

# Modelamiento y Optimización

## Clase 9

Gonzalo Muñoz

12 de Abril 2024



# SBF en forma estándar

## Ejemplo

Supongamos que tenemos el siguiente problema en forma estándar:

$$\begin{aligned} & \min \quad 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a: } & \left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_5 = 3 \end{array} \right\} \quad \text{Son 3 i. (verificar)} \\ & Ax = b \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

¿Cuántos ceros debería tener una SBF?

- Debe tener 5 restricciones i.i activas.
  - 3 de ellas deben venir de  $Ax = b$
  - las 2 restantes deben venir de  $x_i \geq 0$
- ∴ Una SBF debe tener al menos 2 ceros!

# SBF en forma estándar

Ahora consideremos un poliedro en forma estándar genérico

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

A es de  $m \times n$   
 $m [$   $n]$

Y supongamos que **todas las filas de A son linealmente independientes.**

¿Cómo podemos encontrar  $n$  restricciones activas linealmente independientes?

$$Ax = b \quad \} \quad m \quad \text{restricciones} \quad |.$$

¿Cuántas faltan?  $n - m$  restricciones

$\Rightarrow$  Una SBF tiene al menos  $n - m$  ceros !

Sea  $\hat{x}$  una SBF, supongamos que los ceros están al final

$$Ax = b \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & & & & & \\ A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} & \dots & A_n \\ \hline 1 & 1 & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right] = b$$

$\underbrace{B}_{B}$



# Base

Queremos que  $B \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = b$  tenga sol. única.  
 $B$  necesita todas sus columnas l.i. ( $m$ )

## Definición

Dado  $\{Ax = b, x \geq 0\}$  y un subconjunto de columnas  $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$  que son linealmente independientes, decimos que la matriz

$$B = [A_{i_1} \ A_{i_2} \ \cdots \ A_{i_m}]$$

es una **base de  $A$** . Observe que una base es **invertible**. Toda solución básica factible tiene una base asociada.



# Receta para encontrar una solución básica $\hat{x}$

1. Identificar una base. En el ejemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{l} \text{mín } 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a: } \\ A\hat{x} = b \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Si tomamos las columnas correspondientes a  $\{x_1, x_3, x_5\}$  como base

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Fijar  $\hat{x}_i = 0$  en las columnas que no están en la base.

$$\hat{x}_2 = 0, \quad \hat{x}_4 = 0$$



# Receta para encontrar una solución básica $\hat{x}$

3. Resolver  $A\hat{x} = b$ . ¿Es la solución factible?

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 6 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right)$$

$\hat{x}_2 = \hat{x}_4 = 0$

$\Rightarrow$

$$\left( \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_5 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 6 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_5 \end{array} \right) = \underbrace{\left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_{B^{-1}} \left( \begin{array}{c} 6 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right)$$
$$= \left( \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right)$$

solución básica

$$\hat{x} = (2, 0, 0, 0, 3) \geq 0 \Rightarrow \text{es SBF}$$

# Comentarios extra

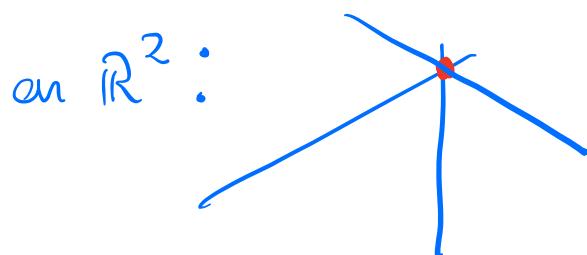
## Definición

Considere un sistema en forma estándar  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$ , y una base  $B = [A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_m}]$ . Decimos que las variables  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$  son las variables *básicas* asociadas a la base  $B$ . Al resto de las variables se les llama *no-básicas*

## Definición

Si una solución básica tiene más de  $n$  restricciones activas se llama *degenerada*. En el caso de un poliedro en forma estándar esto corresponde a tener *más de  $n - m$  ceros*.

En el ej. anterior teníamos 3 ceros  
 $\gamma \quad n - m = 5 - 3 = 2 \quad \Rightarrow$  degenerada.



# Resumen

Para encontrar una solución básica:

1. Identificar una base  $B$ . Con esto definir variables básicas y no básicas.
2. Fijar las variables **no-básicas en 0**.
3. Encontrar el valor de las variables básicas resolviendo el sistema  $A\hat{x} = b$ .
4. Si  $\hat{x} \geq 0$ , entonces la solución básica es **factible**. Si hay **más de  $n - m$  ceros**, se le llama solución **degenerada**.



# SBF adyacente

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\min -x_2 - 3x_3$$

$$\text{sujeto a: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

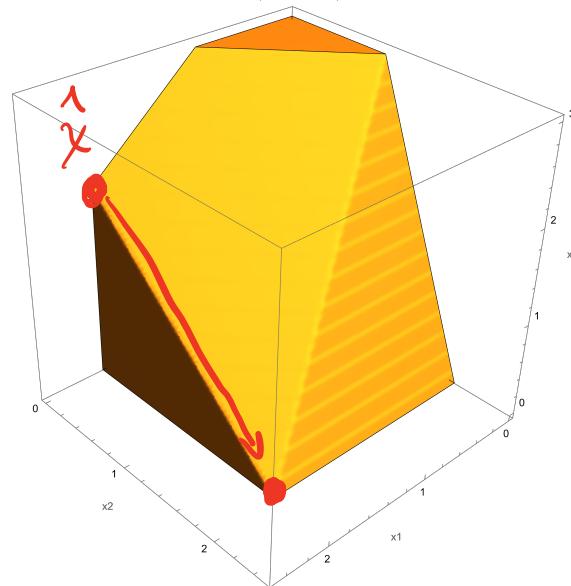
$$3x_2 + x_3 + x_5 = 6$$

$$x_1 + x_6 = 2$$

$$x_3 + x_7 = 3$$

$$x_1, \dots, x_7 \geq 0$$

Plot de  $x_1, x_2, x_3$ :



Ahora supongamos que tenemos una SBF  $\hat{x}$  (con una base determinada) y que nos queremos mover a una **SBF adyacente**:

$$\hat{x} + \delta d, \quad \delta > 0$$

¿Cómo hacemos esto intuitivamente?

Movernos satisfaciendo  $n-1$  restricciones que eran activas en  $\hat{x}$  (una línea)

# Direcciones básicas

Para que la dirección sea factible:

$$A\hat{x} = b$$

↗

$$A(\hat{x} + \delta d) = b \Rightarrow Ad = 0.$$

Además, queremos que **una** de las restricciones  $x_j = 0$  deje de ser activa, por lo que escribiendo  $d = (d_B, d_N)$ , con  $d_N = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  obtenemos:

$$Ad = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} B & | & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} = 0$$

↑  
básicas      ↑  
no-básicas

↗      ↗      ↗  
componente j.  
 $\hat{x}_N + \delta d_N$   
Va a cambiar  
1 componente.

columna j de A.

↗

$$\Rightarrow Bd_B + Nd_N = 0 \Rightarrow Bd_B + Aj = 0$$
$$d_B = -B^{-1}Aj$$

La dirección es

$$d = (d_B, d_N) = (-B^{-1}Aj, 0, 0, \dots, 1, 0)$$

↑      Componente j  
Dirección Básica en componente j.