Modelamiento y Optimización

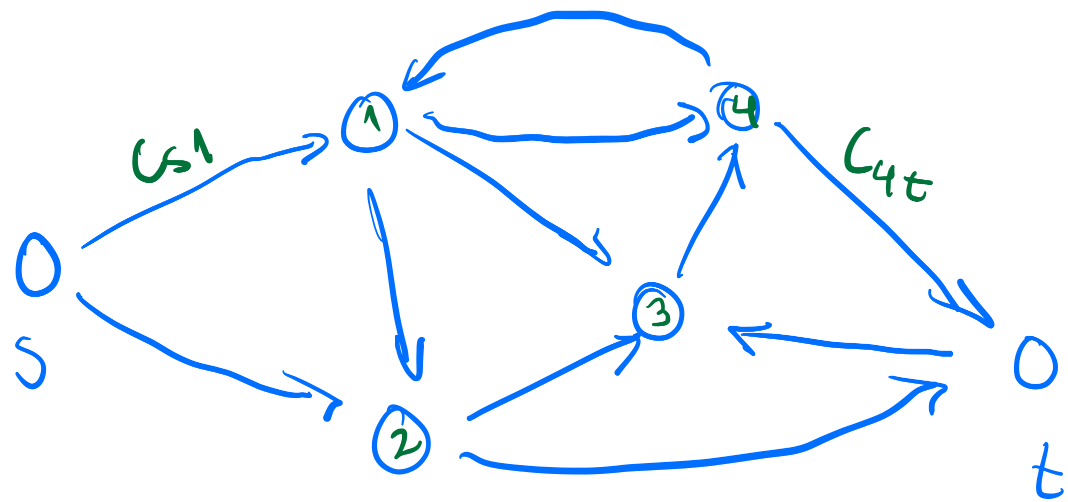
Clase 5

Gonzalo Muñoz

25 de Marzo 2024

El camino más corto

Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, longitudes $c_e \geq 0$ para todo $e \in A$, y dos nodos $s, t \in V$, nos gustaría encontrar un camino de s a t cuyo largo sea lo más pequeño posible.



como Flujo costo mínimo:

costos = longitudes c_e

capacidades: $l_e = 0$

$u_e = 1$

Nodos oferta / demanda: $b_s = 1$

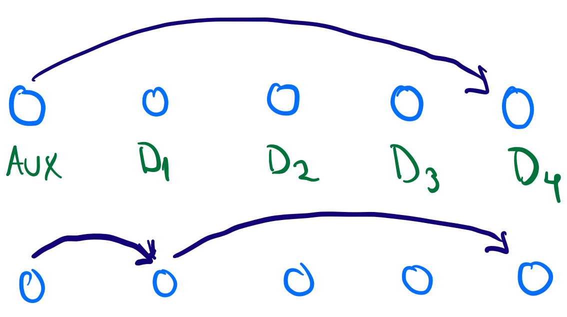
$b_t = -1$

envío 1 unidad de s a t

El camino más corto (Ejemplo)

Una compañía produce piezas de acero con n largos diferentes $L_1 < \cdots < L_n$. La demanda es D_i para cada largo L_i, y la companía tiene la opción de satisfacer la demanda con barras más largas, pero deben ser todas iguales. Para producir cada pieza de largo L_i la compañía tiene un costo $\hat{c}_i$, y además cada largo tiene un costo fijo (set-up) f_i.

Formular el problema de decidir cómo satisfacer la demanda como un problema del camino más corto.

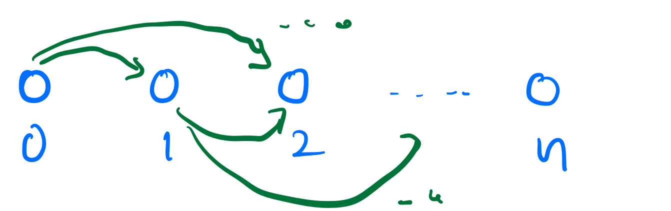


: Demandas D_1, D_2, D_3, D_4 se satisfacen con L_4

: D_1 con L_1

D_2, D_3, D_4 con L_4

Sol: Construimos grafo



todos los arcos (i,j)

$i < j$

Representando "Largo L_j satisface $D_{i+1}, D_{i+2}, \ldots, D_j$"

→ Camino de 0 a n es un patrón de cómo satisfacer demanda.

$$\text{Costo } \quad c_{ij} = f_j + \hat{c}_j \cdot \underbrace{\sum_{k=i+1}^{j} D_k}_{\text{costo de demandas ``intermedias''}}$$

Problema de secuenciamiento

Tenemos m máquinas y n trabajos. Cada trabajo j requiere $p_{j,k}$ unidades de tiempo en la máquina k (los trabajos pasan por todas las máquinas). El orden de las máquinas cada trabajo j está predeterminado: $j(1), j(2), \ldots, j(m)$. Los trabajos no pueden ser interrumpidos (no preemption). Nos gustaría secuenciar estos trabajos de manera de minimizar el promedio de tiempos de finalización de trabajos.

Tarea 1:

$1(1) = 1 \rightsquigarrow 2$ unidades de tiempo

$1(2) = 2 \rightsquigarrow 1$ unidad

$1(3) = 3 \rightsquigarrow 3$ unidades

Primera máquina de T_1

máquinas

$p_{j,k}$

Tarea 2:

$2(1) = 3 \rightsquigarrow 2$ unidades

$2(2) = 1 \rightsquigarrow 3$ unidades

$2(3) = 2 \rightsquigarrow 1$ unidad

Máquina 1	T_1	T_1		T_2	T_2	T_2			
M_2				T_1				T_2	
M_3		T_2	T_2		T_1	T_1	T_1		

$\longrightarrow$ tiempo

T_1 termina en 7

T_2 " en 8

Finalización promedio 7.5

Problema de secuenciamiento

Variables: t_{ik} = tiempo en el que trabajo i termina en máquina k.

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si trabajo } i \text{ va antes que el trabajo } j \text{ en máquina } k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\min \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_{i,\underbrace{i(m)}_{\text{última máquina de } i}}$$

$$t_{i,i(k)} \geq t_{i,i(k-1)} + P_{i,i(k)} \quad \forall i = 1,..,n \quad \forall k = 1,..,m$$

} Entre el término del trabajo i en la máquina $i(k)$ e $i(k-1)$ debe haber un "lag"

$$t_{i,i(0)} = 0$$

} "Máquina ficticia para la desigualdad anterior"

$$t_{j,k} \geq t_{i,k} + P_{j,k} - M(1 - x_{ijk}) \quad \forall i = 1,...,n \quad \forall j = 1,..,n \quad \forall k = 1,...,m$$

↳ Basta con $M = \sum_{\substack{i=1,..,n \\ k=1,..,m}} P_{ik}$

} Si i va antes que j en k, entonces i debe esperar a que j termine.

Si no, el big-M hace que la restricción no haga nada

$$x_{ijk} + x_{jik} = 1$$

} ↳ i va antes que j, o j va antes que i

$$t_{ik} \geq 0$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}$$

Problema de secuenciamiento II (Propuesto)

Tenemos m máquinas idénticas y un conjunto de trabajos J que debe ser procesado en *una* de estas máquinas. Cada trabajo j posee:

1. Tiempo de procesamiento $p_j \geq 0$
2. Tiempo de comienzo (release date) $r_j \geq 0$
3. Fecha de vencimiento (deadline) $d_j \geq 0$

El objetivo es verificar si existe un programa para estos trabajos en estas máquinas de forma que se trabaje cada trabajo j por exactamente p_j unidades de tiempo durante $[r_j, d_j)$. No hay un objetivo a optimizar.

Hint: se recomienda definir $x_{i,k} \in \{0,1\}$ que indique si un trabajo i se asigna a una máquina k, y además $y_{i,j,k} \in \{0,1\}$ que indique si el trabajo j se procesa después del trabajo i en la máquina k.

Otra opción: discretizar el tiempo, y definir variables $z_{i,k,t} \in \{0,1\}$ que indiquen si el trabajo i se procesa en la máquina k en el tiempo t.