Modelamiento y Optimización

Clase 20

Gonzalo Muñoz

31 de Mayo 2024

Cortes de Gomory

Cortes de Gomory

Consideremos un problema entero en forma estándar

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Supongamos que tenemos x una SBF (por ejemplo, óptima para la relajación lineal) con base B. Con esto:

$$Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

Usando que $x \geq 0$, podemos acotar el lado izquierdo:

$$x_B + B^{-1}N x_N \geq x_B + \underbrace{\lfloor B^{-1}N \rfloor}_{\text{término a término}} x_N \qquad \lfloor -0.3 \rfloor = -1$$

Ej: $\underbrace{\lfloor 0.5 \rfloor}_{=0}$

Cortes de Gomory

Componente a componente, obtenemos que

$$\underbrace{(x_B)_i + \lfloor \overbrace{(B^{-1}N)_i}^{\text{Fila } i\text{-ésima}} \rfloor x_N}_{\in \mathbb{Z}} \leq (B^{-1}b)_i$$

Desigualdad válida

Ahora, podemos notar que a la izquierda solo tenemos números enteros, por lo tanto la siguiente desigualdad es válida para el problema entero

$$(x_B)_i + \lfloor (B^{-1}N)_i \rfloor x_N \leq \lfloor (B^{-1}b)_i \rfloor$$

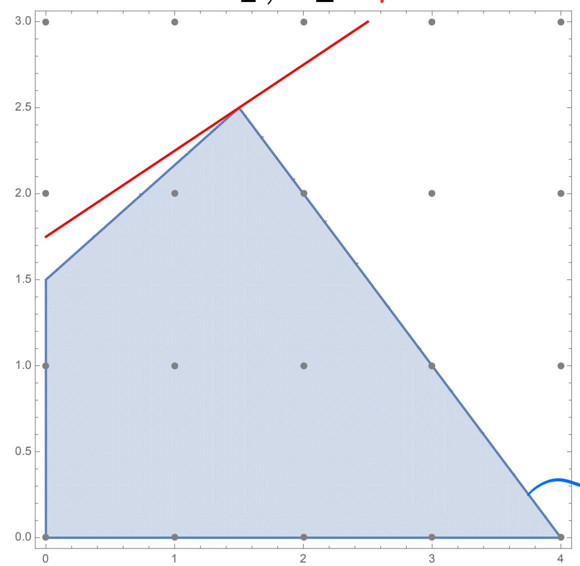
Estas desigualdades se conocen como Cortes de Gomory, y podemos calcular una por cada variable básica.

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & x_1 - 2x_2 \\
\text{sujeto a:} \quad & -4x_1 + 6x_2 + s_1 = 9 \\
& x_1 + x_2 + s_2 = 4 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Plot de x_1, x_2:

$x_1 - 2x_2 = -3.5$



$x_1 + x_2 \leq 4$

El óptimo de la relajación lineal es $x = (1.5, 2.5, 0, 0)$ con base

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esto, la relación $x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$ queda

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

De esta relación podemos calcular 2 Cortes de Gomory:

esta no la podemos dibujar.

$$x_1 - s_1 + 0 \cdot s_2 \leq 1$$

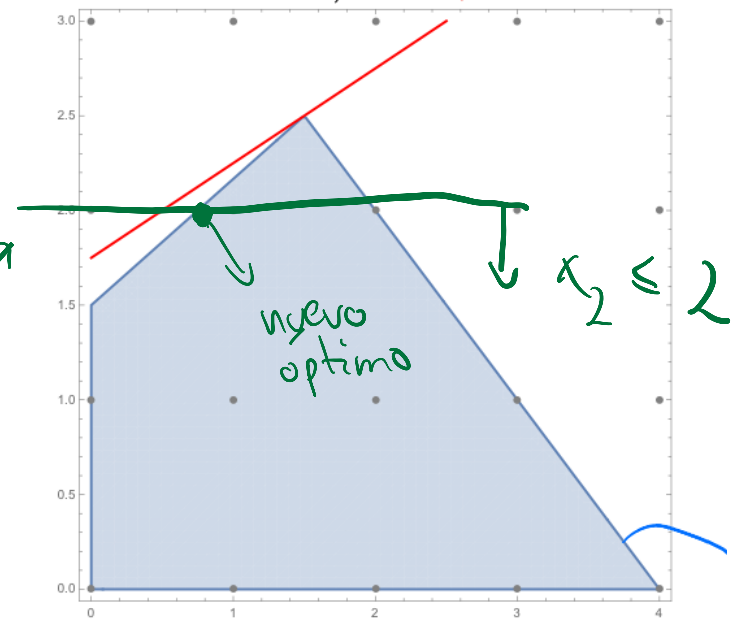
$$\left\lfloor -\frac{1}{10} \right\rfloor = -1$$

$$\iff \boxed{x_1 - s_1 \leq 1}$$

Similarmente

$$\boxed{x_2 \leq 2}$$

Plot de x_1, x_2:



Garantías

Se puede mostrar que si una SBF no es entera, siempre hay un corte de Gomory que la elimina:

Si una SBF $\hat{x}$ no es entera, entonces existe una componente i tal que $(\hat{x}_B)_i = (B^{-1}b)_i \notin \mathbb{Z}$. El corte de Gomory de esa componente es

$$(x_B)_i + \lfloor (B^{-1}N)_i \rfloor x_N \leq \lfloor (B^{-1}b)_i \rfloor \quad (*)$$

El lado izquierdo, evaluado en $\hat{x}$, nos da:

$$(\hat{x}_B)_i + \underbrace{\lfloor (B^{-1}N)_i \rfloor \hat{x}_N}_{0} = (B^{-1}b)_i$$

Y como $\lfloor (B^{-1}b)_i \rfloor < (B^{-1}b)_i$

cuando $(B^{-1}b)_i \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\hat{x}$ no cumple $(*)$

Branch and Cut

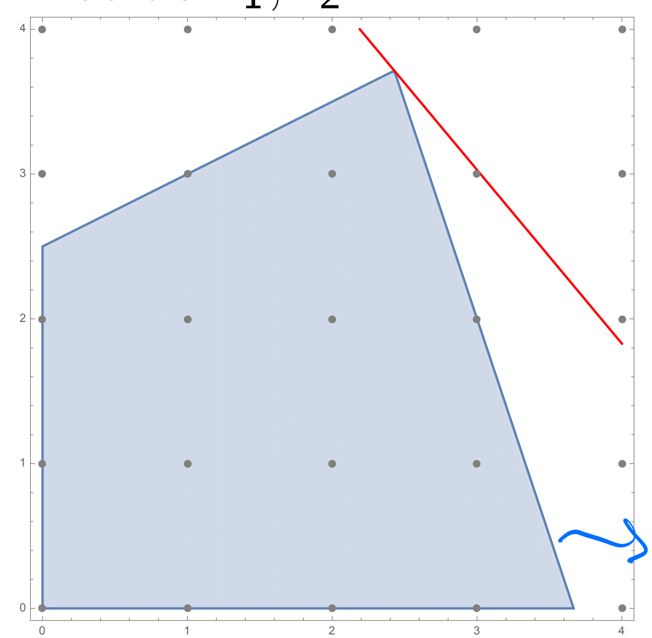
Branch and Cut

En la práctica, los solvers de optimización no aplican solo Branch and Bound, o solo plano cortantes. Si no que una mezcla de ambas. Esto se conoce como Branch and Cut.

Veamos un ejemplo de cómo esto puede ayudar:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & -6x_1 - 5x_2 \\
\text{sujeto a:} \quad & 3x_1 + x_2 + s_1 = 11 \\
& -x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Plot de x_1, x_2:



$3x_1 + x_2 \leq 11$

El óptimo de la relajación lineal es $x = (2.42, 3.71, 0, 0)$ con valor -33.14.

Branch and Cut

Ahora creamos 2 ramas brancheando en x_1. En forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -6x_1 - 5x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & 3x_1 + x_2 + s_1 = 11 \\ & -x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\ & x_1 - s_3 = 3 \quad \} \ x_1 \geq 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Óptimo $x = (3, 2, 0, 4, 0)$
Valor -28

óptimo entero, podemos parar.

Cota superior de -28

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -6x_1 - 5x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & 3x_1 + x_2 + s_1 = 11 \\ & -x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\ & x_1 + s_3 = 2 \quad \} \ x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Óptimo $x = (2, 3.5, 1.5, 0, 0)$
Valor -29.5

sol. fraccionaria.
como $-29.5 < -28$, deberíamos seguir brancheando.

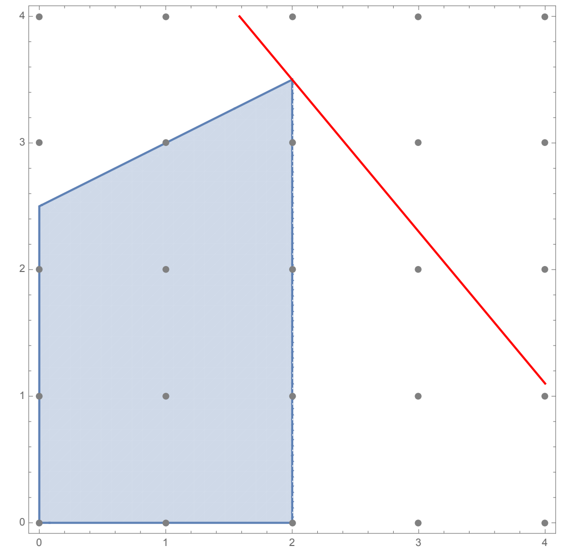
$\text{Gap} = -28 - (-29.5) = 1.5$ (absoluto)

Branch and Cut

Enfoquemos esfuerzos en la rama $x_1 \leq 2$:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -6x_1 - 5x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & 3x_1 + x_2 + s_1 = 11 \\ & -x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \\ & x_1 + s_3 = 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Plot de x_1, x_2:



Las variables básicas son $\{x_1, x_2, s_1\}$, por lo tanto

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

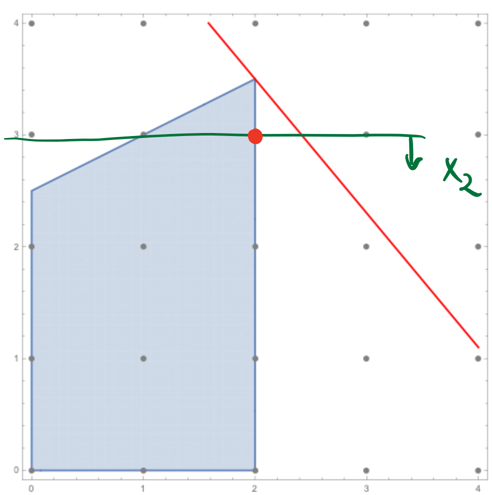
Branch and Cut

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Veamos cómo queda el corte de Gomory para x_2. Recordar que la relación que usamos es $x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -7/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

corte : $x_2 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 \leq 3 \iff x_2 \leq 3$



$x_2 \leq 3$

Nuevo óptimo : $(2, 3, \ldots)$

Valor $= -27$

Gap $= 0$

↳ Podemos parar.

Óptimo $(3, 2, 0, 4)$ con valor -28.