Modelamiento y Optimización

Clase 8

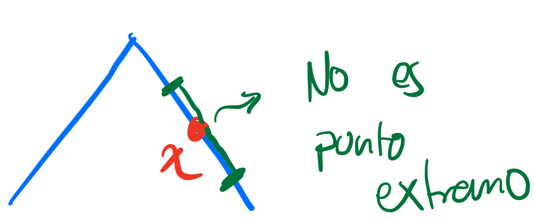
Gonzalo Muñoz

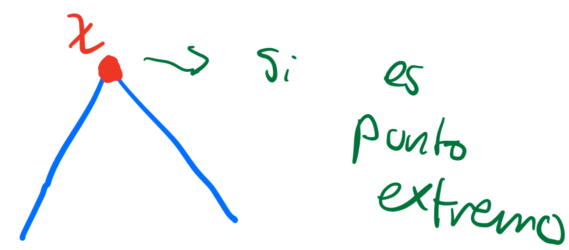
8 de Abril 2024

"Esquinas" de un poliedro

Definición

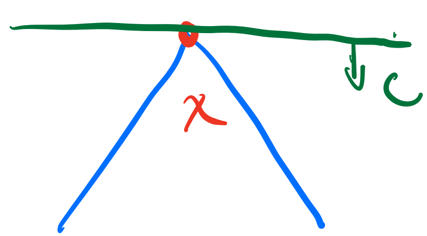
Sea P un poliedro. Un vector $x \in P$ es un *punto extremo* de P si es que no existen $y, z \in P$, ambos diferentes de x, y $\lambda \in]0,1[$, tales que $x = \lambda y + (1-\lambda) z$.

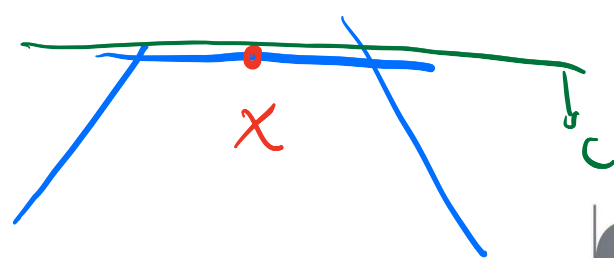




Definición

Sea P un poliedro. Un vector $x \in P$ es un vértice de P si existe c tal que $c^\top x < c^\top y$ para todo $y \in P$ tal que $y \neq x$.





Una noción más algebraica

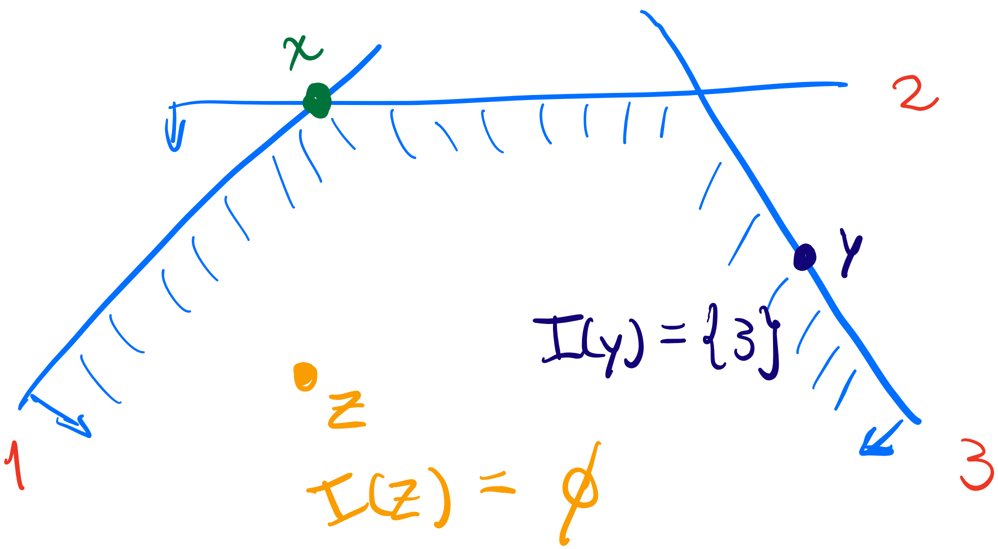
Las dos definiciones de arriba son geométricas. Pero será útil tener una noción más algebraica.

Definición

Sea $x \in P$. La restricción $i \in [m]$ es *activa* en x si $a_i^\top x = b_i$. Al conjunto de restricciones activas en x lo denotamos por

$$I(x) = \{i \in [m] \, : \, a_i^\top x = b_i\}.$$

$I(x) = \{1, 2\}$



$m = 3$

$[m] = \{1, 2, 3\}$

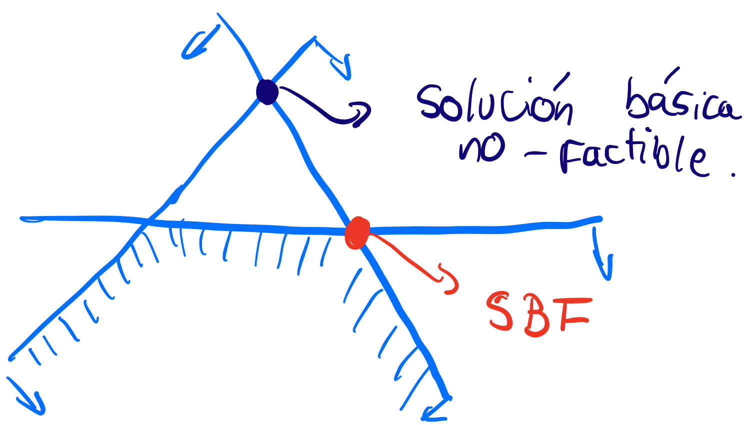
Una noción más algebraica

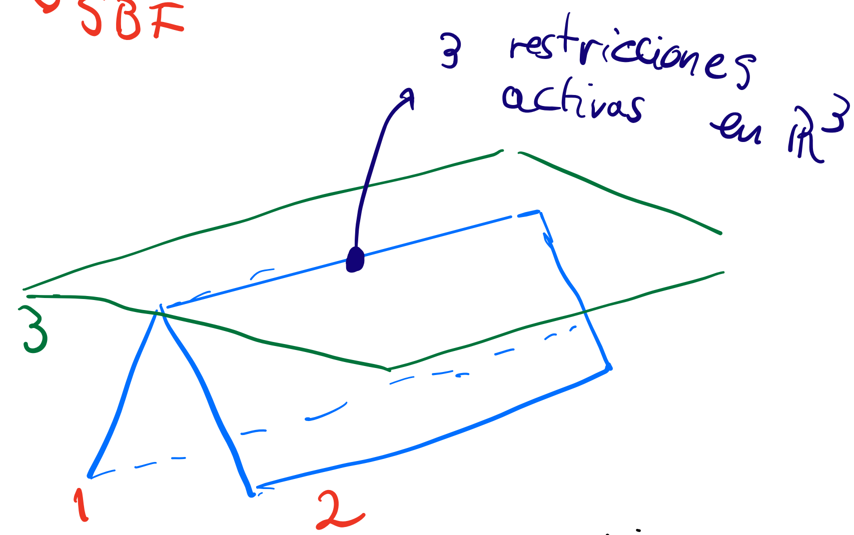
Definición

Considere un poliedro P en $\mathbb{R}^n$ y sea $x^* \in \mathbb{R}^n$.

1. El vector x^* es solución básica existen n restricciones linealmente independientes* en $I(x^*)$.
2. El vector x^* es solución básica factible si además de ser básica se tiene $x^* \in P$.

SBF





Este ejemplo no tiene "esquinas".

* los vectores $\{a_i\}_{i \in I(x^*)}$ son l.i

Teoremas fundamentales

Teorema

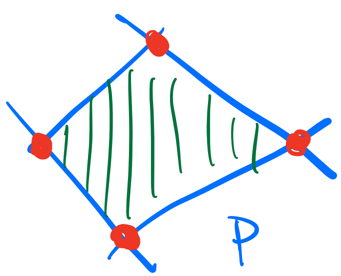
Sea $x \in P$ con P un poliedro. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

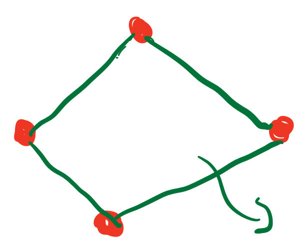
- *x es un vértice.*
- *x es un punto-extremo.*
- *x es una solución básica factible.*

Revisar demo en apuntes.

Teorema

Todo polítopo es la envoltura convexa de sus puntos extremos





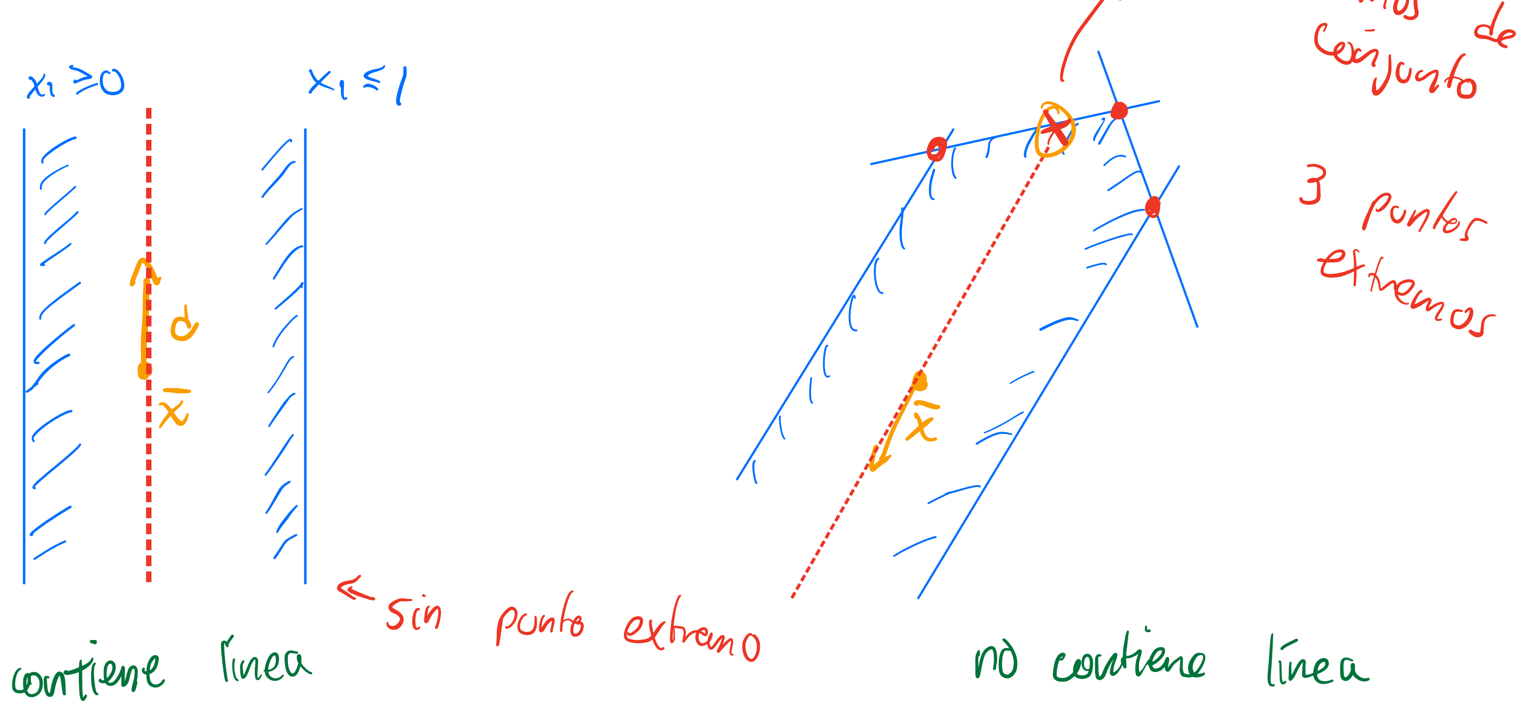
→ puntos extremos

Conv(puntos extr.) = P

Optimalidad en puntos extremos

Existencia de puntos extremos

Los puntos extremos no siempre existen:



Definición

Decimos que un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *contiene una línea* si existe $\bar{x}$ y $d \neq 0$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, x = \bar{x} + \mu d,\ \underbrace{\mu \in \mathbb{R}}_{\text{la línea se extiende hacia ambos extremos}} \right\} \subseteq C$$

Existencia de puntos extremos

Teorema

Suponga que el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$ *es no-vacío. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(a) *El poliedro* P *tiene al menos un punto extremo.*

(b) *El poliedro* P *no contiene una línea.*

Revisar demo.

Poliedro en forma estándar

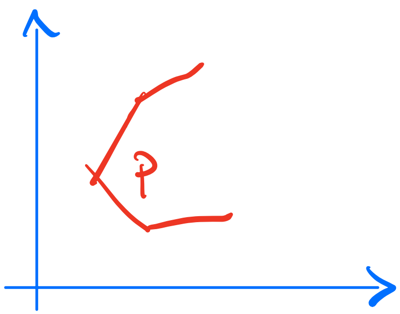
Corolario

Todo poliedro no-vacío en forma estándar:

$$P = \{x \,:\, Ax = b,\; x \geq 0\},$$

tiene al menos un punto extremo.

Dem: si P está en forma estándar, $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$ ortante positivo



sea $\bar{x} \in P$ arbitrario y $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ una dirección

el vector $\bar{x} + \mu d$ tendrá una componente negativa para μ suficientemente grande o pequeño.

$\Rightarrow$ $\bar{x} + \mu d$ sale de P

$\Rightarrow$ P no tiene línea.

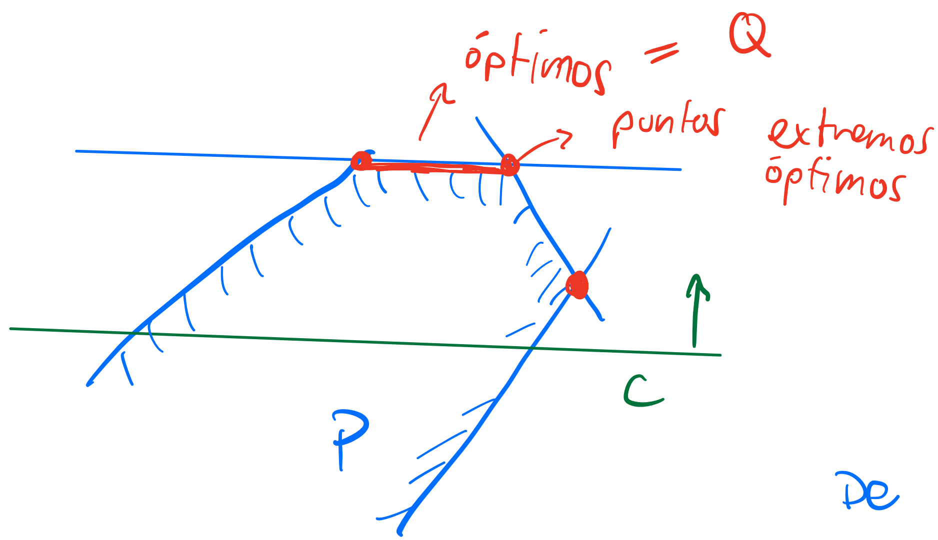
Puntos extremos óptimos

Teorema

Considere el problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x \\ \textit{sujeto a:} \quad & x \in P \end{aligned}$$

donde P tiene al menos un punto extremo. Luego, el mínimo del problema es $-\infty$ o bien existe una solución óptima que es punto extremo de P.



Dem: Si $\min c^T x$ s.a $x \in P$

es $-\infty$, nada que hacer.

De caso contrario existe un valor v^*

Puntos extremos óptimos

$$v^* = \min \; c^T x \quad \text{s.a} \quad x \in P$$

Definimos $Q = \{ x : x \in P \wedge c^T x = v^* \}$ poliedro con todas las sols. óptimas.

P tiene punto extremo $\Rightarrow$ P no tiene línea

$\overset{Q \in P}{\Longrightarrow}$ Q no tiene línea $\Rightarrow$ Q tiene punto extremo

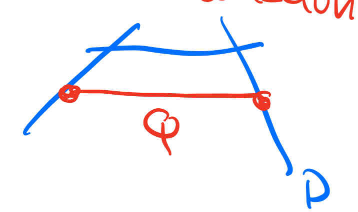
Falta: puntos extremos de Q son puntos extremos de P.

Por contradicción, sea $\hat{x}$ punto extremo de Q que no es punto extremo de P.

$\Rightarrow$ existen $y, z \in P$ y $\lambda \in]0,1[$ tales que

$$\hat{x} = \lambda y + (1-\lambda) z$$

contradicción



$$\Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{v^*}}{c^T \hat{x}} = \lambda \underbrace{c^T y}_{\geq v^*} + (1-\lambda) \underbrace{c^T z}_{\geq v^*} \geq v^*$$

$$\Rightarrow c^T y = c^T z = v^* \Rightarrow y, z \in Q$$

$\hat{x}$ es pto extremo de Q

Resumen

- Cuando hay un punto extremo, el problema es no-acotado (óptimo $-\infty$), o el óptimo se alcanza en algún punto extremo.
- Por lo tanto, basta restringir la búsqueda a puntos extremos.
- Si trabajamos con forma estándar, siempre hay un punto extremo.