# Домашно по СЕМ

Даниел Халачев, № 62547, група II, курс III

14 януари 2023 г.

## 1. Задача

### 1.1. Задача

**От 10 стандартни тестета от 52 карти се тегли по една карта. Намерете вероятността в получената ръка от 10 карти**

- да няма повтарящи се;

$$\mathbb{P} = \frac{C_{52}^1 \times C_{51}^1 \cdots \times C_{43}^1}{(C_{52}^1)^{10}} = \frac{52 \times 51 \times \cdots \times 43}{52^{10}} \approx 0.397$$

- има поне три аса; В едно теста има 4 аса, следователно

$$\mathbb{P}(\text{поне 3 аса}) = 1 - \mathbb{P}(0,\, 1 \text{ или } 2 \text{ аса}) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} \times \left(\frac{4}{52}\right)^k \times \left(\frac{48}{52}\right)^{10-k} \approx 0.036$$

- да има четири спатии, три кари, две купи и една пика; $X_1 = \{\text{брой спатии}\}$
  $X_2 = \{\text{брой кари}\}$
  $X_3 = \{\text{брой купи}\}$
  $X_4 = \{\text{брой пики}\}$

$$\mathbb{P}(X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 1) = \frac{10!}{4!3!2!1!} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \approx 0.012$$

- броят на черните карти да с точно 4 повече от броя на червените, ако е известно, че черните карти са повече от червените.
  $X = \{\text{брой изтеглени черни карти}\}$
  $Y = \{\text{брой изтеглени червени карти}\}$

$$X + Y = 10$$

$$\mathbb{P}(X = Y + 4 | X > Y) = \frac{\mathbb{P}(X = Y + 4 \cap X > Y)}{\mathbb{P}(X > Y)} = \frac{\mathbb{P}(X = 7 \cap Y = 3)}{\mathbb{P}(X > Y)}$$

$$\mathbb{P}(X = 7 \cap Y = 3) = C_{10}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{15}{128}$$

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k=6}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \frac{193}{512}$$

$$\mathbb{P}(X = Y + 4 | X > Y) = \frac{\mathbb{P}(X = Y + 4 \cap X > Y}{\mathbb{P}(X > Y)} = \frac{60}{193} \approx 0.31$$

### 1.2. Задача

**Всички изделия в дадена партида са изправни, а в друга, 1/4 от изделията са за брак. Изделие, взето от случайно избрана партида, се оказва изправно. Да се пресметне вероятността второ случайно избрано изделие от същата партида да се окаже за брак, ако след проверката на първото изделие, то е било върнато обратно в своята партида.**

Нека
$I$ - партидата само със здрави изделия

$II$ - партидата с $\frac{1}{4}$ дефектни изделия
$FirstGood =$ Първото изтеглено изделие е здраво
$SecondBad =$ Второто изтеглено изделие е дефектно
Търсим

$$\mathbb{P}(SecondBad|FirstGood) = \frac{\mathbb{P}(FirstGood \cap SecondBad)}{\mathbb{P}(FirstGood)}$$

Понеже второто изделие е дефектно (а първото и второто са от една партида), то непременно сме взели от втората партида.

$$\mathbb{P}(SecondBad|FirstGood) = \frac{\mathbb{P}(\text{II})\mathbb{P}(II\ OK)\mathbb{P}(II\ !OK)}{\mathbb{P}(I)\mathbb{P}(I\ OK) + \mathbb{P}(II)(P)(II\ OK)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}(1 + \frac{3}{4})} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4 \times 7} = \frac{3}{28}$$

### 1.3. Задача

**Каква е вероятността корените на квадратното уравнение $x^2 + ax + b = 0, \quad a, b \in [0, 1]$ да бъдат реални числа?**
Едно квадратно уравнение има реални корени, когато неговата дискриминанта е неотрицателна. По условие:

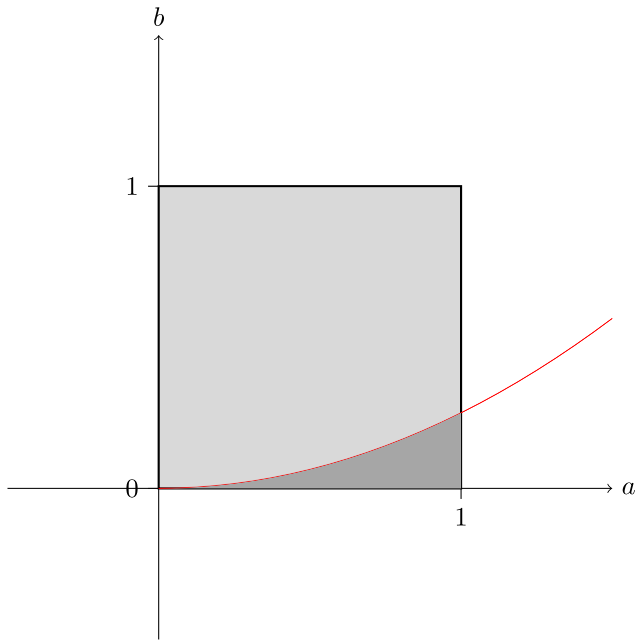
$$1 \geq a \geq 0$$

$$1 \geq b \geq 0$$

Трябва:

$$D = a^2 - 4b \geq 0 \iff b \leq \frac{a^2}{4}$$

Изобразявайки на координатната система ограниченията, получаваме:




$$\mathbb{P} = \frac{S_{\triangle}}{S_{\square}} = \int_0^1 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12}$$

## 2. Задача

**Дете има в левия си джоб четири монети от 1 лв. и три монети от 2 лв., а в десния си джоб две монети от 1 лв. и една монета от 2 лв. Детето прехвърля две монети от левия си в десния си джоб, след това връща обратно две монети от десния в левия. Накрая, детето вади монета от десния си джоб. Каква е вероятността тя да е от 1 лв.?**
Нека:
$A = \{$изтеглена е монета от 1 лв от десния джоб след преместването$\}$
$k$ - броят монети от 1лв, преместени от левия в десния джоб

$l$ - броят монети от 1лв, преместени от десния в левия джоб
$H_k$ - събитието (хипотезата)={преместени са k монети от 1 лв от левия в десния джоб}, $\quad k \in [0, 2]$
$H_l$ - събитието (хипотезата)={преместени са l монети от 1 лв от десния в левия джоб}, $\quad l \in [0, 2]$

$$H_i \cap H_j = \Phi, \quad \forall i \neq j$$
$$F_i \cap F_j = \Phi, \quad \forall i \neq j$$
$$\sum \mathbb{P}(H_i) = 1$$
$$\sum \mathbb{P}(F_i) = 1$$
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{l=0}^{2} \mathbb{P}(A|F_l)\mathbb{P}(F_l) = \sum_{l=0}^{2} \frac{2+k-l}{3}\mathbb{P}(F_l) = \sum_{l=0}^{2} \frac{2+k-l}{3} \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(F_l|H_k)\mathbb{P}(H_k)$$
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \frac{2+k-l}{3} \times \frac{C_{2+k}^{l} \times C_{1+2-k}^{2-l}}{C_5^2} \times \frac{C_4^k \times C_3^{2-k}}{C_7^2} = \frac{22}{35}$$

## 3. Задача

**По две от страните на правилен зар са оцветени в съответно бяло, зелено и червено. Хвърляме този зар два пъти. Нека X е броят на падналите се бели, а Y - на падналите се червени страни. Да се намерят съвместното разпределение на X и Y , независими ли са, ковариацията им, P(X = 1|Y = 1) и P(X > Y).**

| Y \ X | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{4}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{16}{36}$ |
| 1 | $\frac{8}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | 0 | $\frac{16}{36}$ |
| 2 | $\frac{4}{36}$ | 0 | 0 | $\frac{4}{36}$ |
| | $\frac{16}{36}$ | $\frac{16}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | |

| $XY$ | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(XY)$ | $\frac{28}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | 0 | 0 |

$$\mathrm{E}[XY] = 0 \times \frac{28}{36} + 1 \times \frac{8}{36} + 2 \times 0 + 4 \times 0 = \frac{8}{36}$$
$$\mathrm{E}[X] = 0 \times \frac{16}{36} + 1 \times \frac{16}{36} + 2 \times \frac{4}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$
$$\mathrm{E}[Y] = 0 \times \frac{16}{36} + 1 \times \frac{16}{36} + 2 \times \frac{4}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{8}{36} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{8}{36}$$
$$\mathrm{D}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = 0^2 \times \frac{16}{36} + 1^2 \times \frac{16}{36} + 2^2 \times \frac{4}{36} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{36}$$
$$\mathrm{D}[Y] = \mathrm{E}[Y^2] - \mathrm{E}[Y]^2 = 0^2 \times \frac{16}{36} + 1^2 \times \frac{16}{36} + 2^2 \times \frac{4}{36} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{36}$$
$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{D}[X]\,\mathrm{D}[Y]}} = \frac{-\frac{8}{36}}{\sqrt{\frac{16}{36}\frac{16}{36}}} = -\frac{8}{36}\frac{36}{16} = -\frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X = 1|Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = \frac{\frac{8}{36}}{\frac{16}{36}} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2 \cap Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2 \cap Y = 1) = \frac{8}{36} + \frac{4}{36} + 0 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

*Заключение:* $X$ и $Y$ имат отрицателен коефициент на корелация, което означава, че не са независими. Зависимостта между тях е обратнопропорционална.

# 4. Задача

**Нека случайната величина $X$ приема стойности в $N_0$ и**

$$g_X(s) := \mathrm{E}\, s^x = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k)$$

**е пораждащата ѝ функция.**

## 4.1. Задача

**Нека $Y = 3X$ и $Z = X_1 + X_2$ , където $X1, X2 \sim X$ са независими. Изразете чрез $g_X$ пораждащите функции $g_Y$ и $g_Z$.**

$$Y = 3X$$

$$g_Y(s) = \mathrm{E}[s^{3x}] = \mathrm{E}[s^x \cdot s^x \cdot s^x] = \mathrm{E}[s^x] \cdot \mathrm{E}[s^x] \cdot \mathrm{E}[s^x] = g_X(s) \cdot g_X(s) \cdot g_X(s) = (g_x(s))^3$$

$$\dots$$

$$Z = X_1 + X_2$$

$$g_Z(s) = \mathrm{E}[s^{X_1+X_2}] = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} s^{i+j}\mathbb{P}(X_1 = i \cap X_2 = j)$$

$$g_Z(s) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} s^{i+j}\mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j \mathbb{P}(X_2 = j) \sum_{i=0}^{\infty} s^i \mathbb{P}(X_1 = i)$$

$$g_Z(s) = g_{X_1}(s) g_{X_2}(s) = (g_X(s))^2$$

## 4.2. Задача

**Нека $X \sim Ge(p)$, т.е. $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$ за $k \in N_0$. Пресметнете $g_X$ и чрез нейна помощ намерете $\mathrm{E}\, X$ и $\mathrm{D}\, X$**

$$g_X(s) := \mathrm{E}\, s^x = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p(1-p)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p s^k q^k = p\sum_{k=0}^{\infty} (qs)^k = \frac{p}{1-qs}$$

$$g'_X(s) = \frac{pq}{(1-qs)^2}$$

$$g''_X(s) = \frac{-pq\left((1-qs)^2\right)'}{(1-qs)^4} = \frac{2pq^2}{(1-qs)^3}$$

$$\mathrm{E}\, X := g'_X(1)$$

$$\mathrm{E}\, X = g'_X(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{1-p}{p}$$

$$\dots$$

$$\mathrm{D}\, X := g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$$

$$g''_X(1) = \frac{2q^2}{p^2}$$

$$\mathrm{D}\, X = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

# 5. Задача

**Нека X и Y са независими случайни величини и $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 2\mathbb{P}(Y = 3) = 2\mathbb{P}(Y = 5)$ Нека $Z_1 := 2X + Y + 1, Z_2 := XY$ и $Z_3 = X^Y$. Намерете очакванията и дисперсиите им.**

| $X$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

| $X^2$ | $1$ |
|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $1$ |

$$\mathrm{E}[X] = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\mathrm{E}[X^2] = 1$$

$$\mathrm{D}\, X = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = 1 - 0 = 1$$

| $Y$ | $1$ | $3$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

| $Y^2$ | $1$ | $9$ | $25$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

$$\mathrm{E}[Y] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\mathrm{E}[Y^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} = 9$$

$$\mathrm{D}\, Y = \mathrm{E}[Y^2] - (\mathrm{E}[Y])^2 = 9 - \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$

| $2X+Y$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $1$ | $-1$ | $3$ |
| $3$ | $1$ | $5$ |
| $5$ | $3$ | $7$ |

$$\mathrm{E}[2X+Y] = 2\,\mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y] = 2 \cdot 0 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\mathrm{D}[2X+Y] = \mathrm{D}[2X] + \mathrm{D}[Y] = 4\,\mathrm{D}[X] + \mathrm{D}[Y] = 4 \cdot 1 + \frac{13}{2} = \frac{21}{2}$$

| $XY$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $1$ | $-1$ | $1$ |
| $3$ | $-3$ | $3$ |
| $5$ | $-5$ | $5$ |

$$\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = 0 \cdot \frac{5}{2} = 0$$

$$\mathrm{D}[XY] = \mathrm{D}[X] \cdot \mathrm{D}[Y] = 1 \cdot \frac{13}{2} = \frac{13}{2}$$

| $X^Y$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $1$ | $-1$ | $1$ |
| $3$ | $-1$ | $1$ |
| $5$ | $-1$ | $1$ |

$\Longrightarrow$

| $X^Y$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

| $(X^Y)^2$ | $1$ |
|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $1$ |

$$\mathrm{E}[X^Y] = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\mathrm{D}[X^Y] = \mathrm{E}[(X^Y)^2] - (\mathrm{E}[X^Y])^2 = 1 - 0 = 1$$