Modelamiento y Optimización

Clase 27

Gonzalo Muñoz

5 de Julio 2024

Ejercicios

Ejemplo 1

Considere un problema lineal en forma estándar

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Calcule el dual Lagrangeano de este problema, y muestre que es equivalente al dual usual de programación lineal.

Escribiremos

$$A = \begin{bmatrix} - & a_1^T & - \\ - & a_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & a_m^T & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \min \quad c^T x \\ (\mu_i) \quad & a_i^T x - b_i = 0 \quad \forall i = 1, .., m \\ (\lambda_i \geq 0) \quad & -x_i \leq 0 \quad \forall i = 1, .., n \end{aligned}$$

Ejemplo 1

$$L(x,\lambda,\mu) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (a_j^T x - b_j) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (-x_i)$$

Función dual

$$d(\lambda,\mu) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda,\mu)$$

$$= \min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (\underbrace{a_j^T x}_{\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\cdot x_i} - b_j) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (-x_i)$$

$$= \min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{ji} x_i}_{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i^T \mu} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (-x_i) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j$$

Ejemplo 1

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} x_i \left(c_i + A_i^T \mu - \lambda_i \right) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j$$

$$= \begin{cases} -\sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j & \text{si } c_i + A_i^T \mu - \lambda_i = 0 \quad \forall i \\ -\infty & \text{si no} \end{cases} \Bigg\} \text{ Fn. dual}$$

queremos evitar esto

Problema dual :

$$\max_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu \text{ libre}}} d(\lambda, \mu) \iff \max \; -\sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j$$

$$\text{s.a} \quad c_i + A_i^T \mu - \lambda = 0 \quad \forall i$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\iff \max \; b^T y$$

$$\text{s.a} \quad A_i^T y \leq c_i \quad \forall i$$

$y = -\mu$

λ son variables de holgura.

Ejemplo 2 - Apuestas de Caballos (Examen 2015)

Deseamos apostar un monto x_0 en una carrera de n caballos. La probabilidad de que gane el i-ésimo caballo es $p_i > 0$ y el monto apostado por los demás jugadores es $s_i > 0$.

El premio P a repartir es una fracción $\alpha \in (0,1)$ del total de apuestas, es decir $P = \alpha\,(x_0 + S)$ con $S = \sum_{i=1}^{n} s_i$. Si apostamos $x_i \geq 0$ al i-ésimo caballo y éste gana, obtenemos un premio $Px_i/\,(s_i + x_i)$ proporcional a nuestra apuesta.

1. Formule un problema para determinar cómo repartir sus apuestas x_i entre los distintos caballos de forma de maximizar el valor esperado del premio.
2. Analice la existencia de solución óptima.
3. Escriba las condiciones de KKT e indique cómo encontraría la solución óptima. ¿Cuántos casos debería analizar?
4. Resuelva para el caso en que las apuestas s_i son proporcionales a p_i, vale decir $s_i = Sp_i$.
   ¿Le conviene apostar en este caso?

Ejemplo 2

1.- $$\max \sum_{i=1}^{n} \frac{P x_i}{s_i + x_i} \cdot p_i \quad \Big\} \text{ Premio esperado}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$$

$$x_i \geq 0$$

2.- El objetivo es una función continua y la región factible es compacta

$\Longrightarrow$ Existe solución

Weierstrass

3.- $$\min \; -\sum_{i=1}^{n} \frac{P x_i}{s_i + x_i} \cdot p_i \quad \Big\} \text{ Función convexa (propuesto)}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$$

$$-x_i \leq 0$$

$\Big\}$ satisface Slater $\left(\text{Ej: } x_i = \frac{x_0}{n} > 0 \right)$

Ejemplo 2

$$L(x,\lambda,\mu) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{P x_i}{S_i + x_i} \cdot P_i + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - x_0\right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(-x_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} L(x,\lambda,\mu) = -\frac{P \cdot P_k S_k}{(S_k + x_k)^2} + \mu - \lambda_k$$

KKT:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 \qquad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \qquad -\frac{P P_i S_i}{(S_i + x_i)^2} + \mu - \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

$$-x_i \leq 0 \quad \forall i \qquad \lambda_i x_i = 0 \quad \forall i$$

- Como el problema es convexo y satisface Slater, usando KKT encontraremos el óptimo.
- Para resolverlo, hay que analizar todas las combinaciones de $x_i = 0 \lor \lambda_i = 0$. Estas son 2^n.

Ejemplo 2

4.- En este caso: $-\dfrac{PS\,p_i^2}{(Sp_i+x_i)^2}+\mu-\lambda_i=0 \quad (*)$

- Sea

$I_0=\{i : x_i=0\}$. Si tomamos $j,k\notin I_0$, $(*)$ implica

$$\mu=\frac{\cancel{PS}\,p_j^2}{(Sp_j+x_j)^2}=\frac{\cancel{PS}\,p_k^2}{(Sp_k+x_k)^2} \Rightarrow \frac{x_j}{p_j}=\frac{x_k}{p_k} \quad \forall j,k\notin I_0$$

independiente de i

- $$x_0=\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i\notin I_0}x_i=\sum_{i\notin I_0}\frac{x_k p_i}{p_k}=\frac{x_k}{p_k}\cdot\sum_{i\notin I_0}p_i$$

$k\notin I_0$ fijo cualquiera

Despejando

$$\Rightarrow \boxed{x_k=\frac{x_0\,p_k}{\bar{P}}}$$

Solución

con $\bar{P}=\sum_{i\notin I_0}p_i$

ojo! I_0 depende de x

• "−Utilidad" :

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{P x_i}{S_i + x_i} \cdot p_i = -\sum_{i \notin I_0} \frac{P}{1 + \frac{S \cdot \bar{p}}{x_0}} \cdot p_i = \underbrace{\frac{-P \quad x_0}{\frac{x_0 + S}{\bar{p}}}}$$

no depende de i

→ Esto último ~~crece~~ con $\bar{p}$, y $\bar{p}$ es más grande cuando $I_0 = \phi$

$\Rightarrow$ Conviene $I_0 = \phi$, es decir $\bar{p} = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Con esto, "− utilidad" es

$$-\frac{P x_0}{x_0 + S} = -\frac{\alpha \cancel{(x_0 + S)}\, x_0}{\cancel{x_0 + S}} = -\alpha x_0$$

Por lo tanto la utilidad esperada es

$$\underbrace{\alpha x_0 < x_0}_{\text{No conviene apostar.}} \quad (\alpha < 1)$$

Ejemplo 3 (Examen 2014)

Considere el siguiente problema (P):

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} & 4x_1 + x_2 \leq 28 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{array}$$

Usando una figura, responda las siguientes preguntas:

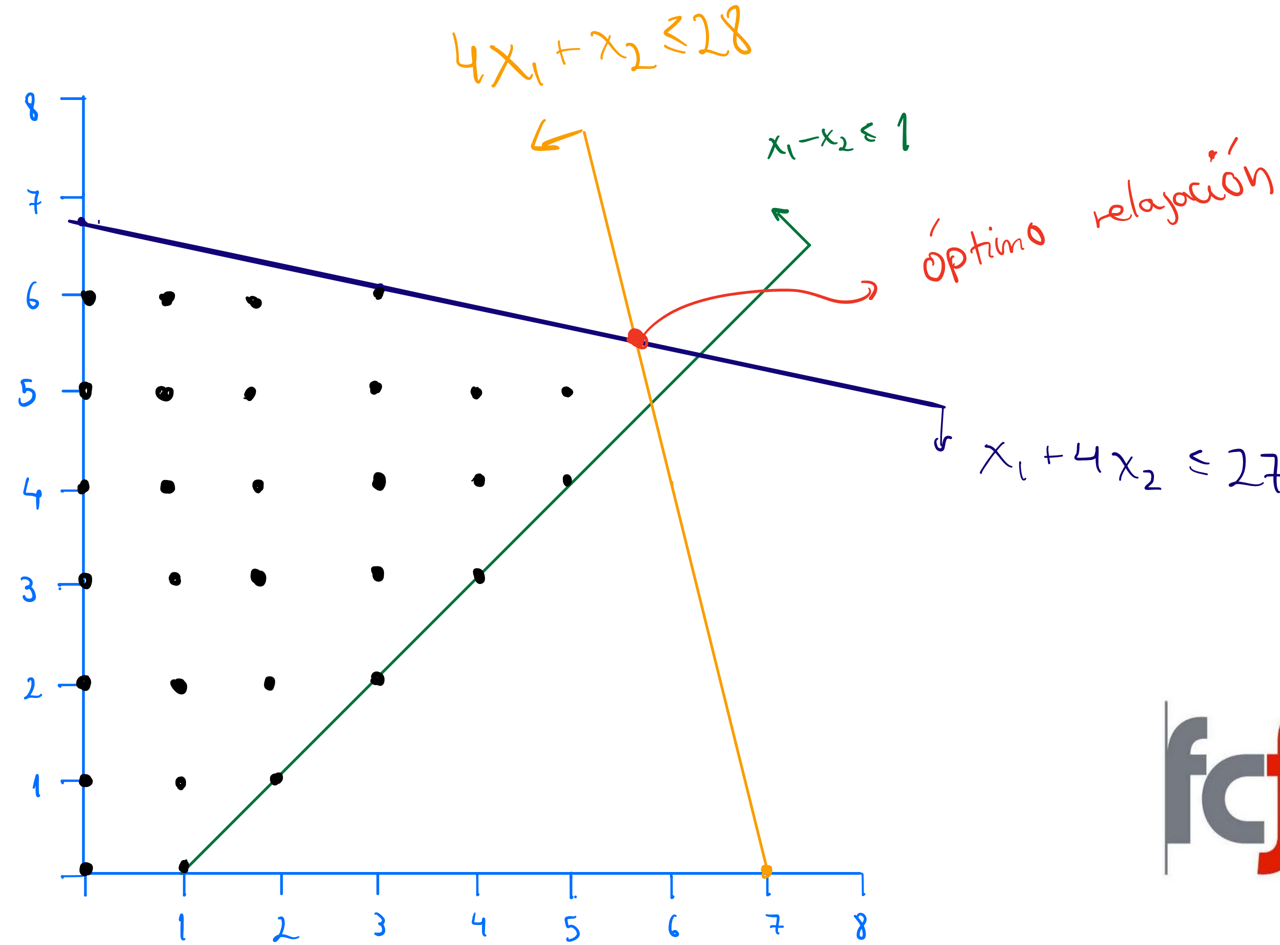
1. ¿Cuál es el valor óptimo de la relajación lineal?
2. ¿Cuál es la envoltura convexa del conjunto de soluciones factibles de (P)?
3. Proponga un corte de Gomory que elimine la solución de la relajación lineal inicial.
4. Resuelva el problema por Branch and Bound (resuelva las relajaciones lineales gráficamente)

Ejemplo 3

Puede usar que

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} & 0 \\ -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

1.-



Ejemplo 3

El óptimo es la solución de

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 28 \\ x_1 + 4x_2 &= 27 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{15}(4\cdot 28 - 27) \\ &= \frac{17}{3} \\ x_2 &= \frac{1}{15}(-28 + 4\cdot 27) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

2.- Del dibujo, vemos que para la envoltura tenemos que encontrar la recta que une a $(3,6)$ y $(5,5)$.

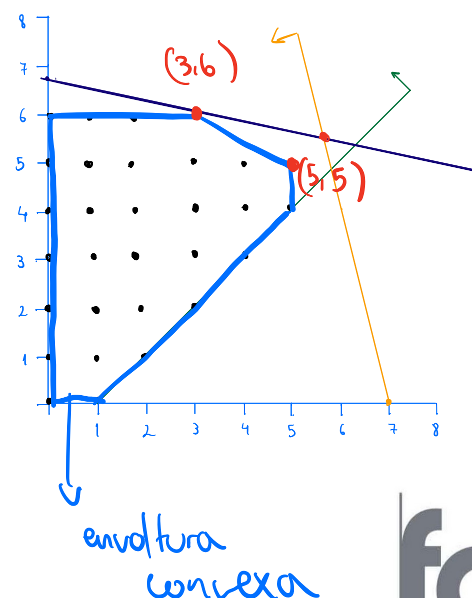
Esta es:

$$x_1 + 2x_2 = 15$$

La envoltura convexa es:

$$\begin{cases} x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(Nota: analizar esto con calma)



Ejemplo 3

3.- La región factible de la relajación en forma estándar:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + s_1 &= 28 \\ x_1 + 4x_2 + s_2 &= 27 \\ x_1 - x_2 + s_3 &= 1 \\ x, s &\geq 0 \end{aligned}$$

Base óptima: $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-1}{15} & 0 \\ \frac{-1}{15} & \frac{4}{15} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{-1}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x_1 + \frac{4}{15}s_1 - \frac{1}{15}s_2 = \frac{17}{3}$$

$$x_2 - \frac{1}{15}s_1 + \frac{4}{15}s_2 = \frac{16}{3}$$

$$s_3 - \frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{2}{3}$$

De acá podemos sacar 3 cortes de Gomory:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - s_2 &\leq 5 \\ x_2 - s_1 &\leq 5 \\ s_3 - s_1 &\leq 0 \end{aligned}\right\}$$ todos cortan la solución de la relajación.

4.-