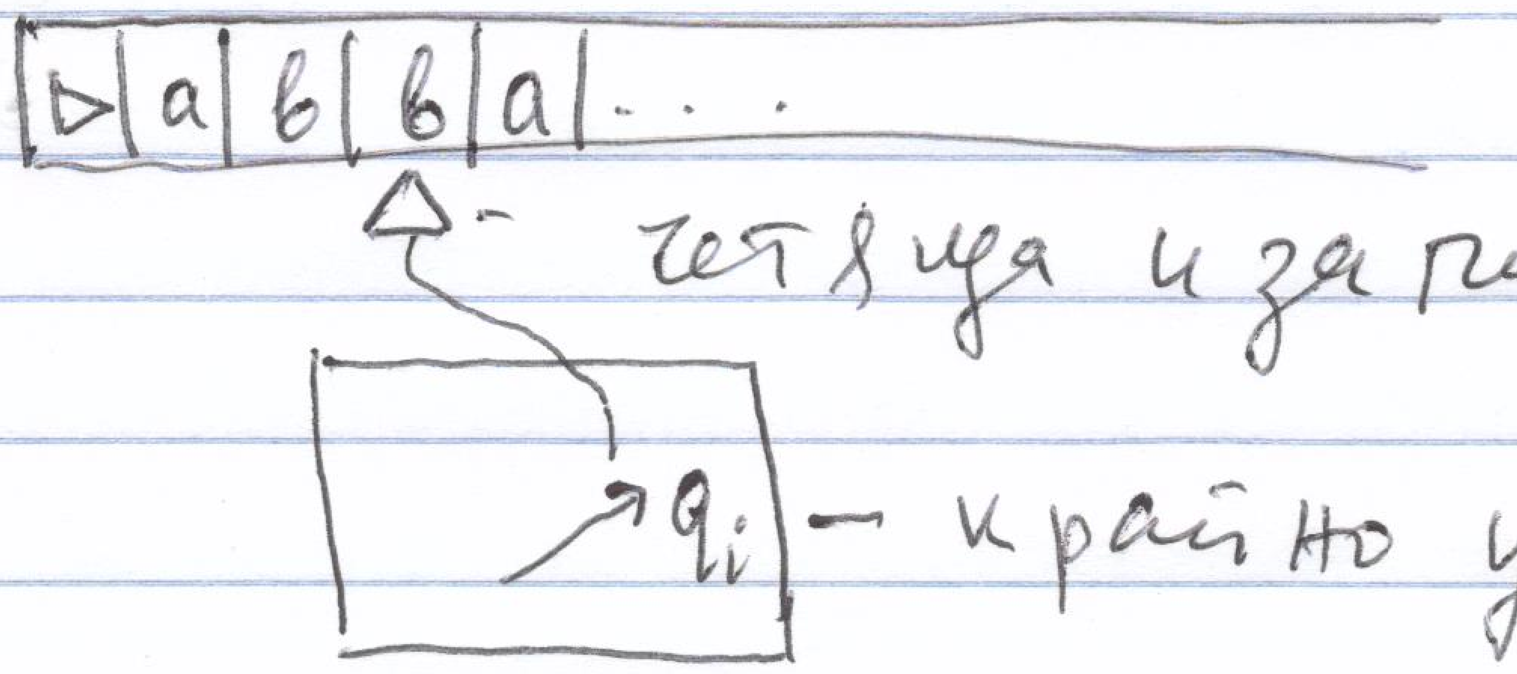
Машини на Тюринг

Последният модел, който остана да разгледаме, е така наречения машина на Тюринг. Досега ние разгледахме крайни автомати с регулярни езици, и, стекови автомати с КСГ. Видяхме, че има езици като ез. $L=\{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$, които не се разпознават от стекови автомати и, за които е естествено да очакваме че има алгоритмичен модел, който да ги разпознава и поражда. Този модел е машината на Тюринг, която ще играе роля и на разпознавател и на генератор. Да отбележим тук, че всичките тези модели, които разгледахме дотук, както и Машините на Тюринг не са се появили точно в този вид и точно в този ред. Всъщност, машините на Тюринг са се появили, заедно с доста други модели, за да дадат отговор на въпроса какво е алгоритмично изчислима функция и по-общо, какво е точното и всеобхватно понятие алгоритъм. По-късно се появяват много модели на изчислима функция, много от които по-елегантни като модели и реализация и естествения въпрос, който веднага изниква е защо се разглежда понятието машина на Тюринг? Не е ли остаряло, тромаво, извън употреба? Причината да разглеждаме този модел, е че всички останали модели на излагане на изчислима функция не са подходящи за оценка на сложността на алгоритмите, които разглеждаме. Всички те имат различни форми на цикли, които не могат да бъдат оценка за броя на елементарните операции. Именно затова разглеждаме машините на Тюринг.

Какво е новото и по-различното в Машините на Тюринг? Дотук имахме модели, при които в една потенциално безкрайна лента има записана дума в началото, състояща се от букви от дадена азбука, които замълват началото на лентата. Моделите до тук имаха четяща глава, която тръгвайки от началото на лентата прочиташе буква по буква съдържанието и когато приключваше с четенето даваше отговор дали думата се разпознава или не от това устройство. При това нямахме възможност „да помним" или да записваме в някакъв буфер какво сме прочели и да го използваме в разпознаването (само частично имахме такава възможност в стека). При новия модел на машина на Тюринг ще имаме възможност да четем и да записваме върху основната лента, с което ще имаме възможност „да помним" и да използваме прочетеното при разпознаването и при пораждането на даден език. Какво по точно представлява машина на Тюринг? Интуитивно, тя се състои от една безкрайна лента с начало, едно крайно управляващо устройство и една глава, която чете една клетка и в зависимост от състоянието на устройството, в което се намира и какво е прочела в клетката, тя може да направи следните действия:

а) да изтрие съдържанието и да запише нова буква на мястото на старото съдържание на клетката;

б) да премести главата наляво или надясно с една клетка.



– потенциално безкрайна лента

четяща и записваща глава

– крайно управляващо устройство

Имаме няколко нови момента. Имаме ляв ограничител, който се означава с ▷ и той показва, че сме стигнали най-левия край на лентата и не можем да се преместим още наляво, и, означение за празната клетка ⊔, т.е. че нищо нямаме записано в тази клетка.

А сега да дадем формалната дефиниция на машина на Тюринг.

Д. Машина на Тюринг се нарича петицата $M=(K, \Sigma, \delta, s, H)$, където: K е крайна азбука (множество) на състоянията; Σ – основна азбука, съдържаща символа $\sqcup$ за празната клетка и символа $\triangleright$ за ляв ограничител, но несъдържаща символите $\rightarrow$ и $\leftarrow$;

$s \in K$, s е начално състояние (символ);

$H \subseteq K$, H е множество на стоп-състоянията;

δ е функция на преходите, $\delta: (K \setminus H) \times \Sigma \rightarrow K \times (\Sigma \cup \{\rightarrow, \leftarrow\})$, така че следните условия са изпълнени:

а) За всички $q \in K \setminus H$, ако $\delta(q, \triangleright) = (p, b)$, то $b = \rightarrow$;

б) За всички $q \in K \setminus H$ и $a \in \Sigma \setminus \{\triangleright\}$, ако $\delta(q, a) = (p, b)$, то $b \neq \triangleright$.

С други думи, не е разрешено ако сме стигнали до левия ограничител да правим нищо друго, освен да се придвижим надясно (ще видим защо по-късно). И ако четем някоя буква от $\Sigma \setminus \{\triangleright\}$ не можем да я заместим с ляв ограничител – трябва да има само един най-ляв ограничител.

Пример 1. Да разгледаме машината на Тюринг $M=(K, \Sigma, \delta, s, H)$, където $K=\{q_0, q_1, h\}$, $\Sigma=\{a, \sqcup, \triangleright\}$, $H=\{h\}$, $s=q_0$ и δ е определена както следва: (обикновено се записва в таблица) $\delta(q_0, a) = (q_1, \sqcup)$, $\delta(q_0, \sqcup) = (h, \sqcup)$, $\delta(q_0, \triangleright) = (q_0, \rightarrow)$, $\delta(q_1, a) = (q_0, a)$, $\delta(q_1, \sqcup) = (q_0, \rightarrow)$, $\delta(q_1, \triangleright) = (q_1, \rightarrow)$.

Д. Конфигурация на машината на Тюринг $M=(K, \Sigma, \delta, s, H)$ се нарича всеки елемент на $K \times \triangleright(\Sigma \setminus \{\triangleright\})^* \times ((\Sigma \setminus \{\triangleright\})^* \circ (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\}) \cup \{\varepsilon\})$, т.е. конфигурация е тройката $(p, \triangleright u, v)$ такава, че $p \in K$ и думите $u, v \in (\Sigma \setminus \{\triangleright\})^*$, като v не може да завършва с $\sqcup$. Ще опростим малко означението за конфигурация. Конфигурация ще наричаме двойката $(q, \triangleright u\underline{a}v)$, която е съкращение на $(q, \triangleright ua, v)$ като ще подразбираме, че конфигурацията е: състоянието в което се намира M (т.е. q) и съдържанието на нача-

лото на лентата е $\triangleright uav$, при което последната непразна клетка на лентата е последната буква на v и четящата глава е върху a.
Д. Нека $M=(K,\Sigma,\delta,s,H)$ е машина на Тюринг и да разгледаме конфигурациите $(q_1, w_1\underline{a_1}u_1)$ и $(q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$, където $a_1, a_2 \in \Sigma$. Тогава казваме, че машината M преобразува $(q_1, w_1\underline{a_1}u_1)$ в $(q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$ и пишем $(q_1, w_1\underline{a_1}u_1) \vdash_M (q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$ т.т.к. за някое $b \in \Sigma \cup \{\rightarrow, \leftarrow\}$ $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ и, или

1) $b \in \Sigma \setminus \{\triangleright\}$, $w_1 = w_2$, $u_1 = u_2$ и $a_2 = b$ (заместваме a_1 с b), или
2) $b = \leftarrow$, $w_1 = w_2 a_2$ и, или
   a) $u_2 = a_1 u_1$, ако $a_1 \neq \sqcup$ или $u_1 \neq \varepsilon$, или
   б) $u_2 = \varepsilon$, ако $a_1 = \sqcup$ и $u_1 = \varepsilon$ (преместваме главата наляво), или
3) $b = \rightarrow$, $w_2 = w_1 a_1$, и или
   a) $u_1 = a_2 u_2$, или
   б) $u_1 = u_2 = \varepsilon$ и $a_2 = \sqcup$ (преместване на главата надясно)

Нека да направим коментар по повод многобройните подслучаи на трите възможности. Причината е, че когато говорехме за конфигурации, винаги последният непразен символ на конфигурациите след позицията на главата е последната буква на u_i, ако има такава.
Да разгледаме някои примери
Случай 1. $\delta(q_1, a) = (q_2, b)$
$(q_1, w\underline{a}u) \vdash_M (q_2, w\underline{b}u)$
Случай 2. $\delta(q_1, a) = (q_2, \leftarrow)$
Подслучай а) $(q_1, wb\underline{a}u) \vdash_M (q_2, w\underline{b}au)$
Подслучай б) $(q_1, wb\underline{\sqcup}) \vdash_M (q_1, w\underline{b})$
Случай 3. $\delta(q_1, a) = (q_2, \rightarrow)$
Подслучай а) $(q_1, w_1\underline{a}bu) \vdash_M (q_2, wa\underline{b}u)$, $b \in \Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\}$
Подслучай б) $(q_1, w_1\underline{a}) \vdash_M (q_2, w_1a\underline{\sqcup})$
Следва стандартната дефиниция в подобни случаи
Д. Нека M е машина на Тюринг. С $\vdash_M^*$ означаваме рефлексивното и транзитивно затваряне на релацията

$\vdash_M$ м/у конфигурации за M.
Така ние казваме, че от конфигурацията C_1 с машината M се извежда конфигурацията C_2, ако $C_1 \vdash_M^* C_2$.
Освен това, изчисление на машината M се нарича редицата $C_0, \dots, C_n$, $n \geq 0$ такова, че $C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M \dots \vdash_M C_n$.
В такъв случай n се нарича дължина на изчислението или че изчислението има n стъпки и се записва още $C_0 \vdash_M^n C_n$.
Да се върнем сега към Пример 1 на машина на Тюринг. Да разгледаме конфигурацията $(s, \triangleright\underline{\sqcup}aaa)$ като видим как се извършват изчисленията. Да напомним, че $s = q_0$. Тогава $(s, \triangleright\underline{\sqcup}aaa) \vdash_M (h, \triangleright\underline{\sqcup}aaa)$ защото $\delta(s, \sqcup) = (h, \sqcup)$, т.е. за 1 стъпка стигаме до стоп-състояние. Да разгледаме още и конфигурацията $(s, \triangleright\sqcup\underline{a}aa)$. Тогава $(s, \triangleright\sqcup\underline{a}aa)$ $\vdash_M (q_1, \triangleright\sqcup\underline{\sqcup}aa)$ $(\delta(q_0, a) = (q_1, \sqcup))$ $\vdash_M (s, \triangleright\sqcup\sqcup\underline{a}a)$ $(\delta(q_1, \sqcup) = (s, \rightarrow))$ $\vdash_M (q_1, \triangleright\sqcup\sqcup\underline{\sqcup}a) \vdash_M (s, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\underline{a}) \vdash_M (q_1, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\sqcup}) \vdash_M (s, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\sqcup})$ $\vdash_M (h, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\sqcup})$
Конфигурации от вида $(s, \triangleright\underline{\sqcup}aaa)$ се наричат начални конфигурации, а конфигурации от типа $(h, \triangleright\underline{\sqcup}aaa)$ се наричат стоп-конфигурации.
От пример 1 машината започва да трие a-тата (надясно) докато стигне до $\sqcup$, ако главата си намира в клетка с a, а ако главата се намира в празна клетка, машината спира.
Пример 2. Нека M е машина на Тюринг, $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ където $K = \{q_0, h\}$, $\Sigma = \{a, \sqcup, \triangleright\}$, $s = q_0$, $H = \{h\}$ и $\delta(q_0, a) = (q_0, \leftarrow)$ $\delta(q_0, \sqcup) = (h, \sqcup)$, $\delta(q_0, \triangleright) = (q_0, \rightarrow)$. Лесно може да се провери, че за конфигурацията $(q_0, \triangleright\underline{a})$ машината на Тюринг "не спира" работа никога в/у конфигурацията, защото никога не стига до стоп-конфигурация:
$(s, \triangleright\underline{a}) \vdash_M (s, \underline{\triangleright}a) \vdash_M (s, \triangleright\underline{a}) \vdash \dots$
Тук забелязваме първата разлика с крайните автомати и крайните стекови автомати. Тук за първи път може да зациклим и никога да не спрем работа, въпреки, че машината е определена точно какво да направи.

За Пример 1 можем да преброим колко са дълги изчисленията, докато за Пример 2 няма как да преброим изчисленията, защото те не спират.

<u>Означения на някои базови машини на Тюринг</u>

Сега ще посочим някои прости машини на Тюринг, които почти винаги спират работа. С помощта на тези базови машини ще строим и по-сложни машини, нещо като „макроси", с помощта на операции м/у машините на Тюринг. Ще започнем с машините, които пишат някакъв символ от азбуката $\Sigma\setminus\{\triangleright\}$ и спират, и такива, които преместват главата вляво или вдясно на една клетка и спират. Нека $a\in\Sigma\setminus\{\triangleright\}$. С M_a означаваме машината $M_a=(\{s,h\},\Sigma,\delta,s,\{h\})$, където за всяко $b\in\Sigma-\{\triangleright\}$, $\delta(s,b)=(h,a)$, т.е. машината замества съдържанието на клетката, която чете в момента, и спира. По подразбиране, винаги $\delta(s,\triangleright)=(s,\rightarrow)$. Да обърна внимание, че никога началната конфигурация няма вида $(s,\underline{\triangleright}u)$, т.е. винаги началната конфигурация е от вида $(s,\triangleright u\underline{a}v)$.

Другият тип машини е $M_{\leftarrow}$ и $M_{\rightarrow}$, които се определят така: $M_{\rightarrow}=(\{s,h\},\Sigma,\delta,s,\{h\})$, където за всяко $b\in\Sigma$, $\delta(s,b)=(h,\rightarrow)$ и $M_{\leftarrow}=(\{s,h\},\Sigma,\delta,s,\{h\})$, където за всяко $b\in\Sigma\setminus\{\triangleright\}$, $\delta(s,b)=(h,\leftarrow)$ и $\delta(s,\triangleright)=(s,\rightarrow)$.

Оттук нататък $M_{\rightarrow}$ ще означаваме с R (right, надясно) и $M_{\leftarrow}$ – с L (left, наляво).

<u>Операции м/у машини на Тюринг</u>

– Композиция на машини на Тюринг. – Нека M_1 и M_2 са машини на Тюринг, $M_1=(K_1,\Sigma,\delta_1,s_1,H_1)$ и $M_2=(K_2,\Sigma,\delta_2,s_2,H_2)$ като $K_1\cap K_2=\emptyset$. Композицията на M_1 и M_2 ще означаваме с M_1M_2 и $M_1M_2=(K_1\cup K_2,\Sigma,\delta,s_1,H_2)$ като $\delta(q,\sigma)=\delta_1(q,\sigma)$ за $q\in K_1\setminus H_1$, $\delta(q,\sigma)=(s_2,\sigma)$ за $q\in H_1$ и $\sigma\in\Sigma$, $\delta(q,\sigma)=\delta_2(q,\sigma)$ за $q\in K_2\setminus H_2$ и $\sigma\in\Sigma$.

С други думи композицията на M_1 и M_2 в/у някаква конфигурация се изпълнява така: пускаме M_1 в/у тази конфигурация и ако стигнем до стоп-конфигурация, заместваме стоп-състоянието с s_2 и пускаме получената конфигурация да се изпълнява от M_2

– Разклонение на M_2 и M_3 управлявано от M_1.

Нека $M_i = (K_i, \Sigma, \delta_i, s_i, H_i)$, $i = 1, 2, 3$ са машини на Тюринг, такива, че $K_1 \cap K_2 = K_2 \cap K_3 = K_3 \cap K_1 = \phi$. Тази операция ще означаваме така:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & M_2 \\ M_3 & \end{tikzcd} \quad , \; a, b \in \Sigma \setminus \{\triangleright\}, \; a \neq b$$

Да означим разклонението на M_2 и M_3 управлявано от M_1 с $M = (K_1 \cup K_2 \cup K_3, \Sigma, s_1, \delta, H_2 \cup H_3)$, където за всяко $q \in (K_1 \cup K_2 \cup K_3) \setminus H_2 \cup H_3$ и $\sigma \in \Sigma$

$\delta(q, \sigma) = \delta_1(q, \sigma)$, ако $q \in K_1 \setminus H_1$,

$\delta(q, \sigma) = \delta_2(q, \sigma)$, ако $q \in K_2 \setminus H_2$,

$\delta(q, \sigma) = \delta_3(q, \sigma)$, ако $q \in K_3 \setminus H_3$,

$\delta(q, \sigma) = (s_2, \sigma)$, ако $q \in H_1$ и $\sigma = a$,

$\delta(q, \sigma) = (s_3, \sigma)$, ако $q \in H_1$ и $\sigma = b$,

$\delta(q, \sigma) = (h, \sigma)$, ако $q \in H_1$ и $\sigma \notin \{a, b\}$, h-фикс, $h \in H_2$

С други думи, M работи както следва: За произволна конфигурация за M, най-напред изпълняваме M_1 върху дадената конфигурация и ако стигнем до стоп-състояние (стоп-конфигурация) за M_1 или променяме състоянието на получената конфигурация на s_2, ако четящата глава е на клетка със съдържание a, или променяме състоянието на получената конфигурация на s_3, ако четящата глава е на клетка със съдържание b, или променяме състоянието на получената конфигурация със стоп-състояние, в противен случай.

Аналогично на горното разклонение можем да дефинираме разклонение за три различни букви a, b, c.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] \arrow[d, "c"'] & M_2 \\ M_4 & M_3 \end{tikzcd}$$

или за повече букви. В частност можем да дефинираме $M_1 \xrightarrow{a,\, b,\, \triangleright,\, \sqcup} M_2$ или даже $R \xrightarrow{a,\, b,\, \sqcup,\, \triangleright} R$. Това ние просто ще записваме $R \to R$ или за кратко R^2.

Когато искаме да разглеждаме разклонение при което участвуват всички букви без една фиксирана буква, например b, ние можем да означаваме $R \xrightarrow{a \neq b} R$ или $R \xrightarrow{\neq b} R$, т.е.

за всички букви $a \in \Sigma$, които са различни от b. В частност можем да правим и цикли $> R \circlearrowleft^{\neq \sqcup}$ или което е същото $R \circlearrowleft^{\neq \sqcup}$ или $R \circlearrowleft^{\overline{\sqcup}}$. Тогава ние винаги започваме с R и изпълняваме R докато главата прочита някоя буква, която не е $\sqcup$. Аналогично за $> L \circlearrowleft^{a \neq \sqcup}$ и $L \circlearrowleft^{\overline{\sqcup}}$
Същото можем да правим, разбира се и цикли от вида $> R \circlearrowleft^{\sqcup}$ и $> L \circlearrowleft^{\sqcup}$, които означават да се преместват четящата глава чете клетка със съдържание $\sqcup$.
Оттук нататък за краткост машината M_a ще записваме с a, с $R_{\sqcup}$ означаваме машината на Тюринг $R \circlearrowleft^{a \neq \sqcup}$, с $L_{\sqcup}$ - машината на Тюринг $> L \circlearrowleft^{a \neq \sqcup}$, с $R_{\overline{\sqcup}}$ - $> R \circlearrowleft^{a = \sqcup}$, с $L_{\overline{\sqcup}}$ - $> L \circlearrowleft^{a = \sqcup}$.
Пример. Да приложим $R_{\sqcup}$ върху конфигурацията $(s, \rhd \underline{\sqcup} abaa)$. Тогава $R_{\sqcup}$ ще спре в някоя конфигурация $(h, \rhd \sqcup abaa\underline{\sqcup})$ за $h \in H$, докато ако приложим $L_{\sqcup}$ върху конфигурация от вида $(s, \rhd \sqcup abaa\underline{\sqcup})$ ще получим $(h, \rhd \underline{\sqcup} abaa)$, за някое $h \in H$.
Обикновено, при горните случаи ще пишем $\rhd \underline{\sqcup} abaa \xrightarrow{R_{\sqcup}} \rhd \sqcup abaa\underline{\sqcup}$ и ще казваме, че $R_{\sqcup}$ трансформира съдържанието на лентата в ново съдържание, а $\rhd \sqcup abaa\underline{\sqcup} \xrightarrow{L_{\sqcup}} \rhd \underline{\sqcup} abaa$ и ще казваме, че трансформираме съдържанието $\rhd \sqcup abaa\underline{\sqcup}$ в ново съдържание $\rhd \underline{\sqcup} abaa$. Това означение напълно определя как работи $R_{\sqcup}$ респективно $L_{\sqcup}$ върху някакво съдържание при начално състояние и че спира работа при посоченото горно съдържание и стоп-състояние. Това означение ще използваме оттук нататък.
Нека $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ е машина на Тюринг. Ако $(s, u\underline{a}v) \vdash_M^* (h, u'\underline{b}v')$, където s - нач. състояние и h - стоп-състояние, то ще казваме, че M трансформира $u\underline{a}v$ в $u'\underline{b}v'$ и както казахме, ще го означаваме още с $u\underline{a}v \xrightarrow{M} u'\underline{b}v'$. Сега ще построим така наречената копи-машина на Тюринг, която ще означаваме с C.
C ще трансформира $\rhd \underline{\sqcup} w$ в $\rhd \underline{\sqcup} w \sqcup w$, за $w \in (\Sigma \setminus \{\rhd, \sqcup\})^*$, т.е. тя ще копира w, разделено от $\sqcup$ след самото w. Наисти-

на, да разгледаме машината на Тюринг

$$> R \xrightarrow{a \neq \sqcup} \sqcup R_{\sqcup}^{2} a L_{\sqcup}^{2} a$$
$$\downarrow a = \sqcup$$
$$L_{\sqcup}$$

– машината C (копи-машина)

За да демонстрираме, че C наистина копира да разгледаме пример $\rhd \underline{\sqcup} bc$ в какво се трансформира чрез C. За да стане по-ясно композицията $\sqcup R_{\sqcup}^{2} a L_{\sqcup}^{2} a$ ще я разделим на по елементарни стъпки

$\rhd \underline{\sqcup} bc \xrightarrow{R} \rhd \sqcup \underline{b} c \xrightarrow{\sqcup} \rhd \sqcup \underline{\sqcup} c \xrightarrow{R_{\sqcup}} \rhd \sqcup \sqcup c \underline{\sqcup} \xrightarrow{R_{\sqcup}} \rhd \sqcup \sqcup c \sqcup \underline{\sqcup} \xrightarrow{b}$
$\rhd \sqcup \sqcup c \sqcup \underline{b} \xrightarrow{L_{\sqcup}} \rhd \sqcup \sqcup c \underline{\sqcup} b \xrightarrow{L_{\sqcup}} \rhd \sqcup \underline{\sqcup} c \sqcup b \xrightarrow{b} \rhd \sqcup \underline{b} c \sqcup b \xrightarrow{R}$

Тук завършва първия цикъл, след като изпълнихме конкретната композиция (суперпозиция) на машината на Тюринг $\sqcup R_{\sqcup}^{2} b L_{\sqcup}^{2} b$ и продължаваме с R и проверка дали клетката съдържа непразен символ

$\xrightarrow{R} \rhd \sqcup b \underline{c} \sqcup b \xrightarrow{\sqcup} \rhd \sqcup b \underline{\sqcup} \sqcup b \xrightarrow{R_{\sqcup}} \rhd \sqcup b \sqcup \underline{\sqcup} b \xrightarrow{R_{\sqcup}} \rhd \sqcup b \sqcup \sqcup b \underline{\sqcup} \xrightarrow{c}$
$\rhd \sqcup b \sqcup \sqcup b \underline{c} \xrightarrow{L_{\sqcup}} \rhd \sqcup b \sqcup \underline{\sqcup} bc \xrightarrow{L_{\sqcup}} \rhd \sqcup b \underline{\sqcup} \sqcup bc \xrightarrow{c} \rhd \sqcup b \underline{c} \sqcup bc$

и свършихме още един път споменатия цикъл и ще изпълним R и ще направим проверка дали е $\sqcup$ или не и ще изпълним $L_{\sqcup}$

$\xrightarrow{R} \rhd \sqcup bc \underline{\sqcup} bc \xrightarrow{L_{\sqcup}} \rhd \underline{\sqcup} bc \sqcup bc.$

Аналогично, можем да дефинираме копи-машина „през k блока" (C_k), а именно която трансформира:

$\rhd \underline{\sqcup} w_1 \sqcup w_2 \sqcup \ldots \sqcup w_k$ в $\rhd \underline{\sqcup} w_1 \sqcup w_2 \sqcup \ldots \sqcup w_k \sqcup w_1$

за $w_1, w_2, \ldots, w_k \in (\Sigma \setminus \{\rhd, \sqcup\})^*$ и казваме „през k блока" като имаме предвид, че копираме след $w_2 \sqcup w_3 \sqcup \ldots \sqcup w_k$ през k думи от споменатата азбука разделени помежду си с $\sqcup$. Ясно е, че $C = C_1$.

C_k се определя така

$$> R \xrightarrow{a \neq \sqcup} \sqcup R_{\sqcup}^{k+1} a L_{\sqcup}^{k+1} a$$
$$\downarrow a = \sqcup$$
$$L_{\sqcup}$$

Всъщност, нека отбележим, че така посочената машина C_k трансформира $\rhd \sqcup \underline{\sqcup} w_1 \sqcup \ldots \sqcup w_k \sqcup w_{k+1}$ в $\rhd \sqcup \underline{\sqcup} w_1 \sqcup \ldots w_{k+1} \sqcup w_1$.

Друга машина на Тюринг, която ще определим е shift-машина надясно, която трансформира $\rhd \underline{\sqcup} w$ в $\rhd \sqcup \underline{\sqcup} w$, за $w \in (\Sigma \setminus \{\rhd, \sqcup\})^*$ и тази машина се означава с $S_{\rightarrow}$. (Аналогично може да се дефинира и shift-машина наляво $S_{\leftarrow}$). Тя се определя така:

$$\begin{tikzcd} >R_{\sqcup} L \arrow[r, "a \neq \sqcup"] \arrow[d, "a=\sqcup"'] & \sqcup R_{\sqcup} a L_{\sqcup} \arrow[l, bend right] \\ I & \end{tikzcd}$$

, където I е машината на Тюринг, която трансформира $\rhd w_1 \underline{a} w_2$ в $\rhd w_1 \underline{a} w_2$, т.е. нищо не променя и веднага след като се намира в начално състояние s преминава в стоп-състояние и спира.
Още една машина ще определим. Това е машината $D_{\leftarrow}$, която изтрива „един блок" наляво, т.е. тя трансформира $\rhd w_1 \sqcup w_2 \underline{\sqcup}$ в $\rhd w_1 \underline{\sqcup}$, където $w_2 \in (\Sigma \setminus \{\rhd, \sqcup\})^*$, а $w_1 \in (\Sigma \setminus \{\rhd\})^*$. Това е машината:

$$\begin{tikzcd} >L \arrow[r, "a \neq \sqcup"] \arrow[d, "a=\sqcup"'] & \sqcup \arrow[l, bend right] \\ I & \end{tikzcd}$$

С това завършихме с основния пакет „макроси" за машините на Тюринг.