

Modelamiento y Optimización

Clase 9

Gonzalo Muñoz

12 de Abril 2024



SBF en forma estándar

Ejemplo

Supongamos que tenemos el siguiente problema en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a:} & \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_5 = 3 \end{array} \right. \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Son l.i.} \\ \text{(verificar)} \end{array} \right\}$$
$$Ax=b$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

¿Cuántos ceros debería tener una SBF?

→ Debe tener 5 restricciones l.i. activas.

→ 3 de ellas deben venir de $Ax=b$

→ las 2 restantes deben venir de $x_i \geq 0$

∴ Una SBF debe tener al menos 2 ceros!

SBF en forma estándar

Ahora consideremos un poliedro en forma estándar genérico

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

A es de $m \times n$
 m []
 n

Y supongamos que **todas las filas de A son linealmente independientes.**

¿Cómo podemos encontrar n restricciones activas linealmente independientes?

$$Ax = b \quad \} \quad m \text{ restricciones l.i.}$$

¿Cuántas faltan? $n - m$ restricciones

\Rightarrow Una SBF tiene al menos $n - m$ ceros!

Sea \hat{x} una SBF, supongamos que los ceros están al final

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} | & | & & | & | & | \\ A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} & \dots & A_n \\ | & | & & | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = b$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_B$



Base

Queremos que $B \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = b$ tenga sol única.
 B necesita todas sus columnas i (m)

Definición

Dado $\{Ax = b, x \geq 0\}$ y un subconjunto de columnas A_{i_1}, \dots, A_{i_m} que son linealmente independientes, decimos que la matriz

$$B = [A_{i_1} \ A_{i_2} \ \cdots \ A_{i_m}]$$

es una **base de A** . Observe que una base es **invertible**. Toda solución básica factible tiene una base asociada.



Receta para encontrar una solución básica \hat{x}

1. Identificar una base. En el ejemplo anterior:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_5 = 3 \end{cases} \\ & A_{X=b} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Si tomamos las columnas correspondientes a $\{x_1, x_3, x_5\}$ como base

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Fijar $\hat{x}_i = 0$ en las columnas que no están en la base.

$$\hat{x}_2 = 0, \quad \hat{x}_4 = 0$$



Receta para encontrar una solución básica \hat{x}

3. Resolver $A\hat{x} = b$. ¿Es la solución factible?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Red arrows point from the columns of the matrix to the text below.

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_4 = 0$$

\Rightarrow

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_5 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{B^{-1}} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sol básica

$$\hat{x} = (2, 0, 0, 0, 3) \geq 0 \Rightarrow \text{es SBF}$$

Comentarios extra

Definición

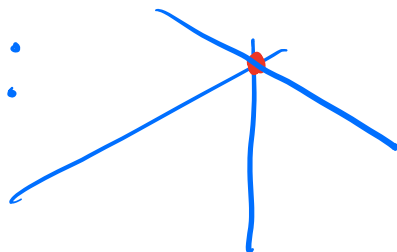
Considere un sistema en forma estándar $Ax = b$, $x \geq 0$, y una base $B = [A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_m}]$. Decimos que las variables x_{i_1}, \dots, x_{i_m} son las variables *básicas* asociadas a la base B . Al resto de las variables se les llama *no-básicas*

Definición

Si una solución básica tiene más de n restricciones activas se llama *degenerada*. En el caso de un poliedro en forma estándar esto corresponde a tener *más de $n - m$ ceros*.

En el ej. anterior teníamos 3 ceros
y $n - m = 5 - 3 = 2 \rightarrow$ degenerada.

en \mathbb{R}^2 :



Resumen

Para encontrar una solución básica:

1. Identificar una base B . Con esto definir variables básicas y no básicas.
2. Fijar las variables **no-básicas en 0**.
3. Encontrar el valor de las variables básicas resolviendo el sistema $A\hat{x} = b$.
4. Si $\hat{x} \geq 0$, entonces la solución básica es **factible**. Si hay **más de $n - m$ ceros**, se le llama solución **degenerada**.

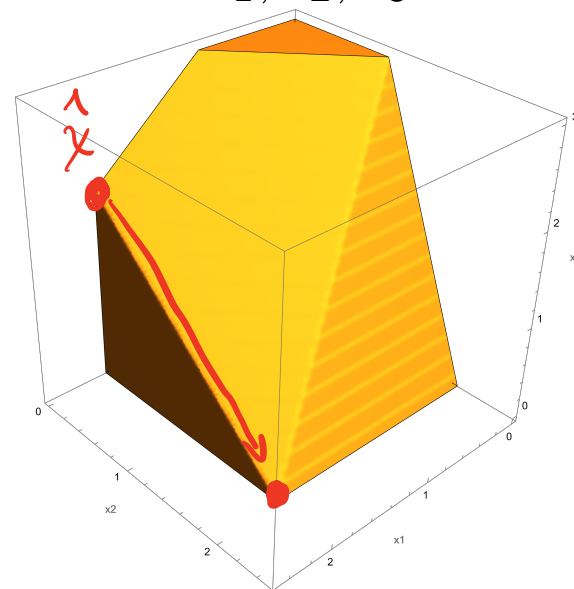


SBF adyacente

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & -x_2 - 3x_3 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & 3x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ & x_1 + x_6 = 2 \\ & x_3 + x_7 = 3 \\ & x_1, \dots, x_7 \geq 0\end{array}$$

Plot de x_1, x_2, x_3 :



Ahora supongamos que tenemos una SBF \hat{x} (con una base determinada) y que nos queremos mover a una **SBF adyacente**:

$$\hat{x} + \delta d, \quad \delta > 0$$

¿Cómo hacemos esto intuitivamente?

Movernos satisfaciendo $n-1$ restricciones que eran activas en \hat{x} (una línea)



Direcciones básicas

Para que la dirección sea factible:

$$A\hat{x} = b$$

\nearrow

$$A(\hat{x} + \delta d) = b \Rightarrow Ad = 0.$$

Además, queremos que **una** de las restricciones $x_j = 0$ **deje de ser activa**,
por lo que escribiendo $d = (d_B, d_N)$, con $d_N = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

obtenemos:

\nearrow básicas \nearrow no-básicas

\hookrightarrow componente j .
 $\hat{x}_N + \delta d_N$

va a cambiar en
1 componente.

$$Ad = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} = 0$$

\nearrow Básica \nearrow No-básica.

columna j de A .

\nearrow

$$\Rightarrow B d_B + N d_N = 0 \Rightarrow B d_B + A_j = 0$$

$$d_B = -B^{-1} A_j$$

La dirección es

$$d = (d_B, d_N) = (-B^{-1} A_j, 0, 0, \dots, 1, 0)$$

Dirección Básica en componente j .

\nearrow componente j

