Modelamiento y Optimización

Clase 25

Gonzalo Muñoz

24 de Junio 2024

Dualidad

Dual de un PL

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & c^\top x \\
\text{s.a:} \quad & a_i^\top x \geq b_i, \ \ i \in M_1 \\
& a_i^\top x \leq b_i, \ \ i \in M_2 \\
& a_i^\top x = b_i, \ \ i \in M_3 \\
& x_j \geq 0, \ \ j \in N_1 \\
& x_j \leq 0, \ \ j \in N_2 \\
& x_j \text{ libre}, \ j \in N_3
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & b^\top y \\
\text{s.a:} \quad & y_i \geq 0, \ \ i \in M_1 \\
& y_i \leq 0, \ \ i \in M_2 \\
& y_i \text{ libre}, \ i \in M_3 \\
& A_j^\top y \leq c_j, \ j \in N_1 \\
& A_j^\top y \geq c_j, \ j \in N_2 \\
& A_j^\top y = c_j, \ j \in N_3
\end{aligned}
$$

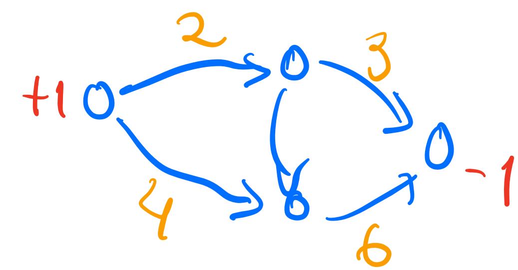
Filas

Columnas

$$
A = \begin{bmatrix} - a_1 - \\ - a_2 - \\ \vdots \\ - a_m - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}
$$

Ejemplo

El siguiente es un modelo de un problema de flujo a costo mínimo en un grafo dirigido $G = (V, A)$. Calcule el dual.



$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i && \forall i \in V \\
& x_{ij} \leq u_{ij} && \forall (i,j) \in A \\
& x_{ij} \geq 0 && \forall (i,j) \in A
\end{aligned}$$

$b_i > 0$ si i es de oferta

$b_i < 0$ si i es demanda

Variables duales:

$y_i \quad \forall i \in V$ asociadas a conservación de flujo

$w_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$ asociadas a capacidades

Ejemplo

$$\max \sum_{i\in V} b_i y_i + \sum_{(i,j)\in A} u_{ij} w_{ij}$$

$$y_k - y_l + w_{kl} \leq c_{kl} \qquad \forall (k,l)\in A$$

pues $x_{kl} \geq 0$

$$y_i \text{ libre} \qquad \forall i\in V$$

$$w_{ij} \leq 0 \qquad \forall (i,j)\in A$$

Teoremas de dualidad

Teorema (Dualidad débil)

(min)

Si x es una solución factible para el problema primal e y es una solución factible para su dual, entonces $b^\top y \leq c^\top x$.

Teorema (Dualidad fuerte)

Supongamos que el primal posee solución óptima. Entonces, el dual también posee un óptimo y sus valores son iguales.

Teorema (Holgura complementaria)

Sean x e y soluciones factibles para el primal y dual respectivamente. Luego, x e y son óptimos para el primal y dual respectivamente si y solo si

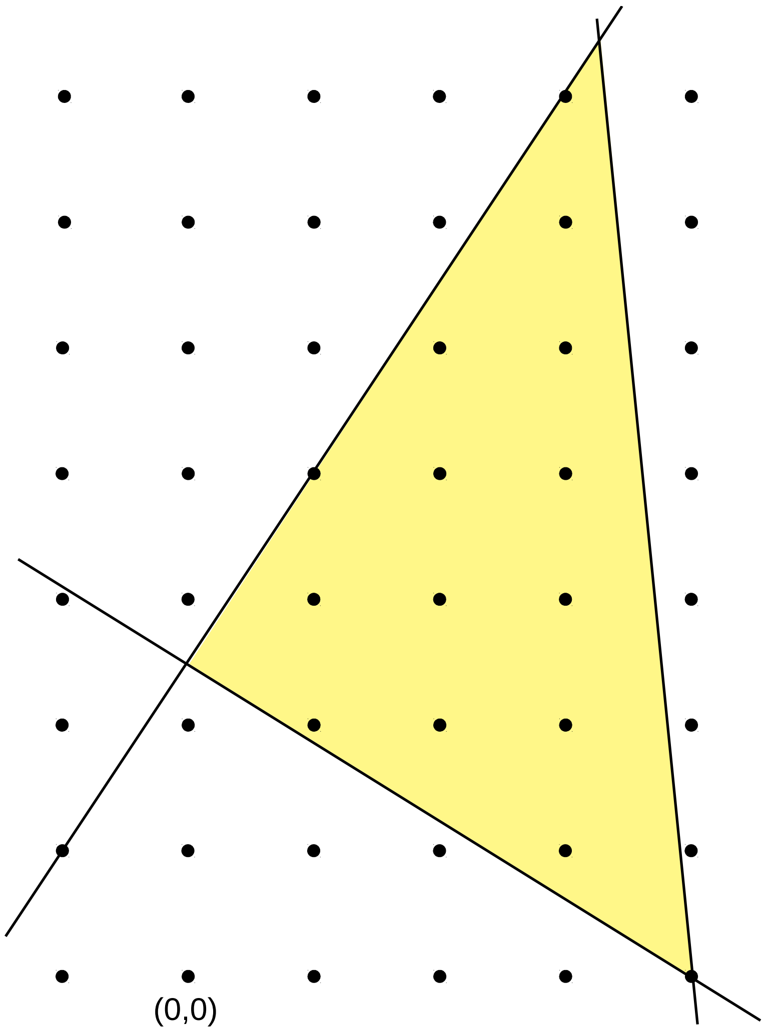
$$
\begin{aligned}
y_i(a_i^\top x - b_i) &= 0, \ \textit{para todo } i, \\
x_j(c_j - A_j^\top y) &= 0, \ \textit{para todo } j.
\end{aligned}
$$

Branch and Bound

Branch and Bound

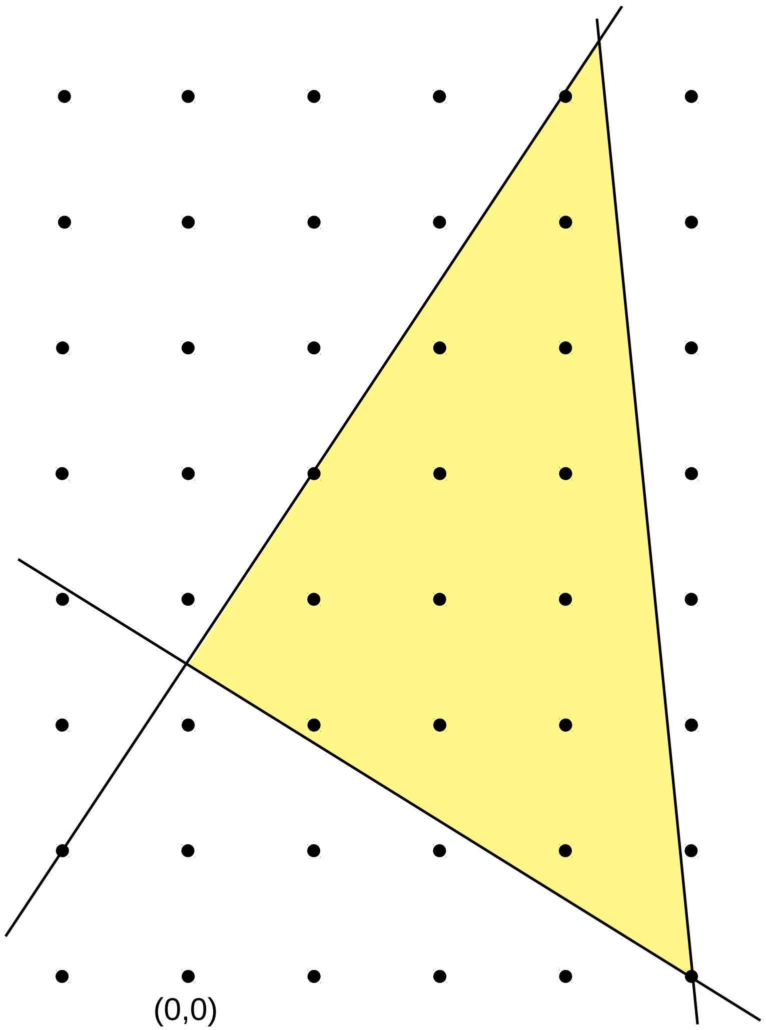
$$
\begin{aligned}
(PE)\ \text{mín} \quad & 7x + y \\
-3x + 2y &\leq 5 \\
5x + 8y &\geq 20 \\
20x + y &\leq 800 \\
& \cancel{x, y \in \mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

relajación lineal



Branch and Bound

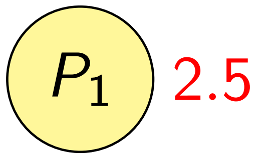
$$
\begin{aligned}
(P_1)\ \text{mín}\quad & 7x + y \\
& -3x + 2y \leq 5 \\
& 5x + 8y \geq 20 \\
& 20x + y \leq 800
\end{aligned}
$$

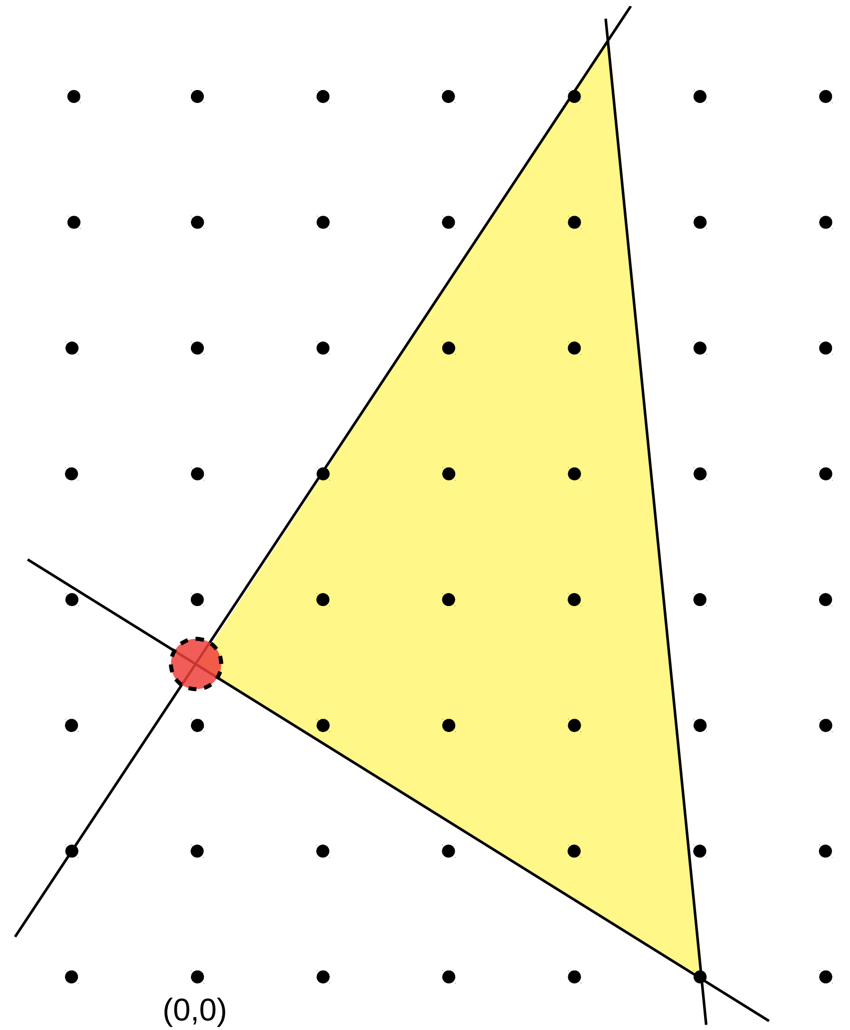


Branch and Bound

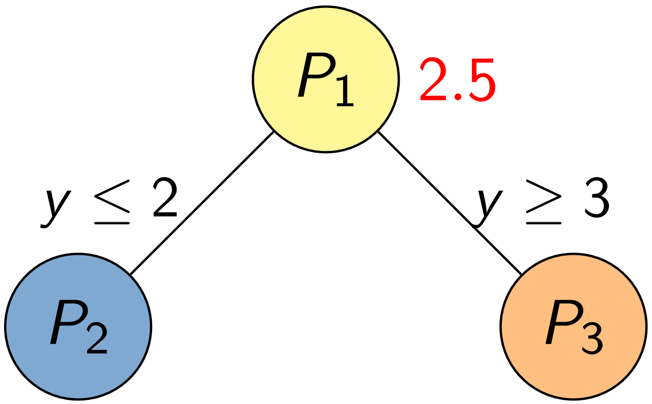
Optimo entero ≥ 2.5

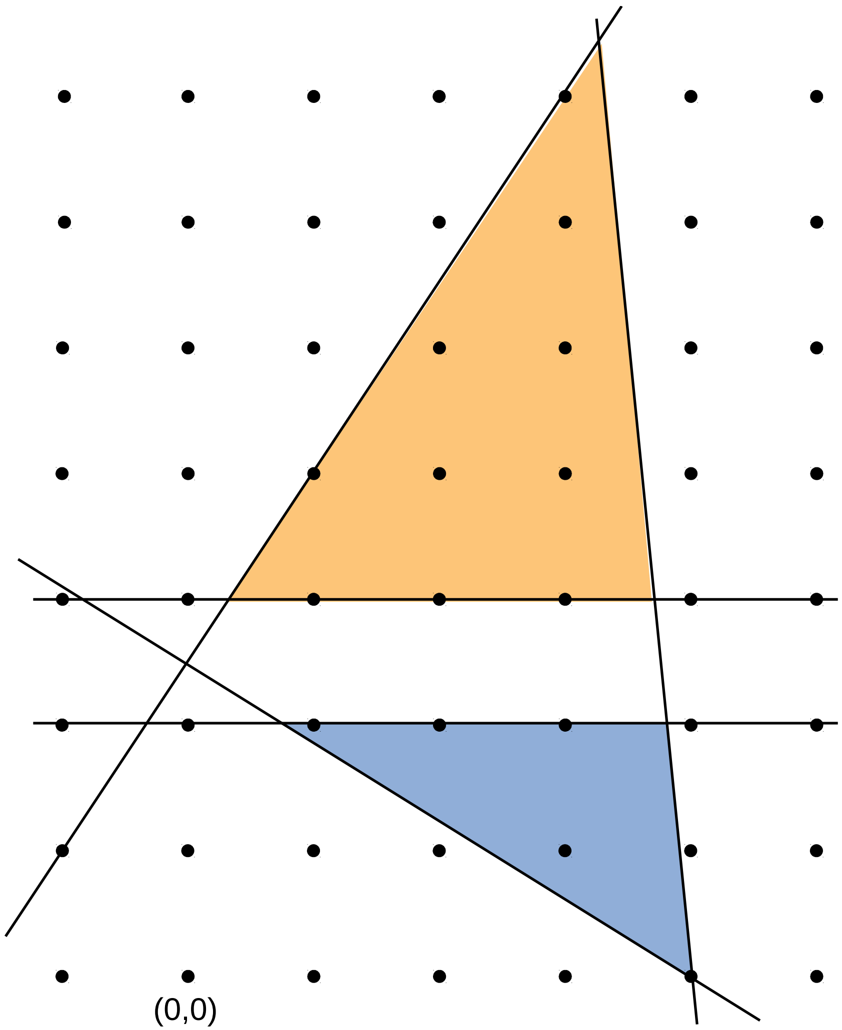
Valor objetivo





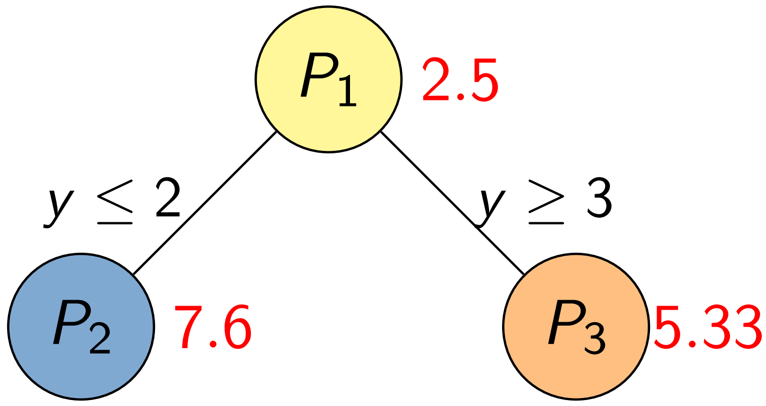
Branch and Bound

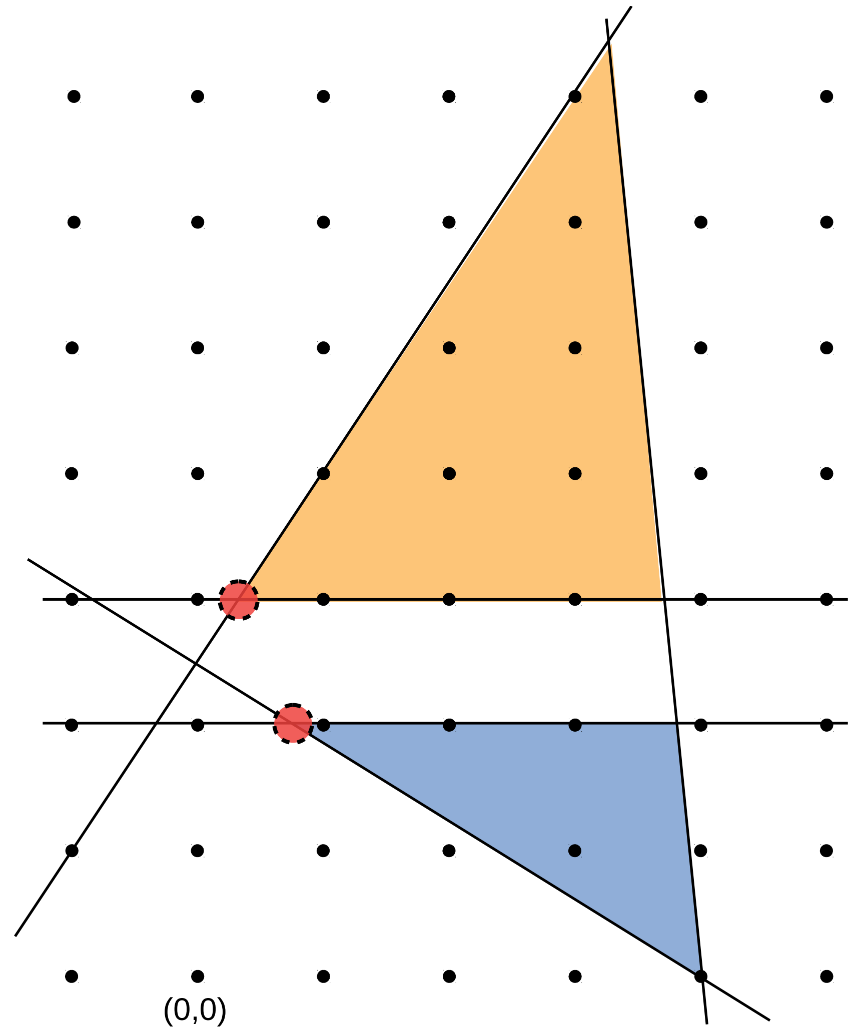




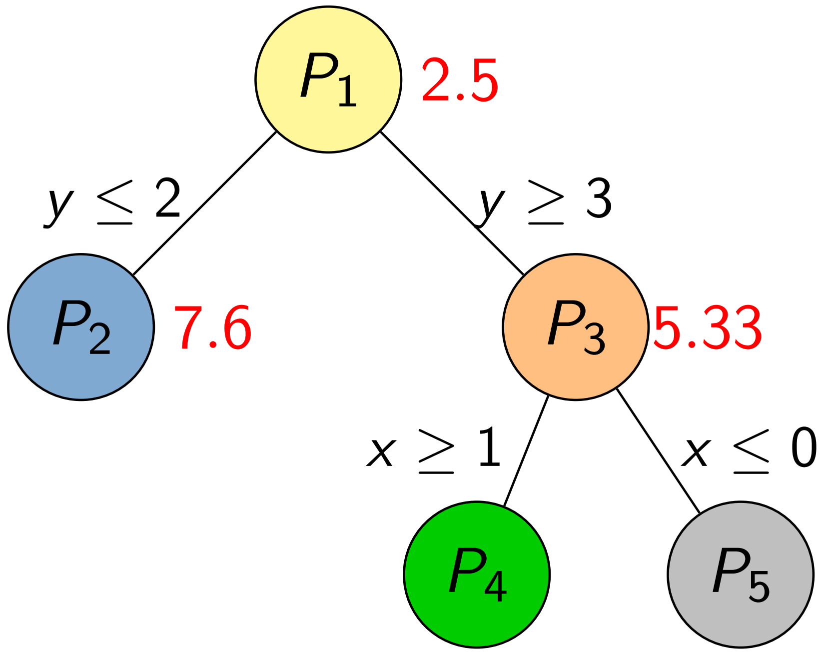
Branch and Bound

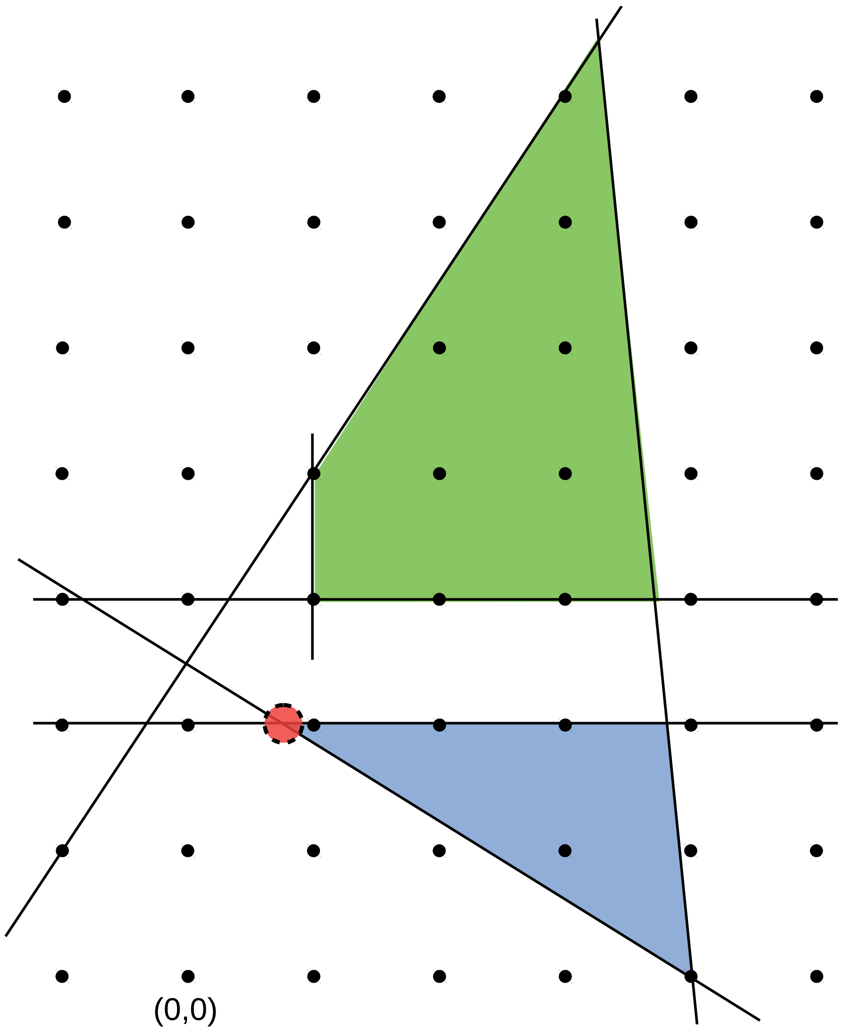
Valor optimo ≥ 5.33



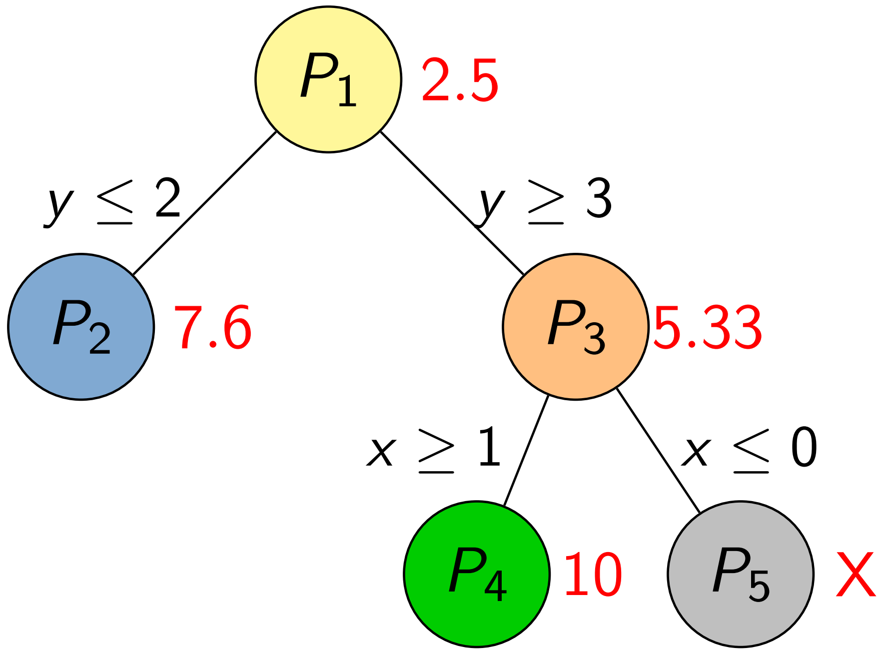


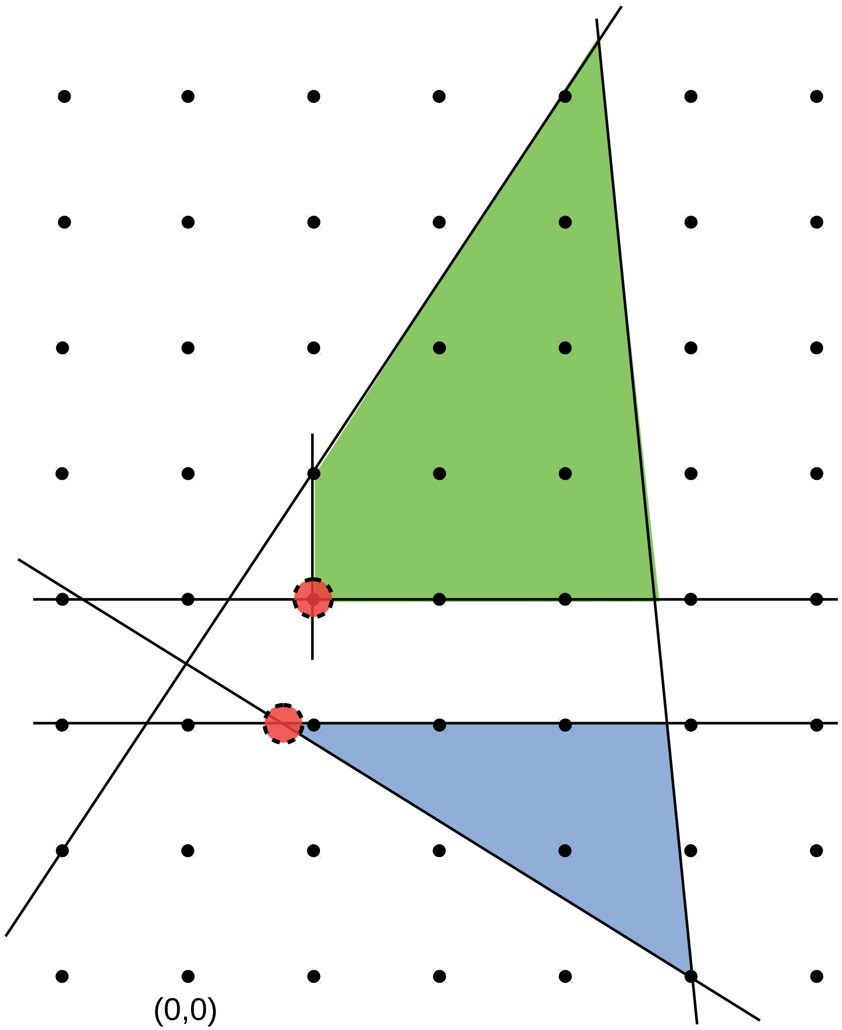
Branch and Bound





Branch and Bound

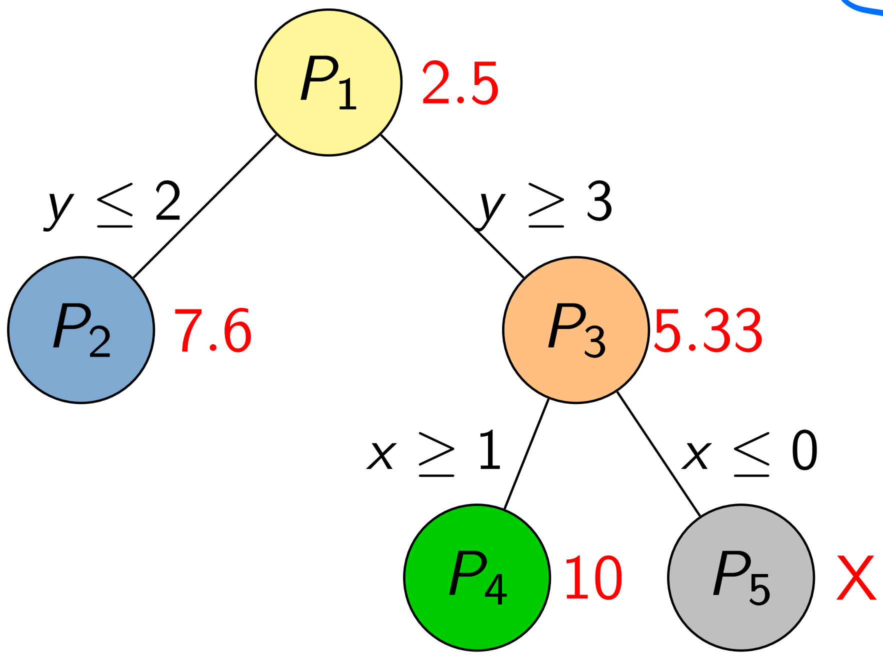


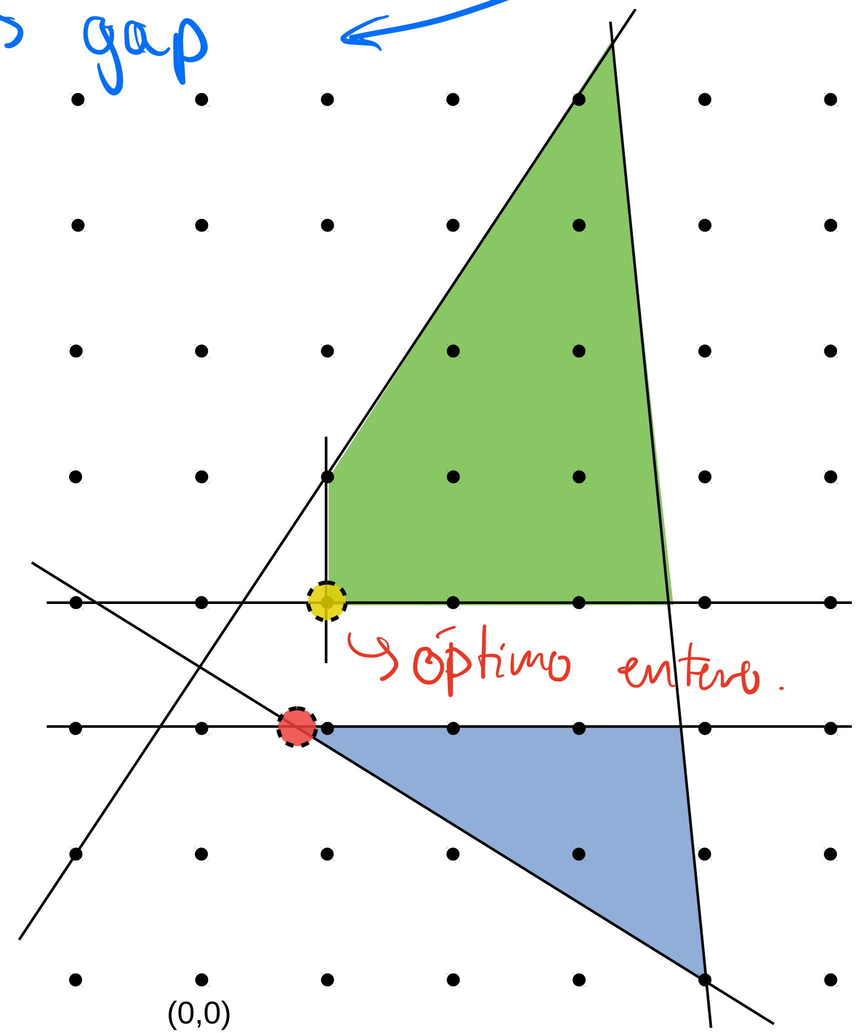


Branch and Bound

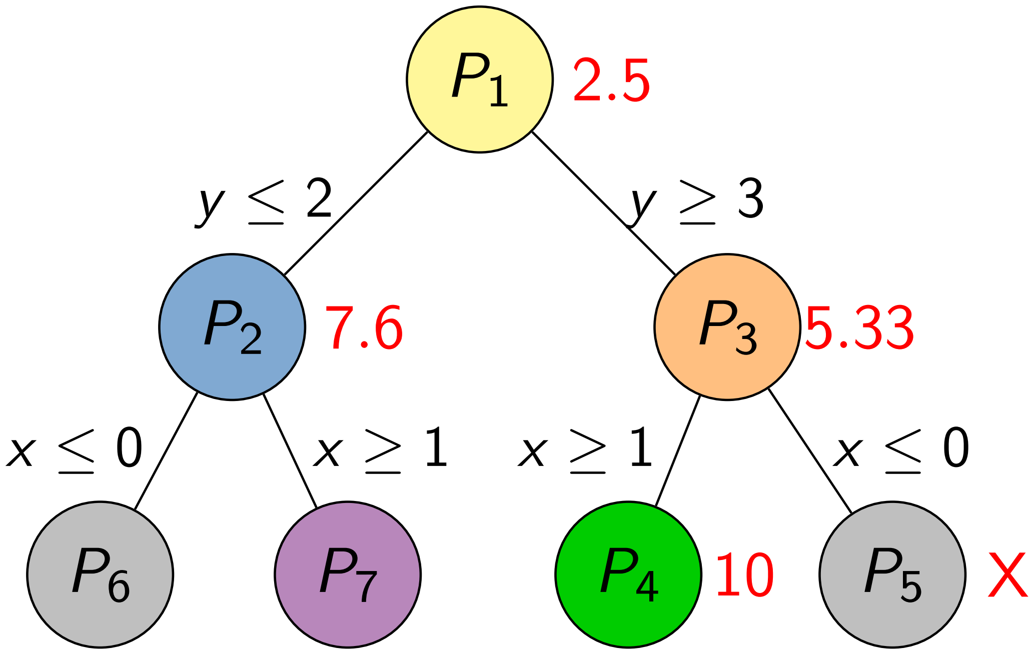
$10 \geq$ Valor óptimo ≥ 7.6

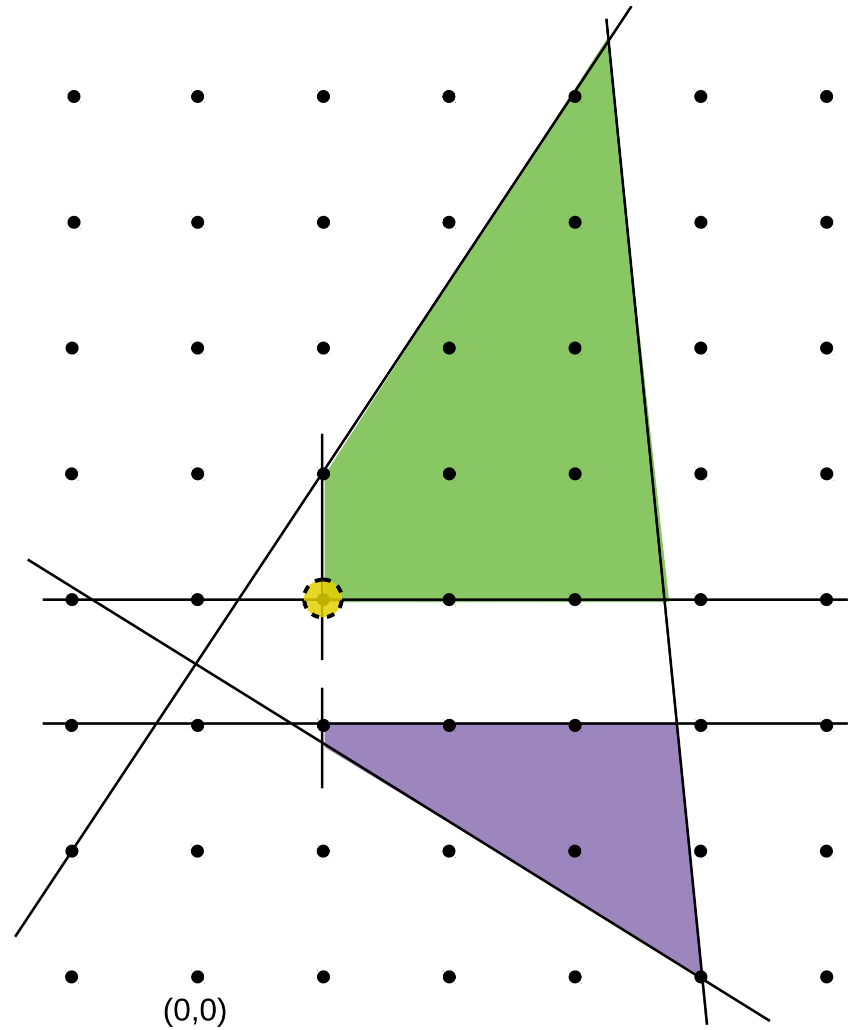
gap



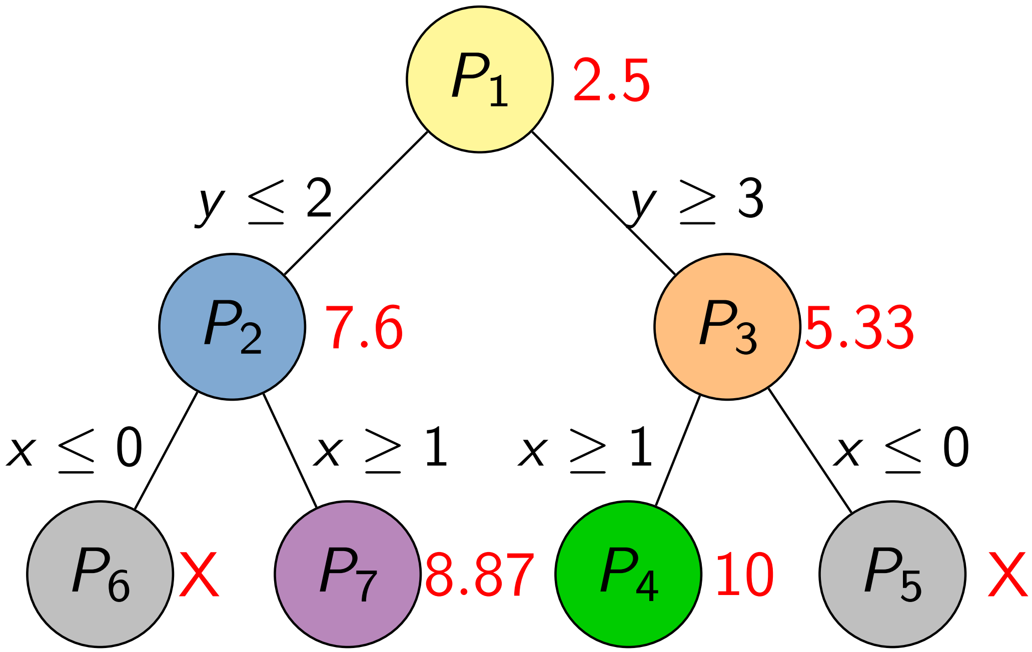


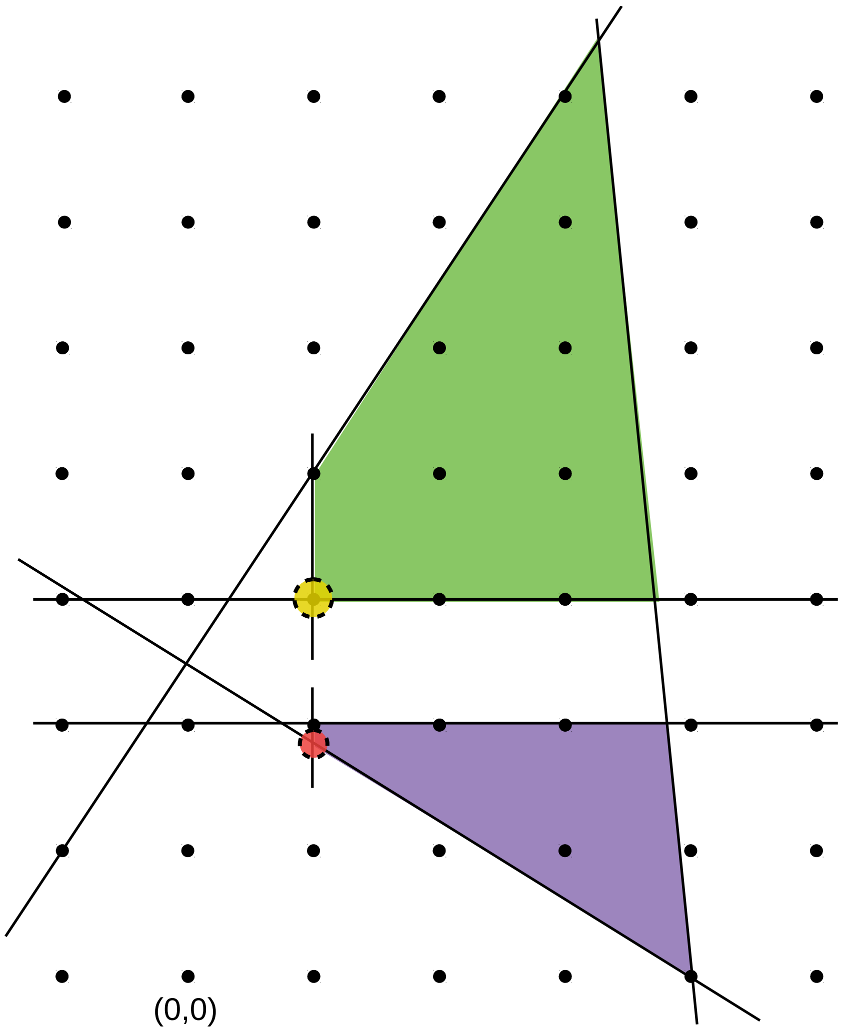
Branch and Bound



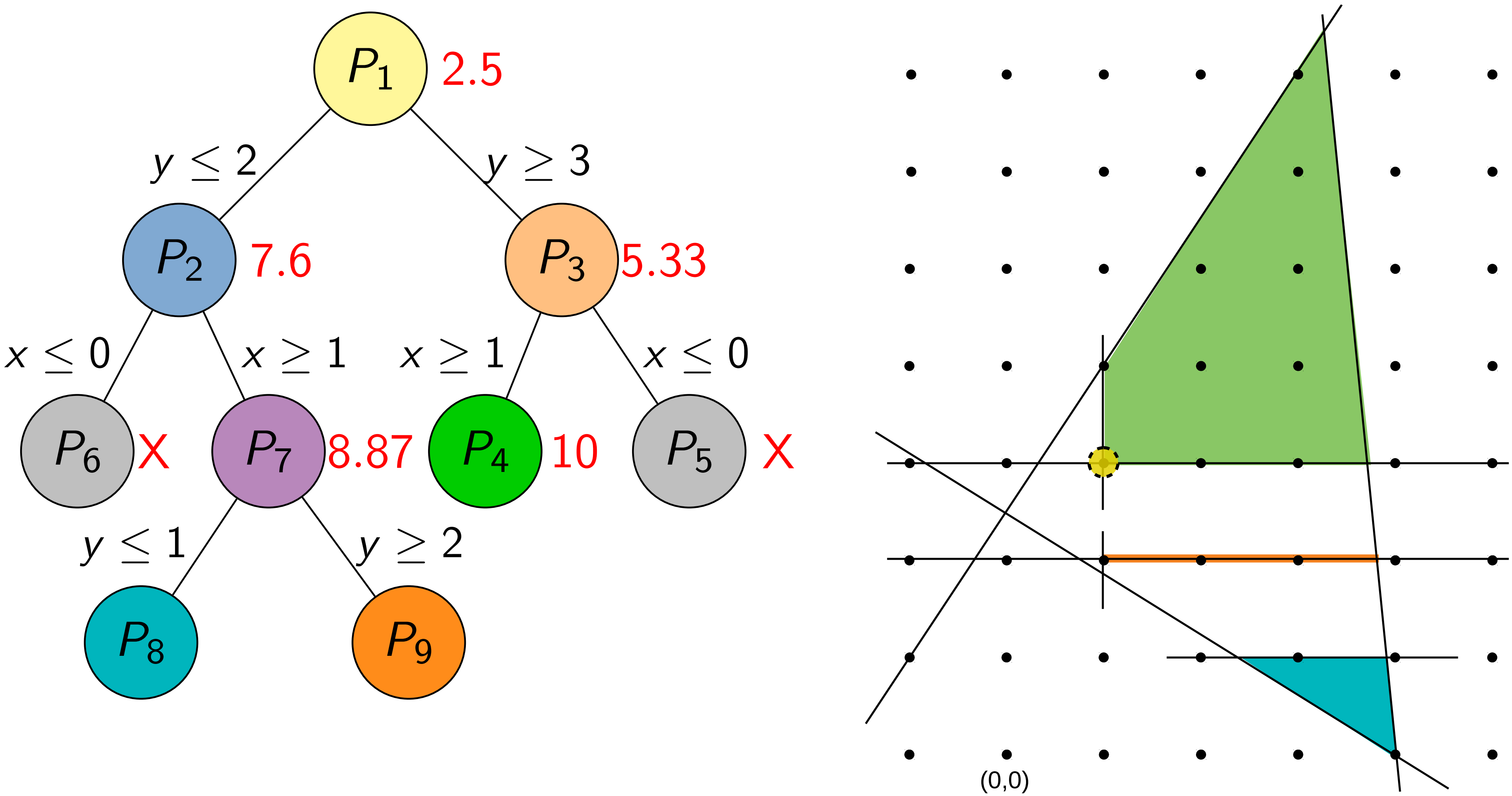


Branch and Bound

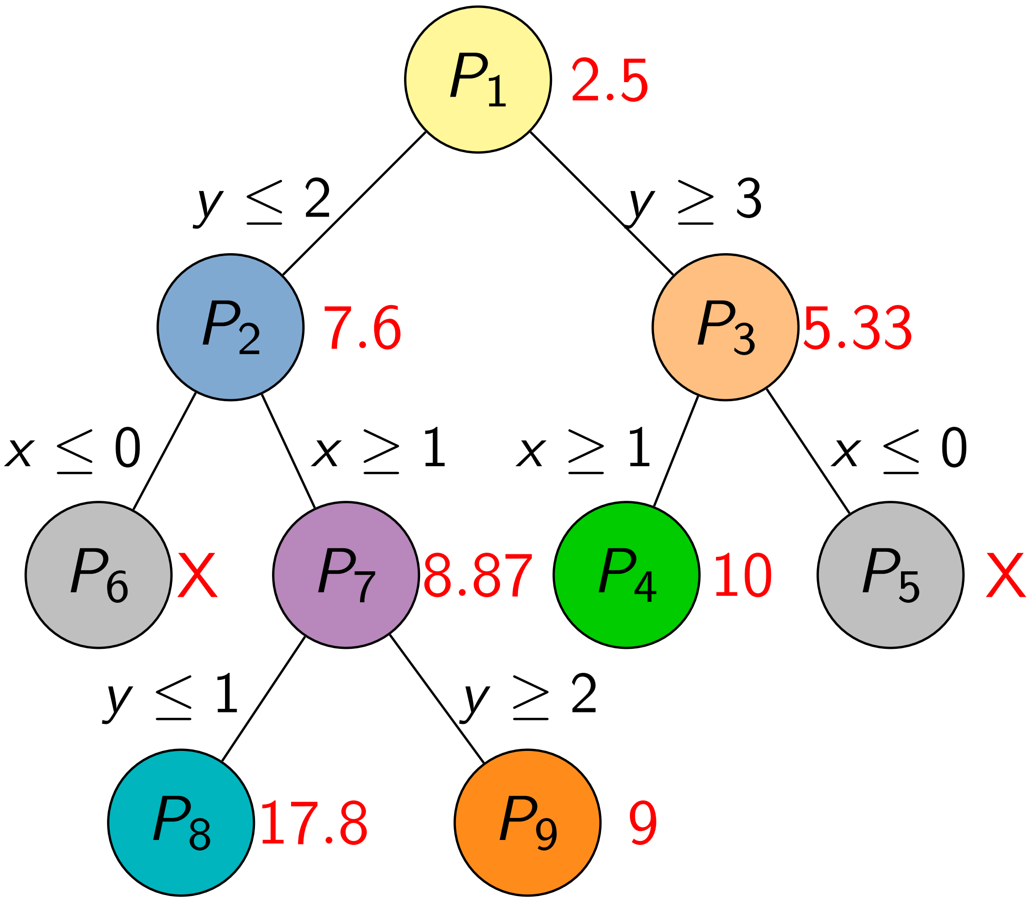


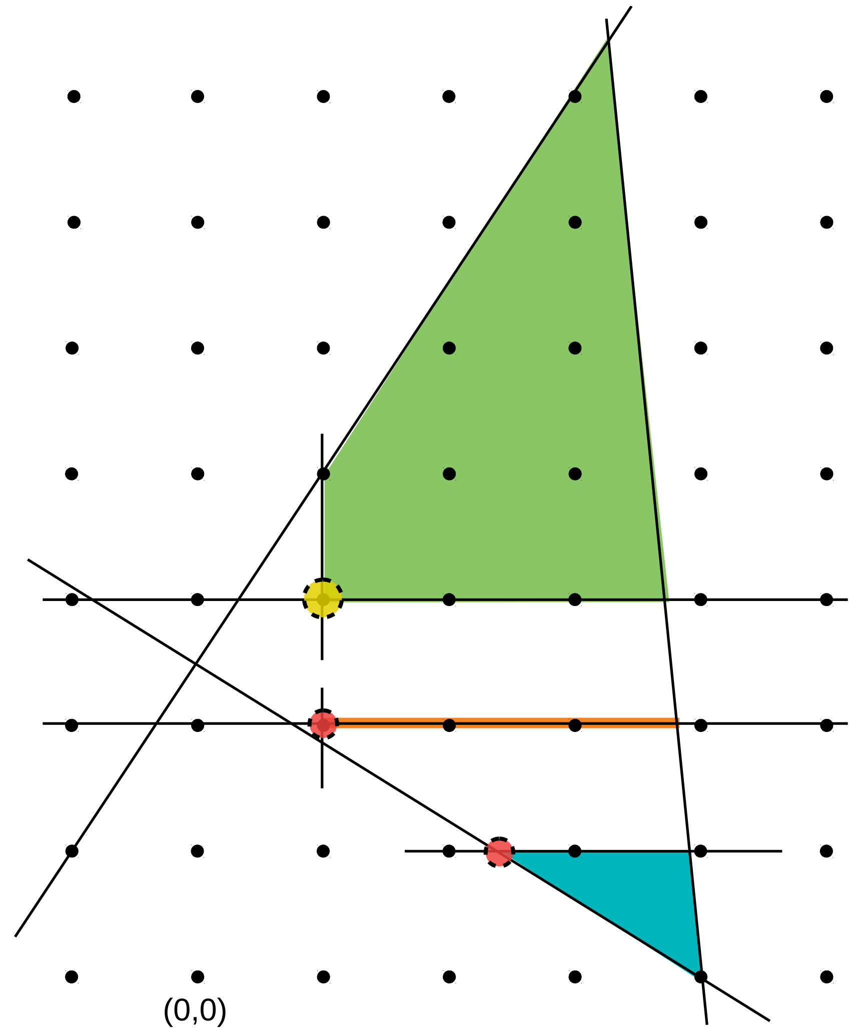


Branch and Bound



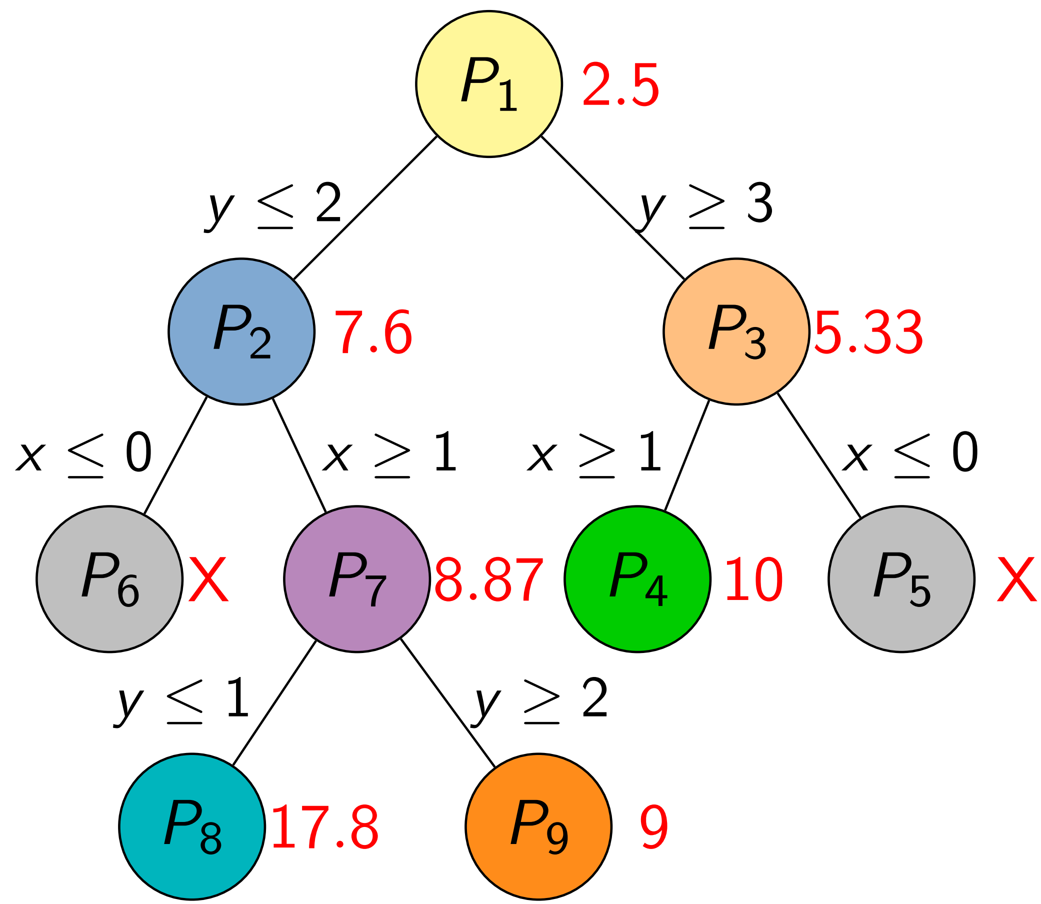
Branch and Bound

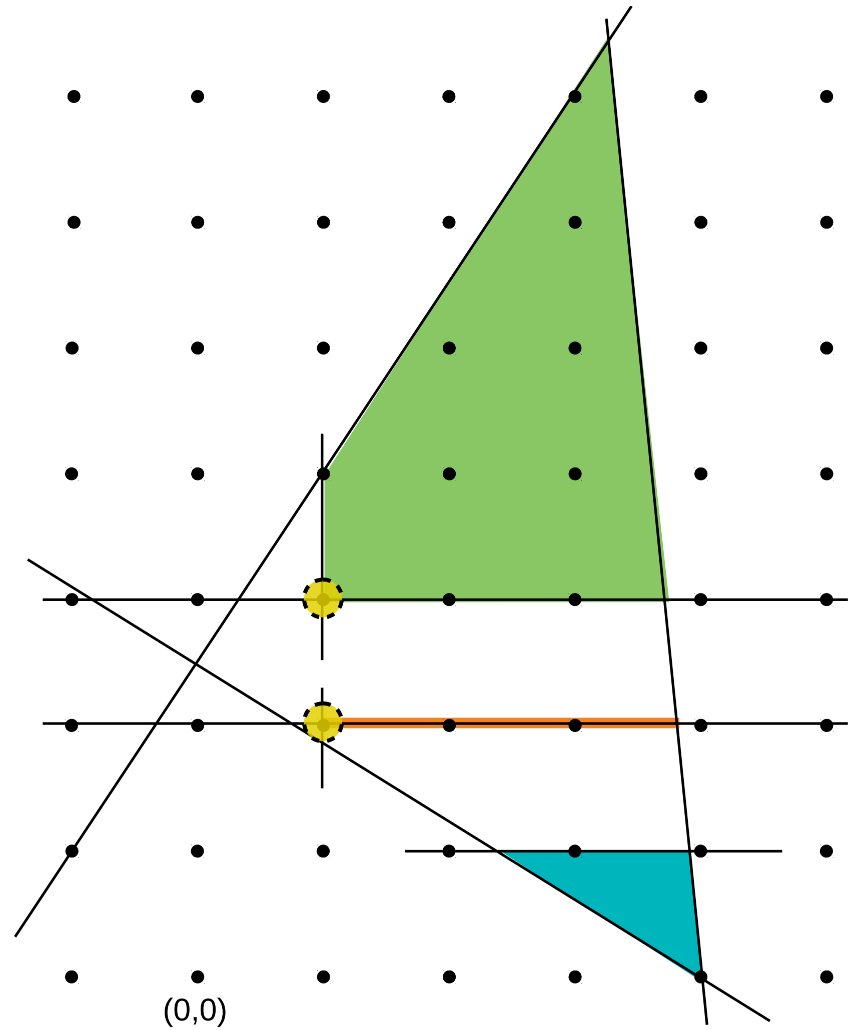




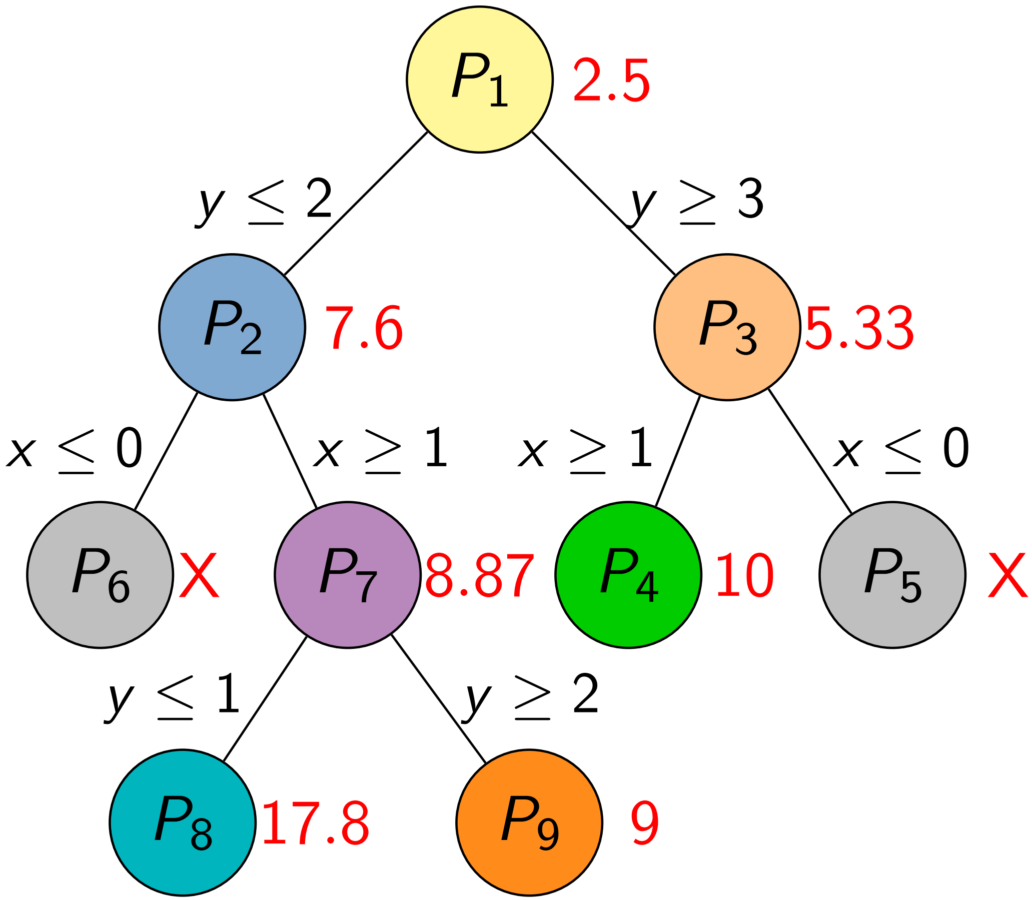
Branch and Bound

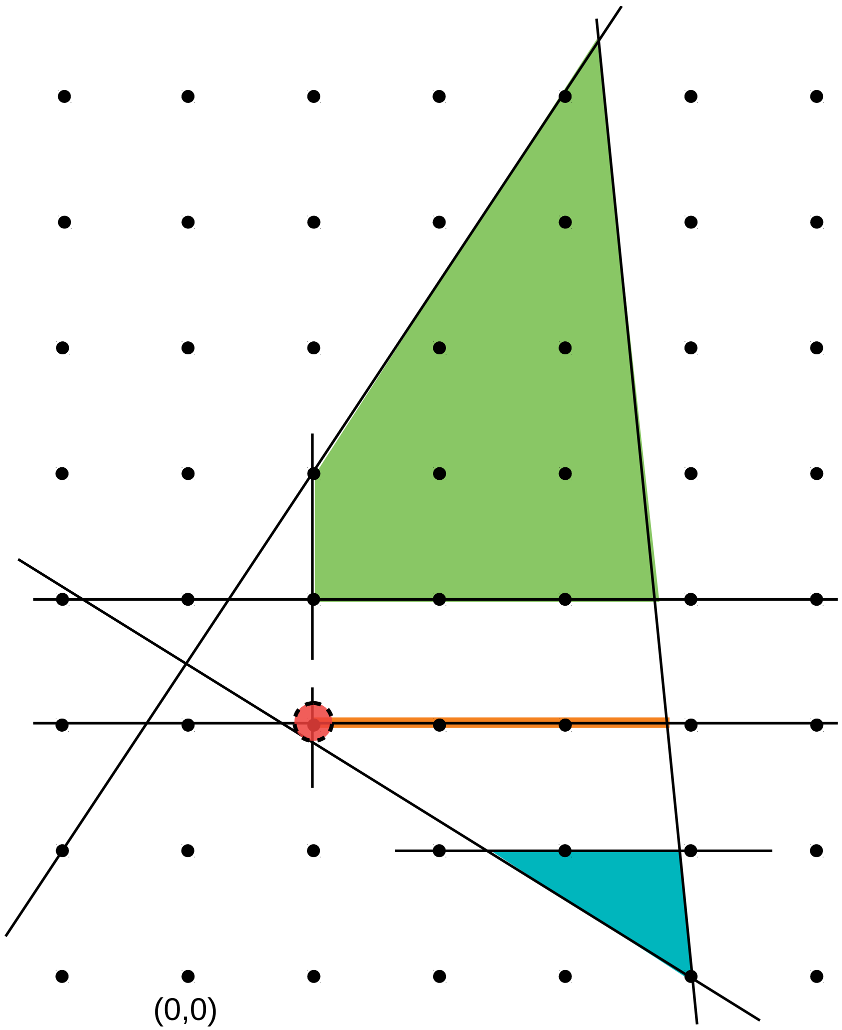
$q \geq$ Valor óptimo $\geq q$





Branch and Bound





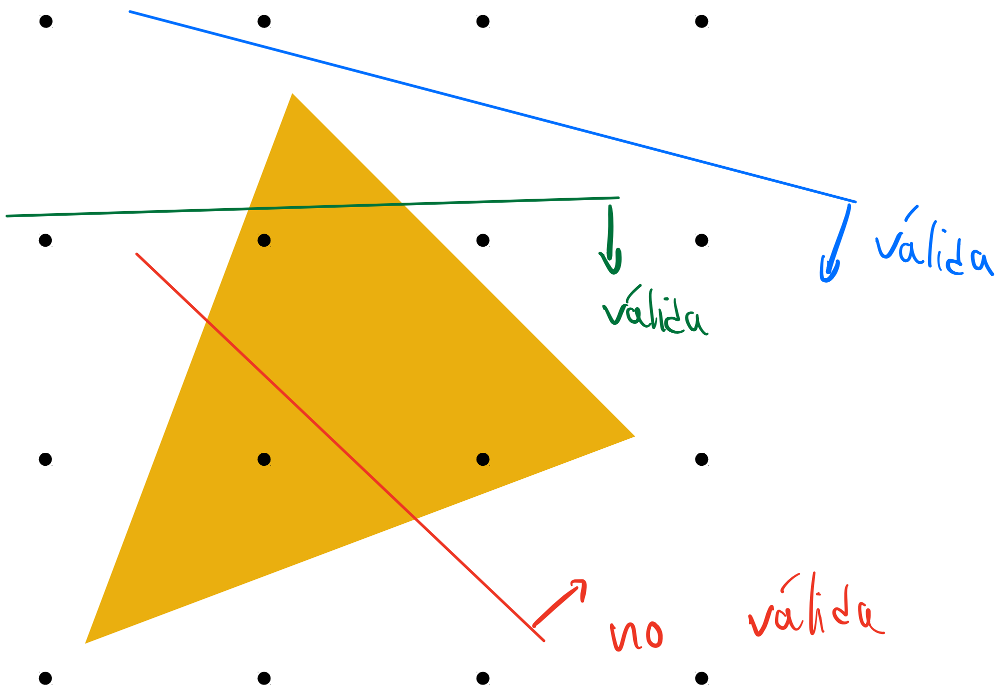
Planos cortantes

Desigualdades válidas

Consideremos la región factible de un problema entero:

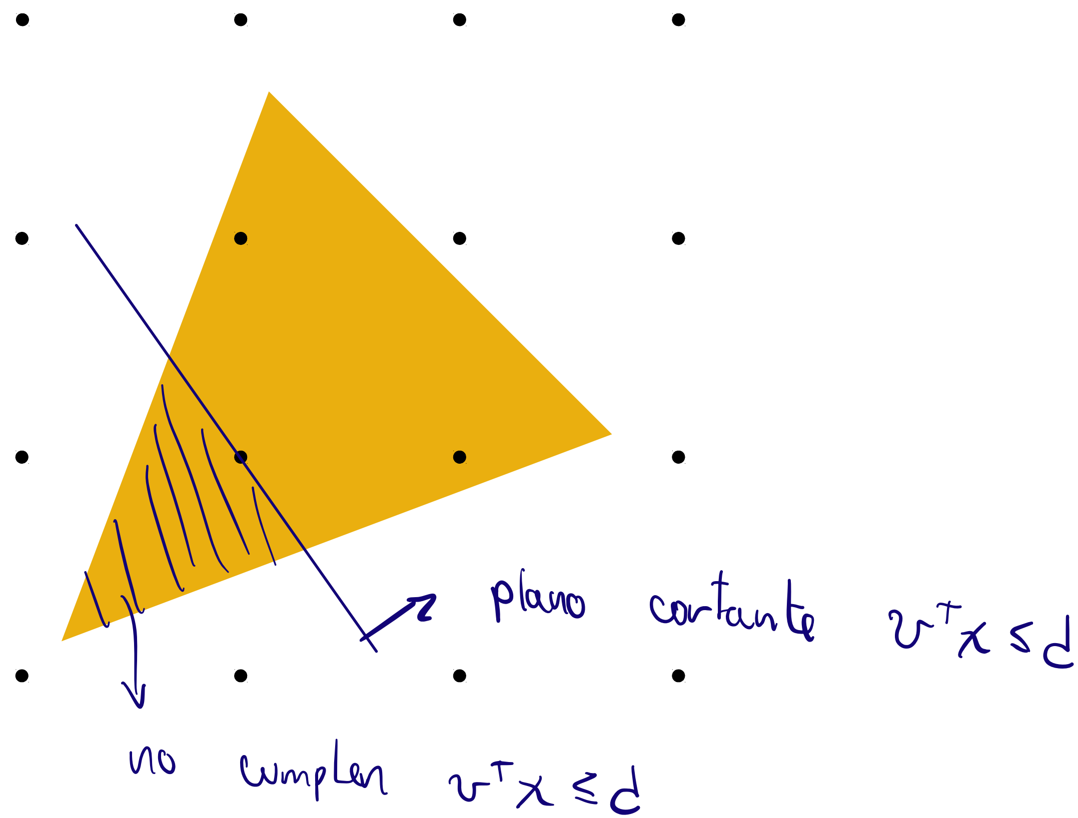
$$S = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b\}.$$

Una desigualdad válida es una desigualdad $v^\top x \leq d$ tal que todo elemento de S la cumple.



Planos cortantes

Llamemos P a la región factible de la relajación lineal. Una desigualdad válida se llama plano cortante (o simplemente "corte") si algún elemento $x \in P$ no la cumple.

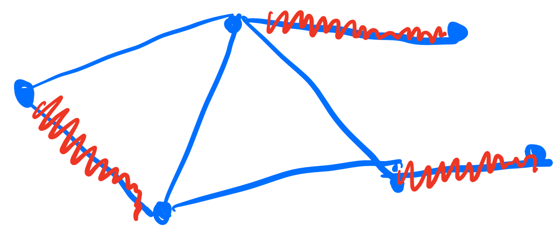


Ejemplo de desigualdades válidas

El problema de emparejamiento perfecto en un grafo no-dirigido $G = (V, E)$ se puede formular de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} & & \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} = 1 & \forall i \in V & \qquad (*) \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in E &
\end{aligned}
$$

G :

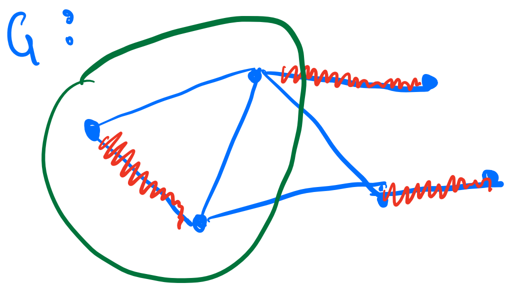


: emparejamiento perfecto.

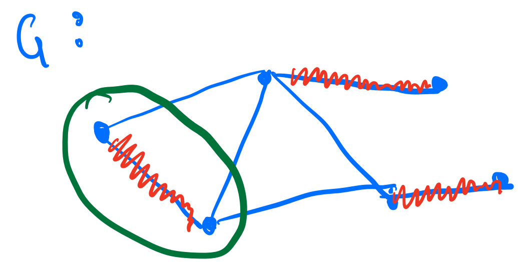
Ejemplo de desigualdades válidas

Mostrar que las siguientes desigualdades son válidas

$$\sum_{(i,j):i\in U, j\notin U} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall U \subseteq V,\ |U| \text{ es impar}$$



U impar: tiene un arco del emparejamiento saliendo



U par: no tiene arco del emparejamiento saliendo

Sea $U \subseteq V$, $|U|$ impar. Por contradicción supongamos que existe $\hat{x}$ factible para (*) tal que

$$\sum_{i\in U, j\notin U} \hat{x}_{ij} = 0$$

$\Rightarrow$ $\forall\, i \in U$, su pareja está en U, es decir
$\exists\, j(i) \in U$ tal que
$$\hat{x}_{i,j(i)} = 1$$

Esto no puede ser pues esto implica que $|U|$ es par.

$\rightarrow\leftarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i \in U,\, j \notin U} x_{ij} \geq 1$$ para todo x factible para $(*)$.