Modelamiento y Optimización

Clase 6

Gonzalo Muñoz

1 de Abril 2024

Programación Lineal: Conceptos básicos y geometría

Definiciones básicas

Un problema de optimización tiene la forma

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ \text{sujeto a:} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m, \\ & x \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

En esta parte del curso asumiremos que $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ y que

$$\begin{aligned} f(x) &= c^\top x + d \\ g_1(x) &= a_1^\top x - b_1 \\ &\vdots \\ g_m(x) &= a_m^\top x - b_m \end{aligned}$$

Forma matricial

Definimos una matriz A de $m \times n$ cuyas fila i-ésima es $a_i^\top$.

Un problema lineal o PL nos queda de la forma

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x \\ \text{sujeto a:} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

Ejemplo:

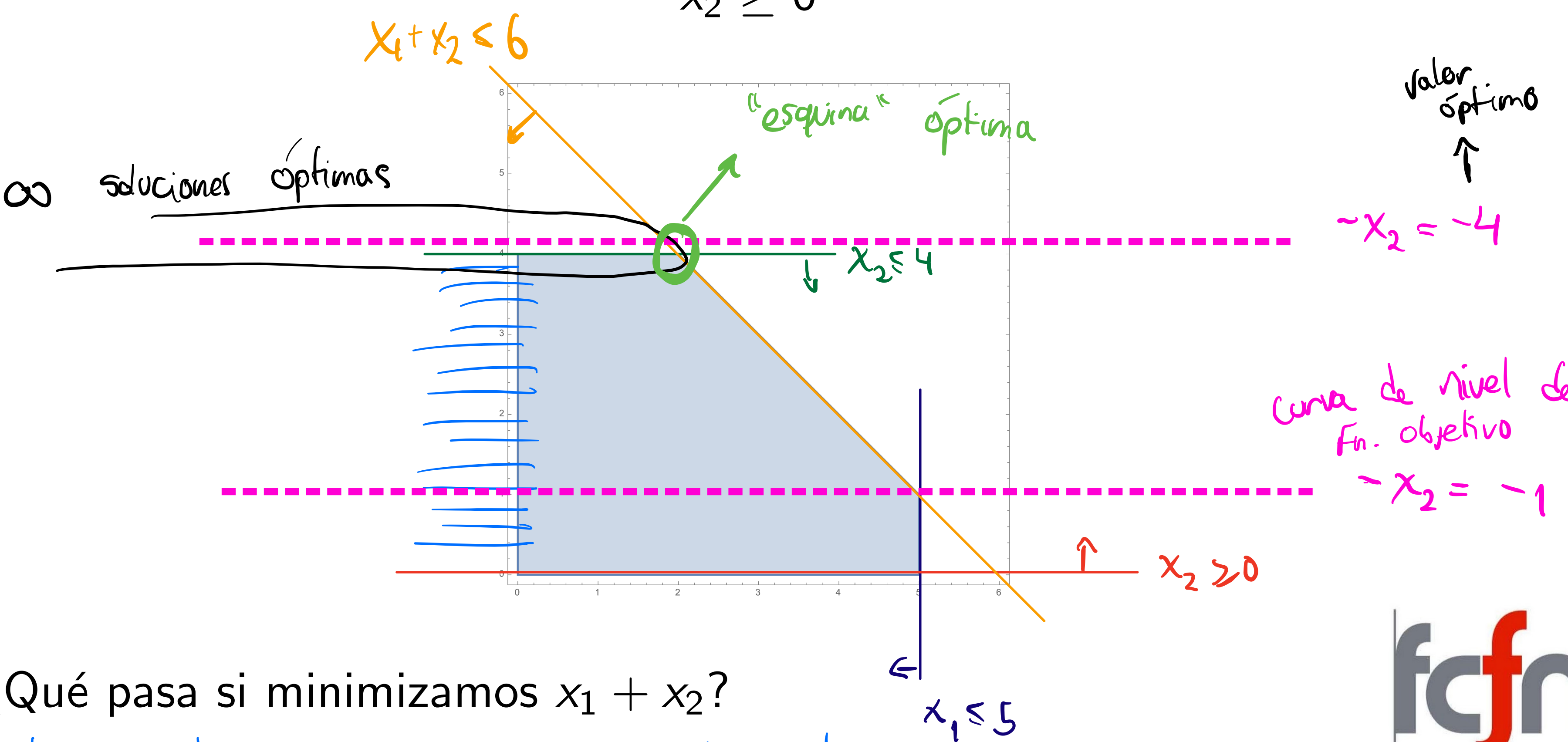
$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1 \\ & 2x_1 - x_3 \leqslant 6 \\ & x_2 \geqslant 0 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & (2, -3, 6) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \text{s.a:} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por componente

Representación gráfica

Un ejemplo simple

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_2 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 \leq 5 \\
& x_2 \leq 4 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



¿Qué pasa si minimizamos $x_1 + x_2$?

Podemos disminuir $x_1 + x_2$ indefinidamente! → Problema no-acotado

$(-M, 0)$ es siempre factible $\forall M > 0$

Definiciones y Moralejas

Definiciones

- $P = \{x : Ax \leq b\}$ se llama región factible
- Si $x \in P$ se llama solución factible
- Un vector x es óptimo si es factible y $\overbrace{c^\top x \leq c^\top z}^{\text{asumiendo minimización}}$ $\forall z \in P$.

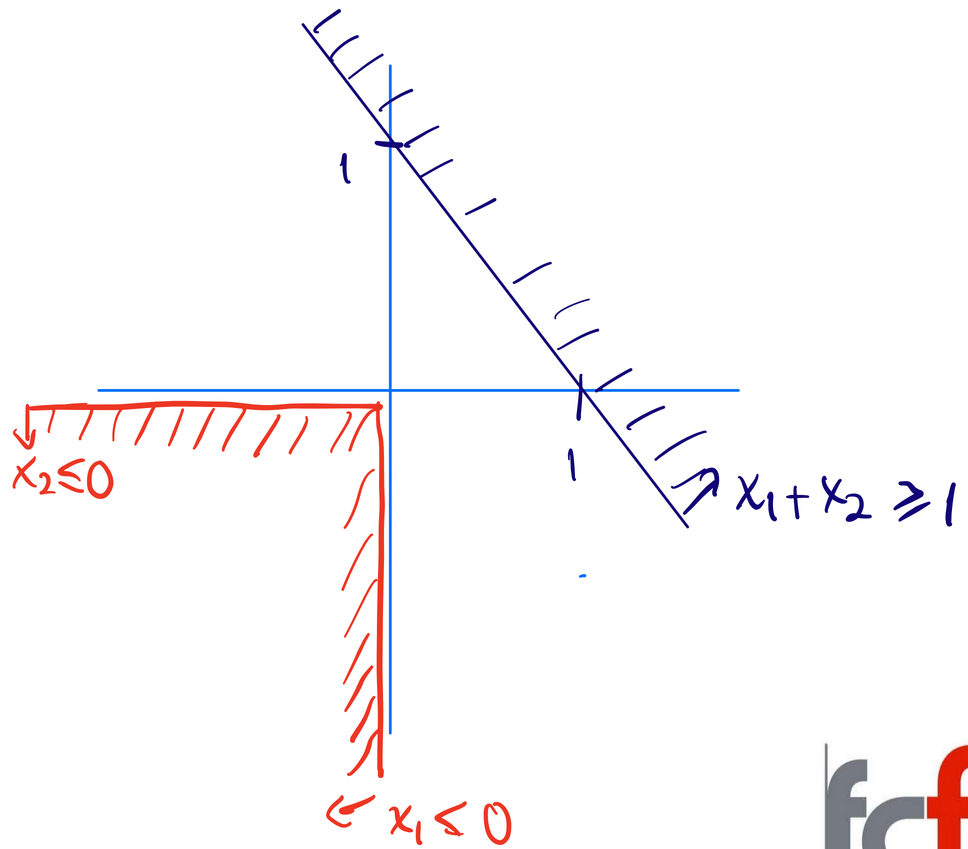
Moralejas

- La región factible tiene "bordes rectos", esto se llama poliedro.
- Cuando hay óptimo, este se encuentra los bordes (aunque podría no haber un óptimo)
- Siempre hay alguna "esquina" óptima (cuando hay "esquinas")

Problemas infactibles

¿Podría un PL no tener ninguna solución factible?

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2 \leq 0 \end{array}$$



Infactible.

Reformulaciones

Forma estándar

Definición

Decimos que un PL está en forma *estándar* si tiene la forma:

$$\begin{aligned} \text{mín } & c^\top x \\ \text{s.a } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

A primera vista se podría pensar que los problemas en forma estándar son una clase muy particular de PLs. Veremos que no.

Definición (Informal)

Dos problemas P_1 y P_2 son *equivalentes* si, dada una solución óptima de P_1, podemos obtener una solución óptima de P_2, y vice-versa.

Forma estándar

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Proposición

Todo PL es equivalente a otro PL en forma estándar.

Ilustraremos como se obtiene esto a continuación:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ & x_2 - 4x_1 = -1 \\ & x_3 + x_2 \geq 1 \\ & 1 \leq x_1 \leq 7 \\ & x_2 \leq 24 \end{aligned}$$

Forma estándar

1. Transformando desigualdades en igualdades: si tenemos una restricción lineal del tipo

$$a^\top x \leq b$$

podemos agregar una variable extra s, conocida como *variable de holgura* y reemplazamos la desigualdad por

$$a^\top x + s = b, \quad s \geq 0.$$

Ej

$$x_1 + 2x_2 \leq 17 \quad \rightsquigarrow \quad x_1 + 2x_2 + s_1 = 17, \quad s_1 \geq 0$$

$$x_3 + x_2 \geq 1 \quad \rightsquigarrow \quad x_3 + x_2 - s_2 = 1, \quad s_2 \geq 0$$

Forma estándar

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ & x_2 - 4x_1 = -1 \\ & x_3 + x_2 \geq 1 \\ & 1 \leq x_1 \leq 7 \\ & x_2 \leq 24 \end{aligned}$$

El problema resultante es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 17 \\ & x_2 - 4x_1 = -1 \\ & x_3 + x_2 - s_2 = 1 \\ & x_1 - s_3 = 1 \\ & x_1 + s_4 = 7 \\ & x_2 + s_5 = 24 \\ & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora nos falta escribir el problema solo con variables no-negativas.

Forma estándar

2. Transformando variables libres a variables no-negativas: Todo número real z puede ser escrito como diferencia de 2 número no-negativos, es decir, existen $z^+, z^- \geq 0$ tales que

$$z = z^+ - z^-$$

Ej:

$$2 = \underbrace{\boxed{2}}^{\geq 0} - \underbrace{\boxed{0}}^{\geq 0} \qquad -3 = \underbrace{\boxed{0}}^{\geq 0} - \underbrace{\boxed{3}}^{\geq 0}$$

$$x_2 = x_2^+ - x_2^- \qquad x_2^+ \geq 0, \; x_2^- \geq 0$$

Nuevas variables

Forma estándar

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 17 \\ & x_2 - 4x_1 = -1 \\ & x_3 + x_2 - s_2 = 1 \\ & x_1 - s_3 = 1 \\ & x_1 + s_4 = 7 \\ & x_2 + s_5 = 24 \\ & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0 \end{aligned}$$

El problema final queda

$x_1 \geq 1$, así que $x_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 3(x_2^+ - x_2^-) + (x_3^+ - x_3^-) \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2(x_2^+ - x_2^-) + s_1 = 17 \\ & (x_2^+ - x_2^-) - 4x_1 = -1 \\ & (x_3^+ - x_3^-) + (x_2^+ - x_2^-) - s_2 = 1 \\ & x_1 - s_3 = 1 \\ & x_1 + s_4 = 7 \\ & (x_2^+ - x_2^-) + s_5 = 24 \\ & x_1, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^- \geq 0 \\ & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Este último problema está en forma estándar.

Resumen

Hasta ahora sabemos que un PL tiene la forma

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x \\ \text{sujeto a:} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

$Ax = b$
$x \geq 0$

Y que siempre se puede transformar en un PL en forma estándar.

Para poder resolver PLs, estudiaremos la geometría del conjunto factible de la forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n \; : \; Ax \leq b\}$$

Más adelante volveremos a forma estándar.

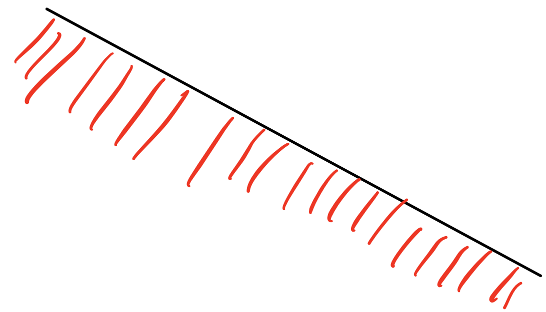
Definiciones básicas

Definición

Un semi-espacio es un conjunto del tipo

$$S_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leq b\}$$

con $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$.



Definición

Un hiperplano corresponde al conjunto

$$H_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = b\}$$

Poliedros

Definición

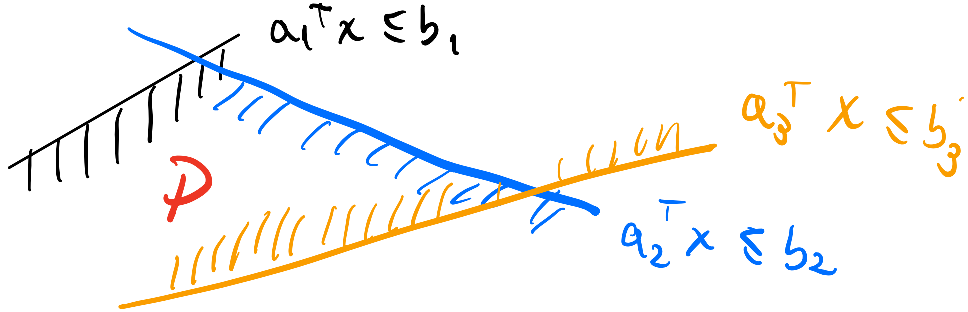
Un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro si existe $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ para algún m, y $b \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, Ax \leq b\}.$$

Notar que también podemos escribir

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b_i, \; i = 1, \ldots, m\}$$

con $a_i^\top$ las filas de A. Todo poliedro es una intersección de semi-espacios.



Definición

Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|x_i| \leq K \; \forall x \in C$.

A un poliedro acotado se le llama polítopo.