Твърдение. Операцията суперпозиция запазва изчислимостта с помощта на машини на Тюринг.

Д-во. За простота ще разгледаме случая $n=2$ и $k=1$, т.е. имаме функции $f: N^2 \to N$, f - изчислима с помощта на машина на Тюринг F, $g_i: N \to N$, $i=1,2$, са изчислими с помощта на машини на Тюринг G_i, $i=1,2$. Нека $h: N \to N$, $h(x) = f(g_1(x), g_2(x))$. Ще построим машина на Тюринг H, която изчислява функцията h. Ще видим как да получим H на стъпки, знаейки как се пресмята h и използвайки стандартните машини на Тюринг.

$\rhd \underline{\sqcup} 1^x \xrightarrow{C} \rhd \underline{\sqcup} 1^x \sqcup 1^x \xrightarrow{R_\sqcup} \rhd \sqcup 1^x \underline{\sqcup} 1^x \xrightarrow{G_1} \rhd \sqcup 1^x \underline{\sqcup} 1^{g_1(x)}$

(това е възможно само ако $g_1(x)$ е дефинирана, иначе G_1 няма да стигне до стоп-състояние и до резултат)

$\xrightarrow{L_\sqcup} \rhd \underline{\sqcup} 1^x \sqcup 1^{g_1(x)} \xrightarrow{C_2} \rhd \underline{\sqcup} 1^x \sqcup 1^{g_1(x)} \sqcup 1^x \xrightarrow{R^2_\sqcup} \rhd \sqcup 1^x \sqcup 1^{g_1(x)} \underline{\sqcup} 1^x$

$\xrightarrow{G_2} \rhd \sqcup 1^x \sqcup 1^{g_1(x)} \underline{\sqcup} 1^{g_2(x)}$ (отново е възможно само ако $g_2(x)$ е дефинирано) $\xrightarrow{L_\sqcup} \rhd 1^x \underline{\sqcup} 1^{g_1(x)} \sqcup 1^{g_2(x)} \xrightarrow{F}$

$\rhd \sqcup 1^x \underline{\sqcup} 1^{f(g_1(x), g_2(x))} \equiv \rhd \sqcup 1^x \underline{\sqcup} 1^{h(x)}$

Тук също машината дава този резултат, само ако $h(x)$ е определена. Както и миналия път ние използвахме тук лентата и като буфер за запазване на входните данни. Окончателно,

$H = C R_\sqcup G_1 L_\sqcup C_2 R^2_\sqcup G_2 L_\sqcup F$, с което твърдението е доказано.

Твърдение. Операцията примитивна рекурсия запазва изчислимостта с помощта на машини на Тюринг.

Д-во. Нека $f: N \to N$ и $g: N^3 \to N$ и f и g са изчислими с помощта на машини на Тюринг, F изчислява функцията f и G изчислява g, F и G машини на Тюринг. Нека освен това $h: N^2 \to N$, h се получава от f и g с помощта на операцията ПР, т.е.

$h(x,0) \simeq f(x)$

$h(x,y+1) = g(h(x,y), x, y)$, $x, y \in N$.

Тук малко променихме (несъществено) дефини-

цията, като вместо $g(x, y, h(x,y))$ записахме горното
Всичко е за сметка на реда на променливите.

$\rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y \xrightarrow{C_2} \rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^x \xrightarrow{R_\sqcup^3} \rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^x \xrightarrow{F}$

$\rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^{f(x)} \xrightarrow{L_\sqcup} \rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,0)} \xrightarrow{\sqcup}$

Сега проверяваме дали главата чете $\sqcup$ или 1.
Ако главата чете $\sqcup$, то продължаваме с $RR_\sqcup$ и получаваме

$\rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,0)} \xrightarrow{R} \rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,0)} \xrightarrow{R_\sqcup}$

$\rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,0)}$ — това е окончателния резултат

Да означим с $M_1 = C_2 R_\sqcup^3 F L_\sqcup \sqcup$

Ако главата чете 1, то продължаваме с

$\rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^{y-1}1\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,0)} \xrightarrow{L_\sqcup^2} \rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,0)} \xrightarrow{C_3}$

$\rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,0)}\sqcup 1^x \xrightarrow{R_\sqcup^2} \rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^x\sqcup 1^{h(x,0)}\sqcup 1^x \xrightarrow{C_2}$

$\rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,0)}\sqcup 1^x\sqcup 1^0 \xrightarrow{R_\sqcup} \rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,0)}\sqcup 1^x\sqcup 1^0 \xrightarrow{G}$

$\rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^{g(h(x,0),x,0)} \xrightarrow{L_\sqcup} \rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^y\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,1)} \xrightarrow{L}$

$\rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^{y-1}1\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,1)} \xrightarrow{\sqcup} \rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^{y-1}\sqcup\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,1)} \xrightarrow{R}$

$\rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^{y-1}\sqcup\sqcup 1^0\sqcup 1^{h(x,1)} \xrightarrow{1} \rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^{y-1}\sqcup 1^1\sqcup 1^{h(x,1)} \xrightarrow{L^2}$

$\rhd\sqcup 1^x\sqcup 1^{y-1}\sqcup 1^1\sqcup 1^{h(x,1)}$

И отново проверяваме дали главата чете $\sqcup$ или 1
Да означим с $M_2 = L_\sqcup^2 C_3 R_\sqcup^2 C_2 R_\sqcup G L_\sqcup L \sqcup R 1 L$
Тогава машината H ще бъде следната

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & M_1 L \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\sqcup"] & M_2 \arrow[l, bend right] \\ & RR_\sqcup & \end{tikzcd}$$

С това твърдението е доказано.

Теорема. Всички примитивно рекурсивни функции са изчислими с помощта на машини на Тюринг.
Д-во. Следва от горните 3 твърдения.

Частично рекурсивни функции

Д. Нека $f: N^{n+1} \longrightarrow N$ (частично определена). Казваме, че функцията $g: N^n \longrightarrow N$ се получава от f с помощта на операцията минимизация (или още μ-операция) ако за произволни $x_1, \dots, x_n, y$ е изпълнена еквивалентността:

$g(x_1, \dots, x_n) = y \iff$ са изпълнени следните две условия: а) $f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ и

б) $\forall z < y$ ($f(x_1, \dots, x_n, z)$ е дефинирано и $f(x_1, \dots, x_n, z) > 0$)

Когато g се получава от f с помощта на μ-операция (минимизация), това се записва така

$$g(x_1, \dots, x_n) = \mu y [f(x_1, \dots, x_n, y) = 0].$$

От горната дефиниция се вижда, че всъщност тази операция дава най-малкото решение относно y на уравнението $f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ при фиксирани $x_1, \dots, x_n$.

Алгоритъмът за пресмятане на функцията g при фиксирани $x_1, \dots, x_n$ е следния: Започваме да пресмятаме $f(x_1, \dots, x_n, 0)$, $f(x_1, \dots, x_n, 1), \dots$ докато някой член на редицата не е дефиниран или е 0. Ако $f(x_1, \dots, x_n, 0)$ не е дефинирана, то $g(x_1, \dots, x_n)$ не е дефинирана; ако $f(x_1, \dots, x_n, 0) = 0$, то $g(x_1, \dots, x_n) = 0$. Ако $f(x_1, \dots, x_n, 0) > 0$, то проверяваме $f(x_1, \dots, x_n, 1)$. Ако $f(x_1, \dots, x_n, 1)$ не е деф., то $g(x_1, \dots, x_n)$ не е дефинирана. Ако $f(x_1, \dots, x_n, 1) = 0$, то $g(x_1, \dots, x_n) = 1$; ако $f(x_1, \dots, x_n, 1) > 0$ то продължаваме нататък.

Д. (Индуктивна деф. на частично рекурсивните функции (ЧРФ)).

а) Всички основни ПРФ – O, S, I_i^n са ЧРФ;

б) Ако $f, g_1, \dots, g_n$ са ЧРФ, то и тяхната суперпозиция също е ЧРФ;

в) Ако f и g са ЧРФ, то и ф-цията, която се получава от тях с помощта на ПР, също е ЧРФ;

г) Ако f е ЧРФ, то и функцията g, която се получава

от нея с помощта на μ-операция, също е ЧРФ.
Тук искам да отбележа, че всички ПРФ са навсякъде дефинирани, защото основните ПРФ са навсякъде дефинирани и операциите суперпозиция и примитивна рекурсия запазват навсякъде дефинираността. Това обаче не е вярно за ЧРФ. Тук имаме възможност да получим навсякъде недефинирани функции с помощта на μ-операция от навсякъде деф. ф-ции. Например, ако разгледаме константата 1 на 2 променливи $f(x,y)=1$, то $g(x)=\mu y[f(x,y)=0]$ ще бъде никъде дефинирана ф-ция.

Твърдение. Операцията минимизация запазва изчислимостта с помощта на машини на Тюринг.

Д-во. Нека за простота да приемем, че $n=1$, т.е. $f: N^2 \to N$ и f се изчислява посредством маш. на Т. F, а $g: N \to N$, $g(x)=\mu y[f(x,y)=0]$.

$$\triangleright \underline{\sqcup} 1^x \xrightarrow{C} \triangleright \underline{\sqcup} 1^x \sqcup 1^0 \sqcup 1^x \xrightarrow{R_\sqcup} \triangleright \sqcup 1^x \underline{\sqcup} 1^0 \sqcup 1^x \xrightarrow{C} \triangleright \sqcup 1^x \underline{\sqcup} 1^0 \sqcup 1^x \sqcup 1^0$$
$$\xrightarrow{R_\sqcup} \triangleright \sqcup 1^x \sqcup 1^0 \underline{\sqcup} 1^x \sqcup 1^0 \xrightarrow{F} \triangleright \sqcup 1^x \sqcup 1^0 \underline{\sqcup} 1^{f(x,0)} \xrightarrow{R}$$

Тук проверяваме дали главата чете $\sqcup$ или 1.
Ако главата чете $\sqcup$, то продължаваме с $LL_\sqcup$ и получаваме

$$\triangleright \sqcup 1^x \sqcup 1^0 \sqcup \underline{1}^{f(x,0)=0} = \triangleright \sqcup 1^x \sqcup 1^0 \sqcup \underline{\overset{\sqcup}{1^0}} \xrightarrow{L} \triangleright \sqcup 1^x \sqcup 1^0 \underline{\sqcup} 1^0 \xrightarrow{L_\sqcup}$$
$$\triangleright \sqcup 1^x \underline{\sqcup} 1^0$$

Ако главата чете 1, то продължаваме

$$\triangleright \sqcup 1^x \sqcup 1^0 \sqcup \underline{1}^{f(x,0)>0} \xrightarrow{R_\sqcup} \triangleright \sqcup 1^x \sqcup 1^0 \sqcup 1^{f(x,0)} \underline{\sqcup} \xrightarrow{D_\leftarrow} \triangleright \sqcup 1^x \sqcup 1^0 \underline{\sqcup} \xrightarrow{1}$$
$$\triangleright \sqcup 1^x \sqcup \underline{1} \xrightarrow{L_\sqcup^2} \triangleright \underline{\sqcup} 1^x \sqcup 1^1$$

Да положим $M_1 = C_1 R_\sqcup C_1 R_\sqcup F$ и $M_2 = R_\sqcup D_\leftarrow 1 L_\sqcup^2$
Тогава да положим с G машината на Тюринг

$$\begin{tikzcd} > M_1 R \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\sqcup"] & M_2 \arrow[l, bend right] \\ L L_\sqcup \end{tikzcd}$$

Машината на Тюринг G изчислява функцията g.

С това твърдението е доказано.
Като следствие получаваме следната

Теорема. Всички частично рекурсивни функции са изчислими с помощта на машини на Тюринг

Различни разширения на машини на Тюринг

Досега ние се занимавахме само с едностранна машина на Тюринг, ограничена само отляво. Могат да се разгледат и машини на Тюринг, които имат k на брой безкрайни ленти, ограничени отляво. Те се различават от машините с една лента само, че функцията на преход зависи от това, което четат всичките k глави върху съответните ленти. Те са удобни когато имаме да изчисляваме например суперпозиции на много функции. Тогава на всяка лента можем да изчисляваме поотделно съответните функции и най-накрая пресмятаме суперпозицията на последната лента.

Могат да се разглеждат и една лента с много независими четящи глави. Така могат да се имитират машини с k ленти и обратно.

Могат да се разглеждат и машини с безкрайни ленти неограничени отляво и отдясно.

Ние няма да се занимаваме с всички разновидности и модификации на машини на Тюринг.

Ще отбележим само една теорема.

Теорема. Всеки език, който е рекурсивен, полуразрешим и всяка функция, която е изчислима с различните видове споменати машини на Тюринг по-горе е рекурсивен, полуразрешим и съответно изчислима функция с помощта на стандартна машина на Тюринг.

Само за информация ще кажа още, че се разглеждат машина на Тюринг със случаен достъп (random access). Ние тук обаче ще се спрем на машини на Тюринг, които са наречени недетерминистични машини на Тюринг. Те играят важна роля за определянето на класовете P и NP, които са свързани с много известната хипотеза

$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Формално, недетерминистична машина на Тюринг се определя както следва:

Д. Недетерминистична машина на Тюринг е петица $M=(K, \Sigma, \Delta, s, H)$, където всичко останало без Δ е както при стандартната машина на Тюринг, а вместо δ - функция на преходите при стандартната машина на Тюринг, имаме Δ, която е релация на преходите $\Delta \subseteq ((K \setminus H) \times \Sigma) \times (K \times (\Sigma \cup \{\rightarrow, \leftarrow\}))$.

Всички дефиниции за конфигурации, релацията $\vdash_M$ и $\vdash_M^*$ се определят аналогично, по естествен начин. Единствената разлика с $\vdash_M$ от стандартните машини е, че имаме не само една възможност за извод (тук имаме недетерминиран вариант, докато при стандартната всичко е детерминирано). При недетерминираните машини на Тюринг от една конфигурация можем да имаме различни изводи (различни пътища, като дърво да се разклонят).

Д. Нека $M=(K, \Sigma, \Delta, s, H)$ е недетерминистична маш. на Т (НМТ). Казваме M приема $w \in (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$ т.т.к. $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (h, u\underline{a}v)$ за някое $h \in H$ и $u, v \in \Sigma^*$.

Казваме, че M полуразрешава езика $L \subseteq (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$ т.т.к. за всички $w \in (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$ е изпълнена екв.:

$$w \in L \iff M \text{ приема } w.$$

Д. Един език L се нарича полуразрешим т.т.к. съществува НМТ M такова, че M полуразрешава L.

Д. Нека $M=(K, \Sigma, \Delta, s, H)$ е НМТ. Казваме, че M разрешава езикът $L \subseteq (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$ т.т.к. $H=\{y, n\}$ и за всяко $w \in (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$ са изпълнени следните две условия:

а) Съществува естествено число n, зависещо от M и w такова, че не съществува конфигурация C удовлетворяваща $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^n C$;

б) $w \in L \iff (s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (y, u\underline{a}v)$ за някои $u, v \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.

8. Нека $M = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$ е НМТ. Казваме, че функцията $f: (\Sigma \setminus \{D, ⊔\})^* \to (\Sigma \setminus \{D, ⊔\})^*$ е изчислима с помощта на M т.т.к. следните две условия са изпълнени за произволно $w \in (\Sigma \setminus \{D, ⊔\})^*$:

а) Съществува естествено число n, зависещо от M и w, такова че няма конфигурация C, такава, че: $(s, D\underline{⊔}w) \vdash_M^n C$;

б) $(s, D\underline{⊔}w) \vdash_M^* (h, u\underline{a}v)$ т.т.к. $u\underline{a} = D\underline{⊔}$ и $v = f(w)$.

Оказва се отново, че изчислимостта, приемането, полуразпознаването, рекурсивността (разрешимостта) при НМТ съвпада със съответните понятия при обичайните маш. на Т.

Най-накрая ще отбележим, че във връзка с машините на Тюринг можем, аналогично както при стековите автомати, да разгледаме и граматики като генератори. Тук съответния генератор е граматика, но не КСГ. Тук граматиките ще бъдат пак $G = (V, \Sigma, R, S)$ и тук единственото ново е че R вместо да бъде $R \subseteq (V \setminus \Sigma) \times V^*$ е изпълнено $R \subseteq (V^*(V \setminus \Sigma)V^*) \times V^*$, т.е. правилата ще бъдат контекстно зависими.

Това което се получава тук, при абсолютно аналогични дефиниции на $\Rightarrow_G$ и $\Rightarrow_G^*$ че един език L се поражда от граматиката G ($L(G) = \{w \mid S \Rightarrow^* w$ и $w \in \Sigma^*\}$) т.т.к. L е рекурсивно номеруем (полуразпознаваем в термините на машините на Тюринг).