Modelamiento y Optimización

Clase 19

Gonzalo Muñoz

27 de Mayo 2024

Fortaleza de formulaciones

Formulaciones

Una empresa produce el Producto A y el Producto B. Cada producto debe pasar por dos etapas: mecanizado y ensamblaje. La empresa necesita decidir cuántas unidades de cada producto producir para maximizar las ganancias. El problema tiene los siguientes parámetros:

	Hrs. mec.	Hrs. ens.	Ganancia	Costo conf.
Producto A	2	1	\$5	\$50
Producto B	3	2	\$7	\$40
Disponible	40	30		

El costo de configuración es un costo fijo si se decide producir el producto.

Formulaciones

El problema se puede modelar como:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 5x_A + 7x_B - 50y_A - 40y_B \\ \text{s.a.} \quad & 2x_A + 3x_B \leq 40 \\ & x_A + 2x_B \leq 30 \\ & x_A \leq My_A \\ & x_B \leq My_B \\ & x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+ \\ & y_A, y_B \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Ej $M = 1000$

o $M = 20$ también vale

Cualquier valor de M suficientemente grande nos da una formulación válida. ¿Pero cómo afecta a la relajación?

Óptimo Real : 51

Con $M = 1000$, relajación 99

Con $M = 20$, relajación 66

Con $M_A = 20$, $M_B = 15$, relajación ≈ 57

Localización (Facility location, P-median)

Revisitemos el problema de localización. Queremos instalar P nuevos almacenes en una comuna. Consideramos J posibles ubicaciones, y tenemos un conjunto K de almacenes ya existentes. Además, tenemos un conjunto I de clientes que utilizarían estos almacenes. El cliente $i \in I$ está a distancia d_{ij} del lugar $j \in J \cup K$.

El siguiente modelo busca minimizar la distancia total (suma) entre clientes y almacenes.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J \cup K} d_{ij} x_{ij} \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{j \in J} y_j = P \\
& \sum_{j \in J \cup K} x_{ij} = 1 && \forall i \in I \\
& x_{ij} \leq y_j && \forall i \in I, \forall j \in J \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \\
& y_j \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Debemos abrir P almacenes

todo cliente va a un almacén

Si i se asigna a j, j debe estar abierto

Localización (Facility location, P-median)

Las condiciones que impone

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in I, \forall j \in J$$

podemos escribirlas también como

\# de clientes

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq M y_j \quad \forall j \in J$$

Acá $M = |I|$ funciona. Notar que son muchas menos restricciones!
Veamos qué pasa en las relajaciones en un ejemplo en Colab.

Moraleja

Un problema entero puede tener muchas formulaciones distintas, pero algunas pueden ser mucho mejores que otras.

Determinar cuál es mejor toma mucho ensayo y error!

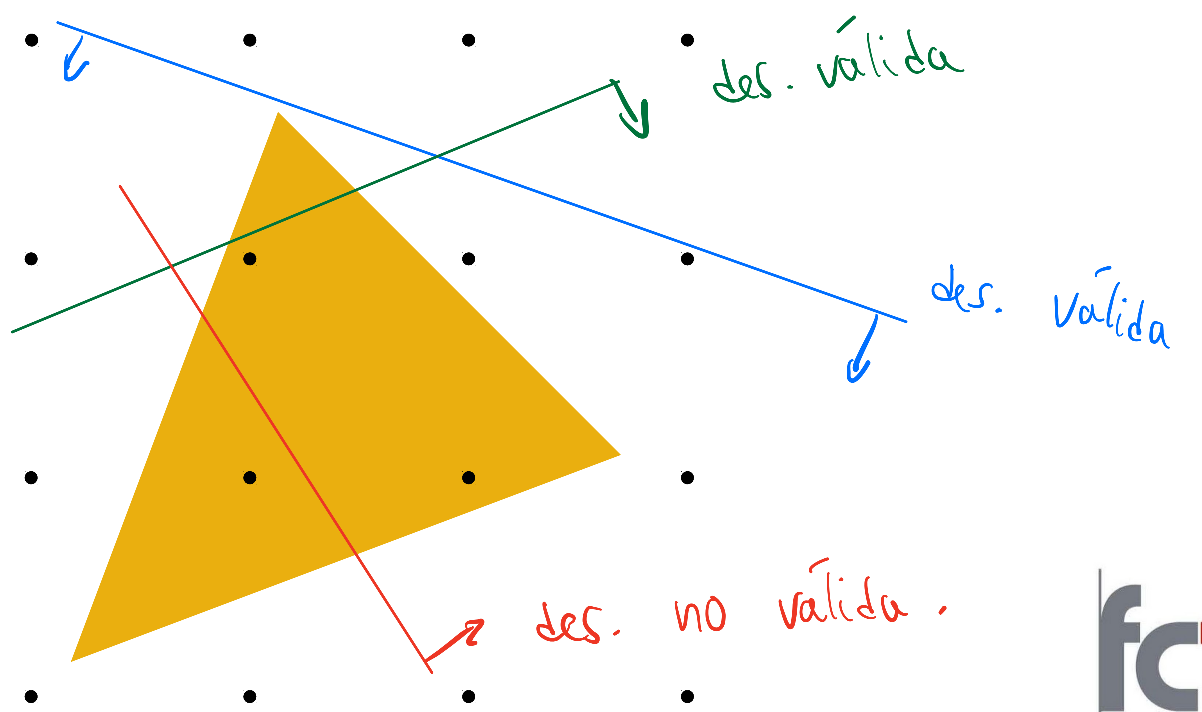
Planos cortantes

Desigualdades válidas

Consideremos la solución factible de un problema entero:

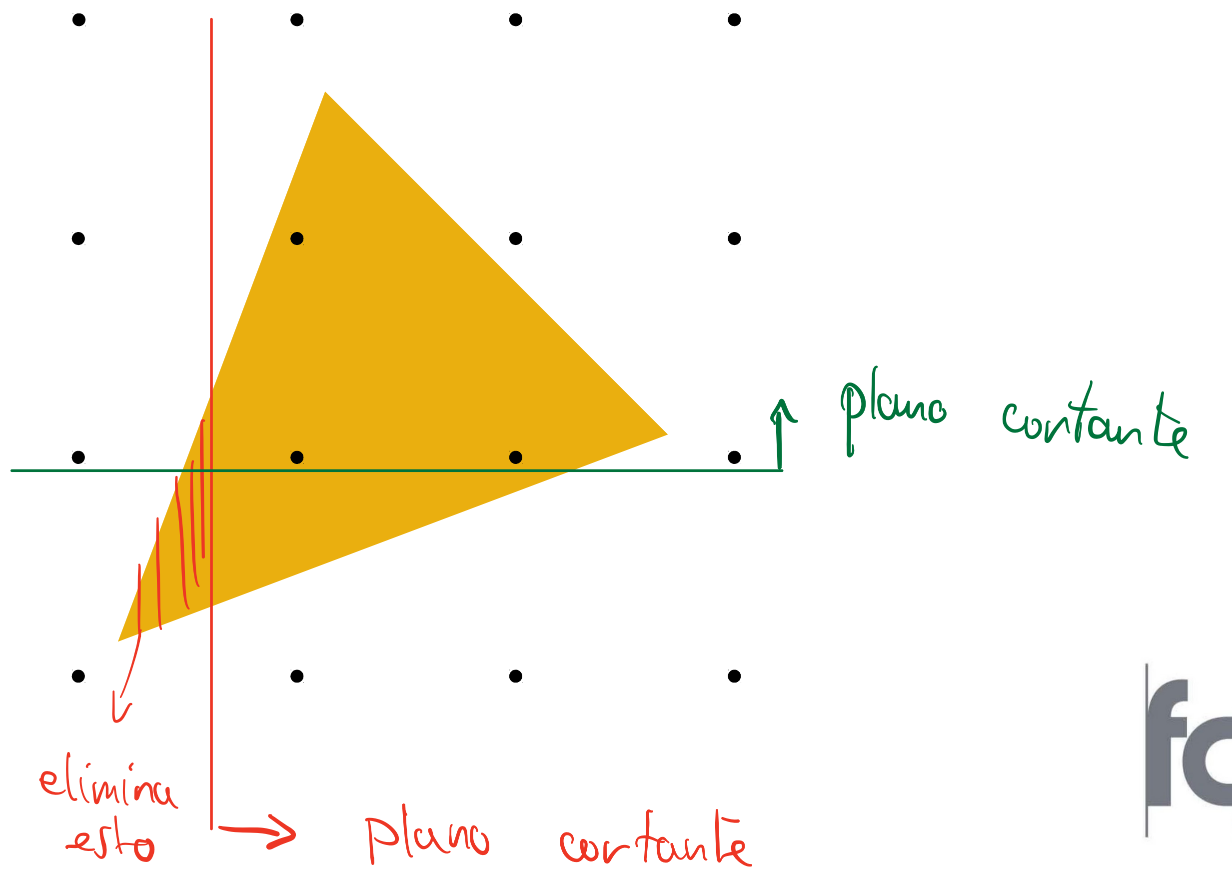
$$S = \{x \in \mathbb{Z}^n \,:\, Ax \leq b\}.$$

Una desigualdad válida es una desigualdad $v^\top x \leq d$ tal que todo elemento de S la cumple.



Planos cortantes

Llamemos P a la región factible de la relajación lineal. Una desigualdad válida se llama plano cortante (o simplemente "corte") si algún elemento $x \in P$ no la cumple.



Planos cortantes

Los cortes se pueden usar para fortalecer relajaciones. Por ejemplo:

1. Resolver la relajación lineal y obtener x^* óptimo. Si $x^* \in \mathbb{Z}^n$, terminamos.
2. De caso contrario, buscamos un plano cortante $v^\top x \leq d$ que corte a x^*, es decir:

$$v^\top x \leq d \quad \forall x \in S \quad \wedge \quad v^\top x^* > d$$

3. Agregar $v^\top x \leq d$ al problema y volver al punto 1.

La gran pregunta es:

¿Cómo encontrar un plano cortante?

Demo interactiva:
https://gonzalomunoz.org/the-cutting-plane-game/

Cortes tipo cover

Los cortes tipo cover son desigualdades válidas para el problema de la mochila. Tomemos el ejemplo de la clase anterior:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 5x_4 \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \leq 10 \\ & x \in \{0,1\}^3 \end{aligned}$$

La solución de la relajación es $\hat{x} = (1, 1, 3/5, 0)$. Notar que los primeros 3 elementos no caben, por lo tanto la siguiente desigualdad es válida

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

¿Por qué es válida? ¿El vector $\hat{x}$ satisface esta desigualdad?

↳ porque $\underbrace{4+3+5}_{\text{no caben los 3}} = 12 > 10$

y $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 2 + \frac{3}{5} > 2 \Rightarrow$ es un corte.

Cortes tipo cover

Dada una restricción tipo mochila

binaria

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq K$$

Un *cover* es un conjunto $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\sum_{i \in C} w_i > K$$

Proposición

Dado un cover C, la siguiente es una desigualdad válida para el problema de la mochila:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

Es válida pues si $\sum_{i \in C} x_i = |C| \Rightarrow x_i = 1$ para todo $i \in C$, pero un cover sobrepasa la capacidad K.

Cortes tipo cover

Por ejemplo, qué covers podemos encontrar para el siguiente ejemplo:

$$5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 8x_6 \leq 15, \quad x \in \{0,1\}^6$$

$C_1 = \{1, 2, 3\}$ → $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

→ C_1 es mejor. De hecho es minimal

$C_2 = \{1, 2, 3, 6\}$ → $x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \leq 3$

$C_3 = \{4, 5, 6\}$ también es cover, y minimal

→ $x_4 + x_5 + x_6 \leq 2$

Proposición

Dado un cover C, su cover extendido $E(C)$ se obtiene agregando los elementos más pesados que todos los de C:

$$E(C) = C \cup \{i : w_i \geq w_j \quad \forall j \in C\}$$

La siguiente es una desigualdad válida para el problema de la mochila, y es más fuerte que la desigualdad de cover

$$\sum_{i \in E(C)} x_i \leq |C| - 1$$

Aparece $|C|$ y NO $|E(C)|$

Cortes tipo cover

Extendamos los covers del ejemplo anterior y encontremos las desigualdades correspondientes

$$5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 8x_6 \leq 15, \quad x \in \{0,1\}^6$$

$C_1 = \{1, 2, 3\} \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

$E(C_1) = \{1, 2, 3\} \cup \{6\} \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \leq 2$

$C_2 = \{1, 2, 4, 5\} \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \leq 3$

$E(C_2) = C_2 \cup \{3, 6\} \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_3 + x_6 \leq 3$