Modelamiento y Optimización

Clase 1

Gonzalo Muñoz (gmunoz@dii.uchile.cl)

11 de Marzo 2024

Qué aprenderán en este curso

- Entender qué es la optimización matemática.
- Modelar problemas reales usando optimización.
- Dominar algoritmos básicos de optimización.
- Comprender las componentes que hacen que un modelo de optimización sea complejo o no.
- Familiarizarse con el solver Gurobi.

Organización

- Cátedras Lu-Vi 10:15
- Auxiliares Mi 16:15
- Evaluaciones:
  - 40 %: 5 Tareas (2 computacionales)
  - 60 %: 2 Controles (24/04 y 05/06), 1 Examen
- Libro principal: Bertsimas y Tsitsiklis (1994), "Introduction to Linear Optimization"

Introducción a la optimización y modelamiento

¿Qué significa optimizar?

Encontrar *la mejor decisión*, dentro de un conjunto de *decisiones posibles*.

A qué nos referimos con "lo mejor" y cuales son las "decisiones posibles" dependerá de la aplicación.

Ejemplo

Supongamos que queremos llenar un camión de mudanza con la mayor cantidad de cajas posibles.

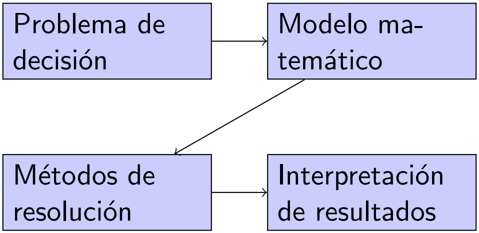
¿Cuales son las decisiones posibles?

Cualquier manera de llenar el camión

¿Qué es "lo mejor"?

El llenado con la mayor cantidad de cajas

Esquema general



Algunos ejemplos

- **Minería**. Decidir qué secuencia seguir para excavar una mina, decidir cómo planificar trenes, entre otros.
- **Energía**. Decidir cuánto generar en plantas eléctricas para satisfacer demanda, cómo operar energía almacenada, entre otros.
- **Deporte.** Diseño del torneo de fútbol nacional.
- **Planificación**. Cómo asignar trabajadores (enfermeros/as a turnos, tripulantes a vuelos), trabajos a máquinas, entre otros.

Componentes de un modelo de optimización

Siempre tendremos dos componentes principales: un conjunto de "decisiones posibles" y una medida de "mejor".

Las decisiones están codificadas como un vector variable $x \in \mathbb{R}^n$, y que el conjunto de decisiones posibles es $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

En el ejemplo anterior, x puede representar una manera de llenar el camión y Ω sería el conjunto de *todas* las maneras de llenar el camión.

Decisiones posibles

Ejemplo

Una empresa productora de bombones de chocolate vende sus productos en dos versiones distintas, A y B. La versión A corresponde a una caja con 2 bombones grandes y 4 pequeños, mientras que la versión B va con 3 bombones grandes y 3 pequeños. La empresa cuenta con un total de 18 bombones grandes y 24 pequeños.

¿Podemos producir 10 unidades de A y 0 de B?

Necesitamos $\underbrace{10 \cdot 2 + 0 \cdot 3}_{20 > 18}$ Bombones grandes

Decisión infactible

¿Podemos producir 2 unidades de A y 2 de B?

Bombones grandes : $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10 < 18$ ✓

Bombones pequeños : $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14 < 24$ ✓

Decisión Factible

Describamos todas las maneras posibles que tiene la empresa de empaquetar sus bombones.

Variables x_A = cantidad de cajas A

x_B = cantidad de cajas B

se pueden producir (x_A, x_B) si

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot x_A + 3 x_B &\leq 18 \\ 4 \cdot x_A + 3 x_B &\leq 24 \end{aligned}\right\} \quad \text{Restricciones}$$

La mejor decisión

Dada una decisión x asumiremos que existe una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que mide qué tan buena es la decisión x. La función f se conoce como *función objetivo*.

Ejemplo

Sigamos con le ejemplo anterior, y supongamos que la empresa de bombones obtiene una utilidad de 8 y 7 unidades con las versiones A y B, respectivamente.

Si producimos (x_A, x_B) la utilidad es

$$8x_A + 7x_B$$

El problema de optimización (ejemplo)

En palabras: Decidir cuántas cajas de A y B producir para maximizar utilidad

En notación matemática:

$$\max \quad 8x_A + 7x_B \quad \} \text{ Función objetivo}$$

Restricciones

sujeto a:

$$2x_A + 3x_B \leq 18 \quad \text{(Bomb. grandes)}$$

$$4x_A + 3x_B \leq 24 \quad \text{(Bomb. pequeños)}$$

Naturaleza de las variables

$$x_A \geq 0$$

$$x_B \geq 0$$

$$x_A \in \mathbb{Z}$$

$$x_B \in \mathbb{Z}$$

El problema de optimización

Siempre asumiremos que un problema de optimización tiene la siguiente forma:

$$
\begin{array}{lll}
\min / \max & f(x) & \\
\text{s.a:} & g_1(x) \leq 0 & \to \text{Ej: } g_1(x) = 2x_A + 3x_B - 18 \ \text{(Bombones)} \\
& g_2(x) \leq 0 & \\
& \vdots & \\
& g_m(x) \leq 0 & \\
& x \in D & \to \text{Normalmen } \mathbb{R}^n \text{ o } \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

¿Maximizar o minimizar?

Algunas veces conviene maximizar la función objetivo, otras veces minimizar. Sin embargo, desde un punto de vista matemático, podemos asumir que siempre minimizamos, pues

$$\text{máx}\{f(x) : x \in \Omega\} = -\text{mín}\{-f(x) : x \in \Omega\}.$$

Además, tampoco perdemos generalidad es asumir que las restricciones son siempre $g_i(x) \leq 0$:

$\rightarrow \quad g_i(x) \geq 0 \iff -g_i(x) \leq 0$

$\rightarrow \quad g_i(x) = 0 \iff g_i(x) \leq 0$

$\wedge \ -g_i(x) \leq 0$

Clasificación básica de problemas

Según qué tipo de funciones f y g_i tenemos, y qué tipo de dominio es $\mathcal{D}$, los problemas de optimización tienen distintos nombres.

Con o sin restricciones:

Si $m=0$ y $D=\mathbb{R}^n$ el problema es sin restricciones

si no, es con restricciones

Lineal o no-lineal:

cuando $f(x) = c^T x + d$ (Ej: $8x_A + 7x_B$)

$g_i(x) = a_i^T x + b_i$ (Ej: $2x_A + 3x_B - 18$)

el problema es <u>lineal</u>

si no, es no-lineal

Clasificación básica de problemas

Contínuo, entero o mixto: En general, trabajaremos con dominios del tipo

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \overbrace{x_j \geq 0 \quad j \in N}^{\text{algunas entradas } \geq 0}, \ \overbrace{x_i \in \mathbb{Z} \quad i \in I}^{\text{y algunas entradas enteras}}\}.$$

Si $I = \phi$ el problema es continuo

Si $I = \{1, 2, \dots, n\}$ el problema es entero

Si no, el problema es mixto

Ej: El ejemplo de los chocolates es lineal entero

Nota: A los problemas lineales continuos solo les diremos "lineales".