Функции на много променливи

1. Пространството $\mathbb{R}^n$

Ще считаме, че е зададена (правоъгълна) Декартова координатна система.

1.1. Дефиниция (точка в $\mathbb{R}^n$)
Всяка наредена „n“-орка реални числа.

1.2. Дефиниция (разстояние в $\mathbb{R}^n$)

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2}$$

1.3. Дефиниция („n“-мерно Евклидово пространство)
Съвкупността от всички точки в "nмерното пространство с горното разстояние.

1.4. Дефиниция ($U(x,r)$ - кълбо с център точката x и радиус r)
Съвкупността от всички точки y в $\mathbb{R}^n$ такива, че $\rho(x,y) < r$.

1.5. Дефиниция (сферична ϵ-околност на точката x: $U(x,\epsilon)$), т.е.

$$U(x,\epsilon) = \{y = (y_1, ...y_n) : \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 < \epsilon^2\}$$

Бележка 1.
За $\mathbb{R}^1$: $U(x,\epsilon) = (x-\epsilon, x+\epsilon)$.

1.6. Дефиниция (паралелепипед (със страни, успоредни на координатните оси))

$$P(x;\delta_1,\delta_2,...,\delta_n) = \{y = (y_1,...y_n) : |y_i - x_i| < \delta_i,\ i = 1,2,...,n\}$$

Бележка 2.
Дефиницията за сферична околност е координатно независима, а за паралелепипед - координатно зависима. В сила е следната (удобна) лема.

Лема.(за еквивалентност на сферична околност и паралелепипед)
Всяка сферична околност съдържа паралелепипед и всеки паралелепипед съдържа сферична околност.

1.7. Дефиниция (редица в $\mathbb{R}^n$)
Изображение: $m \longmapsto x^{(m)}$, където $m \in \mathbb{N}$ и $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$.

1.8. Дефиниция (граница на редица в $\mathbb{R}^n$)

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x, \quad \text{ако} \quad \lim_{m\to\infty} \rho\left(x^{(m)}, x\right) = 0.$$

Лесно се вижда, че

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x,$$

ако $\forall\epsilon > 0$, $\exists\, m_\epsilon$ такова, че $\forall m > m_\epsilon$ е изпълнено $x^{(m)} \in U(x,\epsilon)$.

От горната лема следва, че

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x,$$

ако $\forall P(x;\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)$, $\exists\, m_\epsilon$ такова, че $\forall m > m_\epsilon$ е изпълнено $x^{(m)} \in P(x;\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)$.

Теорема.

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i,\ \ i = 1,2,...,n.$$

Доказателство.

Необходимост.
Нека $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = 0$ и $\epsilon > 0$. Тогава $\exists\, m_\epsilon$ такова, че $\forall m > m_\epsilon$ е изпълнено $x^{(m)} \in P(x;\epsilon)$, т.е. $\forall m > m_\epsilon$ е в сила $\left|x_i^{(m)} - x_i\right| < \epsilon$. Следователно, $\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i,\ \ i = 1,2,...,n$.

Достатъчност.
Нека $\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i,\ \ i = 1,2,...,n$ и $P(x;\epsilon_1,...,\epsilon_n)$. Тогава $\forall\epsilon_i > 0\ \exists m_i = m_i(\epsilon_i)$ такова, че $\forall m > m_i$ е в сила $\left|x_i^{(m)} - x_i\right| < \epsilon_i$. Нека $m_0 = \max\{m_1,...,m_n\}$. Тогава $\forall m > m_0$ е изпълнено $x^{(m)} \in P(x;\epsilon_1,...,\epsilon_n)$, т.е. $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x$.

1.9. Дефиниция (ограничено множество)
Множеството $X \subset \mathbb{R}^n$ е ограничено, ако съществува куб $P(O:a)$ с център в началото на координатната система такъв, че $X \subset P(O:a)$. Или множеството $X \subset \mathbb{R}^n$ е ограничено, ако съществува кълбо $U(O:a)$ такова, че $X \subset U(O:a)$.

1.10. Дефиниция (ограничена редица)
Редицата $x^{(m)}$; $m = 1, 2, ...$ е ограничена, ако множеството $x^{(m)}$; $m = 1, 2, ...$ е ограничено. Очевидно, ако $x^{(m)}$; $m = 1, 2, ...$ е сходяща, то тя е ограничена.

Теорема.(Болцано-Вайерщрас)
От всяка ограничена редица може да се избере сходяща подредица.

1.11. Дефиниция ($\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty$)
$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty$ ako $\lim_{m\to\infty} \rho\left(x^{(m)}, O\right) = \infty$, където $O = O(0, ..., 0)$.

Теорема.(Болцано-Вайерщрас)

Теорема.

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \quad \text{такова, че} \quad \lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = \infty.$$

Доказателство.
Очевидно.

1.12. Дефиниция (вътрешна точка)
Точката $x \in X$ е вътрешна за множеството X, ако съществува $\epsilon > 0$ такова, че $U(x:\epsilon) \subset X$.

1.13. Дефиниция (отворено множество)
Множество на което всяка точка е вътрешна.

Лема
Всяка ϵ-околност $U(x:\epsilon)$ е отворено множество.

1.14. Дефиниция (околност на точка)
Всяко отворено множество, съдържащо точката.

1.15. Дефиниция (прободена околност)
Всяка околност на точката без точката.

1.16. Дефиниция (гранична точка)
$x \in \mathbb{R}^n$ е гранична за множеството X, ако всяка нейна околност съдържа точки, принадлежащи на X и точки, непринадлежащи на X.

1.17. Дефиниция (граница на множество - ∂X)
Съвкупността от всички гранични точки.

1.18. Дефиниция (околност на ∞ - $U(\infty, \epsilon)$)

$$U(\infty, \epsilon) = \{x : \rho(x, O) > \frac{1}{\epsilon}\}$$

Бележка 3.
За разлика от $\mathbb{R}^1$, в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ безкрайността е винаги положителна.

2. Граница на функции на две променливи

Нека множеството $D \in \mathbb{R}^2$ и $f : D \to \mathbb{R}$.

2.1. Дефиниция(Граница на функция на две променливи)
Казваме, че

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A, \quad \text{ако}$$

a)Хайне
за всяка редица $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ е изпълнено $f(x_n, y_n) \to A$.

b)Коши
за всяка околност $V(A)$ съществува околност $U(x_0, y_0)$ такава, че за всяко $(x, y) \in U(x_0, y_0)$ е изпълнено $f(x, y) \in V(A)$.

Дефиницията по Коши може да се запише и така:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall (x,y), |(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta : \; |f(x,y) - A| < \epsilon.$$

Бележка 4.
Всъщност околност на точката A по-горе е всеки отворен интервал, съдържащ точката.

Бележка 5.
Функцията може изобщо да не е дефинирана в точката (x_0, y_0).

Теорема.
Горните две дефиниции са еквивалентни.

Доказателство:
Аналогично на доказателството при функции на една променлива.

Удобно правило.
Дефиницията на Коши е удобна за доказване, че съществува дадена граница, а на Хайне, че не съществува.

Пример 1.
Да се докаже, че

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Решение.
Ще използваме дефиницията на Коши.

Нека $\epsilon > 0$. Имаме

$$\left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| = \frac{|x-y|(x^2 + y^2 + xy)}{x^2 + y^2} \le 2|x-y|.$$

Тогава ако U е такава околност (квадратна) на точката $(0,0)$, че $x < \frac{\epsilon}{4}$ и $y < \frac{\epsilon}{4}$ е изпълнено

$$\left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| < \epsilon, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Пример 2.
Да се докаже, че

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{няма граница в} \quad (0,\,0).$$

Решение.
Ще използваме дефиницията на Хайне, т.е. ще дефинираме две различни редици, клонящи към $(0,0)$ за които границите на функцията са различни.

Наистина, нека $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Тогава $(x_n, y_n) \to (0,0)$ и $f(x_n, y_n) = 0$, т.е. $f(x_n, y_n) \to 0$. Сега, нека $(x_n, y_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Тогава, също $(x_n, y_n) \to (0,0)$ и $f(x_n, y_n) = \frac{3}{5}$, т.е. $f(x_n, y_n) \to \frac{3}{5}$.

Пример 3.

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{за } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{за } x = y = 0. \end{cases}$$

Да разгледаме произволна права g, която минава през началото на координатната система, т.е. нека $g : x = \alpha t, y = \beta t$. За такива прави е изпълнено

$$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha^2 \beta t}{\alpha^4 t^2 + \beta^2} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Сега да разгледаме кривата с уравнение $y = x^2$. За нея имаме $f(x, x^2) = 1/2$ и следователно границата по параболата $y = x^2$ е равна на $1/2$. Или, от съществуването на границата по всяко направление, не следва, че съществува границата въобще.

2.2. Дефиниция (повторни граници)

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A \quad \text{и} \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A.$$

Първо се смята вътрешната граница като функцията се разглежда като функция на една променлива, т.е. при $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ считаме, че x е константа и разглеждаме $f(x,y)$ като функция на една променлива y. После се смята външната граница.

Пример 4. $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}, y\neq 0$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

В същото време границата $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ не съществува понеже $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ не съществува при $x\neq 0$, но съществува границата $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ (докажете). Тоест, от съществуването на $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ не следва съществуването на повторните граници и обратно.

3. Граници при $(x,y)\to\infty$

Казваме, че $M\to\infty$, ако $\rho(M,O)=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$. Лесно се вижда, че ако $M\to\infty$, то поне една от координатите трябва да клони към ∞ (покажете). Тогава, ако например $x\to\infty$, то често е удобно да се направи субституцията $x=\frac{1}{u}$.

Пример 5.
Да се пресметне границата

$$\lim_{(x,\,y)\to(\infty,3)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

Решение.
Полагаме $x=\frac{1}{u}$. Тогава $(x,\,y)\to(\infty,3)$ е еквивалентно на $(u,\,y)\to(0,3)$ и следователно

$$\lim_{(x,\,y)\to(\infty,3)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{(u,\,y)\to(0,3)}(1+u)^{\frac{1}{u(1+uy)}}=\lim_{(u,\,y)\to(0,3)}\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{\frac{1}{1+uy}}=e.$$

Ако и двете променливи клонят към ∞, често е удобно да се използва полярна смяна, т.е. $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$. Тогава при $(x,y)\to\infty$ имаме $r\to\infty$.

Пример 6.

$$\lim_{(x,\,y)\to\infty}\frac{x^2-y^2}{x^4+y^4}=0$$

Правим полярна смяна.

$$\lim_{(x,\,y)\to\infty}\frac{x^2-y^2}{x^4+y^4}=\lim_{r\to\infty}\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{r^2(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)}\leq\lim_{r\to\infty}\frac{2}{r^2}=0$$

Горното неравенство е изпълнено понеже $\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\geq\frac{1}{2}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2$.

Бележка 6.
Полярната смяна често е удобна и при $(x,y)\to(0,0)$. Тогава $r\to 0$. При други точки трябва да се използва обобщена поляна смяна. Решете горните примери като използвате полярна смяна.

4. Непрекъснатост на $f(x,y)$ в точката (x_0,y_0)

a)Хайне
Ако за всяка редица $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$ е изпълнено $f(x_n,y_n)\to f(x_0,y_0)$.

b)Коши
Ако за всяка околност $V(f(x_0,y_0))$ съществува околност $U(x_0,y_0)$ такава, че за всяко $(x,y)\in U(x_0,y_0)$ е изпълнено $f(x,y)\in V(f(x_0,y_0))$.

Пример 7.
Функцията

$$f(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{за } x^2+y^2>0\\ 0 & \text{за } x=y=0\end{cases}$$

е прекъсната в $(0, 0)$, понеже не съществува $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ (докажете).

В същото време, функцията е непрекъсната по всяка от променливите, т.е. от непрекъснатост по всяка променлива не следва непрекъснатост на функцията.

Пример 8.

Функцията

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{за } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{за } x = y = 0 \end{cases}$$

е прекъсната в $(0, 0)$. Защо?