

Modelamiento y Optimización

Clase 16

Gonzalo Muñoz

13 de Mayo 2024



Modificaciones al lado derecho

En la clase pasada vimos que si una solución básica es **no-degenerada**, y la modificación es pequeña, **la misma base sigue siendo óptima**.

Si el cambio es Δ en la **primera restricción**, el nuevo valor objetivo es:

$$c_B^T B^{-1}(b + (\Delta, 0)) = \underbrace{c_B^T B^{-1}b}_{\text{valor original}} + \overbrace{c_B^T B^{-1}(\Delta, 0)}^{\text{dual óptimo}}$$

Y como el óptimo del dual es $y^* = c_B^T B^{-1}$, concluimos que el cambio en la función objetivo es:

$$y_1^* \Delta$$

↳ si el cambio es en la i -ésima restricción aparece y_i^*

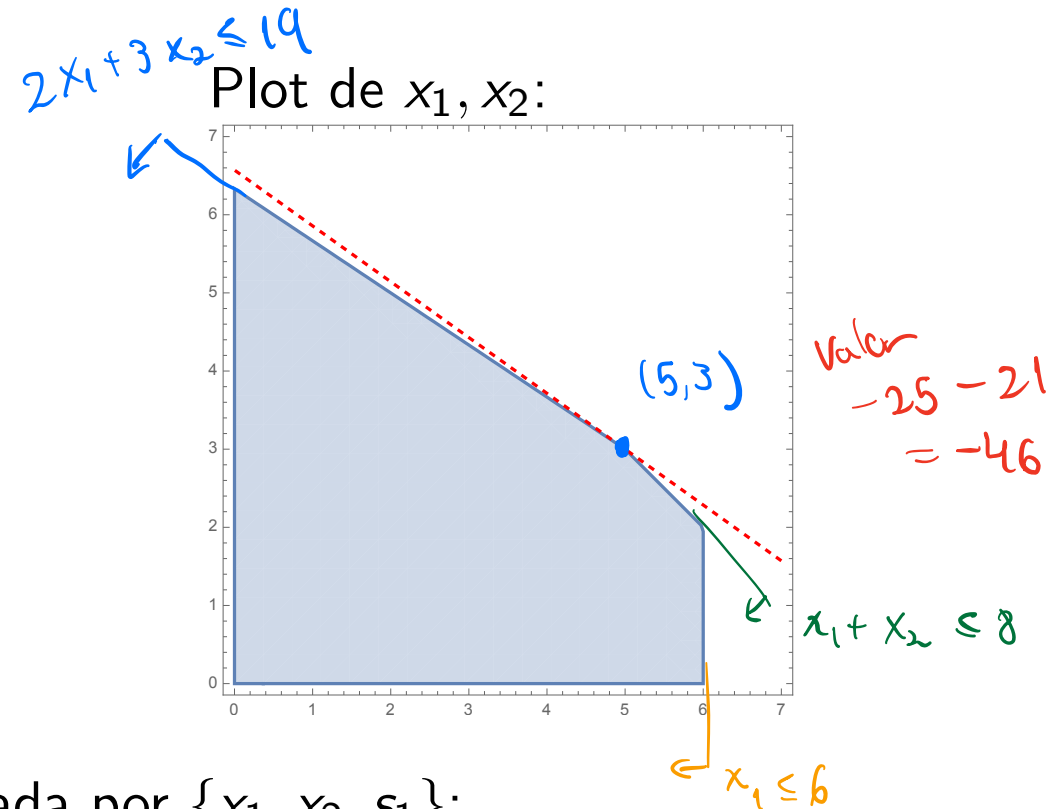
Por lo tanto, los duales óptimos nos dan **el beneficio/costo** por unidad de **cambio en el lado derecho**. Esto se conoce como **precio sombra**.

Importante: esto vale siempre, no solo para forma estándar!



Ejemplo 1

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & -5x_1 - 7x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + s_1 = 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 + s_2 = 19 \\ & x_1 + x_2 + s_3 = 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



En este caso la base óptima está dada por $\{x_1, x_2, s_1\}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = (5, 3, 1)^T, \quad \underbrace{c_B B^{-1}}_{\text{duals óptimos}} = (0, -2, -1)$$

Ejemplo 1

Veamos cuál es el efecto que tiene el cambio:

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 19 + \Delta$$

La misma base anterior es óptima si:

$$B^{-1} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 19 \\ 8 \end{bmatrix}}_b + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{modificación}} \right) \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} \Delta &\leq 5 \\ \Delta &\geq -3 \\ \Delta &\geq -1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \in [-1, 5]$$

Rango donde la base es óptima

Ejemplo 1

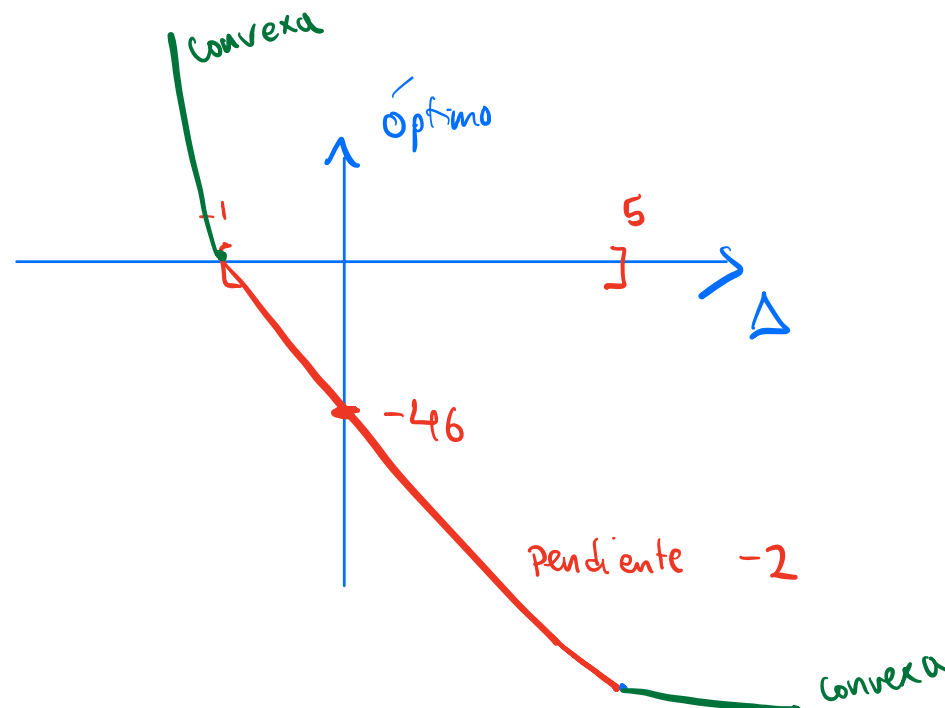
Y en el rango de Δ encontrado anteriormente, el valor óptimo cambia como:

$$\underbrace{y_2^*}_{\text{dual óptimo de la 2ª restr.}} \cdot \Delta = -2 \cdot \Delta$$

$$\text{Ej: } 19 \rightarrow 21$$

$$\begin{aligned} \text{Valor } -46 &\rightarrow -46 \\ &\quad -2 \cdot 2 \\ &= -50 \end{aligned}$$

Si graficamos el valor óptimo v/s Δ , esto se ve de la siguiente forma:



Ejemplo 2

Analicemos el siguiente ejemplo de producción de **llaves** (wrenches) por día y **alicates** (pliers) por día:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 130w + 100p \\ \text{s.a} & 1.5w + p \leq 27 \quad (\text{lbs. acero}) \\ & w + p \leq 21 \quad (\text{horas de fundición}) \\ & 0.3w + 0.5p \leq 9 \quad (\text{horas de armado}) \\ & w \leq 15 \quad (\text{demanda}) \\ & p \leq 16 \quad (\text{demanda}) \\ & w, p \geq 0 \end{array}$$

Todo está en miles. Resolver el problema, y determinar lo siguiente:

- (a) ■ ¿Cuánto conviene pagar por 1.000 horas extra de fundición?
- (b) ■ ¿Conviene comprar comprar acero a \$55/1.000 lbs?
Si conviene, ¿cuánto comprar?



Ejemplo 2

(a) Nos conviene pagar a lo más \$ 40
(precio sombra)

(b) El precio sombra era 60,
así que si conviene.

El rango era $[-2.25, 1.5]$,
así que conviene comprar 1500 lbs

ganaremos 5 · 1.5 extra.
(60-55)