Афинни операции с вектори:

1. Умножение на вектор с число:
   За $\lambda \in \mathbb{R}$ векторът $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ има дължина $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$ и посока $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ за $\lambda > 0$ и противоположна посока $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ при $\lambda < 0$.
2. Събиране на вектори: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
3. Ако $M(x_1, x_2, x_3), N(y_1, y_2, y_3)$, то
   $$\overrightarrow{NM}(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$$
4. Ако $A(x_1, x_2, x_3), B(y_1, y_2, y_3)$, то средата M на отсечката AB има координати:
   $$M\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}, \frac{x_3+y_3}{2}\right)$$
5. Ако $A(x_1, x_2, x_3)$, $B(y_1, y_2, y_3)$, $C(z_1, z_2, z_3)$, то медицентърът M на $\triangle ABC$ има координати:
   $$M\left(\frac{x_1+y_1+z_1}{3}, \frac{x_2+y_2+z_2}{3}, \frac{x_3+y_3+z_3}{3}\right)$$

Скаларно произведение:
Нека $\vec{a}, \vec{b} \neq \overrightarrow{0}$. Тогава:

1. $< \vec{a}, \vec{b} >= |\vec{a}||\vec{b}| \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$
2. $< \vec{a}, \vec{b} >=< \vec{b}, \vec{a} >$
3. $< \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a}, \vec{c} > + < \vec{b}, \vec{c} >$
4. $< \lambda\vec{a}, \vec{b} >= \lambda < \vec{a}, \vec{b} >$
5. $< \vec{a}, \vec{a} >= |\vec{a}|^2$
6. $< \vec{a}, \vec{b} >= 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$
7. $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{< \vec{a}, \vec{b} >}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
8. Ако $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то
   $$< \vec{a}, \vec{b} >= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Векторно произведение:
Нека $\vec{a}, \vec{b} \neq \overrightarrow{0}$. Тогава $\vec{a} \times \vec{b}$ е единственият вектор удовлетворяващ условията:

1. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$
2. $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ и $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) \in S^+$

Свойства:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
3. $(\lambda\vec{a}) \times (\mu\vec{b}) = \lambda\mu(\vec{a} \times \vec{b})$
4. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$
5. Лицето на успоредник, построен върху векторите $\vec{a}, \vec{b}$, взети с общо начало:
   $$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$
6. Лицето на триъгълник, построен върху векторите $\vec{a}, \vec{b}$, взети с общо начало:
   $$S = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}$$
7. $\sin\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
8. $< \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} >=< \vec{a}, \vec{a} >< \vec{b}, \vec{b} > - < \vec{a}, \vec{b} >^2$
9. Ако $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то
   $$\vec{a} \times \vec{b} \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Двойно векторно произведение:

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} =< \vec{a}, \vec{c} > \vec{b} - < \vec{b}, \vec{c} > \vec{a}$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) =< \vec{a}, \vec{c} > \vec{b} - < \vec{a}, \vec{b} > \vec{c}$

Смесено произведение:
Смесено произведение на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ наричаме числото $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} >$

Свойства:

1. $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= 0 \iff \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ са компланарни
2. $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} >=< \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} >$
3. $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= - < \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} >= - < \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} >=$
   $= - < \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} >$
4. $< \vec{a_1} + \vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a_1}, \vec{b}, \vec{c} > + < \vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c} >$
5. $< \lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c} >=$
   $= \lambda < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >$
6. Обема на паралелепипед, построен върху векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взети с общо начало:
   $$V = | < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > |$$

7. Обем на тетраедър, построен върху векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взети с общо начало:

$$V = \frac{| < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > |}{6}$$

8. Ако $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, то

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

9. $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >^2 = \begin{vmatrix} < \vec{a}, \vec{a} > & < \vec{a}, \vec{b} > & < \vec{a}, \vec{c} > \\ < \vec{b}, \vec{a} > & < \vec{b}, \vec{b} > & < \vec{b}, \vec{c} > \\ < \vec{c}, \vec{a} > & < \vec{c}, \vec{b} > & < \vec{c}, \vec{c} > \end{vmatrix}$