Modelamiento y Optimización

Clase 21

Gonzalo Muñoz

6 de Junio 2024

Optimización No-Lineal

Optimización no-lineal

Ahora estudiaremos problemas del tipo

$$
\begin{array}{rll}
\text{mín} & f(x) & \\
\text{sujeto a:} & g_i(x) \leq 0 & i = 1, \ldots, m \\
& h_j(x) = 0 & j = 1, \ldots, p \\
& x \in \mathbb{R}^n & \rightsquigarrow \text{Sin variables enteras}
\end{array}
$$

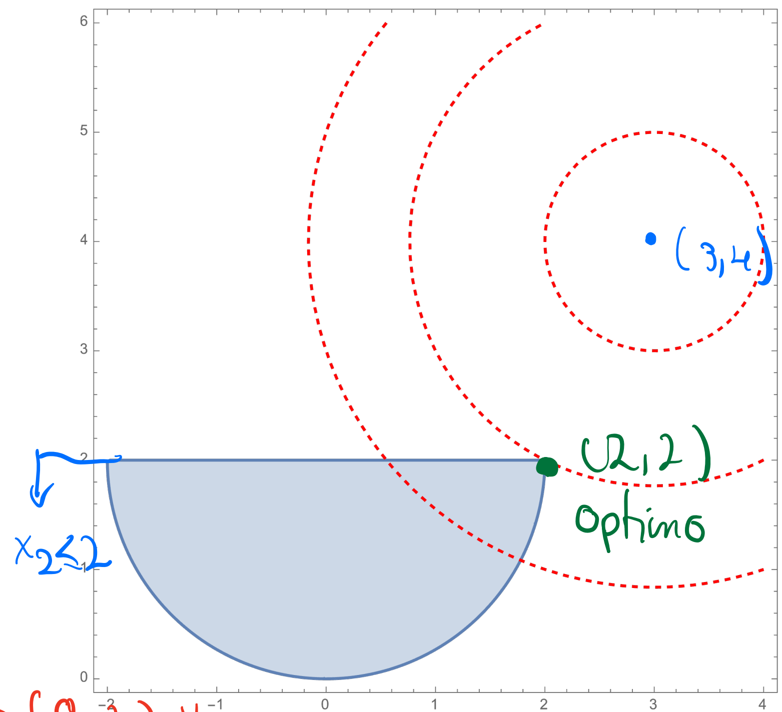
Donde $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones generales, y $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones lineales afín (más adelante veremos por qué conviene hacer esta distinción).

$$h_j(x) = a_j^T x + b_j \quad \Big\} \text{ función lineal afín}$$

Ejemplo

Encontrar el punto $x \in \mathbb{R}^2$ más cercano a $(3,4)$ que esté a una distancia menor que 2 del punto $(0,2)$ y $x_2 \in (-\infty, 2]$

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & (x_1-3)^2 + (x_2-4)^2 \\ \text{sujeto a:} \quad & x_2 \le 2 \\ & x_1^2 + (x_2-2)^2 \le 4 \end{aligned}$$



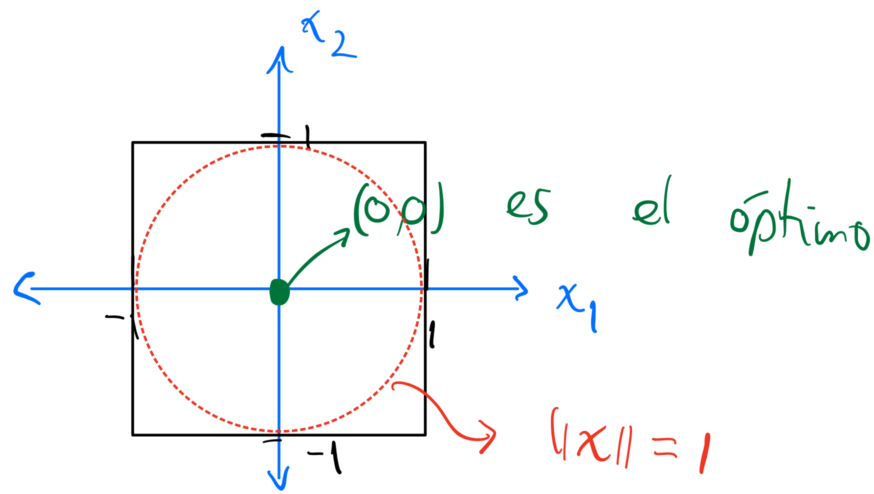
$\|(x_1, x_2) - (0,2)\| \le 2$

Diferencias principales con optimización lineal

En general, la optimización no-lineal es mucho más compleja y tenemos menos garantías. Por ejemplo, un óptimo podría no estar en un punto extremo:

$$\min \; x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 \leq 1$$
$$x_1 \geq -1$$
$$x_2 \leq 1$$
$$x_2 \geq -1$$

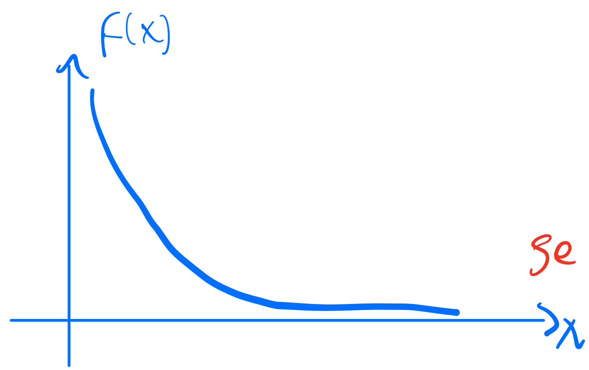


Incluso, un óptimo podría no alcanzarse:

$$\boxed{\min} \; f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{s.a} \quad x \geq 1$$

en realidad es un ínfimo.



Definiciones para optimización lineal

Necesitaremos las siguientes definiciones:

x es solución factible si

$$x \in S := \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ g_i(z) \leq 0, \ i = 1, \ldots, m, \ h_j(z) = 0, \ j = 1, \ldots, p\}$$

x es un óptimo global si $x \in S$ y

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in S$$

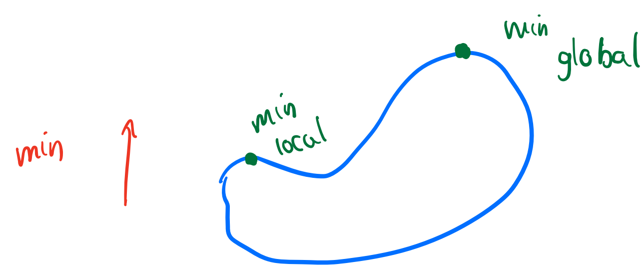
podría no existir

Ej: $B(x, \epsilon)$ bola pequeña abierta.

x es un óptimo local si $x \in S$ y existe una vecindad N de x tal que

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in N \cap S$$

también podría no existir



Definiciones para optimización no-lineal

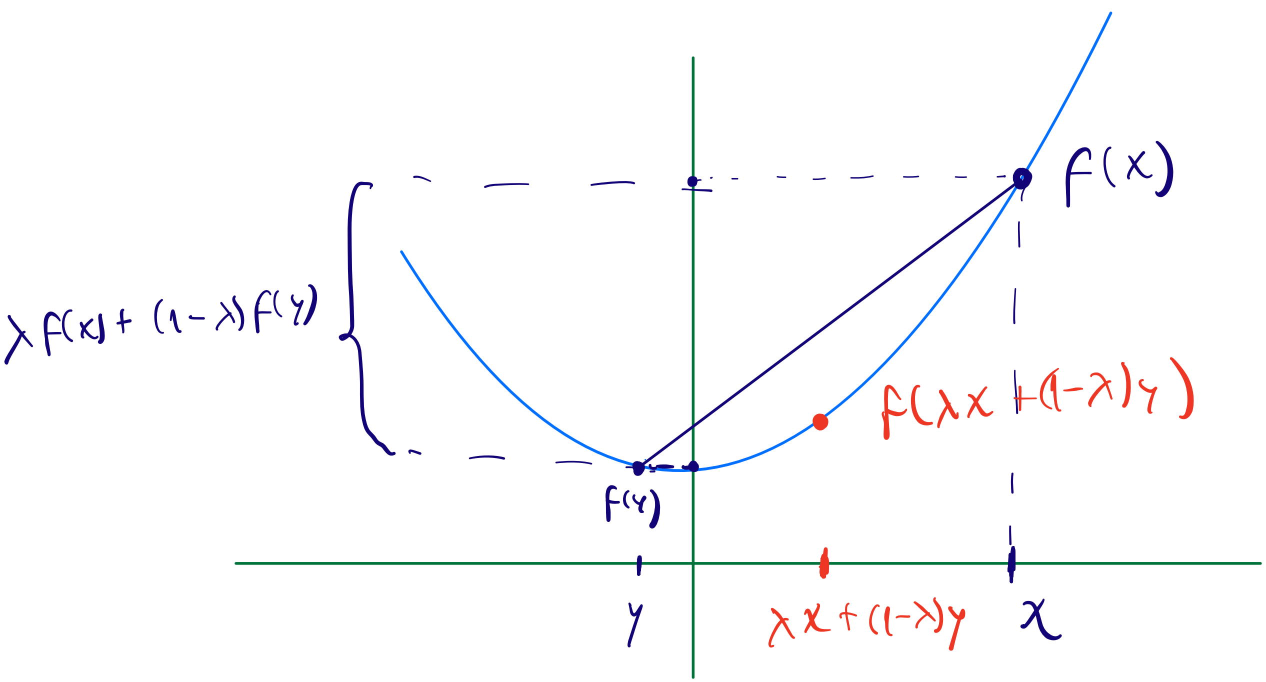
Las funciones convexas nos servirán para dar algunas garantías en los problemas de optimización.

Definición

Una función $f : \mathbb{R}^n \to R$ se dice convexa si,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in [0,1]$$

Gráficamente:



Funciones convexas

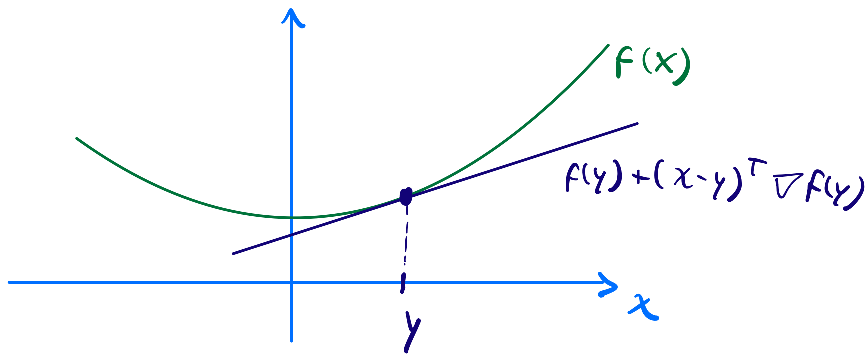
Dos caracterizaciones usuales de convexidad:

Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función

1. *Si f es diferenciable, entonces es convexa si y solo si,*

$$f(x) \geq f(y) + (x-y)^\top \nabla f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$



2. *Si f es 2 veces diferenciable, entonces es convexa si y solo si,*

$$\underbrace{\nabla^2 f(x)}_{\text{Hessiano}} \text{ es semi-definida positiva } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Conjuntos convexos

Recordemos los conjuntos convexos, definidos cuando vimos PL

Definición

Decimos que un conjunto $C \subseteq R^n$ es *convexo* si,

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in C \qquad \forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1]$$

Ejemplos: Ya vimos que los poliedros son conjuntos convexos. Un ejemplo no-lineal son las bolas $B(\bar{x}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| \leq r\}$.

tomamos $x, y \in B(\bar{x}, r)$, y $\lambda \in [0,1]$

$$\|(\lambda x + (1-\lambda) y) - \bar{x}\| = \|\lambda x + (1-\lambda) y - \lambda \bar{x} - (1-\lambda)\bar{x}\|$$

$$\leq \|\lambda x - \lambda \bar{x}\| + \|(1-\lambda) y - (1-\lambda)\bar{x}\|$$

des. triangular

$$= \lambda \underbrace{\|x - \bar{x}\|}_{\leq r} + (1-\lambda) \underbrace{\|y - \bar{x}\|}_{\leq r}$$

$\lambda \geq 0$
$1-\lambda \geq 0$

$$\leq r \quad \checkmark$$

Región factible convexa

En general, si las funciones $g_i(x)$ son convexas, el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ \underbrace{h_j(x)}_{\text{lineales afín. son concavas y convexas}} = 0,\ j = 1, \ldots, p\}$$

es convexo.

$\underbrace{\text{concavas}}_{-h_j \text{ es convexa}}$

Sea $x, y \in S$, $\lambda \in [0,1]$

$$g_i(\lambda x + (1-\lambda) y) \overset{g_i \text{ convexa}}{\leq} \lambda \underbrace{g_i(x)}_{\leq 0} + (1-\lambda) \underbrace{g_i(y)}_{\leq 0}$$

$$\leq 0$$

$$h_j(\lambda x + (1-\lambda) y) = a_j^T(\lambda x + (1-\lambda) y) + \overbrace{b_j}^{\lambda b_j + (1-\lambda) b_j}$$

$$= \lambda (\underbrace{a_j^T x + b_j}_{=0}) + (1-\lambda)(\underbrace{a_j^T y + b_j}_{=0})$$

$$= 0$$

Nota: $g_i(x) = 0$ con $\overline{g_i \text{ convexa}}^{\,0}$, puede no ser conjunto convexo Ej: $\{x : \|x\| = 1\}$

Condiciones de optimalidad general

Teorema (Weierstrass)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua, y la región factible S es cerrada y acotada (compacta), entonces $\min_{x \in S} f(x)$ tiene un óptimo global.

Cuando f, g_i son funciones convexas y h_j son funciones lineales afín, el conjunto factible es convexo y el problema se llama problema convexo.

Teorema

Supongamos que el problema es convexo. Entonces un óptimo local es un óptimo global.

Ejemplo

Determinar si el siguiente ejemplo es un problema convexo, y si su región factible es acotada

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a:} \quad & \frac{x_1}{1 + x_2^2} \leq 0 \\ & (x_1 + x_2)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio (Usar condición de 2do orden para convexidad)

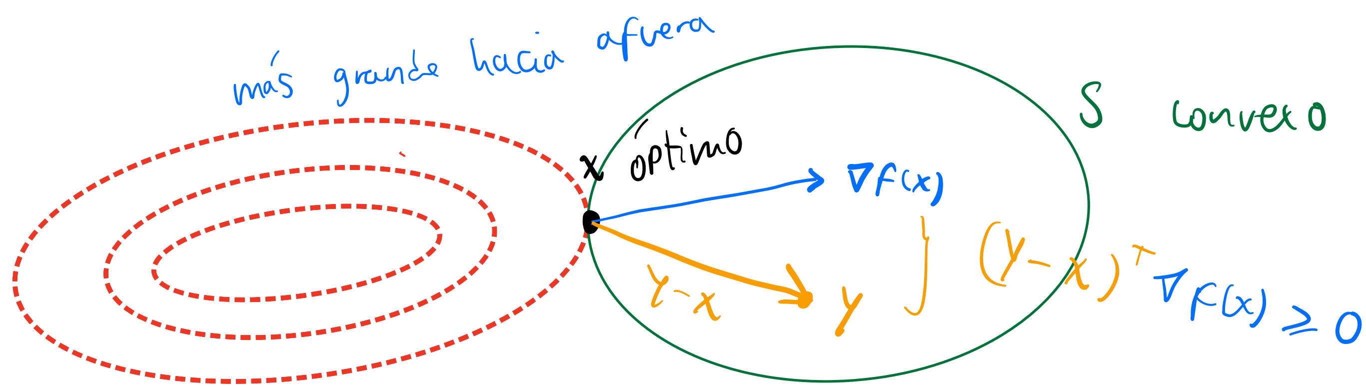
Condiciones de optimalidad general - Caso convexo

Teorema

Considere un problema convexo. Un vector x es óptimo ssi $x \in S$ y

$$(y - x)^\top \nabla f(x) \geq 0 \qquad \forall y \in S$$

Interpretación



Nota: Si $S = \mathbb{R}^n$ (convexo)

$(y-x)^\top \nabla f(x) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, En particular $y = x - \nabla f(x)$

$$\Rightarrow -\nabla f(x)^\top \nabla f(x) \geq 0 \iff -\|\nabla f(x)\|^2 \geq 0$$

$$\iff \underbrace{\nabla f(x) = 0}_{\text{Condición de optimalidad sin restricciones.}}$$