Дифенцируемост на функции на много променливи

Нека множеството $D \in \mathbb{R}^n$ и $f : D \to \mathbb{R}$.

1. Дефиниция на частна производна

Предполагаме, че е зададена Декартова координатна система в $\mathbb{R}^2$. (В началото, за по-малко писане, ще разглеждаме функции на две променливи.) Искаме да обобщим дефиницията за производна на функция на една променлива. Един начин е, например, да фиксираме $y = y_0$, т.е. да разглеждаме функцията (на една променлива) $f(x, y_0) : D' \to \mathbb{R}$, където D' е правата с уравнение $y = y_0$. Така дефинираме частна производна на $f(x, y)$ по x в точката (x_0, y_0) като използваме дефиницията за производна на функция на една променлива:

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично се дефинира частна производна на $f(x, y)$ по y в точката (x_0, y_0).

Бележка 1.
Символът за означаване на частна производна $\frac{\partial f}{\partial x}$ е различен от символа за производна на функция на една променлива $\frac{df}{dx}$. Също, при функции на много променливи означението f', без индекс, който показва по коя променлива се диференцира, няма смисъл. Често, вместо $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, се използват и означенията f_{x_k} и $\partial_k f$.

Пример (формално намиране на частни производни)

$$f(x, y) = xye^{\frac{x}{y}}$$

За намирането на f'_x считаме y за константа, а за f'_y считаме x за константа.

$$f'_x = ye^{\frac{x}{y}} + xye^{\frac{x}{y}} \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f'_y = xe^{\frac{x}{y}} + xye^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Пример

1) Да се докаже, че функцията $u = yf\left(x^2 - y^2\right)$, където $f = f(z)$ е произволна функция на една променлива, удовлетворява частното диференциално уравнение от първи ред

$$y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = xu.$$

Наистина,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yf'\left(x^2 - y^2\right) 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f\left(x^2 - y^2\right) - 2y^2 f'\left(x^2 - y^2\right).$$

Замествайки в лявата част на уравнението, получаваме

$$y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy^3 f'\left(x^2 - y^2\right) + xyf\left(x^2 - y^2\right) - 2xy^3 f'\left(x^2 - y^2\right) = xu.$$

Пример

Да се намери възможно най-общия вид на функцията $f(x, y, z)$ за която $\partial_3 f(x, y, z) = ze^{\frac{x^2 z^2}{y}}$.
Имаме

$$f(x, y, z) = \int \partial_3 f(x, y, z) dz + g(x, y) = \int ze^{\frac{x^2 z^2}{y}} dz + g(x, y) = \frac{y}{2x^2} e^{\frac{x^2 z^2}{y}} + g(x, y)$$

където $g(x, y)$ е константата на интегриране.

Бележка 2.
При функции на една променлива, ако една функция е диференцируема в дадена точка, то тя е и непрекъсната в тази точка. При функции на много променливи, от съществуването на частните производни f'_x и f'_y в дадена точка, не следва, че функцията е непрекъсната в тази точка.

Пример (съществуват f'_x и f'_y в $(0,0)$, но f е прекъсната)

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{за } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{за } x=y=0 \end{cases}$$

Наистина,

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично $f'_y(0,0) = 0$. В същото време $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ и $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{5}$.

2. Диференцируемост на функция

Друг начин да обобщим дефиницията за производна на функция на една променлива, е като напишем условието за диференцируемост на $f(x)$ в точката x_0 по следния начин

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x},$$

т.е.

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Искаме да дефинираме аналог при функция на две променливи.
Дефинираме нарастване на функция на две променливи:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0).$$

Аналог на линейната част от нарастването (диференциала на $f(x)$ в точката x_0 за нарастване Δx), т.е. за $df = f'(x_0)\Delta x = A\Delta x$ (A е константа) дефинираме с $df = A\Delta x + B\Delta y$, където A и B са константи. Нарастването на аргумента се дава с вектора $(\Delta x, \Delta y)$ с големина $\|\Delta x, \Delta y)\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \rho$.

Дефиниция (за диференцируемост на функция на две променливи).
Функцията $f(x,y)$ е диференцируема в точката (x_0,y_0) ако съществуват константи A и B такива, че $\Delta f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$.

Дефинираме:
диференциал на x: $dx = \Delta x$
диференциал на y: $dy = \Delta y$
диференциал на f: $df = A\Delta x + B\Delta y = Adx + Bdy$
Тогава горното условие се записва във вида $\Delta f = df + o(\rho)$.

Теорема 1.

Ако $f(x,y)$ е диференцируема в точката (x_0,y_0), то тя е и непрекъсната в тази точка.

Теорема 2.

Ако $f(x,y)$ е диференцируема в точката (x_0,y_0) и $df = Adx + Bdy$, то съществуват частните производни в тази точка и $f'_x(x_0,y_0) = A$, $f'_y(x_0,y_0) = B$. Тогава имаме

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad \text{и} \quad f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + o(\rho(x-x_0, y-y_0)).$$

Обратното не е вярно, т.е. от съществуването на $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$ не следва, че $f(x,y)$ е диференцируема в точката (x_0,y_0).

Пример (съществуват $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$, но $f(x,y)$ не е диференцируема в (0,0))

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{за } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{за } x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Наистина,

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично $f'_y(0,0) = 1$. Следователно, ако $f(x,y)$ е диференцируема в точката $(0,0)$, трябва $f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)(x-0) + f'_y(0,0)(y-0) + o(\rho(x,y))$, т.е.

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = x + y + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad \text{или} \quad \frac{-xy(x+y)}{x^2+y^2} = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

което е равносилно на

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

Последното, очевидно, не е изпълнено (докажете).

В сила е обаче следната теорема.

Теорема 3.

Ако съществуват $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$ и $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ са непрекъснати в точката (x_0,y_0), то $f(x,y)$ е диференцируема в точката (x_0,y_0).

Бележка 3.

Условието за непрекъснатост на $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ в точката (x_0,y_0) не е необходимо за да е диференцируема $f(x,y)$ в точката (x_0,y_0).

Пример (непрекъснатостта на f'_x и f'_y не е необходима за диференцируемостта на f) (докажете)

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{за } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{за } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Задачи за упражнение

1) Да се докаже, че $f(x,y)$ е диференцируема в точката $(0,0)$, ако:

a)

$$f(x,y) = |y| \sin x,$$

b)

$$f(x,y) = \sqrt{1 - |x|^{1/3}|y|^{5/6}}.$$

2) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Намерете $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$. Диференцируема ли е $f(x,y)$ в точката $(0,0)$?

Бележка 4.

Обърнете внимание, че функцията $f(y) = |y|$ не е диференцируема в точката $y = 0$, но $f(x,y) = |y|\sin x$ е диференцируема в $(0,0)$ и следователно съществува и частната производна $f'_y(0,0)$.

3. Диференциране на сложна функция

Теорема 4.

Дадена е функцията $f(x,y)$, където $x = x(t)$ и $y = y(t)$ и съществуват $\frac{dx}{dt}(x_0,y_0)$ и $\frac{dy}{dt}(x_0,y_0)$, $x(t_0)$ и $y(t_0)$. Тогава съществува $\frac{df}{dt}(x_0,y_0)$ и

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Бележка 5.

Функцията f е функция на две променливи x и y, т.е. могат да бъдат намерени частните производни на f по всяка от променливите (x и/или y): $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. В същото време x и y са функции на друга променлива t, т.е. замествайки x и y в f получаваме нова функция g на една промелива t. Следователно, може да бъде намерена производната на g по t: $\frac{dg}{dt}$. За да се избегне излишно усложняване при записа, се пише $\frac{df}{dt}$ вместо $\frac{dg}{dt}$.

Пример

$$f(x,y) = x^2 y, \quad x = e^t, \quad y = \sin t.$$

Тогава, замествайки x и y във f получаваме нова функция g на една променлива t, т.е. $g(t) = f(x(t), y(t)) = e^{2t}\sin t$ и можем да намерим нейната производна

$$g'(t) = \frac{dg}{dt} = 2e^{2t}\sin t + e^{2t}\cos t.$$

Сега ще намерим същата производна като използваме горната теорема. Имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \quad \frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t.$$

Тогава,

$$\frac{df}{dt} = 2xy.e^t + x^2.\cos t = 2e^t\sin te^t + \left(e^t\right)^2\cos t = 2e^{2t}\sin t + e^{2t}\cos t.$$

Следствие 1.

Дадена е функцията $f(x, y)$, където $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$. Тогава

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

По-общо: ако $f = f(x_1, ..., x_n)$ и $x_i = x_i(t_1, ...t_k)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}.$$

4. Първи диференциал на функция

Теорема 5.

Функцията $f(x_1, ...x_n)$ е дефинирана в околност на $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, а $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, ..., t_k)$ в околност на $t^{(0)} = \left(t_1^{(0)}, ..., t_n^{(0)}\right)$, $x_i^{(0)} = x_i\left(t^{(0)}\right)$. Тогава ако f е диференцируема в точката $x^{(0)}$, то и $x_i(t)$ са диференцируеми в точката $t^{(0)}$ и са в сила

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\left(t^{(0)}\right)\right)dx_i \qquad \text{и} \qquad df = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i}\left(x^{(0)}\right)dt_j,$$

т.е. първият диференциал df е инвариантен.

Бележка 6.

По нататък ще дефинираме диференциали от по-висок ред $d^k f$, но при функции на много променливи, инвариантен е само първия диференциал df. При функции на една променлива, всички диференциали са инвариантни.

Свойства на df.

$$1) \quad d(u+v) = du + dv$$

$$2) \quad d(u-v) = du - dv$$

$$3) \quad d(uv) = vdu + udv$$

$$4) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Примери

1) $f(x, y) = \ln\sin\frac{x+1}{\sqrt{y}}$. Да се намери df в точката $(2, 1)$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{1}{\sin\frac{x+1}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x+1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{y}}dx + \frac{1}{\sin\frac{x+1}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x+1}{\sqrt{y}}\left(-\frac{1}{2}\frac{x+1}{y^{3/2}}\right)dy$$

Тогава

$$df(2,1) = \frac{1}{\sin 3}\cos 3\,dx - \frac{1}{2}\frac{1}{\sin 3}\cos 3\,dy = \operatorname{cotg} 3\,dx - \frac{1}{2}\operatorname{cotg} 3\,dy.$$

2) $f = u\cos v$, $u = \frac{y}{x+y}$, $v = x^2 - y^3$. Да се намери df по два различни начина.
I начин.

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = ...$$

Задачи за упражнение

Да се намери df, ako

1) $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$

2) $f = f(u)$, $u = xy + \frac{y^2}{x}$

5. Частни производни и диференциали от по-висок ред

Дефиниции и означения

а) Частни производни от втори ред

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \left(f'_x\right)'_y := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \left(f'_x\right)'_x, \quad f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \left(f'_y\right)'_y$$

Теорема 5. (за равенство на смесените производни)
Ако f''_{xy} и f''_{yx} са непрекъснати в точката (x_0, y_0), то $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

б) Диференциал от втори ред (считаме, че смесените производни са равни)

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(x,y)$$

Да припомним, че $dx^k = (dx)^k = (\Delta x)^k$ (по конвенция).

в) Частни производни и диференциали от по-висок ред (считаме, че смесените производни са равни)

$$f^{m+n}_{x^m y^n} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial^m x \partial^n y}, \quad d^m f = \sum_{k=0}^{m} C^k_m \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k} dx^{m-k}dy^k = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)} f(x,y)$$

Да припомним, че тук $C^k_m = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}$ са биномните коефициенти.

Следствие 2. (за равенство на смесените производни от произволен ред)

Ако смесената производна от m-ти ред е непрекъсната в (x_0, y_0), а всички смесени производни от по-нисък ред са непрекъснати в някаква околност на (x_0, y_0), то смесената производна от m-ти ред не зависи от реда на диференциране. Всъщност, ако всички смесени производни от m-ти ред са непрекъснати в (x_0, y_0), то и всички смесени производни от по-нисък ред са непрекъснати в някаква околност на (x_0, y_0).

Бележка 6.
$d^m f$, при $m \geq 2$, не е инвариантен относно смяната на променливите.

Пример ($d^2 f$ не е инвариантен относно смяна на променливите)

$f(x,y) = xy$, $x = u^2$, $y = v$. Сега ще намерим втория диференциал на f относно променливите u и v по два различни начина.

I начин.

Заместваме x и y с техните равни във f и получаваме $f = u^2 v$. Тогава

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}dudv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2 = 2vdu^2 + 2ududv$$

II начин.

$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = dxdy = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) \\ &= \left(2udu + u^2 dv\right)dv = 2ududv + 2dv^2 \end{aligned}$$

г) Формули на Лагранж и Тейлор

Казваме, че множеството G е изпъкнало в $\mathbb{R}^n$, ако е отворено и линейно свързано, т.е. всеки две точки могат да се свържат с права линия.

Теорема 6. (Формула на Лагранж за крайните нараствания)

Нека G е изпъкнало и $f(x, y)$ е диференцируема в G. Тогава за всеки $x = (x_1, ...x^n) \in G$ и $y = (y_1, ...y^n) \in G$ съществува $\theta \in (0, 1)$ такова, че

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(x + \theta(y - x)\right) (y_i - x_i)$$

Теорема 7. (Формула на Тейлор)

Функцията $f(x, y)$ и всичките нейни производни до $m + 1$-ти ред са непрекъснати в някаква δ-околност на точката (x_0, y_0). Тогава за всеки $\Delta x, \Delta y$ такива, че $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, съществува $\theta = \theta(\Delta x, \Delta y)$, $0 < \theta < 1$ такова, че е изпълнено

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} f(x_0, y_0) + r_m(\Delta x, \Delta y),$$

където остатъчния член $r_m(\Delta x, \Delta y)$ във формата на Лагранж, има вида

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(m+1)!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m+1)} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y),$$

а във формата на Пеано $r_m(\Delta x, \Delta y) = o\left(\rho^m\right)$.

Най-удобна формула за запомняне:

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m!} d^k f(M_0) + r_m(M)$$

където $M = (x, y)$, $M_0 = (x_0, y_0)$ и

$$d^k f(x, y) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} f(x, y), \quad k = 0, 1, ..., m$$

Бележка 7.

Да припомним, че при функции на една променлива, формулата на Лагранж е частен случай на формулата на Тейлор - $m = 1$ и остатъчен член във формата на Лагранж. Но тук не е така, понеже при формулата на Тейлор се иска непрекъсната диференцируемост в G за разлика от изискванията при формулата на Лагранж.

Задачи за упражнение

Да се напише реда на Тейлор за функцията $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ около точката $(1, -2)$.

Отговор: $f(x, y) = 5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2$.