниция

Асоциативните списъци (още: речник, хеш, map) са списъци от наредени двойки (<ключ> . <стойност>). <ключ> и <стойност> може да са произволни S-изрази.

$$((K_1\ .\ V_1)\ (K_1\ .\ V_2)\ \ldots (K_n\ .\ V_n))$$



Примери за асоциативни списъци

- `((1 . 2) (2 . 3) (3 . 4))`
- `((a . 10) (b . 12) (c . 18))`
- `((l1 1 8) (l2 10 1 2) (l3))`
- `((al1 (1 . 2) (2 . 3)) (al2 (b)) (al3 (a . b) (c . d)))`

Пример: Създаване на асоциативен списък по списък от ключове и функция:

```
(define (make-alist f keys)
  (map (lambda (x) (cons x (f x))) keys))
```

`(make-alist square '(1 3 5))` ⟶ `((1 . 1) (3 . 9) (5 . 25))`

Селектори за асоциативни списъци

- `(define (keys alist) (map car alist))`
- `(define (values alist) (map cdr alist))`
- `(assoc` <ключ> <асоциативен-списък>`)`
  - Ако <ключ> се среща сред ключовете на <асоциативен-списък>, връща първата двойка (<ключ> `.` <стойност>)
  - Ако <ключ> не се среща сред ключовете, връща `#f`
  - Сравнението се извършва с `equal?`
- `(assv` <ключ> <асоциативен-списък>`)`
  - също като `assoc`, но сравнява с `eqv?`
- `(assq` <ключ> <асоциативен-списък>`)`
  - също като `assoc`, но сравнява с `eq?`

Трансформации над асоциативни списъци

- Изтриване на ключ и съответната му стойност (ако съществува):

```
(define (del-assoc key alist)
  (filter (lambda (kv) (not (equal? (car kv) key))) alist))
```

- Задаване на стойност за ключ (изтривайки старата, ако има такава):

```
(define (add-assoc key value alist)
  (cons (cons key value) (del-assoc key alist)))
```

  - А ако искаме да запазим реда на ключовете?

Задаване на стойност за ключ

Вариант №1 (грозен и по-бърз):

```
(define (add-assoc key value alist)
   (let ((new-kv (cons key value)))
        (cond ((null? alist) (list new-kv))
              ((eqv? (caar alist) key) (cons new-kv (cdr alist)))
              (else (cons (car alist)
                    (add-assoc key value (cdr alist)))))))
```

Вариант №2 (красив и по-бавен):

```
(define (add-assoc key value alist)
  (let ((new-kv (cons key value)))
       (if (assv key alist)
           (map (lambda (kv) (if (eq? (car kv) key)
                                 new-kv kv)) alist)
           (cons new-kv alist))))
```

Задачи за съществуване

Задача. Да се намери има ли елемент на l, който удовлетворява p.
Формула: $\exists x \in l : p(x)$
Решение:

```
(define (search p l)
  (and (not (null? l))
       (or (p (car l)) (search p (cdr l)))))
```

Важно свойство: Ако p връща "свидетел" на истинността на свойството p (както например `memv` или `assv`), то `search` също връща този "свидетел".
Пример:

```
(define (assv key al)
  (search (lambda (kv) (and (eqv? (car kv) key) kv)) al))
```

Задачи за всяко

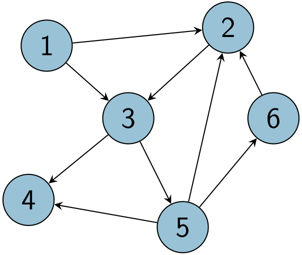
Задача. Всеки елемент на l да се трансформира по дадено правило f.
Формула: $\{f(x) \mid x \in l\}$
Решение: `(map f l)`

Задача. Да се изберат тези елементи от l, които удовлетворяват p.
Формула: $\{x \mid x \in l \wedge p(x)\}$
Решение: `(filter p l)`

Задача. Да се провери дали всички елементи на l удовлетворяват p.
Формула: $\forall x \in l : p(x) \leftrightarrow \neg \exists x \in l : \neg p(x)$
Решение:

```
(define (all? p? l)
  (not (search (lambda (x) (not (p? x))) l)))
```

Представяне на графи чрез асоциативни списъци




```
((1 2 3)
 (2 3)
 (3 4 5)
 (4)
 (5 2 4 6)
 (6 2))
```

Асоциативен списък, в който ключовете са върховете, а стойностите са списъци от техните деца.

Абстракция за граф

```
(define vertices keys)
```

```
(define (children v g)
  (cdr (assv v g))))
```

$\{u | u \leftarrow v\}$

```
(define (edge? u v g)
  (memv v (children u g)))
```

$u \stackrel{?}{\rightarrow} v$

```
(define (map-children v f g)
  (map f (children v g)))
```

$\forall u \leftarrow v$

```
(define (search-child v f g)
  (search f (children v g)))
```

$\exists u \leftarrow v$

Абстракция за граф

Абстракция чрез капсулация

```
(define (make-graph g)
  (define (self prop . params)
    (case prop
      ('print g)
      ('vertices (keys g))
      ('children (let ((v (car params)))
                   (cdr (assv v g))))                {u|u ← v}
      ('edge? (let ((u (car params)) (v (cadr params)))
                (memv v (self 'children u))))        u →? v
      ('map-children (let ((v (car params))
                           (f (cadr params)))        ∀u ← v
                       (map f (self 'children v))))
      ('search-child (let ((v (car params))
                           (f (cadr params)))        ∃u ← v
                       (search f (self 'children v))))))
  self)
```

Локални задачи

Задача. Да се намерят върховете, които нямат деца.
Решение. $\texttt{childless(g)} = \{v \mid \nexists u \leftarrow v\}$

```
(define (childless g)
  (filter (lambda (v) (null? (children v g))) (vertices g)))
```

Задача. Да се намерят родителите на даден връх.
Решение. $\texttt{parents(v, g)} = \{u \mid u \rightarrow v\}$

```
(define (parents v g)
  (filter (lambda (u) (edge? u v g)) (vertices g)))
```

Проверка за симетричност

Задача. Да се провери дали граф е симетричен.
Решение. symmetric?(g) $= \forall u \forall v \leftarrow u : v \rightarrow u$

```
(define (symmetric? g)
  (all? (lambda (u)
          (all? (lambda (v) (edge? v u g))
                (children u g)))
          (vertices g)))
```

Схема на обхождане в дълбочина

Обхождане на връх u:

- Обходи последователно всички деца v на u

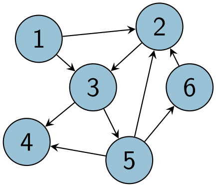
```
(define (dfs u g)
  (<функция-за-обработка> (lambda (v) (<действие> (dfs v g)))
                          (children u g)))
```

- Имаме ли дъно?
  - Да: при празен списък от деца няма рекурсивно извикване!
- Какво се случва ако графът е цикличен?
  - Програмата също зацикля! Как да се справим с този проблем?
  - Трябва да помним през кои върхове сме минали!
  - Два варианта:
    1. да помним всички обходени до момента върхове
    2. да помним текущия път

Търсене на път в дълбочина

Задача. Да се намери път от u до v, ако такъв има.
Решение. Има път от u до v, ако:

- u = v, или
- има дете w ← u, така че има път от w до v




```
(define (dfs-path u v g)
  (define (dfs-search path)
    (let ((current (car path)))
      (cond ((eqv? current v) (reverse path))
            ((memv current (cdr path)) #f)
            (else (search-child current
                        (lambda (w) (dfs-search (cons w path))) g)))))
  (dfs-search (list u)))
```

Директно рекурсивно решение, работи само за ацикличен граф!

Итеративното натрупване на пътя позволява да правим проверки за цикъл.

Схема на обхождане в ширина

Обхождане, започващо от връх `u`:

- Маркира се `u` за обхождане на ниво 1
- За всеки връх `v` избран за обхождане на ниво n:
  - Маркират се всички деца `w` на `v` за обхождане на ниво $n+1$

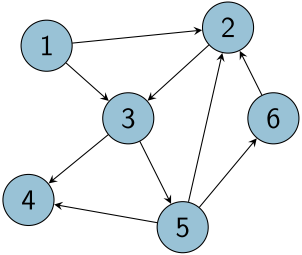
```
(define (bfs u g)
  (define (bfs-level l)
    (if (null? l) <дъно>
        (bfs-level
          (<функция-за-обработка> (lambda (v) (children v g))
                                  l))))
  (bfs-level (list u)))
```

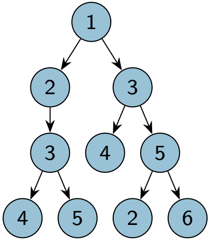
Схема на обхождане в ширина

```
(define (bfs u g)
  (define (bfs-level l)
    (if (null? l) <дъно>
        (bfs-level
          (<функция-за-обработка> (lambda (v) (children v g))
                                  l))))
  (bfs-level (list u)))
```

- Какво се случва ако графът е цикличен?
  - Ако има път: намира го.
  - Ако няма път: програмата зацикля! Как да се справим с този проблем?
  - Трябва да помним през кои върхове сме минали!
  - Нивото трябва да представлява списък от пътища

Схема на обхождане в ширина





Разширяване на пътища

Удобно е пътищата да са представени като стек

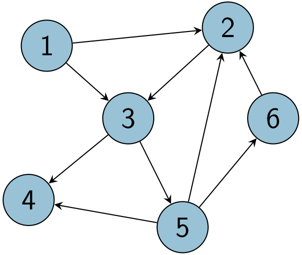
- последно посетеният възел е най-лесно достъпен

```
(extend '(3 1)) ⟶ ((4 3 1) (5 3 1))
```

```
(define (extend path)
  (map-children (car path)
     (lambda (w) (cons w path)) g))
```

Трябва да филтрираме циклите:

```
(define (remains-acyclic? path)
  (not (memv (car path) (cdr path))))

(define (extend-acyclic path)
  (filter remains-acyclic? (extend path))
```



Търсене на път в ширина

Задача. Да се намери най-краткият път от u до v, ако такъв има.
Решение. Обхождаме в ширина от u докато намерим ниво, в което има път, завършващ във върха v.

```
(define (bfs-path u v g)
  (define (extend path) ...)
  (define (extend-acyclic path) ...)
  (define (extend-level level)
    (apply append (map extend-acyclic level)))
  (define (target-path path)
    (and (eqv? (car path) v) path))

  (define (bfs-level level)
    (and (not (null? level))
         (or (search target-path level)
             (bfs-level (extend-level level)))))

  (bfs-level (list (list u))))
```