Modelamiento y Optimización

Clase 10

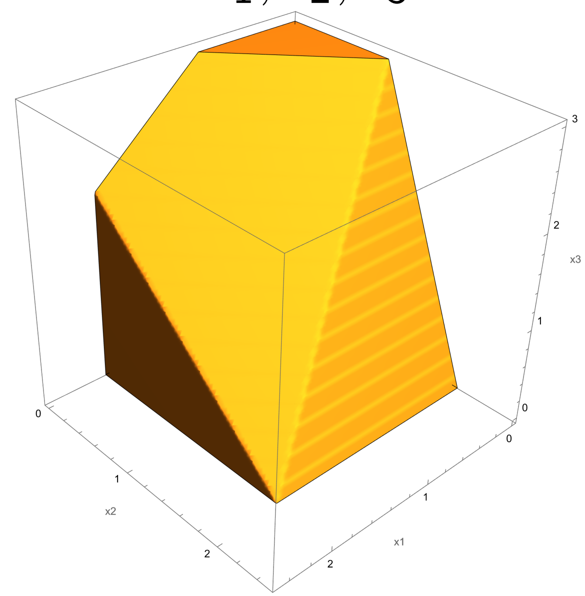
Gonzalo Muñoz

15 de Abril 2024

Repasemos un poco...

Consideremos el siguiente ejemplo:

Plot de x_1, x_2, x_3:



$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & -x_2 - 3x_3 \\
\text{sujeto a:} \quad & \left.\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & 3x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ & x_1 + x_6 = 2 \\ & x_3 + x_7 = 3 \end{aligned}\right\} \text{4 restricc.} \\
& x_1, \ldots, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

Y supongamos que consideramos como variables no-básicas $\{x_2, x_4, x_6\}$.
¿Cómo calcular la SBF correspondiente? $\rightarrow (x_1, x_3, x_5, x_7)$

$$A x = b \iff [\underbrace{B}_{\text{base}} \mid \underbrace{N}_{\text{no-básicas}}] \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

$x_N = 0$

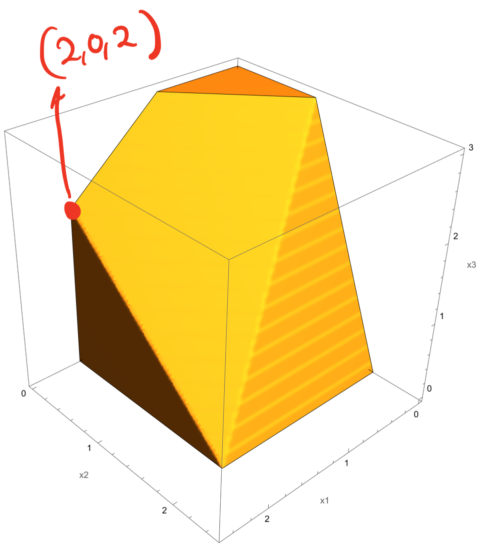
$$\Rightarrow \quad B\, x_B = b \quad \Rightarrow \quad x_B = B^{-1} b$$

Cálculo de SBF

En este caso:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_5 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lo que nos da $B^{-1}b = (2, 2, 4, 1)$, y por lo tanto la SBF queda:



$$\hat{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_7)$$
$$= (2, 0, 2, 0, 4, 0, 1) \geq 0$$

Valor: $-\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 = -6$

SBF adyacente

Ahora nos queremos mover desde $\hat{x} = (2, 0, 2, 0, 4, 0, 1)$ a una SBF adyacente de la siguiente forma:

$$\hat{x} + \delta d, \quad \delta > 0$$

En la clase pasada vimos que necesitamos dos ingredientes:

$$(1) \quad A(\hat{x} + \delta d) = b \Rightarrow Ad = 0.$$

y (2) que sólo una de las restricciones $x_j = 0$ deje de ser activa. Por lo tanto, escribiendo $d = (d_B, d_N)$, con $d_N = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

posición j

obtenemos:

$$Ad = 0 \Leftrightarrow [B \mid N] \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow d_B = -B^{-1} N d_N$$

$$\Rightarrow d_B = -B^{-1} A_j$$

columna j de A

Direcciones básicas

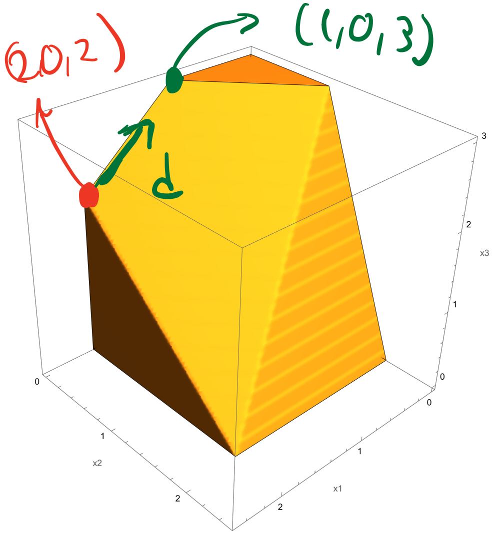
En el ejemplo, teníamos como variables no-básicas $\{x_2, x_4, x_6\}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Y además $\hat{x} = (2, 0, 2, 0, 4, 0, 1)$. Si queremos hacer que $x_6 = 0$ deje de ser activa, entonces x_6 entra a la base. Según lo cálculos anteriores:

$$(d_2, d_4, d_6) = (0, 0, 1), \quad (d_1, d_3, d_5, d_7) = -B^{-1}A_6 = (-1, 1, -1, -1)$$



$d = (-1, 0, 1, 0, -1, 1, -1)$

Direcciones básicas

¿Hasta donde nos podemos mover en esta dirección sin salir del poliedro?

$$x' = (2,0,2,0,4,0,1) + \delta(-1,0,1,0,-1,1,-1) \geq 0$$

punto nuevo

Queremos

$2-\delta \geq 0 \rightsquigarrow \delta \leq 2$

$0+0 \geq 0$ ✓

$2+\delta \geq 0$ ✓

$0+0 \geq 0$ ✓

$4-\delta \geq 0 \rightsquigarrow \delta \leq 4$

$0+\delta \geq 0$ ✓

$1-\delta \geq 0 \rightsquigarrow \delta \leq 1$ *

Nuevo punto $(\delta = 1)$

$$x' = (1,0,3,0,3,1,0)$$

No básicas: x_2, x_4, x_7

Valor $= -x_2 - 3x_3 = -9$ mejoramos!

Direcciones de descenso

Al movernos, queremos que nuestra función objetivo disminuya. Por lo tanto, queremos

$$\overbrace{c^\top(\hat{x}+\delta d)}^{\text{Valor nuevo}} < c^\top \hat{x} \Rightarrow c^\top d < 0$$

Veamos qué significa esto para la dirección básica asociada a algún x_j:

$$c^\top d = c_B^\top d_B + c_N^\top d_N = -c_B^\top B^{-1} A_j + c_j < 0$$

$d_B \to -B^{-1}A_j$; $d_N \to (0, 0 \ldots 1, 0 \, 0)$

Queremos

a $\bar{c}_j := c_j - c_B B^{-1} A_j$ se le llama costo reducido.

No básica

En el caso anterior, $c_6 = 0$, $c_B = (0, -3, 0, 0)$ y $B^{-1}A_6 = (1, -1, 1, 1)$

$x_1 \quad x_3 \quad x_5 \quad x_7$

$$\bar{c}_6 = 0 - (0, -3, 0, 0) \cdot (1, -1, 1, 1)$$

$$= -3$$ $\rightsquigarrow$ x_6 da una dirección de descenso.

Para las variables básicas se define el costo reducido como 0.

Simplex

(Minimización)

Con esto ya tenemos los ingredientes principales del algoritmo Simplex:

1. Partimos con una solución básica factible x con base B (pendiente cómo obtenerla desde cero).

2. Si $\bar{c} \geq 0$ estamos en un óptimo (demo pendiente)

3. Si no, existe una variable no-básica x_j tal que $\overline{c}_j < 0$ y conviene movernos en la dirección básica de x_j (pendiente qué hacer si hay más de una)

4. Escogemos el $\delta \geq 0$ más grande que mantenga a $x + \delta d$ dentro del poliedro.

Simplex

Sólo podemos salir del poliedro si una variables se vuelve negativa.

4.1 Si $d \geq 0$, siempre $x + \delta d \geq 0$ y el valor del problema es $-\infty$.

4.2 Si no, existe i básico tal que $d_i < 0$. Luego, $x_i + \delta d_i \geq 0$ equivale a tomar $\delta \leq -x_i/d_i$.

De esta forma, el mayor valor que puede tomar δ es

$$\delta^* = \min_{i\,:\,d_i<0} \left\{ -\frac{x_i}{d_i} \right\}.$$

Si $\delta^* > 0$ la nueva SBF esta dada por $x + \delta^* d$. Alguna variable básica se hará 0 y sale de la base (pendiente qué hacer si hay más de una).

Si $\delta^* = 0$ estamos en un caso degenerado. No cambiaremos de SBF pero si cambiará la base (detalles pendientes).