Лема. Нека $w \in \Sigma^*$ и $\alpha \in ((V \setminus \Sigma)V^*) \cup \{\varepsilon\}$. Тогава

$$S \overset{L}{\underset{G}{\Rightarrow}}{}^* w\alpha \text{ т.т.к. } (q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha).$$

Да обърна внимание, че $\overset{L}{\underset{G}{\Rightarrow}}{}^*$ означава най-ляв извод в G. Преди да докажем лемата ще видим, че от нея следва твърдението. Да допуснем, че лемата е доказана. Тогава $w \in L(G) \iff S \overset{L}{\underset{G}{\Rightarrow}}{}^* w \iff (p, w, \varepsilon) \vdash_M (q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ и $q \in F$ (Тук $\alpha = \varepsilon$) $\iff w \in L(M)$, с което $L(G) = L(M)$. С други думи, ако докажем лемата и твърдението е доказано

Д-во (На лемата) Тя се състои от две посоки. Нека най-напред $S \overset{L}{\Rightarrow}{}^* w\alpha$, където $w \in \Sigma^*$ и α е дума от V^*, която започва с нетерминал или $\alpha = \varepsilon$. С индукция относно дължината на най-левия извод на $w\alpha$ от S ще докажем, че $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$

1) Ако д-ната на извода е 0, т.е. $S \overset{L}{\Rightarrow}{}^* S = w\alpha$, то $w = \varepsilon$ и $\alpha = S$, откъдето $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$

2) Допускаме, че твърдението е вярно за всички изводи с д-на n. Ще го докажем и за изводи с д-на $n+1$. Наистина нека $S = w_0 \overset{L}{\Rightarrow} w_1 \overset{L}{\Rightarrow} \dots \overset{L}{\Rightarrow} w_n \overset{L}{\Rightarrow} w_{n+1} = w\alpha$. Нека освен това A е най-левия нетерминал в w_n. Тогава $w_n = xA\beta$ и $w_{n+1} = x\gamma\beta$, където $x \in \Sigma^*$, $\beta, \gamma \in V^*$ и $A \to \gamma$ е правило от R. Съгласно ИП $w_n = xA\beta$ и $(q, x, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, A\beta)$ и още $(q, \varepsilon, A\beta) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \gamma\beta)$ използвайки правилата от типа (2), а именно $A \to \gamma$ от G. Но $w_{n+1} = w\alpha$, така че $w = xy$. Следователно, $w\alpha = xy\alpha = x\gamma\beta$ и следователно $y\alpha = \gamma\beta$. Тогава $(q, w, S) \vdash_M^* (q, y, \gamma\beta) \vdash_M^* (q, y, y\alpha)$, откъдето $(q, y, y\alpha) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$ като прилагаме правилата от тип (3), които изтриват буква по буква думата y от стека. Окончателно получихме,

$(q, w, S) \vdash_M^* (q, y, y\alpha) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$, с което едната посока е доказана.

Сега да докажем обратната посока. Нека $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$ за $w \in \Sigma^*$ и $\alpha \in ((V \setminus \Sigma)V^*) \cup \{\varepsilon\}$. Ще покажем, че $S \overset{L}{\Rightarrow}{}^* w\alpha$. В тази посока ще докажем твърдението с индукция относно броя на приложените правила от типа (2) при извода $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$.

1) Нека броя на правилата от тип (2) е 0. Тогава $w = \varepsilon$ и $\alpha = S$, с което твърдението е очевидно.

Да допуснем, че твърдението е вярно за всички изводи които използват n пъти правила от тип (2) и за тях е вярно твърдението, че $S \overset{L}{\Longrightarrow}{}^* w\alpha$. Нека сега имаме извод с $n+1$ пъти прилагане правила от тип (2) за извода $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$. Тогава, разписвайки го по-подробно имаме $(q, w, S) \vdash_M^* (q, y, A\beta) \vdash_M (q, y, \gamma\beta) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$ като $w = xy$ за някои думи x, y от Σ, $A \to \gamma$ е правило в G. Съгласно ИП $S \overset{L}{\Longrightarrow}{}^* xA\beta$ и, следователно, $S \overset{L}{\Longrightarrow}{}^* x\gamma\beta$. Тогава обаче $(q, y, \gamma\beta) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$ като се използват правила от тип (3) за изтриване от стека началото, което е дума от Σ^*, т.е. $y\alpha = \gamma\beta$, откъдето $S \overset{L}{\Longrightarrow}{}^* xy\alpha = w\alpha$. С това лемата е доказана, а оттук и цялото твърдение.

Да напомня, че ние формулирахме теорема, че езиците, които се разпознават от стеков автомат съвпадат с КСЕ. Ние доказахме твърдение само в едната посока. Сега ще формулираме и докажем твърдение твърдение. Ако един език се разпознава от стеков автомат, то този език е КСЕ.

Преди това обаче ще докажем едно твърдение, което ще бъде помощно, но има и самостоятелно значение. Преди това имаме нужда от една

Д. Нека $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ е стеков автомат. Казваме, че M е прост, ако за всяко правило от Δ $((q, a, \beta), (p, \gamma))$ такова, че $q \neq s$ е изпълнено, че $\beta \in \Gamma$ и $|\gamma| \leq 2$.

Лема. Ако един език се разпознава от стеков автомат, то той се разпознава и от прост стеков автомат.

С други думи, класът на езиците, които се разпознават от стеков автомат съвпада с класът на езиците, които се разпознават само от прост стеков автомат. Така можем

да сведем разглеждането само в/у прост стеков автомат.
Д-во на лемата. Нека $M=(K,\Sigma,\Gamma,\Delta,s,F)$ е стеков автомат. Ще построим прост стеков автомат $M'=(K',\Sigma,\Gamma\cup\{Z\},\Delta',s',\{f'\})$ такъв, че $L(M)=L(M')$. Тук s' и f' са нови символи за начално и заключително състояние съответно, а Z е нов стеков, който се нарича символ за дъно на стека, т.е. ще стои само в дъното на стека и ще ни показва кога сме стигнали дъното, т.е. няма нищо повече в стека. K' се състои от състоянията на K плюс добавени нови символи за състояния, а Δ' ще се състои от добавяне на нови правила към Δ и премахване на част от правилата от Δ. Добавянето на нови правила към Δ е пряко свързано с добавяне на нови символи към K', т.е. разширяване K' на стъпки, както и на стъпки ще прибавяме и махаме правила от Δ'.
Най-напред ще разширим Δ до Δ' като добавим правилата $((f,\varepsilon,Z),(f',\varepsilon))$ за всяко $f\in F$ и правилото $((s',\varepsilon,\varepsilon),(s,Z))$. Последното правило показва, че първо ще запълним стека със символа за дъно Z и състоянието s' ще премине в s. С това ще се „запази" работата на оригиналния стеков автомат, а най-накрая когато обичайния стеков автомат е „завършил работа" и сме стигнали до дъното на стека, ще преминем към заключително състояние на простия стеков автомат.
Нашата основна цел е да заменим правилата $((q,a,\beta),(p,\gamma))$, които не отговарят на условията за прост автомат с много такива, които отговарят на тези условия. Това ще направим на три стъпки. На първата стъпка ще премахнем правилата, за които $|\beta|\geq 2$ и ще ги заменим с такива, за които $|\beta|=1$. След това ще премахнем правилата, за които $|\gamma|\geq 2$ и ще ги заменим с такива, за които $|\gamma|=1$, но без да нарушаваме свойствата на правилата от първата стъпка. Питате се защо не премахваме само правилата, за

които $|\gamma|>2$. Причината е, че на третата стъпка ще имаме свободата да променим $\gamma\in\Gamma$ с такива, за които вече $|\gamma|\leq 2$. И на третата стъпка ще заменим правилата, за които $\beta=\varepsilon$ с такива, за които $\beta\in\Gamma$.
Да започнем сега с първата стъпка. Да разгледаме правило $((q,a,\beta),(p,\gamma))$ което е от Δ' и за което $\beta=B_1\ldots B_n$, $n>1$ и $B_1,\ldots,B_n\in\Gamma$. Заменяме това правило с правилата

$$((q,\varepsilon,B_1),(q_{B_1},\varepsilon))$$
$$((q_{B_1},\varepsilon,B_2),(q_{B_1B_2},\varepsilon))$$
$$\text{— — — —}$$
$$((q_{B_1\ldots B_{n-2}},\varepsilon,B_{n-1}),(q_{B_1\ldots B_{n-1}},\varepsilon))$$
$$((q_{B_1\ldots B_{n-1}},a,B_n),(p,\gamma))$$

където $q_{B_1},q_{B_1B_2},\ldots,q_{B_1\ldots B_{n-1}}$ са нови символи, които добавяме към K' и всичките те са различни помежду си. Освен това, при всяко следващо добавяне на символи към K' ние следим те да са различни от всички, които до момента сме добавили.
Да обърнем внимание, че когато трием последователно от стека символите $B_1,B_2,\ldots,B_n$, ние го „помним" чрез новите символи за състояния от K' – $q_{B_1},q_{B_1B_2},\ldots,q_{B_1\ldots B_{n-1}}$ и чрез това „запаметяване" в същата последователност ние сме сигурни, че сме прочели най-отгоре в стека $B_1B_2\ldots B_n$ и чак тогава го заместваме с γ и съответното състояние q вече се замества с p от началото на тази редица от правила. Така правилото $((q,a,\beta),(p,\gamma))$ се „коригира" от редицата от правила, чрез които заместваме това правило. Така постъпваме със всички правила, за които $|\beta|>1$ по описания начин. Те са краен брой и след това няма правила, за които $|\beta|>1$, т.е. всички $\beta\in\Gamma$ за правилата, които сме добавили.
Подобно на първата стъпка ще направим и втората, в която $((q,a,\beta),(p,\gamma))\in\Delta'$ и $\gamma=C_1\ldots C_m$ и $m\geq 2$. Заместваме посоченото правило със следните

правила:
$((q, a, \beta), (r_1, C_m))$
$((r_1, \varepsilon, \varepsilon), (r_2, C_{m-1}))$
(- - - - - - - -
$((r_{m-2}, \varepsilon, \varepsilon), (r_{m-1}, C_2))$
$((r_{m-1}, \varepsilon, \varepsilon), (p, C_1))$,
където $r_1, \ldots, r_{m-1}$ са нови символи и това заместване правим за всички правила от посочения вид докато ги изчерпим. Отново да отбележим, че ние използваме символите $r_1, \ldots, r_{m-1}$ за да „помним", че вече сме записали в стека $C_m, \ldots, C_2$ съответно и най-накрая добавяме в стека и C_1 и сменяме състоянието с p, и така по този начин „имитираме" изпълнението на горното правило на стъпки. Да обърнем внимание, че дотук всички правила, които са в Δ', са от вида $((q, a, \beta), (p, \gamma))$, където $|\beta| \leq 1$ и $|\gamma| \leq 1$.
Най-накрая ще се освободим от правилата от вида $((q, a, \varepsilon), (p, \gamma))$, където $q \neq s'$ и $\gamma \in \Gamma$. Такива правила ги заместваме с правила от вида $((q, a, A), (p, \gamma A))$ за всички $A \in \Gamma \cup \{Z\}$. Така ние получаваме окончателно доказателството на лемата, че $L(M) = L(M')$.
Остава да докажем и твърдението, че ако един език се разпознава от стеков автомат $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$, то той се разпознава от някоя КСГ G. Наистина, нека $G = (V, \Sigma, R, S)$, където V съдържа Σ, новия символ S за начално състояние и символите $\langle q, A, p \rangle$ за всички $q, p \in K'$ и всеки $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon, Z\}$. Нека отбележим че за $\langle q, A, p \rangle$ ще си мислим като за един СИМВОЛ, който ще считаме за нетерминал.
Правилата на R са от следните 4 типа:
(1) Правило $S \to \langle s, Z, f' \rangle$, където s е началното състояние на автомата M и f' е заключителното състояние на новия прост автомат M';
(2) За всяко правило $((q, a, B), (r, C))$ от Δ', където $q, r \in K'$

$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $B, C \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ и за всяко $p \in K'$ ние добавяме правило $\langle q, B, p\rangle \to a\langle r, C, p\rangle$ към R;
(3) За всяко правило $((q, a, B), (r, C_1C_2))$, където $q, r \in K'$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $B \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$, и $C_1, C_2 \in \Gamma$ и за всяко $p, p' \in K'$ ние добавяме правило $\langle q, B, p\rangle \to a\langle r, C_1, p'\rangle\langle p', C_2, p\rangle$ към R;
(4) За всяко $q \in K'$ добавяме правило $\langle q, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon$.
Да обърнем внимание, че всеки нетерминал $\langle q, A, p\rangle$ където $A \in \Gamma$, $p, q \in K'$ тази поддума, която простия автомат K' трябва да прочете, когато A е най-отгоре в стека за да премине от състояние q в състояние p.
Отново имаме „имитация на работата" на M' на пор-ции с помощта на G.
Тъй като K' е прост, то всички правила от Δ' се използват в G за правила на R.
Тук е необходимо да докажем следното
Помощно твърдение. За произволни $p, q \in K'$, $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ е изпълнена еквивалентността:

$$\langle q, A, p\rangle \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x \text{ т.т.к. } (q, x, A) \vdash^{*}_{M'} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

Ще пропуснем доказателството на това твърдение.
С негова помощ ще докажем твърдението, което формулирахме. Наистина $\langle s, e, f\rangle \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$ за някое $f \in F$ т.т.к. $(s, x, \varepsilon) \vdash^{*}_{M'} (f, \varepsilon, \varepsilon)$, т.е. $x \in L(G)$ т.т.к. $x \in L(M')$, с което е доказано както твърдението, така и теоремата, че класът на КСЕ съвпада с класът на езиците, които се разпознават от стеков автомат.

Свойства на КСЕ. Лема за разрастването за КСЕ

Твърдение. КСЕ са затворени относно обединение, конкатенация и звезда на Клини.
Д-во. От теоремата, която доказахме в предната тема знаем, че КСЕ съвпадат с езиците, които се разпознават от стеков автомат. Затова ще използваме оттук нататък, това което ни е по-удобно – КСГ или

стекови автомати.
За да докажем горното твърдение ще разгледаме произволни граматики $G_1=(V_1,\Sigma_1,R_1,S_1)$ и $G_2=(V_2,\Sigma_2,R_2,S_2)$ като ще изисваме $(V_1\setminus\Sigma_1)\cap(V_2\setminus\Sigma_2)=\phi$
1) Най-напред ще докажем, че $L(G_1)\cup L(G_2)$ е КСЕ. За тази цел нека $G=(V_1\cup V_2\cup\{S\},\Sigma_1\cup\Sigma_2,R,S)$ е КСГ, правилата на която са $R=R_1\cup R_2\cup\{S\to S_1, S\to S_2\}$. Тогава посредством правилата $S\to S_1$ и $S\to S_2$ ние „предаваме управлението" или на първата или на втората граматика, и, в зависимост от това пораждаме или $L(G_1)$ или $L(G_2)$.
2) Конкатенацията на езиците $L(G_1)$ и $L(G_2)$ се поражда от граматиката $G=(V_1\cup V_2\cup\{S\},\Sigma_1\cup\Sigma_2,R_1\cup R_2\cup\{S\to S_1S_2\},S)$.
3) Звездата на Клини на езика $L(G_1)$ се поражда от КСГ $G=(V_1\cup\{S\},\Sigma_1,R_1\cup\{S\to\varepsilon, S\to SS_1\},S)$.
С това твърдението е доказано.
Забелязахте предполагам, че за разлика от регулярните езици, ние не доказахме тук, че КСЕ са затворени относно сечение и допълнение. Малко по-късно ще видим, че това не е вярно, като посочим контрапримери. Сега ще докажем, че за определени частни случаи все пак твърдението е вярно за сечение.
Твърдение. Сечението на КСЕ и регулярен език е КСЕ.
Д-во. Нека $M_1=(K_1,\Sigma,\Gamma_1,\Delta_1,s_1,F_1)$ е стеков автомат, а $M_2=(K_2,\Sigma,\delta,s_2,F_2)$ е КДА. Ще определим стеков автомат M, който ще разпознава езика $L(M_1)\cap L(M_2)$ както следва. $M=(K,\Sigma,\Gamma,\Delta,s,F)$, където $K=K_1\times K_2$, $\Gamma=\Gamma_1$, $s=(s_1,s_2)$ и $F=F_1\times F_2$, а Δ е релацията на преходите, чиито правила са изброените по-долу:
За всяко правило $((q_1,a,\beta),(p_1,\gamma))\in\Delta_1$ и за всяко състояние $q_2\in K_2$ ние добавяме към Δ правилото $(((q_1,q_2),a,\beta),((p_1,\delta(q_2,a)),\gamma)$, ако $a\in\Sigma$ и добавяме правило $(((q_1,q_2),\varepsilon,\beta),((p_1,p_2),\gamma))$ за правилата от вида

$((q_1, \varepsilon, \beta), (p_1, \gamma))$ от Δ_1 и $q_2 \in K_2$. Така ние „имитираме" успоредно изпълнение, когато е възможно, и, изпълнение само на стековия автомат, когато имаме да прочетем празната дума ε. Когато прочетем ε КДА M_2 не може да се придвижи и той изчаква докато може да придвижи. Така приключваме със скицирането на доказателството.

Сега ще докажем лемата (теоремата) за разрастването за КСЕ. Преди това ще дадем дефиниция и ще припомним някои неща за дървета. Да напомним, че граматичните дървета са обичайни дървета, които имат за възли и корен нетерминал и всички листа бяха терминали, или ε. Всъщност в един случай на тривиалното дърво, корен е терминал. Всяко граматично дърво пораждаше дума, която се образуваше от терминали, които са листа, започвайки да я четем отляво надясно.

D. Нека $G=(V, \Sigma, R, S)$ е КСГ. С $\Phi(G)$ ще означаваме най-големия брой букви на дясната част на правило от граматиката G. С други думи, разглеждаме всички правила от вида $A \to x$, където A е нетерминал, а $x \in V^*$. Намираме максимума на д-ните $|x|$ на думите от дясната част на правилата. Това определя $\Phi(G)$. В термините на дърветата това означава разклоненост на граматичното дърво.

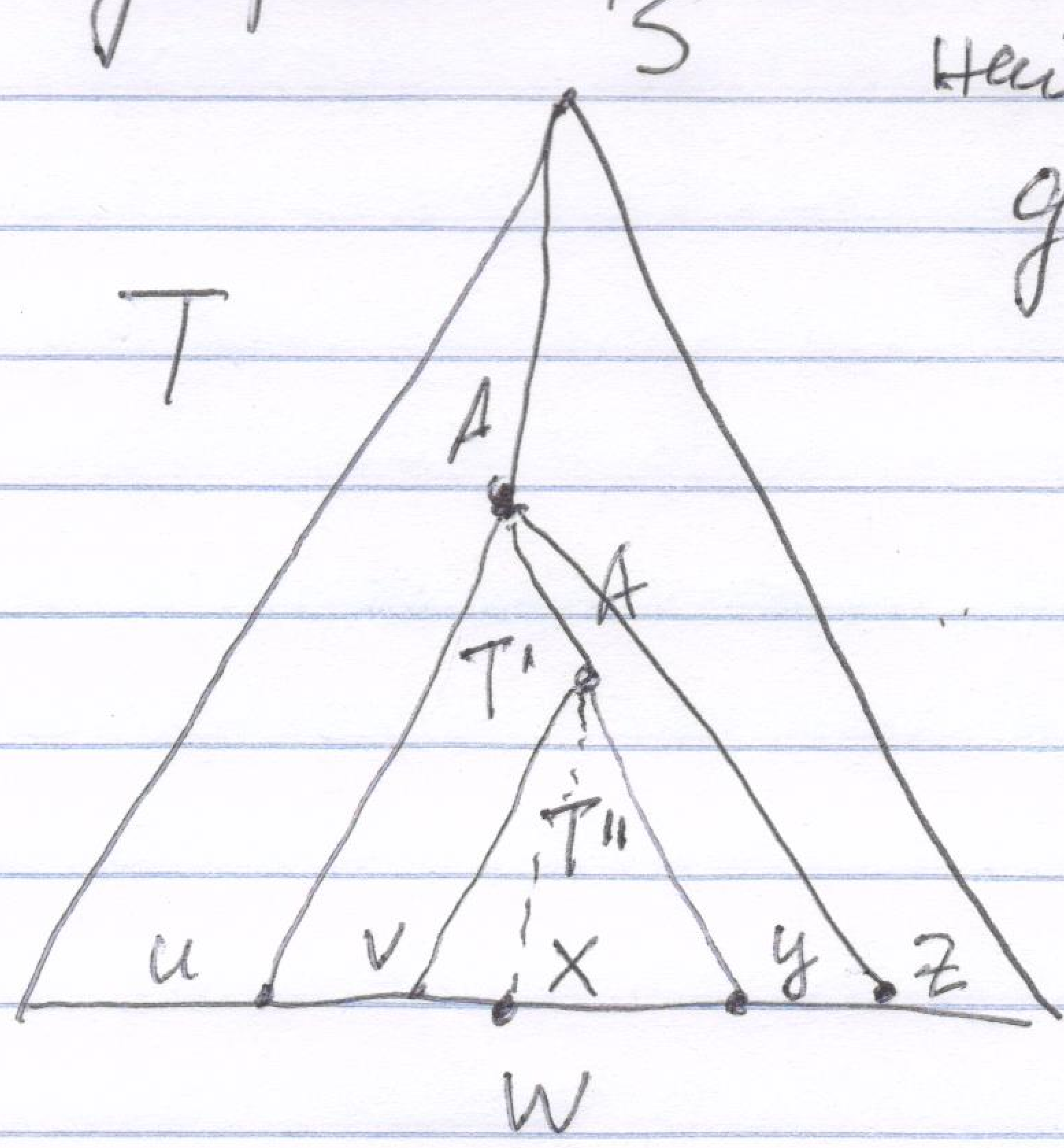
Първият семестър ние доказахме едно твърдение: Нека $G=(V, E)$ е (неориентирано) дърво с корен r, разклоненост m и височина h. Тогава броят на листата не надвишава m^h.

Сега сме готови да докажем

Теорема (лема за разрастването). Нека $G=(V, \Sigma, R, S)$ е КСГ. Тогава за всяка дума $w \in L(G)$, чиято дължина $(|w|)$ е по-голяма от $\Phi(G)^{|V \setminus \Sigma|}$ може да се представи във вида $w = uvxyz$, така че $vy \neq \varepsilon$ и $uv^n xy^n z \in L(G)$

за всяко естествено число n.

Д-во. Нека $w \in L(G)$, такава че $|w| > \Phi(G)^{|V\setminus\Sigma|}$ и нека T е дървото, което извежда думата w, и, което има



най-малко листа. Измежду всички дървета, които извеждат думата w (те са краен брой) има поне едно с най-малко листа. Това означава, че височината на дървото е по-голяма от $|V\setminus\Sigma|$ и значи е поне с височина $|V\setminus\Sigma|+1$. Нека разгледаме пътя от корена до листото, където се достига тази тази височина. Този път ще съдържа поне $|V\setminus\Sigma|+2$ върха, като само последният е терминал, а останалите поне $|V\setminus\Sigma|+1$ върха са нетерминали. Следователно има поне 2 еднакви върха-нетерминали. Да означим тези върхове с A. Тогава те определят поддърво T' на T с корен A и поддърво T'' на T' (а и на T) с корен другото A, както е нарисувано на картинката по-горе.

Тогава T'' поражда дума x, поддума на w, а дървото T' поражда дума vxy и $w = uvxyz$.

Да разгледаме сега поддървото T' на T. Частта (отляво и отдясно на T'') от дървото T' може да бъде повторена многократно, като с това ще се увеличат едновременно v-тата и y-ците, което потвърждава, че за всяко n, $uv^nxy^nz \in L$. Освен това не е възможно $vy = \varepsilon$, защото в противен случай това дърво няма да е с най-малко листа, а дървото, което ще се състои от премахването на всички ребра и листа м/у двете A-та ще остане с едно A, ще бъде с най-малко листа. С това лемата за разрастването е доказана.