Modelamiento y Optimización

Clase 15

Gonzalo Muñoz

10 de Mayo 2024

Holgura complementaria

Holgura complementaria

Teorema

Sean x e y soluciones factibles para el primal y dual respectivamente. Luego, x e y son óptimos para el primal y dual respectivamente si y solo si

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & y_i(a_i^\top x - b_i) = 0, \ \textit{para todo } i, \\
(2) \qquad & x_j(c_j - A_j^\top y) = 0, \ \textit{para todo } j.
\end{aligned}
$$

¿Qué significa ésto?

(1) $y_i = 0 \quad \vee \quad a_i^\top x = b$

Si $a_i^\top x \neq b_i$ (no activa) $\Rightarrow y_i = 0$

En este caso $y_i = 0$ captura que "no es importante" la restr. i. cuando $a_i^\top x \neq b_i$ en el óptimo.

(2) $x_j = 0 \quad \vee \quad A_j^\top y = c$

Análogo.

Ejemplo

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & -4x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a:} & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (y_1) \\ & -x_1 + x_2 \geq -2 \quad (y_2) \\ & x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{máx} & 8y_1 - 2y_2 \\ \text{sujeto a:} & -y_1 - y_2 = -4 \quad (x_1) \\ & 2y_1 + y_2 \leq 2 \quad (x_2) \\ & y_1 \leq 0 \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

Verifiquemos holgura complementaria para $x = (12, 10)$ e $y = (-2, 6)$

$-2 \cdot (-12 + 2 \cdot 10 - 8) = -2 \cdot 0 = 0$

$6 \cdot (-12 + 10 + 2) = 6 \cdot 0 = 0$

$12 \cdot (+2 - 6 + 4) = 12 \cdot 0 = 0$

$10 \cdot (2 \cdot (-2) + 6 - 2) = 10 \cdot 0 = 0$

✓ ambos son óptimos

Ejemplo

Utilizando holgura complementaria, muestre que $x = (0, 1.5)$ es una solución óptima para

Primal — Dual

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & 100x_1 + 100x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{máx} & 3y_1 + y_2 \\ \text{sujeto a:} & y_1 + 2y_2 \leq 100 \\ & 2y_1 + y_2 \leq 100 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Busquemos y tal que (x, y) cumplen H-C.

- $x_1 = 0$ no dice mucho en $x_1 \cdot (y_1 + 2y_2 - 100) = 0$
- $x_2 = 1.5 \underset{\text{H-C}}{\Rightarrow} 2y_1 + y_2 = 100$ (*)

  H-C $x_2(2y_1 + y_2 - 100) = 0$
- $x_1 + 2x_2 - 3 = 0 + 2 \cdot 1.5 - 3 = 0$ no da info. sobre y_1

Ejemplo

- $2x_1 + x_2 - 1 = 0 + 1.5 - 1 = 0{,}5 \underset{\text{H-C}}{\Rightarrow} y_2 = 0$

H-C

$y_2(2x_1 + x_2 - 1) = 0$

$(*) \Rightarrow 2y_1 = 100$

$y_1 = 50$

$\Rightarrow$ el único candidato es $y = (50, 0)$

Hay que verificar que es factible (ejercicio)

$\Rightarrow (x, y)$ cumplen H-C

$\Rightarrow x$ e y son óptimos.

Análisis de sensibilidad

Modificaciones al lado derecho

Supongamos ahora que queremos modificar parte del lado derecho en Δ unidades:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 100x_1 + 100x_2 \\
\text{s.a:} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 3 + \Delta \\
& 2x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\qquad (F.E) \qquad
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 100x_1 + 100x_2 \\
\text{s.a:} \quad & x_1 + 2x_2 - s_1 = 3 + \Delta \\
& 2x_1 + x_2 - s_2 = 1 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(sin Δ)

El óptimo en forma estándar es $(0, 1.5, \underset{s_1}{0}, \underset{s_2}{0.5})$, por lo tanto la base óptima es:

$$
B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & s_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}
$$

¿Cómo afecta el cambio Δ a los costos reducidos?

$\bar{c} = c - c_B B^{-1} A$ no depende de Δ!

Modificaciones al lado derecho

Como los costos reducidos no cambian, si tenemos costos reducidos ≥ 0, la base sigue siendo $\underbrace{\text{"óptima"}}_{\bar{c} \geq 0}$

$x_B = B^{-1} b$

Pero podría fallar factibilidad! Es decir $B^{-1}(b + (\Delta, 0)) \geq 0$. En el ejemplo anterior

$$B^{-1}(b + (\Delta, 0)) = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}^{x_B} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Delta \geq 0 \iff \Delta \geq -3$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Delta \geq 0 \iff \Delta \geq -1$$

$\Rightarrow$ Si $\Delta \geq -1$ la $\underbrace{\text{misma base es óptima}}_{\text{pero el punto cambia a}}$!

pero el punto cambia a

$$x_B = B^{-1}\left(b + \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$x_N = 0$$

Modificaciones al lado derecho

En general, si una solución básica es no-degenerada, y la modificación es pequeña, la misma base sigue siendo óptima!

Si el cambio es Δ (tal que la base sigue siendo factible), el nuevo valor objetivo es:

$$c_B^T \cdot \left(B^{-1} \left(b + \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) = \underbrace{c_B B^{-1} b}_{\text{valor objetivo original}} + \underbrace{c_B B^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{cambio al objetivo.}}$$

¿Cuál fue el cambio en el valor objetivo?

$$\underbrace{c_B B^{-1}}_{\text{dual óptimo (clase anterior)}} \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{y_1^*}_{\text{óptimo del dual de la restricción que cambió}} \cdot \Delta$$