Modelamiento y Optimización

Clase 24

Gonzalo Muñoz

14 de Junio 2024

Recapitulemos

KKT:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a} & g_i(x) \leq 0 \\ & h_j(x) = 0 \end{array}}$$

$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$

$$\begin{aligned} g_i(x^*) &\leq 0 & \forall i &= 1, \ldots, m \\ h_j(x^*) &= 0 & \forall j &= 1, \ldots, p \\ \lambda_i^* &\geq 0 & \forall i &= 1, \ldots, m \\ \lambda_i^* g_i(x^*) &= 0 & \forall i &= 1, \ldots, m \end{aligned}$$

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

Teorema (Dualidad fuerte)

Si el problema convexo y que existe un punto de Slater en S. Entonces se cumple dualidad fuerte y el óptimo cumple KKT.

Teorema

Si el problema convexo y un punto satisface KKT, entonces es óptimo y se cumple dualidad fuerte.

Demostración

Veamos por qué se tiene el último resultado. Sea x^* y (λ^*, μ^*) un par que cumple KKT.

Siempre tenemos que

x^* factible

(λ^*, μ^*) dual factible y dual es maximización

$$f(x^*) \geq p^* \geq d^* \geq d(\lambda^*, \mu^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda^*, \mu^*) = (*)$$

dualidad débil

En el caso convexo, el Lagrangeano es convexo, por lo tanto:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)}_{\text{convexo pues } \lambda \geq 0} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)}_{\text{lineal}}$$

$\nabla L(x, \lambda^*, \mu^*) = 0$ es suficiente para tener mínimo global. Y por KKT

$\nabla L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \Rightarrow$ x^* mín. del Lagrangeano

$$(*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*)$$

por Holgura complementaria.

Ejemplo

Considere el siguiente problema donde $c \neq 0$ y Q es invertible y simétrica:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ \text{s.a.} & x^T Q x \leq 1 \end{array}$$

1. Plantee las condiciones de KKT.
2. Pruebe que la restricción es activa para un punto que satisface KKT.
3. Encuentre un candidato a óptimo.
4. ¿Bajo que condiciones este candidato es un óptimo global? Justifique su respuesta.

$[\nabla(x^TQx) = 2Qx]$

1.- $L(x,\lambda) = c^Tx + \lambda(x^TQx - 1)$

KKT: (1) $x^TQx - 1 \leq 0$

(2) $\lambda \geq 0$

(3) $\lambda(x^TQx - 1) = 0$

(4) $c + 2\lambda Qx = 0$

Ejemplo

(3)

2.- Si $x^T Q x - 1 < 0 \Rightarrow \lambda = 0$

en (4) $\Rightarrow c = 0$ pues $c \neq 0$

3.- (4) $\Rightarrow 2\lambda Q x = -c \Rightarrow Q x = \frac{-c}{2\lambda} \Rightarrow x = \frac{-Q^{-1}c}{2\lambda}$

parte anterior, $\lambda \neq 0$

Parte anterior $\Rightarrow x^T Q x = 1 \Rightarrow \left(\frac{-Q^{-1}c}{2\lambda}\right)^T Q \left(\frac{-Q^{-1}c}{2\lambda}\right) = 1$

$$\Rightarrow c^T \underbrace{Q^{-1} Q}_{I} Q^{-1} c = 4\lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{c^T Q^{-1} c}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{c^T Q^{-1} c}$$

$\lambda \geq 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-Q^{-1}c}{2\lambda} = \frac{-Q^{-1}c}{\sqrt{c^T Q^{-1} c}}$$ candidato a óptimo.

4.- Si el problema es convexo, es óptimo global.

Cuando $Q \succeq 0$ (semi-def positiva) el problema es convexo.

Ejemplo (propuesto)

Considere el problema

$$\begin{aligned} \max \quad & \Pi_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

donde $a_i > 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Muestre que es equivalente resolver el problema máx $\sum_{i=1}^{n} a_i \log(x_i)$, s.a. $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x \geq 0$.
2. Escriba las condiciones de KKT del problema de la parte anterior.
3. Encuentre un óptimo global a este problema y muestre que es único.

1.- clave: logaritmo es creciente, y el óptimo no es 0. Así que se puede tomar log del objetivo.

2.- ojo: transformar a minimización y $x \geq 0 \rightsquigarrow -x \leq 0$

3.- Resolver KKT y mostrar que el problema es convexo y cumple Slater.

Teorema de Karush-Kuhn-Tucker

En el caso no-convexo también hay casos donde se satisface KKT:

Teorema (Karush-Kuhn-Tucker)

Sea x^* factible e $I = \{i = 1, \dots, m : g_i(x^*) = 0\}$ el conjunto de restricciones activas en x^*. Supongamos que

$$\left\{\nabla g_i(x^*) : i \in I\right\} \cup \left\{\nabla h_j(x^*) : j = 1, \dots, p\right\}$$

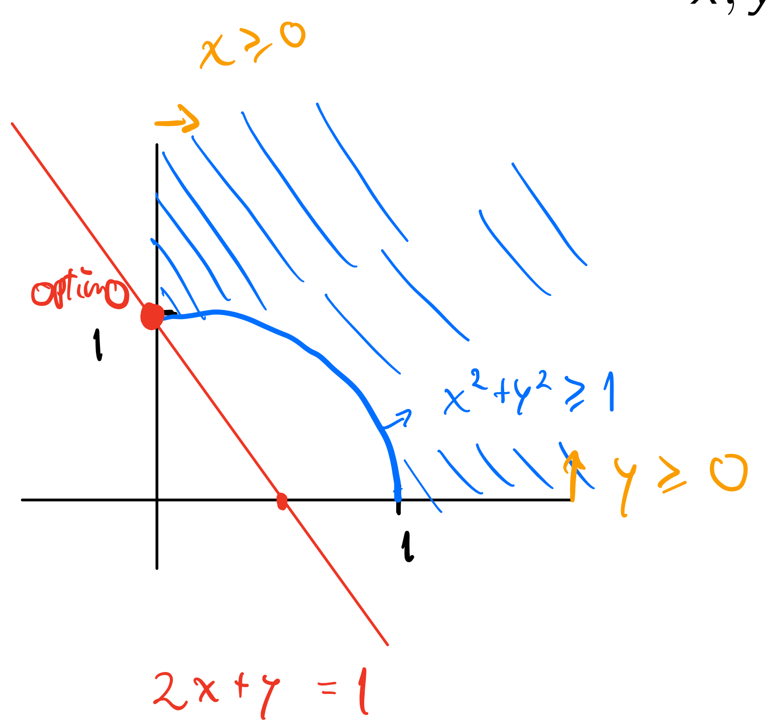
LICQ
"linear independence Constraint Qualification"

son vectores linealmente independientes. Entonces, si x^* es mínimo local del problema, existen $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m$ y $\mu_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, p$ tales que x^* y (λ, μ) satisfacen las condiciones de KKT.

Ejemplo

Resolver el siguiente problema gráficamente, y verificar que el óptimo satisface las condiciones LICQ.

$$\begin{aligned} \min\ & 2x + y \\ \text{s.t. } & x^2 + y^2 \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$



óptimo $(x, y) = (0, 1)$

restricciones activas

$$-x^2 - y^2 + 1 \leq 0$$

$$-x \leq 0$$

Ejemplo

$$\nabla(-x^2 - y^2 + 1) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{en } (0,1)$$

$$\nabla(-x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vectores ortogonales, en particular l.i, así que se cumple LICQ.

$\Rightarrow$ se cumple KKT

Teorema

Cuando LICQ no se cumple

La clase pasada vimos que el siguiente problema tiene un óptimo global, pero no tiene puntos que satisfagan KKT.

$$\begin{aligned} \text{mín } & x_2 \\ \text{sujeto a: } & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Veamos ahora qué pasa con LICQ.