Домашно по СЕМ

Даниел Халачев, № 62547, група II, курс III

13 януари 2023 г.

1. Задача

1.1. Задача

Да се докаже комбинаторно, че

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} + k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k-1)!(n-k)} + k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!} + k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)![n-k+k]}{(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_n^k P_k = C_{n-1}^k P_k + k \cdot C_{n-1}^{k-1} P_{k-1}$$

$$C_n^k P_k = C_{n-1}^k P_k + C_{n-1}^{k-1} P_k$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

(правило на Паскал)

Нека допуснем, че има един маркиран елемент в множеството от n елемента. Да изберем k елемента от n може да стане по два начина - да съдържа маркирания елемент или да не го съдържа. Това означава да "изхвърлим"този маркиран елемент и да изберем k от нормалните $n-1$; или да изберем маркирания и останалите $k-1$ от "нормалните".

$$V_n^k = V_{n-1}^k + k \cdot V_{n-1}^{k-1}$$

Нека допуснем, че в множеството от n елемента има един маркиран. Можем да изберем k от тези n елемента (със значение подредбата) по два начина - селекцията да съдържа или да не съдържа маркирания елемент. Можем да направим селекция, която не съдържа маркирания елемент, като го отделим и изберем k от останалите $n-1$. Можем да направим селекция, съдържаща маркирания елемент, като изберем маркирания елемент и изберем $k-1$ немаркирани елемента от останалите $n-1$. Понеже подредбата има значение, този маркиран елемент може да застане на k различни позиции. Събитията селекцията да съдържа и да не съдържа маркирания елемент са несъвместими, което означава, че да изберем k елемента от n със значение подредбата може да стане по сумата от начините в двата сценария.

1.2. Задача

Да се пресметне вероятността при едновременно хвърляне на m зара и n монети да се паднат само шестици и езита, ако заровете и монетите са правилни. Нека:
$X \sim Bin(m, \frac{1}{6})$- брой шестици при хвърляне на m зара
$Y \sim Bin(n, \frac{1}{2})$ - брой езита при хвърляне на n монети

$$\mathbb{P}(X = m) = C_m^m (p_{dice})^m = (p_{dice})^m = (\frac{1}{6})^m$$

$$\mathbb{P}(Y = n) = C_n^n (p_{coin})^n = (p_{coin})^n = (\frac{1}{2})^n$$

$$\mathbb{P}(X = m \cap Y = n) = \mathbb{P}(X = m) \cdot \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{6^m 2^n}$$

2. Задача

Вероятностите за изгаряне на първа, втора и трета лампа са равни съответно на 0.2, 0.4 и 0.6. Вероятностите за излизане на прибора от строя при изгарянето на една, две и три лампи са равни съответно на 0.1, 0.4 и 0.7. Да се пресметне вероятността приборът да излезе от строя.
Нека:
H_1 - изгоряла е лампа от тип 1
H_2 - изгоряла е лампа от тип 2
H_3 - изгоряла е лампа от тип 3
H_{12} - изгорели са лампи от тип 1 и 2
H_{13} - изгорели са лампи от тип 1 и 3
H_{23} - изгорели са лампи от тип 2 и 3
H_{123} - изгорели са лампи от тип 1, 2 и 3
$A = \{$приборът излиза от строя$\}$

H	$\mathbb{P}(H)$	Result
H_0	$(1-0.2)\times(1-0.4)\times(1-0.6)$	0.192
H_1	$0.2\times(1-0.4)\times(1-0.6)$	0.048
H_2	$(1-0.2)\times 0.4\times(1-0.6)$	0.128
H_3	$(1-0.2)\times(1-0.4)\times 0.6$	0.288
H_{12}	$0.2\times 0.4\times(1-0.6)$	0.032
H_{13}	$0.2\times(1-0.4)\times 0.6$	0.072
H_{23}	$(1-0.2)\times 0.4\times 0.6$	0.192
H_{123}	$0.2\times 0.4\times 0.6$	0.048

$F_0 = \{$изгарят нула лампи$\}$
$F_1 = \{$изгаря една лампа$\}$
$F_2 = \{$изгарят две лампи$\}$
$F_3 = \{$изгарят три лампи$\}$

$$\mathbb{P}(F_0) = \mathbb{P}(H_0) = 0.192$$

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(H_1 \cup H_2 \cup H_3) = 0.464$$

$$\mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(H_{12} \cup H_{13} \cup H_{23}) = 0.296$$

$$\mathbb{P}(F_3) = \mathbb{P}(H_{123}) = 0.048$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|F_0)\mathbb{P}(F_0) + \mathbb{P}(A|F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A|F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(A|F_3)\mathbb{P}(F_3)$$

$$\mathbb{P}(A) = 0 \times \mathbb{P}(F_0) + 0.1 \times \mathbb{P}(F_1) + 0.4 \times \mathbb{P}(F_2) + 0.7 \times \mathbb{P}(F_3)$$

$$\mathbb{P}(A) = 0 \times 0.192 + 0.1 \times 0.464 + 0.4 \times 0.296 + 0.7 \times 0.048 = 0.1984$$

3. Задача

За даден експеримент се провеждат $Y \sim Poi(\lambda)$ независими опита, като всеки от тях може да бъде успешен с вероятност p и неуспешен с вероятност $1-p$. Да се намери разпределението на броя на успешните опити X.

$$X \sim Bin(Y,p)$$

$$P(X=k) = \binom{Y}{k} p^k (1-p)^{Y-k}$$

$$P(X=k|Y=y) = \binom{y}{k} p^k (1-p)^{y-k}$$

$$g_x = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}((1-p)+ps)^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}((1-p)+ps)^k$$

$$g_x = e^{-\lambda} e^{\lambda((1-p)+ps)} = e^{p\lambda(s+1)} \Longrightarrow X \sim Poi(\lambda p)$$

4. Задача

Нека за случайните величини X и Y е дадено $\mathrm{E}[X]=0$, $\mathrm{E}[Y]=-3$, $\mathrm{D}[X]=1, \mathrm{D}[Y]=4$ и $\rho(X,Y) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Да се пресметнат очакването и дисперсията на $Z = 3X - 4Y$.

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[3X-4Y] = 3\,\mathrm{E}[X] - 4\,\mathrm{E}[Y] = 30 - 4(-3) = 12$$

$$\mathrm{D}[X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^2]$$

$$\mathrm{D}[Z] = \mathrm{E}[(aX+bY-\mathrm{E}[aX+bY])^2]$$

$$\mathrm{D}[Z] = \mathrm{E}[(aX+bY-a\,\mathrm{E}[X]-b\,\mathrm{E}[Y])^2]$$

$$\mathrm{D}[Z] = \mathrm{E}[(a(X-\mathrm{E}[X])+b(Y-\mathrm{E}[Y]))^2]$$

$$\mathrm{D}[Z] = \mathrm{E}[a^2(X-\mathrm{E}[X])^2 + b^2(Y-\mathrm{E}[Y])^2 + 2ab(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])]$$

$$\mathrm{D}[Z] = a^2\,\mathrm{D}[X] + b^2\,\mathrm{D}[Y] + 2ab\,\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])]$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] \longrightarrow$$

$$\mathrm{D}[Z] = a^2\,\mathrm{D}[X] + b^2\,\mathrm{D}[Y] + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{D}[Z] = 3^2\,\mathrm{D}[X] + (-4)^2\,\mathrm{D}[Y] + 2\cdot 3\cdot(-4)\,\mathrm{Cov}(X,Y) = 9\,\mathrm{D}[X] + 16\,\mathrm{D}[Y] - 24\rho(X,Y)\cdot\sqrt{\mathrm{D}[X]\cdot\mathrm{D}[Y]}$$

$$\mathrm{D}[Z] = 9\cdot 1 + 16\cdot 4 - 24\rho(X,Y)\sqrt{\mathrm{D}[X]\,\mathrm{D}[Y]} = 9 + 64 + 24 * \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1\cdot 4}$$

$$\mathrm{D}[Z] = 73 + 24\sqrt{2}$$

5. Задача

Урна съдържа 2 бели, 2 черни и 6 зелени топки. Изваждат се една по една с връщане 20 топки. Каква е вероятността да изтеглим с 4 повече бели топки отколкото черни?

Нека:

X_1 - брой изтеглени бели топки

X_2 - брой изтеглени черни точки

X_3 - брой изтеглени зелени топки

$$\mathbb{P}(X_1 = k+4, X_2 = k, X_3 = 16-2k) = \frac{20!}{(k+4)!k!(16-2k)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+4}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{16-2k}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 4 + X_2) = \sum_{k=0}^{8} \frac{20!}{(k+4)!k!(16-2k)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+4}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{16-2k}$$

$$\sum_{k=0}^{8} \frac{20!}{(k+4)!k!(6-2k)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+4}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{16-2k} \approx 5.215\%$$

6. Задача

Нека целочислената случайна величина X има пораждаща функция $G(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(X = n)$ и функция на разпределение $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$. Да се изрази функцията $H(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} s^n F(s)$ чрез $G(s)$. Използвайки получения резултат, да се покаже, че

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

$$F(n) = \mathbb{P}(X < n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(X = n)$$

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n F(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (s^n (\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(X = n)))$$

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (s^n \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) - s^n \mathbb{P}(X = n))$$

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) - \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) - G(s)$$

$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) - H(s)$$

$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k)$$

$$G'_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} k s^{k-1} \mathbb{P}(X = k)$$

$$\mathrm{E}[X] = G'_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k)$$

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k)$$

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k)$$