# Modelamiento y Optimización

## Clase 23

Gonzalo Muñoz

10 de Junio 2024

# Condiciones de KKT

$$
\begin{aligned}
g_i(x^*) &\leq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m \\
h_j(x^*) &= 0 \qquad \forall j = 1, \dots, p \\
\lambda_i^* &\geq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m \\
\lambda_i^* g_i(x^*) &= 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m \\
\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) &= 0
\end{aligned}
$$

Holgura Complementaria

gradiente del Lagrangeano $= 0$

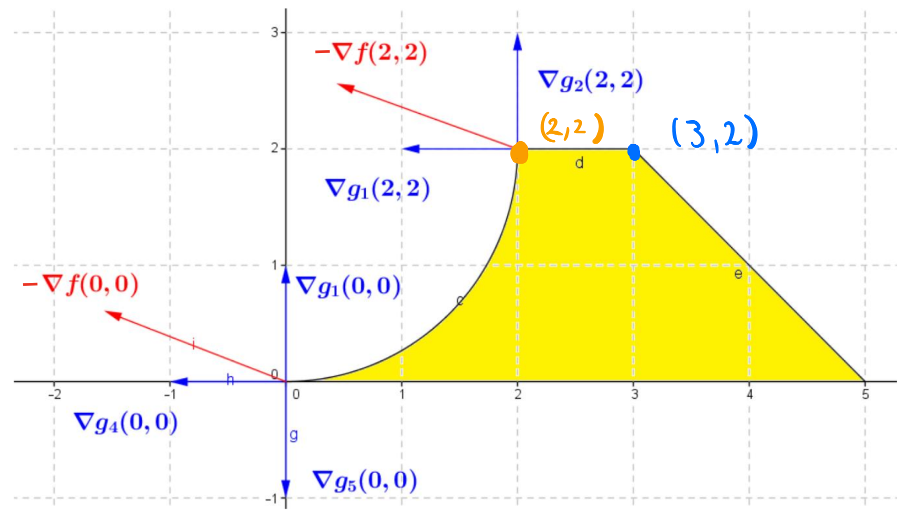
Estas son las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, o KKT. Siempre que haya dualidad fuerte, un par primal-dual óptimo las debe cumplir.

Notar que la condición del gradiente se puede interpretar como un "alineamiento" entre gradientes.

$$-\nabla f(x^*) = \sum_j \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) + \sum_j \mu_j^* \nabla h_j(x^*)$$

# Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & f(x) = 3x_1 - x_2 \\
\text{s.a.} \quad & g_1(x) = 4 - x_1^2 - (x_2 - 2)^2 \leq 0 \\
& g_2(x) = x_2 - 2 \leq 0 \\
& g_3(x) = x_1 + x_2 - 5 \leq 0 \\
& g_4(x) = -x_1 \leq 0 \\
& g_5(x) = -x_2 \leq 0
\end{aligned}
$$




Analicemos si los puntos $x = (3,2)$, $x = (2,2)$ y $x = (0,0)$ cumplen KKT. ¿Es alguno óptimo?

$\underline{x = (3,2)}$

- Factible: ✓
- H-C: $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$
- Gradiente del Lagrangeano: ( usando )

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

No puede ser pues $\lambda_3 \geq 0$

# Ejemplo

$\boxed{x=(2,2)}$

- Factible ✓
- H-C : $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$
- Gradiente del Lagrangeano :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_1(x) = 4 - x_1^2 - (x_2-2)^2 \leq 0$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2(x_2-2) \end{pmatrix} \qquad \nabla g_1(2,2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3/4 \,, \quad \lambda_2 = 1 \qquad \geq 0$

$\Rightarrow$ Se cumple KKT

$\boxed{x=(0,0)}$ es el óptimo y cumple KKT (ejercicio)

fcfm

# Dualidad fuerte

## Definición (Punto de Slater)

Diremos que $x \in S$ es un punto de Slater si $g_j(x) < 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.

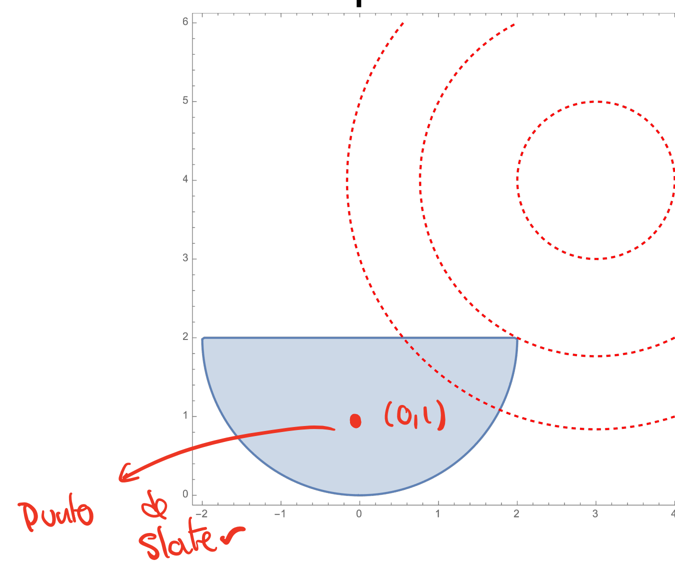
punto en el interior relativo de S

## Teorema (Dualidad fuerte)

*Supongamos que el problema es convexo y que existe un punto de Slater en $S$. Entonces se cumple dualidad fuerte.*

Esto explica por qué el ejemplo de clase anterior cumplía dualidad fuerte:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \\
\text{sujeto a:} \quad & x_2 \leq 2 \\
& x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4
\end{aligned}
$$



# Ejemplo

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \min\ & (x-2)^2 + 2(y-1)^2 \\ \text{s.a. } & x + 3y \leq 3 \\ & -x + y \leq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio: verificar que el problema es convexo. Veamos que cumple las condiciones de Slater y calculemos los puntos que cumplen KKT.

Punto de Slater: $(1,0)$ ✓

$$L(x,y,\lambda) = (x-2)^2 + 2(y-1)^2 + \lambda_1(x+3y-3) + \lambda_2(-x+y)$$

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 2(x-2) + \lambda_1 - \lambda_2 \\ 4(y-1) + 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}$$

KKT:

$x + 3y \leq 3$ (1) $\quad \lambda_1 \geq 0$ (3) $\quad \lambda_1(x+3y-3) = 0$ (5)

$-x + y \leq 0$ (2) $\quad \lambda_2 \geq 0$ (4) $\quad \lambda_2(-x+y) = 0$ (6)

## Ejemplo

$$2(x-2)+\lambda_1-\lambda_2=0 \quad (7)$$
$$4(y-1)+3\lambda_1+\lambda_2=0 \quad (8)$$

Caso 1: $\lambda_1=\lambda_2=0$

$(7)+(8) \Rightarrow x=2,\ y=1$ pero! $2+3\cdot 1 \not\leq 3$

no se cumple (1)

Caso 2: $\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2=0$

$$\left.\begin{array}{l} (5) \Rightarrow x+3y-3=0 \\ (7) \Rightarrow 2(x-2)+\lambda_1=0 \\ (8) \Rightarrow 4(y-1)+3\lambda_1=0 \end{array}\right\} \text{sistema de } 3\times 3$$

Resolviéndolo (offline) $\Rightarrow x=\frac{18}{11},\ y=\frac{5}{11},\ \lambda_1=\frac{8}{11}$

Debemos verificar (1)–(4)

(3) $\lambda_1=\frac{8}{11}\geq 0$ ✓

(4) $\lambda_2=0\geq 0$ ✓

# Ejemplo

(1) $x + 3y = \frac{18}{11} + 3 \cdot \frac{5}{11} = \frac{33}{11} = 3 \leq 3$ ✓

(2) $-x + y = -\frac{18}{11} + \frac{5}{11} = -\frac{13}{11} \leq 0$ ✓

$\Rightarrow$ Este punto cumple KKT, así que es candidato a óptimo.

En general uno debe seguir con los otros casos.
Pero, en el caso convexo podemos parar.

$\downarrow$

# Condiciones suficientes

Hasta ahora sabemos que {convexidad + Slater} implican que dualidad fuerte se cumple, y por ende el óptimo cumple KKT. Ahora veremos un resultado en la otra dirección.

## Lema

*Supongamos que el problema es convexo. Si existe $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ tal que satisface las condiciones de KKT, entonces $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ es un par primal-dual óptimo y $p^* = d^*$, es decir, se tiene dualidad fuerte.*

Notar que esto es solo una implicancia, es decir:

Si se cumple KKT $\Rightarrow$ es óptimo

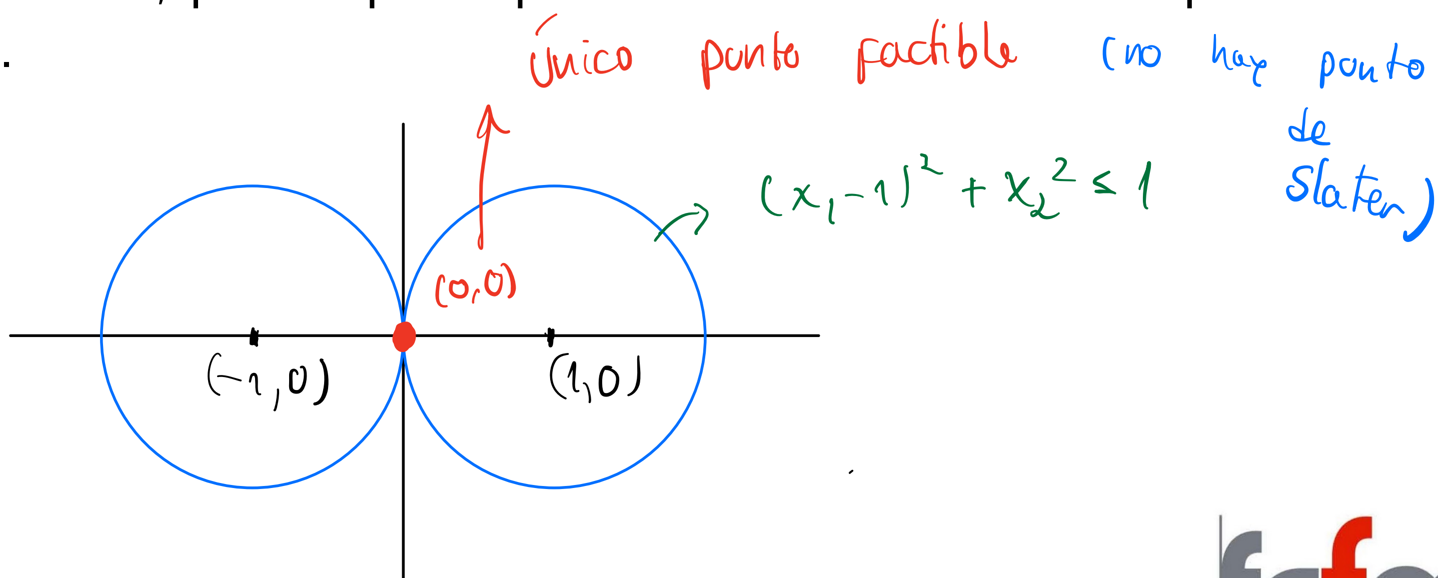
Un problema convexo podría no tener ningún punto que satisfaga KKT.

# Ejemplo

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{mín } x_2 \\ \text{sujeto a: } &(x_1-1)^2 + x_2^2 \leq 1 \\ &(x_1+1)^2 + x_2^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Tanto la función objetivo como las funciones que definen las restricciones son funciones convexas, por lo que el problema es convexo. Grafiquemos la región factible.



# Ejemplo

Ahora veamos qué pasa con las condiciones de KKT. El Lagrangeano está dado por

$$L(x, \lambda) = x_2 + \lambda_1((x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2((x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1),$$

$$\nabla L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda_1(x_1 - 1) + 2\lambda_2(x_1 + 1) \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla L(0, \lambda) = \begin{bmatrix} -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

único punto factible

$\neq 0$ independiente de $\lambda$

No se cumple KKT.

# Condiciones de Slater

Al incluir las condiciones de Slater se obtiene una equivalencia.

## Teorema

*Supongamos que el problema es convexo y que existe un punto de Slater. Entonces* $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ *es un par primal-dual óptimo si y solo si satisface las condiciones de KKT.*

Lema anterior : Convexo + KKT $\Rightarrow$ óptimo

Dualidad Fuerte : Convexo + Slater $\Rightarrow$ óptimo cumple KKT.

Esto combina los 2.

# Resumen de Resultados - Caso Convexo

Si el problema es convexo y tiene un punto de Slater:

- Dualidad fuerte se cumple
- óptimo satisface KKT.

Si el problema es convexo:

- Si alguien satisface KKT, es óptimo
- Pero, el óptimo podría no cumplir KKT.