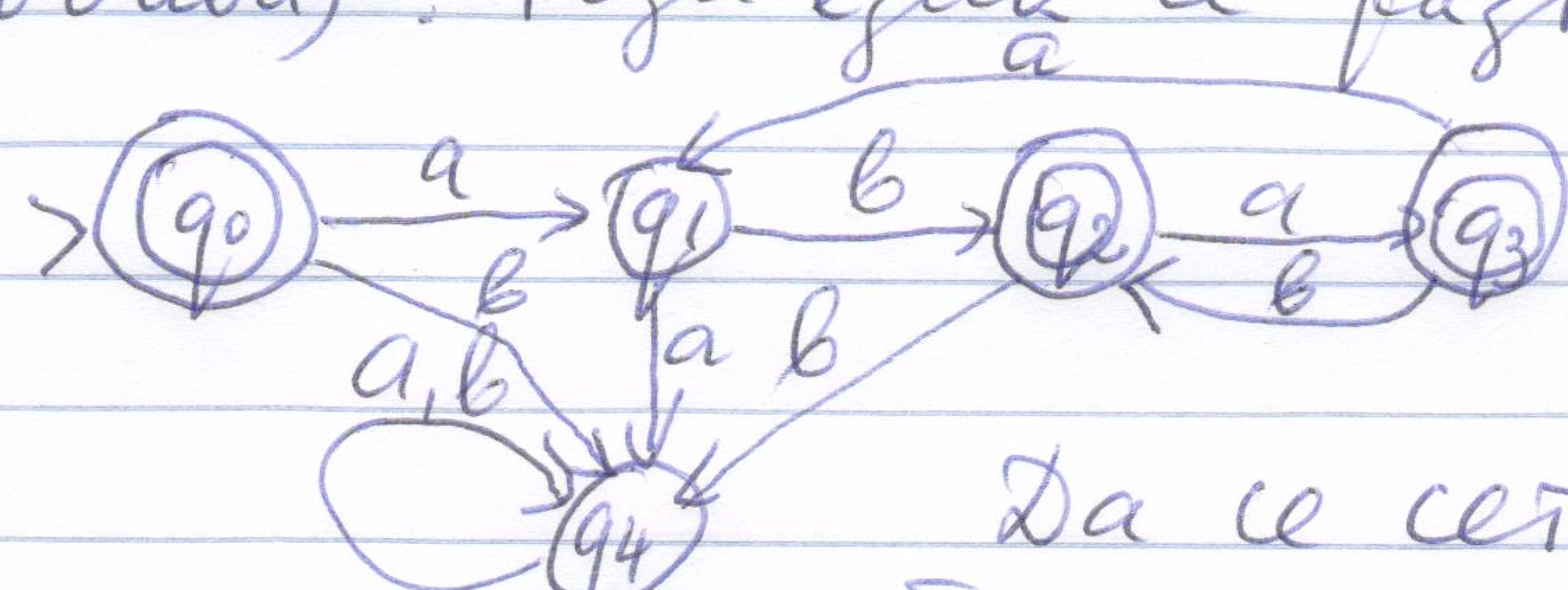
Недетерминирани крайни автомати

Понятието недетерминиран краен автомат (НКА) се явява обобщение на КДА и има добра интуитивна обосновка. Причината е, че много по-трудно може да се построи КДА за конкретен език, отколкото НКА в общия случай, който да разпознава този език. Докато за НКА много по-лесно и естествено може да се построи такъв НКА, който да разпознава този език. Да разгледаме следния пример: Нека е даден език $L = (ab \cup aba)^*$. Този език се разпознава от крайния автомат



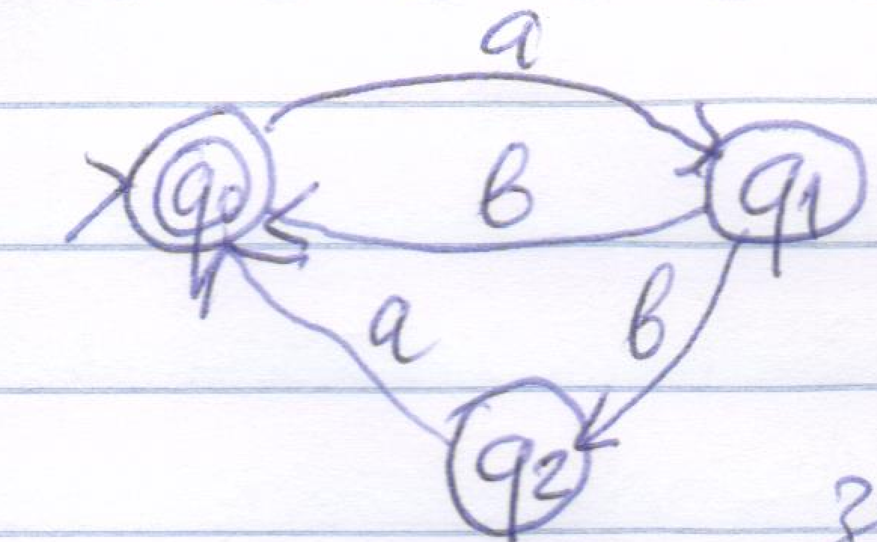
Да се сетим за този краен автомат обаче не е лесно, както и да проверим че той наистина разпознава този език. Както ще видим след малко е много лесно и естествено да се сетим за НКА, който разпознава L. Да дадем съответните точни дефиниции за НКА.

Д. Недетерминиран краен автомат се нарича петорката $M = \langle K, \Sigma, \Delta, s, F \rangle$, където K е крайно множество от състояния, Σ е основна азбука, $s \in K$, s - начално състояние, $F \subseteq K$ F - множество от заключителни състояния и Δ - релация на преходите, $\Delta \subseteq K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times K$. Всяка тройка $(q, u, p) \in \Delta$ се нарича правило за преход.

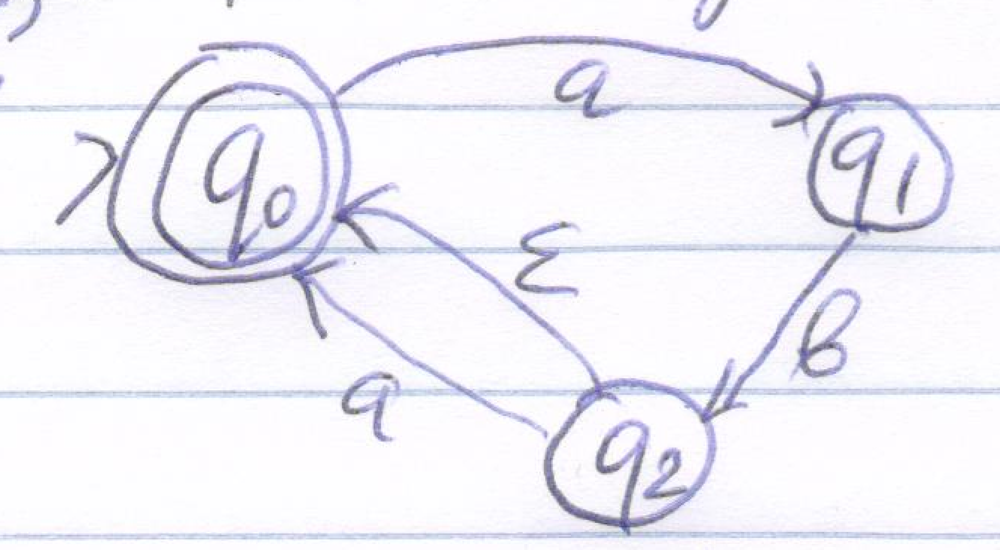
Най-напред искам да обърна внимание, че всеки КДА е частен случай на НКА, ако приемем $\Delta = G_\delta$, където $G_\delta = \{(p, a, q) \mid \delta(p, a) = q\}$ е графиката на δ.

Да разгледаме няколко примера на НКА.

Пример 1. Нека $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$, където $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $s = q_0$, $F = \{q_0\}$, $\Delta = \{(q_0, a, q_1), (q_1, b, q_0), (q_2, a, q_0), (q_2, a, q_0), (q_1, b, q_2)\}$. Този краен автомат разпознава езика L по-горе. Аналогично, както и при КДА може да се напише схема (диаграма) за този автомат

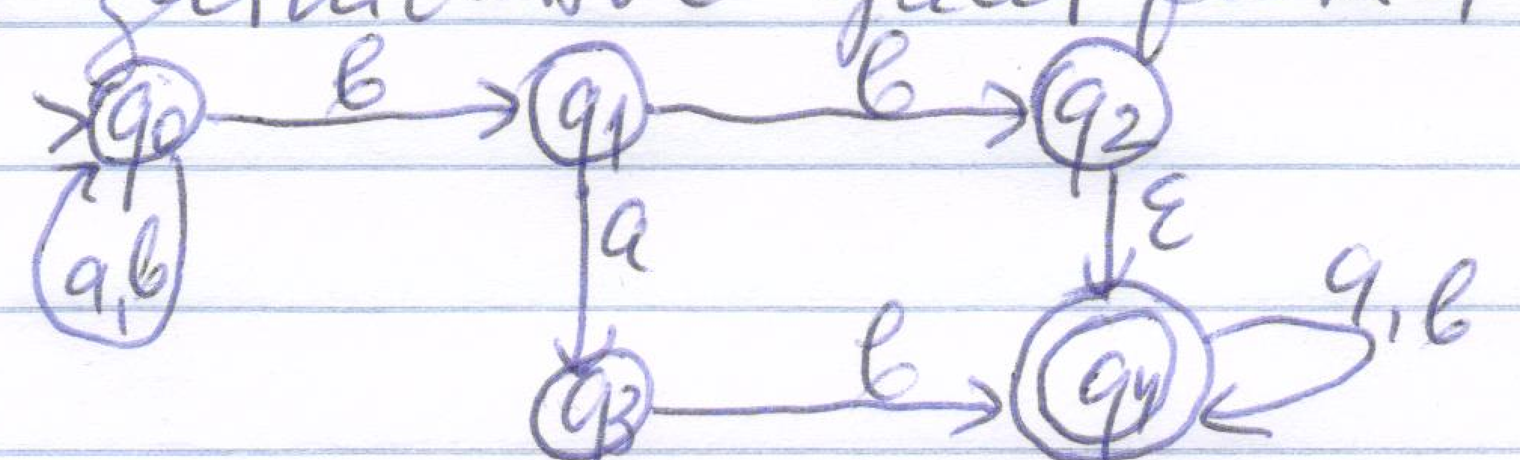


Да обърнем внимание, че за разлика от КДА, където от всяко състояние излизат точно толкова стрелки, колкото са буквите в азбуката Σ, тук това не е задължително. При НКА може да излизат произволен брой стрелки, както и да излизат стрелки с етикет ε. При КДА етикетите на стрелките са само букви от Σ. Например, можем да напишем друг автомат, който разпознава същия език $L=(ab \vee aba)^*$ в който има етикет ε. Пример 2. Нека $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$, където $\Sigma=\{a,b\}$, $K=\{q_0,q_1,q_2\}$, $s=q_0$, $F=\{q_0\}$, $\Delta=?$



Ще разгледаме още един пример на НКА:

Пример 3. $M=\langle K,\Sigma,\Delta,s,F\rangle$, където $\Sigma=\{a,b\}$, $K=\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}$, $s=q_0$, $F=\{q_4\}$ и $\Delta=\{(q_0,a,q_0),(q_0,b,q_0),(q_0,b,q_1),(q_1,b,q_2),(q_1,a,q_3),(q_2,\varepsilon,q_4),(q_3,b,q_4),(q_4,a,q_4),(q_4,b,q_4)\}$ или записано с диаграма



D. Нека $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$ е НКА. Конфигурация за M се нарича отново всеки елемент на $K\times\Sigma^*$.

Отново определяме релация $\vdash_M$ м/у конфигурациите.

D. Нека $(q,w),(q',w')$ са две конфигурации за $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$. Ще казваме, че от (q,w) за една стъпка се извежда (q',w') с помощта на M и пишем $(q,w)\vdash_M(q',w')$ т.т.к. същ. $u\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$ такова, че $w=uw'$ и $(q,u,q')\in\Delta$. Отново с $\vdash_M^*$ ще означаваме рефлексивното и транзитивно затваряне на $\vdash_M$.

D. Нека $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$ е НКА. Казваме, че $w\in\Sigma^*$ се приема (разпознава) от M т.т.к. същ. $(s,w)\vdash_M^*(f,\varepsilon)$ такова, че $f\in F$.

D. $L(M)=\{w \mid w\in\Sigma^*$ и w се разпознава от $M\}$. $L(M)$ се нарича езикът, който се разпознава от M.

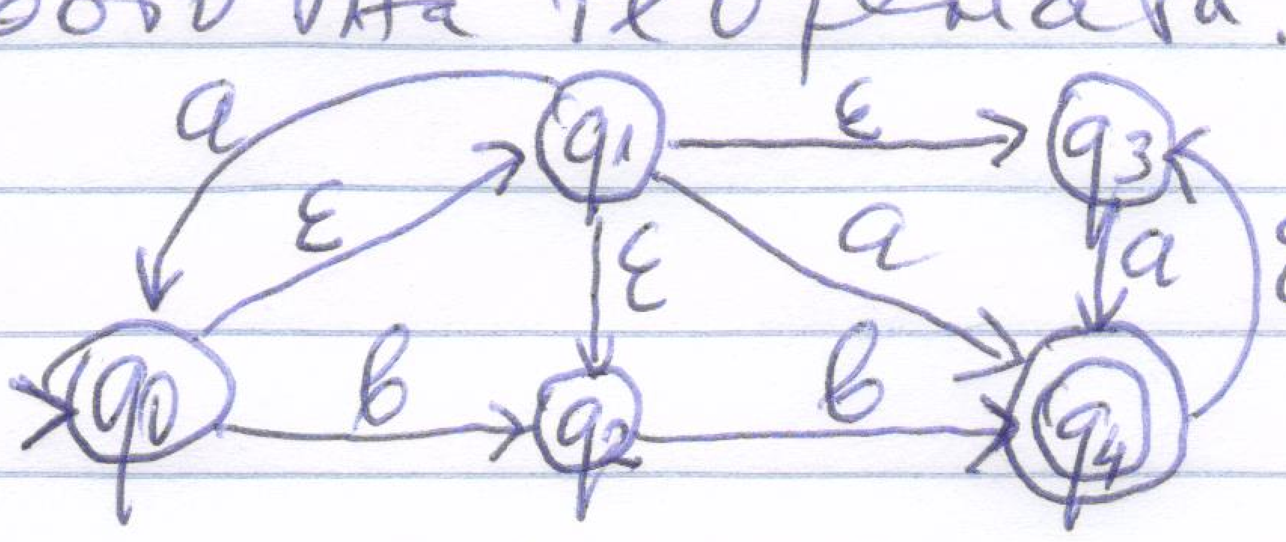
Да разгледаме сега M от пример 1 и да видим как се разпознават думи от M. Нека $w = ababa$. Тогава
$(s,w)=(q_0,w)\vdash_M(q_1,baba)\vdash_M(q_0,aba)\vdash_M(q_1,ba)\vdash_M(q_2,a)\vdash_M$
$\vdash_M(q_2,aba)\vdash_M(q_0,ba)$?
(q_0,ε), т.е. излиза, че w се разпознава от M.
Искам да обърна внимание, че ако бяхме тръгнали по „другия клон" на извода нямаше да стигнем до успешен край. За разлика от КДА, тук имаме различни възможности за извод и трябва или да стигнем до случай в който думата се разпознава или до всички случаи, в които думата не се разпознава. Тук разбираме откъде идва името недетерминиран краен автомат. При дадена дума в един НКА $\vdash_M$ не е определена еднозначно, а има много възможности за извод. Нееднозначността се появява заради изход от едно състояние на различни стрелки с етикет една и съща буква или наличието на стрелки с етикет ε.
Аналогично, ако вземем пример 3 и дума $w=babab$ то $(q_0,babab)\vdash_M(q_0,abab)\vdash_M(q_0,bab)\vdash_M(q_0,ab)\vdash_M(q_0,b)\vdash(q_0,\varepsilon)$ или можем $(q_0,babab)\vdash_M(q_1,abab)\vdash_M(q_3,bab)\vdash_M(q_4,ab)\vdash_M(q_4,b)\vdash_M(q_4,\varepsilon)$, т.е. w се разпознава от M. Може да се докаже, че M разпознава езикът $L=\{w \mid w\in\Sigma^*$ и w съдържа като поддума или bab или $bb\}$.
D. Казваме, че два автомата M_1 и M_2 (независимо дали са КДА или НКА) са еквивалентни т.т.к. $L(M_1)=L(M_2)$.
Сега ще докажем следната важна теорема.
Теорема. За всеки недетерминиран краен автомат съществува еквивалентен на него краен детерминиран авт.
D-во. Нека $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$ е НКА. Ще построим КДА $M'=(K',\Sigma,\delta',s',F')$, който ще е еквивалентен на M.
Идеята е следната: Ще разглеждаме всички крайни подмножества на K, които ще играят роля на новите състояния и функцията δ' ще се определя за всяко мн. $Q\subseteq K$ и $a\in\Sigma$, като множ. на всички $p\in K$, за които

за някое $q \in Q$ имаме правило за преход $(q,a,p) \in \Delta$.
Това е малко неточно и грубо, защото ще имаме нужда от точни дефиниции.
Нека определим най-напред $K' = \mathcal{P}(K) = 2^K$. Сега ще имаме нужда от още дефиниции.
Д. За всяко $q \in K$ с $E(q) = \{p \mid (q,\varepsilon) \vdash_M^* (p,\varepsilon)\}$..
$E(q)$ можем да го дефинираме като затваряне на мн. $\{q\}$ относно релацията $\{(p,r) \mid (p,\varepsilon,r) \in \Delta\}$.
$E(q)$ можем още да го намерим със следния алгоритъм:

$E(q) := \{q\}$

while съществува правило $(p,\varepsilon,r) \in \Delta$, такова, че $p \in E(q)$ и $r \notin E(q)$ do: $E(q) = E(q) \cup \{r\}$.

Да разгледаме един пример на автомат, който ще използваме за илюстрация по време на доказателството на теоремата. Най-напред да намерим $E(q_0) =$



$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$, $E(q_1) = \{q_1,q_2,q_3\}$, $E(q_2) = \{q_2\}$, $E(q_3) = \{q_3\}$, $E(q_4) = \{q_3,q_4\}$.

Сега да определим автомата $M' = (K', \Sigma, \delta', s', F')$. Както споменахме по-горе $K' = \mathcal{P}(K)$ $s' = E(s)$, $F' = \{Q \mid Q \subseteq K$ и $Q \cap F \neq \emptyset\}$ и най-накрая за $Q \subseteq K$ и $a \in \Sigma$
$\delta'(Q,a) = \bigcup\{E(p) \mid p \in K$ и $(q,a,p) \in \Delta$ за някое $q \in Q\}$
Нека да пресметнем s' от горния пример $s' = \{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
и $\delta'(s',a) = \delta'(\{q_0,q_1,q_2,q_3\},a) = E(q_0) \cup E(q_4) = \{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}$
и $\delta'(s',b) = E(q_2) \cup E(q_4) = \{q_2,q_3,q_4\}$.
Сега ще проверим, че M и M' са еквивалентни. Да отбележим, че M' е КДА, като обърнем внимание, че даже когато за някое $Q \subseteq K$ и $a \in \Sigma$, $\delta(Q,a) = \emptyset$, това не означава, че $\delta(Q,a)$ не е дефинирана, защото $\emptyset \in K'$.
За да докажем еквивалентността на M и M' ще имаме нужда от едно
Помощно твърдение: За всяка дума $w \in \Sigma^*$ и за произволни състояния $p,q \in K$ е изпълнена еквивалентността:
$(q,w) \vdash_M^* (p,\varepsilon) \iff (E(q),w) \vdash_{M'}^* (P,\varepsilon)$ за някое P, $p \in P$.

Да допуснем, че сме доказали пом. твърдение и да видим как от него следва теоремата: Нека $w \in \Sigma^*$. Тогава $w \in L(M) \Leftrightarrow (s, w) \vdash_M (f, \varepsilon)$ за някое $f \in F \Leftrightarrow (E(s), w) \vdash_{M'} (Q, \varepsilon)$ за някое Q, такова, че $f \in Q \Leftrightarrow w \in L(M')$, защото $Q \in F'$ т.т.к. $Q \cap F \neq \emptyset$.

Д-во на пом. твърдение. Ще го направим с индукция относно дължината $|w|$ на w.

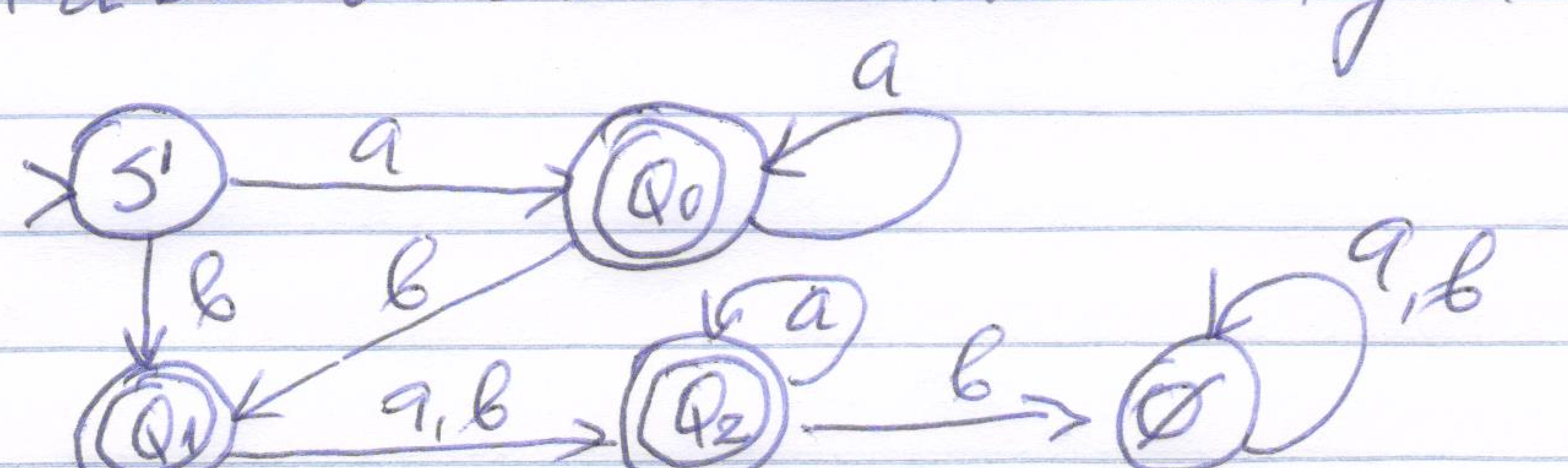
1) $|w| = 0$, т.е. $w = \varepsilon$. Тогава $(q, \varepsilon) \vdash^*_M (p, \varepsilon) \Leftrightarrow p \in E(q)$ $\Leftrightarrow (E(q), \varepsilon) \vdash^*_{M'} (E(q), \varepsilon)$, т.е. $P = E(q)$ и $p \in E(q) = P$, с което твърдението е вярно за $|w| = 0$.

2) Допускаме, че твърдението е вярно за всички думи w с д-на $|w| = k$. Ще го докажем и за всички думи w с д-на $k+1$. Наистина, нека $w = va$, където $|w| = k+1$, $a \in \Sigma$ и $|v| = k$, $v \in \Sigma^*$.

Нека най-напред $(q, w) \vdash^*_M (p, \varepsilon)$. Тогава съществуват $r_1, r_2 \in K$, такива, че $(q, w) \vdash^*_M (r_1, a) \vdash_M (r_2, \varepsilon) \vdash^*_M (p, \varepsilon)$. С други думи $(q, va) \vdash^*_M (r_1, a)$, откъдето $(q, v) \vdash^*_M (r_1, \varepsilon)$. Тъй като $|v| = k$, то съгласно ИП получаваме, че същ. $R_1 \subseteq K$, $r_1 \in R_1$, такова, че $(E(q), v) \vdash^*_{M'} (R_1, \varepsilon)$. Тогава от $(r_1, a) \vdash_M (r_2, \varepsilon)$ следва, че съществува $(r_1, a, r_2) \in \Delta$, а от дефиницията на $\delta'(R_1, a)$ получаваме, че $E(r_2) \subseteq \delta'(R_1, a)$, а от $(r_2, \varepsilon) \vdash^*_M (p, \varepsilon)$ имаме, че $p \in E(r_2)$. Така, че $p \in \delta'(R_1, a)$. От друга страна $(R_1, a) \vdash_{M'} (P, \varepsilon)$ и $P = \delta'(R_1, a)$.
Следователно $(E(q), w) \vdash^*_M (R_1, a) \vdash_M (P, \varepsilon)$ и $p \in P$.
Обратно, нека $(E(q), va) \vdash^*_{M'} (R_1, a) \vdash_M (P, \varepsilon)$ за някое P, такова, че $p \in P$ и $\delta(R_1, a) = P$. Тогава от деф. на $\delta'(R_1, a)$ имаме $\delta'(R_1, a) = \cup\{E(p') \mid p' \in K$ и $(q', a, p') \in \Delta$ за някое $q' \in R_1\} = P$ и $p \in P$. Следователно същ. $r_2 \in K$, такова, че $E(r_2)$ съд. p и $r_1 \in R_1$, такива, че $(r_1, a, r_2) \in \Delta$. Тогава $(r_2, \varepsilon) \vdash^*_M (p, \varepsilon)$, а от ИП $(q, v) \vdash^*_M (r_1, \varepsilon)$. Тогава $(q, va) \vdash^*_M (r_1, a) \vdash_M (r_2, \varepsilon) \vdash^*_M (p, \varepsilon)$. С това пом. твърдение е доказано, а с него и теоремата.

С помощта на горната теорема ние имаме и алгоритъм за намиране на КДА от НКА. Да обърнем внима-

ние на факта, че в общия случай броя на новите състояния, които ще получим е $2^{|K|}$!
Нека сега да видим как работи алгоритъма за примера, който разглеждаме в теоремата. За този пример състоянията на НКА са 5. Следователно, в общия случай полученият КДА ще има $2^5=32$ състояния. Както ще видим обаче, не винаги ще имаме нужда от тези състояния. И така $E(S)=S'=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$. По-горе видяхме, че
$\delta'(S',a)=\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}=Q_0$, $\delta'(S',b)=\{q_2,q_3,q_4\}=Q_1$
Да пресметнем и останалите необходими състояния
$\delta'(Q_0,a)=\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}=Q_0$
$\delta'(Q_0,b)=\{q_2,q_3,q_4\}=Q_1$
$\delta'(Q_1,a)=E(q_4)=\{q_3,q_4\}=Q_2$
$\delta'(Q_1,b)=E(q_4)=Q_2$
$\delta'(Q_2,a)=E(q_4)=Q_2$, $\delta'(Q_2,b)=\phi$
$\delta'(\phi,a)=\delta'(\phi,b)=\phi$, $F'=\{Q_0,Q_1,Q_2\}$
Така окончателно получихме следния КДА



Както забелязахте тук ние получихме, започвайки от S' само 5 състояния.

Оттук нататък ще е ясно, че ако един език се разпознава от КДА, то той се разпознава и от НКА и обратно. Затова, ако един език се разпознава от автомат (детерминиран или недетерминиран), той се нарича автоматен език.

Крайни автомати и регулярни езици

Нашата цел е да докажем, че класът на регулярните езици съвпада с класът на автоматните езици.

Ще напомня една дефиниция от миналия семестър. Едно множество F от двоични функции се нарича затворено, ако $F=[F]$, т.е. суперпозицията на произволни функции от F принадлежи на F. За произволния случай можем да дадем следната

Д. Нека $F: A^n \to A$ и $B \subseteq A$. Казваме, че B е затворено отн. F, ако за всички $a_1, \dots, a_n \in B$ е изпълнено, че $F(a_1, \dots, a_n) \in B$.

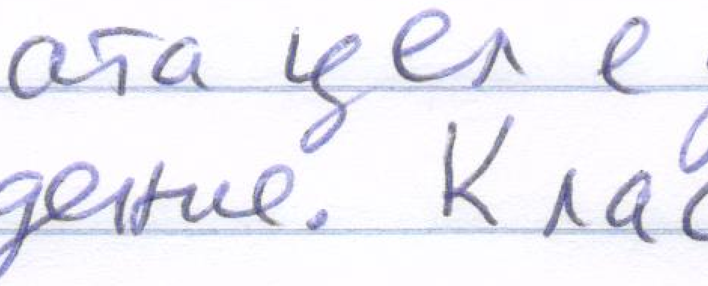
Аналогично, ако $F_i : A^{n_i} \to A$, $i=1, \dots, k$ и $B \subseteq A$. Казваме, че B е затворено отн. $F_1, \dots, F_k$, ако за пр. $a_1, \dots, a_{n_i} \in B$ е изпълнено, че $F_i(a_1, \dots, a_{n_i}) \in B$.

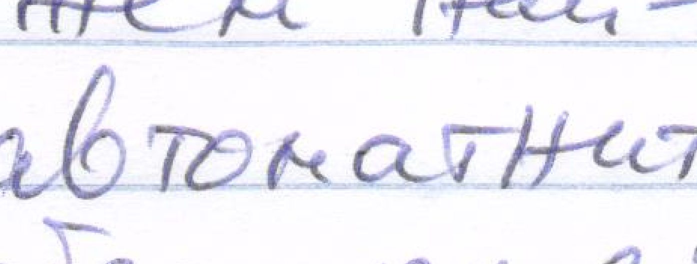
Нашата цел е да докажем най-напред следното

Твърдение. Класът на автоматните езици е затворен относно операциите: а) обединение; б) конкатенация; в) звезда на Клини; г) допълнение; д) сечение.

Д-во. Да напомня, че един език е автоматен, ако той се разпознава от краен автомат (без значение дали е КДА или НДА). Затова в този случай ние ще използваме за удобство НКА.

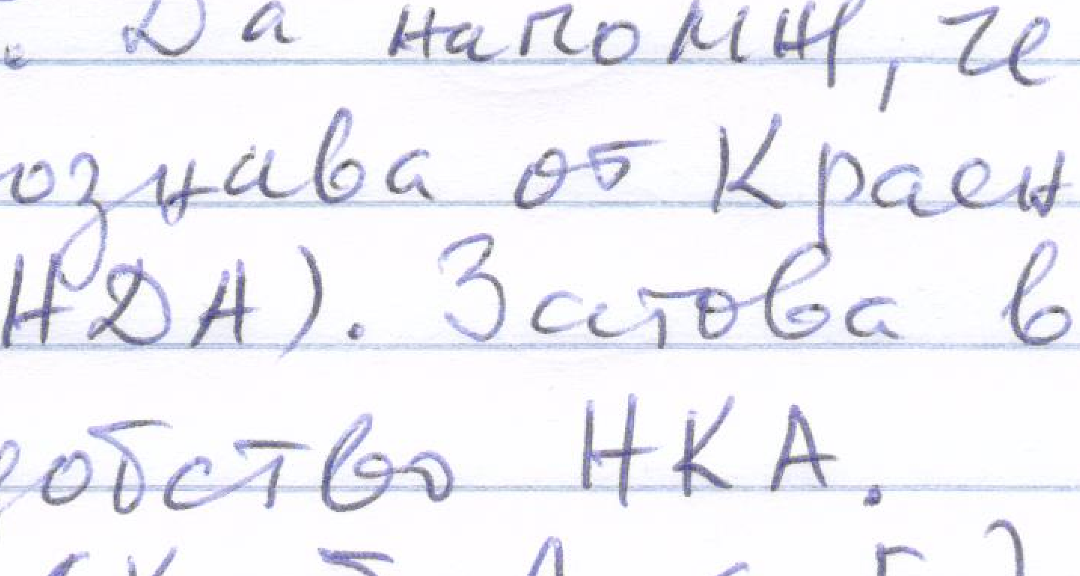
Нека $(K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1) = M_1$ и $M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$, където $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ са два НКА. За всички подточки ние ще построим схематично най-напред автоматите, а след това и точните дефиниции. Нека

M_1: 

и M_2: 

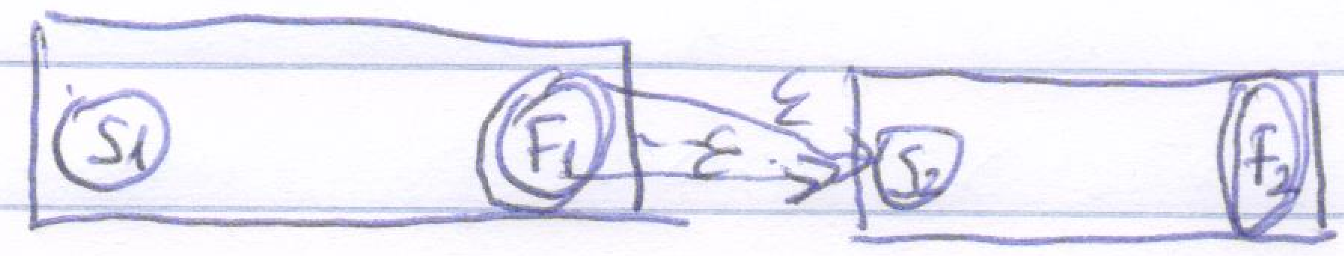
са двата автомата

а) Избираме си ново състояние s и построяваме авт. M, такъв, че $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$. Схематично го построяваме така:



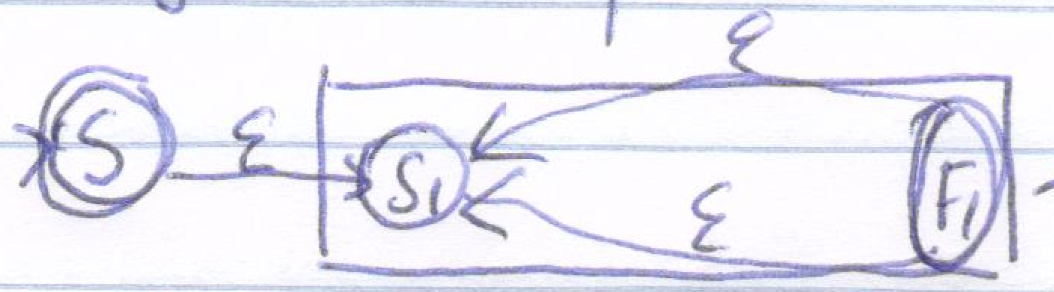
Формално $M = (K_1 \cup K_2 \cup \{s\}, \Sigma, \Delta, s, F)$, където $F = F_1 \cup F_2$, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \varepsilon, s_1), (s, \varepsilon, s_2)\}$.

б) Ще построим M, такъв, че $L(M) = L(M_1) \circ L(M_2)$.


– схематично

Формално, $M = (K, \Sigma, \Delta, s_1, F_2)$, където $K = K_1 \cup K_2$, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f, \varepsilon, s_2) \mid f \in F_1\}$.

в) Ще построим M, такъв, че $L(M) = (L(M_1))^*$.


– схематично

Формално $M = (K_1 \cup \{s\}, \Delta, s, F)$ където $F = F_1 \cup \{s\}$, $\Delta = \Delta_1 \cup \{(s, \varepsilon, s_1)\} \cup \{(f, \varepsilon, s_1) \mid f \in F_1\}$

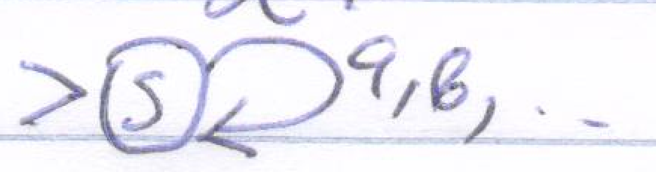
г) Ще построим автомат $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ такъв, че $L(M) = \Sigma^* \setminus L(M_1)$. Тук е почти очевидно как ще го построим $M = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, K_1 \setminus F_1)$.

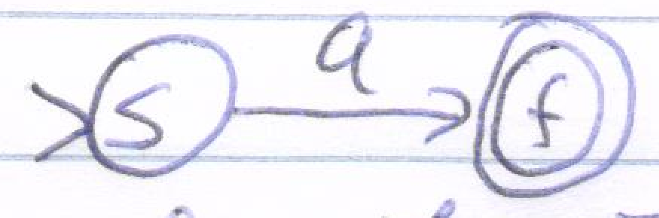
д) Ще използваме законът на Де Морган, че $\overline{L_1 \cap L_2} = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$, където $\overline{L_i} = \Sigma^* \setminus L_i$, $i = 1, 2$. Тогава полагайки $L_i = L(M_i)$, $i = 1, 2$ имаме $L(M_1) \cap L(M_2) = L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = \overline{\overline{L(M_1)} \cup \overline{L(M_2)}}$, което показва, че $L(M_1) \cap L(M_2)$ е автоматен. С това твърдението е доказано.

Сега ще докажем

Теорема. Един език е регулярен т.т.к. той е автоматен.

Д-во. Нека най-напред L е регулярен, т.е. $L = \mathcal{L}[\alpha]$ за някой рег. израз α. Така, доказателството ще проведем с индукция относно α.

1) $\alpha = \emptyset$. Тогава  разпознава $\emptyset = \mathcal{L}[\emptyset]$;

2) $\alpha = a$. Тогава  разпознава $\mathcal{L}[a] = \{a\}$;

3) $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2)$. Тогава $\mathcal{L}[\alpha] = \mathcal{L}[\alpha_1] \circ \mathcal{L}[\alpha_2]$ и съгл. ИП същ. авт. M_1, M_2, такива, че $\mathcal{L}[\alpha_1] = L(M_1)$ и $\mathcal{L}[\alpha_2] = L(M_2)$ и съгласно горното твърдение същ. авт. M, такъв, че $L(M) = L(M_1) \circ L(M_2) = \mathcal{L}[\alpha]$.

4) $\alpha = (\alpha_1 \cup \alpha_2)$. Тогава $\mathcal{L}[\alpha] = \mathcal{L}[\alpha_1] \cup \mathcal{L}[\alpha_2]$ и съгл. ИП същ. авт. M_1 и M_2, такива, че $\mathcal{L}[\alpha_1] = L(M_1)$ и $\mathcal{L}[\alpha_2] = L(M_2)$. Съгл. горното тв. същ. авт. M, такъв, че $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$

$= \mathcal{L}[\alpha_1] \cup \mathcal{L}[\alpha_2] = \mathcal{L}[\alpha]$;

5) $\alpha = (\alpha_1)^*$. Тогава $\mathcal{L}[\alpha] = (\mathcal{L}[\alpha_1])^*$ и съгл. ИП същ. авт. M_1, такъв, че $L(M_1) = \mathcal{L}[\alpha_1]$ и съгласно предното тв. същ. авт. M, такъв, че $L(M) = (L(M_1))^* = (\mathcal{L}[\alpha_1])^* = \mathcal{L}[\alpha]$.

С това окончателно е доказана теоремата в едната посока.

Обратно, нека $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ е НКА. Ще построим регулярен израз α, такъв, че $\mathcal{L}[\alpha] = L(M)$. Нека за тази цел приемем, че $K = \{q_1, \dots, q_n\}$ и $s = q_1$. Ще дадем следната помощна дефиниция. Ще пишем $(p, w') \;{}_{k}{\vdash}_M^* (q, w'')$ т.т.к. съществуват $w_1, q_{i_1}, \dots, w_l, q_{i_l}$, $w_1, \dots, w_l \in \Sigma^*$, $q_{i_1}, \dots, q_{i_l} \in K$, такива че $i_1, \dots, i_l \le k$ и $(p, w') \vdash_M (q_{i_1}, w_1) \vdash_M \dots \vdash_M (q_{i_l}, w_l) \vdash_M (q, w'')$. След това с $R(i, j, k)$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 0, \dots, n$ ще означим множествата $R(i,j,k) = \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ и } (q_i, w) \;{}_{k}{\vdash}_M^* (q_j, \varepsilon)\}$.

Да обърна внимание, че когато $k = n$, то $R(i,j,n) = \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ и } (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, \varepsilon)\}$. Следователно,

$$L(M) = \{w \mid w \in \Sigma^*, (q_1, w) \vdash_M^* (q_j, \varepsilon) \text{ и } q_j \in F\} = \bigcup \{R(1, j, n) \mid q_j \in F\}.$$

Така, че всичко в тази посока на доказателството се свежда до това да проверим, че всяко $R(i,j,k)$ е регулярен език за $i, j = 1, \dots, n$, $k = 0, \dots, n$.

Това ще го докажем с индукция относно k.

Най-напред да отбележим, че $R(i,j,0) =$

$$= \begin{cases} \{\varepsilon\} \cup \{a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \mid (q_i, a, q_j) \in \Delta\}, & \text{ако } i = j, \\ \{a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \mid (q_i, a, q_j) \in \Delta\}, & \text{ако } i \ne j. \end{cases}$$

Във всички случаи $R(i,j,0) \subseteq \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, което е крайно множ. от букви в Σ и нас $\{\varepsilon\}$ (евентуално), т.е. $R(i,j,0)$ е регулярно множество.

Да допуснем, че $R(i,j,k-1)$ е регулярно за пр. $i, j = 1, \dots, n$ и $k = 1, \dots, n$. Ще го докажем и за $R(i,j,k)$.

Наистина, $R(i,j,k) = R(i,j,k-1) \cup R(i,k,k-1) R(k,k,k-1)^* R(k,j,k-1)$, защото $(q_i, w_1) \;{}_{k}{\vdash}_M^* (q_j, w_l)$ т.т.к. $(q_i, w_1) \;{}_{k-1}{\vdash}_M^* (q_k, w_2) \;{}_{k-1}{\vdash}_M^* (q_k, w_3) \;{}_{k-1}{\vdash}_M^* \dots \;{}_{k-1}{\vdash}_M^* (q_k, w_{l-1}) \;{}_{k-1}{\vdash}_M^* (q_j, w_l)$ или $(q_i, w_1) \;{}_{k-1}{\vdash}_M^* (q_j, w_l)$. Така теоремата е доказана.