Modelamiento y Optimización

Clase 17

Gonzalo Muñoz

17 de Mayo 2024

Lema de Farkas

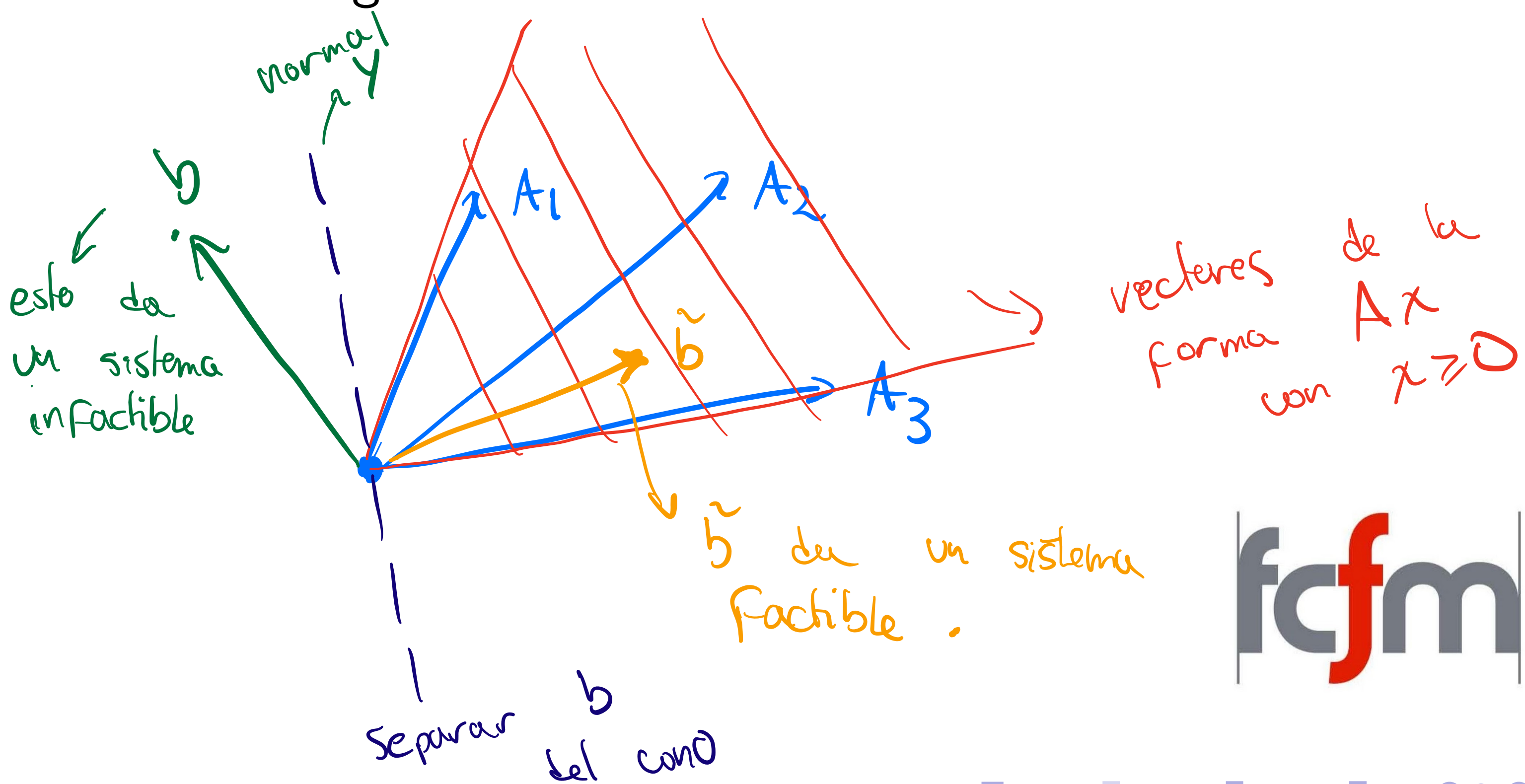
Motivación

En lo que sigue, veremos una técnica para mostrar que un problema es infactible.

En forma estándar, nos gustaría determinar si existe un $x \geq 0$ tal que

$$Ax = b$$

Recordando que $Ax = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots A_n x_n$, podemos representar esta pregunta gráficamente de la siguiente forma:



Lema de Farkas

De las figuras anteriores, vemos que hay 2 opciones:

1. b se puede escribir como $b = Ax$ con $x \geq 0$
2. b se puede separar de todos los $\{A_i\}_{i=1}^n$ con un hiperplano que pasa por el origen

El Lema de Farkas formaliza esto:

Lema

El sistema $Ax = b$, $x \geq 0$ es infactible si y solo si el sistema $\underbrace{b^\top y < 0}_{y \text{ deja a "b" a un lado}}$, $\underbrace{y^\top A \geq 0}_{y \text{ deja a los } A_i \text{ al otro lado}}$ es factible.

Esto también se puede escribir como un "teorema de alternativas"

Lema

Exactamente uno de los siguientes sistemas tiene solución:

- $Ax = b$, $x \geq 0$
- $b^\top y < 0$, $y^\top A \geq 0$ $\iff y^\top A_i \geq 0 \quad \forall i$

Demostración

Dem

$$\min \; 0\cdot x \qquad\qquad \text{Dual}: \; \max \; b^T y$$

$$Ax = b \qquad\qquad \underbrace{y^T A \leq 0}_{\text{este dual es factible}}$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad y = 0$$

2 opciones para el dual:

No acotado: $\{Ax = b, \, x \geq 0\}$ es infactible (dualidad)

y además debe existir "y" tal que

$$\underbrace{b^T y > 0 \qquad y^T A \leq 0}_{\text{problema no acotado}}$$

tomando $\hat{y} = -y$ obtenemos el resultado.

Tiene óptimo: por dualidad fuerte

objetivo primal

$$b^T y \leq 0 \quad \forall \, y \text{ tal que } y^T A \leq 0$$

y además, debe existir óptimo primal

$\Rightarrow$ existe x tal que $Ax = b$, $x \geq 0$

Ejemplo

Dada una matriz A, mostrar que siempre uno de los siguientes enunciados es verdadero:

(1) - Existe $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$, $x \geq 0$
(2) - Existe p tal que $A^\top p > 0$

Ejercicio:

Hint: probar que (1) es equivalente a

$$\begin{aligned} Ax &= 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 1 \quad \text{(normalización)} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

y aplicar Farkas.

Programación lineal entera

Relajaciones

Recordemos el problema de producción de cajas de chocolates:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 8x_A + 7x_B \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_A + 3x_B \leq 18, \\ & 4x_A + 3x_B \leq 24 \\ & x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Hasta ahora no sabemos cómo resolver este problema, pero si podemos resolver

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 8x_A + 7x_B \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_A + 3x_B \leq 18, \\ & 4x_A + 3x_B \leq 24 \\ & x_A, x_B \geq 0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ eliminamos $x_A, x_B \in \mathbb{Z}$

Esto se conoce como una relajación lineal del problema.

Relajaciones

La solución óptima de la relajación lineal es $x = (3,4)$. ¿Qué podemos decir respecto al problema original?

En este caso podemos asegurar que $(3,4)$ es óptimo para el problema original. Esto pues, como todo punto factible para el problema entero es factible para el problema relajado:

maximización

valor $\underbrace{\text{Problema entero}}_{\text{P.E}}$ $\leq$ valor relajación

$= 8 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 52$

Además (3,4) es factible para P.E:

valor P.E $\geq$ 52

$\Rightarrow$ Valor P.E = 52

Proposición

Si la relajación lineal de un problema entero tiene un óptimo $x \in \mathbb{Z}^n$, entonces x también es óptimo para el problema entero.

Bueno, pero rara vez pasa.

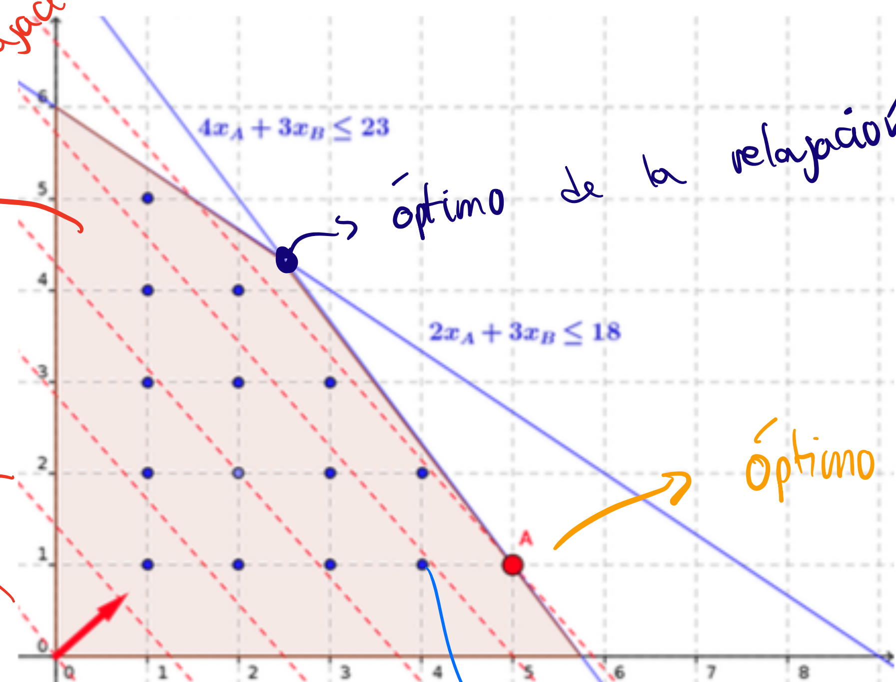
Relajaciones

¿Qué pasa si modificamos el problema?

$$
\begin{array}{rl}
\text{máx} & 8x_A + 7x_B \\
\text{sujeto a:} & 2x_A + 3x_B \leq 18, \\
 & 4x_A + 3x_B \leq \boxed{23} \\
 & x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$

era 24

región factible de relajación



óptimo de la relajación lineal

curvas de nivel del objetivo

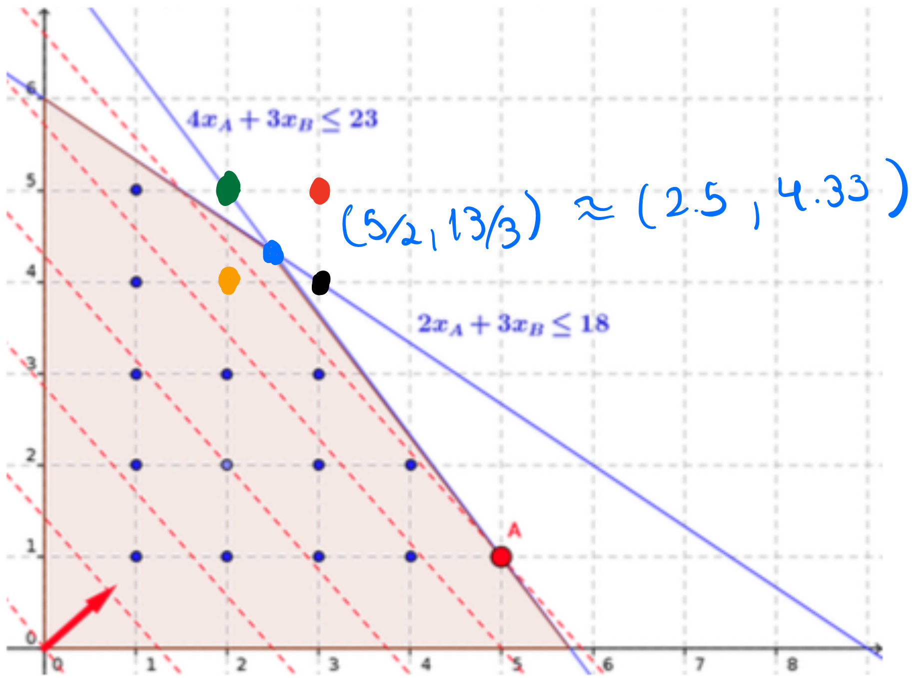
óptimo del problema entero

Puntos enteros que cumplen restricciones

fcfm

Redondear soluciones

El óptimo de la relajación lineal es $(5/2, 13/3)$. ¿Qué pasa si redondeamos?



Redondeos posibles:

● ● ● son infactibles

● = (2,4) factible con valor $8 \cdot 2 + 7 \cdot 4 = 44$ no óptimo.

vs óptimo $8 \cdot 5 + 7 \cdot 1 = 47$

Información disponible gracias a la relajación lineal

A pesar de no dar el óptimo, la relajación lineal nos da información bastante útil. En el ejemplo que estamos estudiando:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 8x_A + 7x_B \\
\text{sujeto a:} \quad & 2x_A + 3x_B \leq 18, \\
& 4x_A + 3x_B \leq 23 \\
& x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

vimos que el óptimo de la relajación lineal es $(5/2, 13/3)$, cuyo valor es ≈ 50.3. Esto nos permite dar una estimación del valor del problema entero.

$44 \leq$ valor óptimo entero ≤ 50.3

redondeo dio sol factible

con esto, podemos garantizar que $(2,4)$ está a lo más a 6.3 unidades del óptimo.

Enumerar soluciones

Acabamos de ver que redondear no necesariamente funciona. Pero, ¿qué pasa si simplemente enumeramos soluciones? Veamos el ejemplo de asignacion de tareas J a máquinas M:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ para todo } i \in M,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ para todo } j \in J,$$

$$x \in \{0,1\}^{M \times J}.$$

Donde $|M| = |J|$. ¿Cuántas asignaciones posibles existen?

$= n$

$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \quad 1 = n!$

Si $n = 100 \rightsquigarrow 100! >$ # atomos de universo.