

# Modelamiento y Optimización

## Clase 15

Gonzalo Muñoz

10 de Mayo 2024



# Holgura complementaria



# Holgura complementaria

## Teorema

Sean  $x$  e  $y$  soluciones factibles para el primal y dual respectivamente.

Luego,  $x$  e  $y$  son óptimos para el primal y dual respectivamente **si y solo si**

- (1)  $y_i(a_i^\top x - b_i) = 0$ , para todo  $i$ ,
- (2)  $x_j(c_j - A_j^\top y) = 0$ , para todo  $j$ .

¿Qué significa ésto?

$$(1) \quad y_i = 0 \quad \vee \quad a_i^\top x = b_i$$

\* Si  $a_i^\top x \neq b_i$  (no activa)  $\Rightarrow y_i = 0$

En este caso  $y_i = 0$  captura que "no es importante" la restr.  $i$ . cuando

$$(2) \quad x_j = 0 \quad \vee \quad A_j^\top y = c_j$$

$a_i^\top x \neq b_i$   
en el óptimo,

Análogo.



# Ejemplo

$$\begin{array}{ll} \min & -4x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a:} & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (y_1) \\ & -x_1 + x_2 \geq -2 \quad (y_2) \\ & x_2 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \max & 8y_1 - 2y_2 \\ \text{sujeto a:} & -y_1 - y_2 = -4 \quad (x_1) \\ & 2y_1 + y_2 \leq 2 \quad (x_2) \\ & y_1 \leq 0 \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

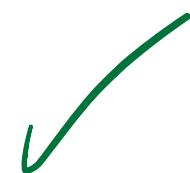
Verifiquemos holgura complementaria para  $x = (12, 10)$  e  $y = (-2, 6)$

$$-2 \cdot (-12 + 2 \cdot 10 - 8) = -2 \cdot 0 = 0$$

$$6 \cdot (-12 + 10 + 2) = 6 \cdot 0 = 0$$

$$12 \cdot ( +2 - 6 + 4 ) = 12 \cdot 0 = 0$$

$$10 \cdot ( 2 \cdot (-2) + 6 - 2 ) = 10 \cdot 0 = 0$$



ambos son óptimos



# Ejemplo

Utilizando holgura complementaria, muestre que  $x = (0, 1.5)$  es una solución óptima para

Dual

Primal  $\min 100x_1 + 100x_2$

sujeto a:  $x_1 + 2x_2 \geq 3$

$$2x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max 3y_1 + y_2$$

sujeto a:  $y_1 + 2y_2 \leq 100$

$$2y_1 + y_2 \leq 100$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

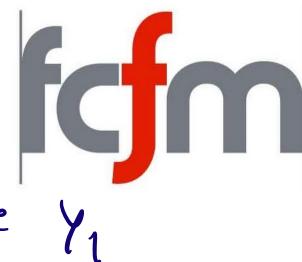
Busquemos  $y$  tal que  $(x, y)$  cumplen H-C.

•  $x_1 = 0$  no dice mucho en  $x_1 \cdot (y_1 + 2y_2 - 100) = 0$

•  $x_2 = 1.5 \Rightarrow 2y_1 + y_2 = 100 \quad (*)$

$\uparrow$   
H-C  $x_2(2y_1 + y_2 - 100) = 0$

•  $x_1 + 2x_2 - 3 = 0 + 2 \cdot 1.5 - 3 = 0$  no da info. sobre  $y_1$



## Ejemplo

- $$\bullet \quad 2x_1 + x_2 - 1 = 0 + 1.5 - 1 = 0.5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

$$Y_2(2x_1 + x_2 - 1) = 0$$

$$(*) \Rightarrow 2\gamma_1 = 100$$

⇒ el único candidato es  $\gamma = (50, 0)$

Hay que verificar que es facible (ejercicio)

$\Rightarrow (x, y)$  wmpfen H-C

⇒  $x$  e  $y$  son óptimos.

# Análisis de sensibilidad



# Modificaciones al lado derecho

Supongamos ahora que queremos modificar parte del lado derecho en  $\Delta$  unidades:

$$\min 100x_1 + 100x_2$$

$$\text{s.a: } x_1 + 2x_2 \geq 3 + \Delta$$

$$2x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

*(sin  $\Delta$ )*

$$\min 100x_1 + 100x_2$$

$$\text{s.a: } x_1 + 2x_2 - s_1 = 3 + \Delta$$

$$2x_1 + x_2 - s_2 = 1$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

*$\uparrow s_1$   $\uparrow s_2$*

El óptimo *en forma estándar* es  $(0, 1.5, 0, 0.5)$ , por lo tanto la base óptima es:

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

¿Cómo afecta el cambio  $\Delta$  a los costos reducidos?

$$\bar{C} = C - C_B B^{-1} A \quad \text{no depende de } \Delta !$$



# Modificaciones al lado derecho

Como los costos reducidos no cambian, si tenemos costos reducidos  $\geq 0$ , la base sigue siendo “óptima”  $\tau \geq 0$   $x_B = B^{-1}b$

Pero podría fallar factibilidad! Es decir  $B^{-1}(b + (\Delta, 0)) \geq 0$ . En el ejemplo anterior

$$B^{-1}(b + (\Delta, 0)) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\Delta \geq -3}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\Delta \geq -1}$$

$\Rightarrow$  Si  $\Delta \geq -1$  la misma base es óptima!

pero el punto cambia a

$$x_B = B^{-1}(b + (\Delta, 0))$$
$$x_N = 0$$



# Modificaciones al lado derecho

En general, si una solución básica es **no-degenerada**, y la modificación es pequeña, **la misma base sigue siendo óptima!**

Si el cambio es  $\Delta$  (tal que la base sigue siendo factible), el nuevo valor objetivo es:

$$c_0^T \cdot (\bar{B}^{-1} (b + \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix})) = \underbrace{c_B \bar{B}^{-1} b}_{\text{valor objetivo original}} + \underbrace{c_B \bar{B}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{cambio en el objetivo}}$$

¿Cuál fue el **cambio** en el valor objetivo?

$$\underbrace{c_B \bar{B}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{dual óptimo} \\ (\text{clase anterior})}} = y_1^* \cdot \Delta$$

$y_1^*$  óptimo del dual de la restricción que cambió