Домашно № 2

Даниел Иванов Халачев, ФН: 62547, курс II

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2|x-2|}}{x}$$

Д.О: $\forall x\neq 0 \Rightarrow \boxed{x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)}$

$f(x)\neq f(-x)\neq -f(x) \Rightarrow f(x)$ — нито четна, нито неч.; непериодична

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2|x-2|}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x-2}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2|x-2|}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}=-1$$

$y=\pm1$ — хоризонт. асимпт.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2|x-2|}}{x}=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt[3]{x^2|x-2|}}{x}=\lim_{x\to0^-}\sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}=-\infty$$

$\boxed{x=0}$ — вертик. асимпт.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-0\cdot x)=\pm1 \Rightarrow$ няма други наклонени асимптоти освен $y=\pm1$

$f(x)\cap Ox \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{x^2|x-2|}}{x}=0 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$

$f(x)\cap O_y \Leftrightarrow x=0 \rightarrow f(x)\cap O_y=\emptyset$

От $\lim\limits_{x\to\pm0} f(x)=\pm\infty \Rightarrow f(x)$ няма най-голяма и най-малка стойност

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2|x-2|}}{x}=\sqrt[3]{\frac{|x-2|}{x}}=(\operatorname{sign}(x-2))\cdot\underbrace{\sqrt[3]{\frac{x-2}{x}}}_{g(x)}$$

Тоест, $f'(x)=(\operatorname{sign}(x-2))\cdot g'(x)$.

Алтернативно:

I сл. $x\geq 2 \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-2}{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)'=$

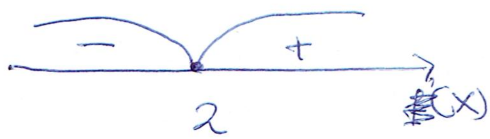
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x-2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{(x-2)'\cdot x-(x-2)\cdot x'}{x^2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot 2}{(x-2)^{\frac{2}{3}}\cdot x^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}\cdot x^2}=\frac{2}{3x^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}$$

II сл. $x\leq 2 \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{\frac{2-x}{x}} \Rightarrow f'(x)=\dots=-\frac{2}{3x^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}$

Окончателно: $f'(x)=\frac{2\operatorname{sign}(x-2)}{3x^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2\operatorname{sign}(x-2)}{3\sqrt[3]{x^4(x-2)^2}\;\}\geq 0}$

$\Rightarrow \operatorname{sign}(f'(x))=\operatorname{sign}(x-2)$



$f(x)$ не е диференцируема за $x=2$, но $f'(x)$ си сменя знака в $x_0=2$.

$$\forall\delta<2:\ \left.\begin{array}{l}\forall x\in(2-\delta,\,2)\ \ f'(x)\leq 0\\ \forall x\in(2;\,2+\delta)\ \ f'(x)\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$ $x=2$ е локален минимум (единствен)

Аналогично за $f''(x)$: $f''(x) = (\operatorname{sign}(x-2))\, g''(x)$

или алтернативно:

I сл. $x \geq 2 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3x^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow$

$$f''(x) = \left(\frac{2}{3}\left(x^4(x-2)^2\right)^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{2}{9}\left(x^4(x-2)^2\right)^{-\frac{4}{3}}\left(x^4(x-2)^2\right)' =$$

$$= -\frac{2}{9}\left(x^4(x-2)^2\right)^{-\frac{4}{3}}\left(x^6-4x^5+4x^4\right)' = -\frac{2}{9}\left(x^4(x-2)^2\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\left(6x^5-20x^4+16x^3\right)$$

$$= -\frac{4x^3(x-2)(3x-4)}{9x^{\frac{16}{3}}(x-2)^{\frac{8}{3}}} = -\frac{4(3x-4)}{9x^{\frac{7}{3}}(x-2)^{\frac{5}{3}}} < 0$$

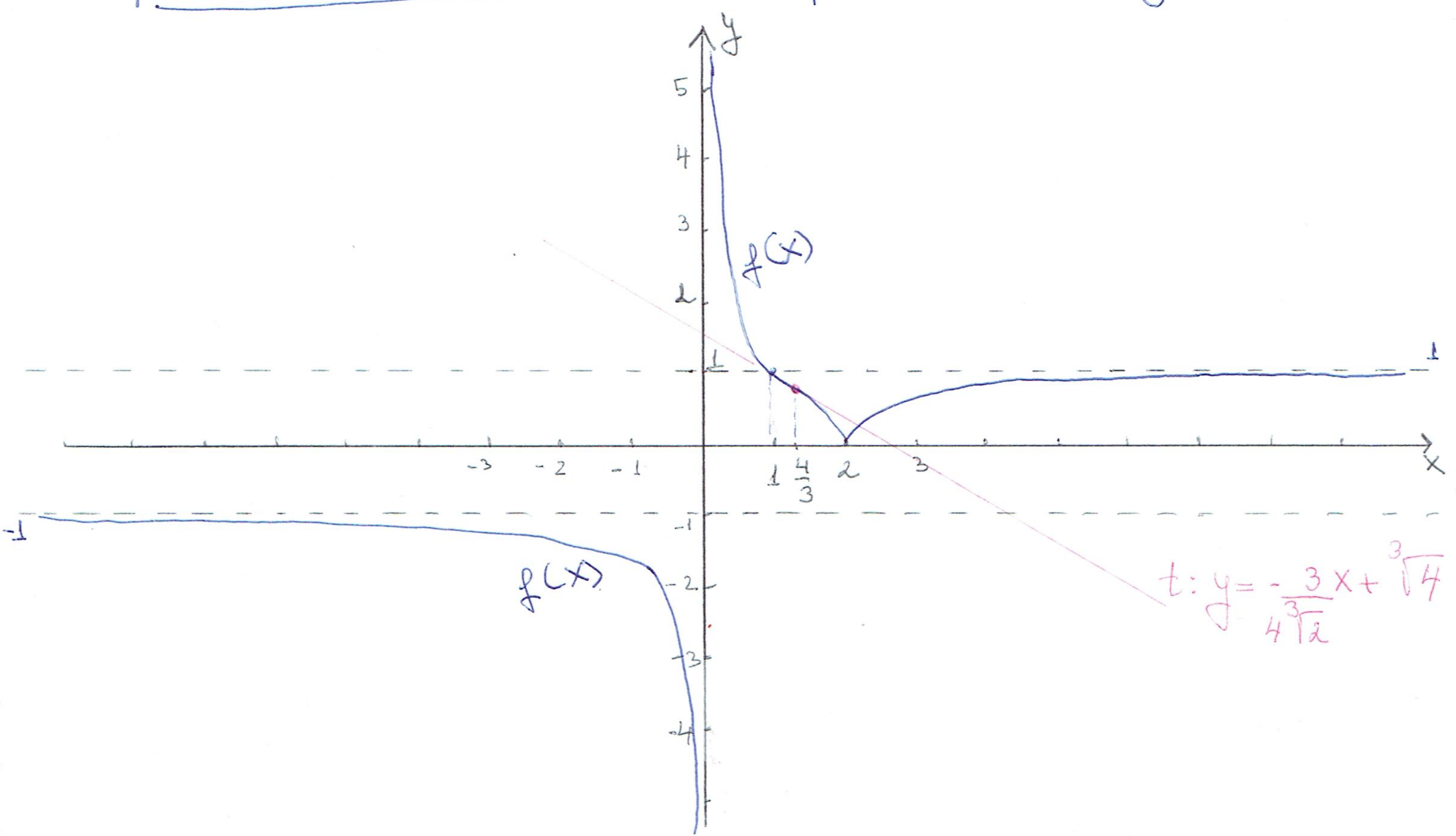
II сл. $x<2$: $f''(x) = \left(-\frac{2}{3}\left(x^4(x-2)^2\right)^{-\frac{1}{3}}\right)' = \ldots = \dfrac{4(3x-4)}{9x^{\frac{7}{3}}(x-2)^{\frac{5}{3}}}$

$-$ 0 $+$ $\frac{4}{3}$ $+$ x

$\Rightarrow$ $-$ 0 $+$ $\frac{4}{3}$ $-$ x $\operatorname{sign} f''(x)$

$\Rightarrow$ 0 и $\frac{4}{3}$ - инфлексни точки

$\Rightarrow f'(x)$ изпъкнала за $x \in (0; \frac{4}{3})$ и вдлъбната за $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{4}{3}; +\infty)$



$f(x)$ се нулира в $x=2$, но $f(x)$ не е диференцируема в $x=2 \Rightarrow$ там няма допирателна. Аналогично за $x=0$.

$f''(x)$ се нулира за $x_0=\frac{4}{3}$

$$f(x_0)=y_0=\sqrt[3]{\frac{\left|\frac{4}{3}-2\right|}{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$t: y=\underbrace{f'(x_0)}_{k}(x-x_0)+f(x_0)$ – уравнение на допирателната t в точката x_0

$$k=-\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{4^4}{3^4}\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=-\frac{3}{4\sqrt[3]{2}}\Rightarrow$$

$$y=-\frac{3}{4\sqrt[3]{2}}\left(x-\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Rightarrow$$

$$t: y=-\frac{3}{4\sqrt[3]{2}}x+\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \qquad \frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4}$$

← допирателна към $f(x)$ в точката $x_0=\frac{4}{3}$

$$\boxed{t: y=-\frac{3x}{4\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{4}}$$