

Modelamiento y Optimización

Clase 14

Gonzalo Muñoz

6 de Mayo 2024



Dual de un PL

Primal
(Dual del Dual)

$$\text{s.a: } \quad a_i^\top x \geq b_i, \quad i \in M_1$$

$$a_i^\top x \leq b_i, \quad i \in M_2$$

$$a_i^\top x = b_i, \quad i \in M_3$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in N_1$$

$$x_j \leq 0, \quad j \in N_2$$

x_j libre, $j \in N_3$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 - \\ -a_2 - \\ \vdots \\ -a_m - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dual (mejor cota inferior del primal)

s.a: $y_i \geq 0, i \in M_1$

$$y_i \leq 0, \quad i \in M_2$$

y_i libre, $i \in M_3$

$$A_i^\top y \leq c_i, \quad j \in N_1$$

$$A_i^\top y > c_i, \quad i \in N_2$$

$$A_i^\top y = c_i, \quad i \in N_3$$



Ejemplo

Calcular el dual de

$$\begin{array}{ll} \min & 100x_1 + 100x_2 \\ \text{sujeto a: } & x_1 + 2x_2 \geq 3 \quad \rightarrow (Y_1) \\ & 2x_1 + x_2 \geq 1 \quad \rightarrow (Y_2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\max \quad 3y_1 + 1 \cdot y_2$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$$(x_1) \quad y_1 + 2y_2 \leq 100$$

$$(x_2) \quad 2y_1 + y_2 \leq 100$$



Dualidad débil y Fuerte



Teorema de dualidad débil

minimización



Teorema

Si x es una solución factible para el problema primal e y es una solución factible para su dual, entonces $b^T y \leq c^T x$.

Ejemplo de la clase pasada:

$$\begin{array}{ll} \min & -4x_1 + 2x_2 \quad \text{y } c^T x \\ \text{sujeto a:} & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 \geq -2 \\ & x_2 \geq 0 \\ & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \max & 8y_1 - 2y_2 \\ \text{sujeto a:} & -y_1 - y_2 = -4 \\ & 2y_1 + y_2 \leq 2 \\ & y_1 \leq 0 \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

Tomemos $x = (2, 0)$ e $y = (-2, 6)$:

Ej: Verificar factibilidad.

$$c^T x = -4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -8$$

$$b^T y = 8 \cdot (-2) - 2 \cdot 6 = -28$$

$$-8 \geq -28$$



Teorema de dualidad débil

Corolario

Sea x solución factible para el primal e y solución factible para el dual tales que $b^T y = c^T x$. Entonces x e y son óptimos para el primal y el dual respectivamente.

Consideremos $x = (12, 10)$ en el ejemplo anterior:

Ej: verificar factibilidad

$$\begin{aligned} c^T x &= -4 \cdot 12 + 2 \cdot 10 = -28 \\ &= \underbrace{(8, -2)}_5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

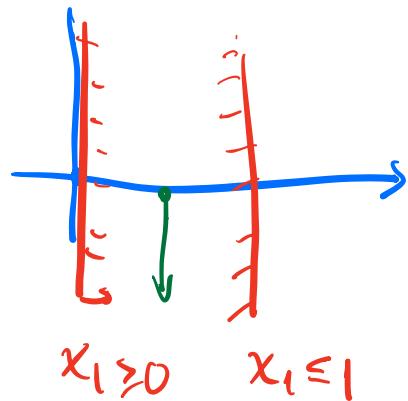
$\Rightarrow (12, 10)$ es óptimo para el primal
 $(-2, 6)$ es óptimo para el dual



Consecuencia de dualidad débil

Corolario

Si el valor del primal es $-\infty$, entonces el dual es infactible. Si el valor del dual es $+\infty$, entonces el primal es infactible.



Primal

$$\min x_2$$

$$\text{s.a } x_1 \leq 1 \quad (y_1)$$

$$x_1 \geq 0$$

x_2 libre

No acotado \Rightarrow valor $-\infty$

Dual

$$\max y_1$$

$$y_1 \leq 0$$

$$(x_1) \\ (x_2)$$

$$y_1 \leq 0$$

$$0 \cdot y_1 = 1$$

In factible .



Dualidad fuerte

Teorema

Supongamos que el primal posee solución óptima. Entonces, el dual también posee un óptimo y sus valores **son iguales**.

Veamos la demostración de ésto cuando el primal está en forma estándar y tiene un óptimo no-degenerado.

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\text{óptimo: } x_B = B^{-1}b$$

$$x_N = 0$$

$$\text{Valor obj: } C_B^T B^{-1} b$$

debería ser y^T

costos reducidos no-negativos

Dual

$$\max b^T y$$

$$A^T y \leq c$$

Defino $y = (C_B B^{-1})^T$ (tiene mismo valor que x)
Factibilidad:

$$A^T y - c \leq 0$$

$$A^T (C_B B^{-1})^T - c \leq 0$$

$$-(C_B B^{-1} A)^T + c \geq 0 \sim \text{costos reducidos}$$



Combinaciones posibles entre primal y dual

Primal	Dual	óptimo se alcanza	no acotado	In factible
óptimo se alcanza	Possible	Impossible	Impossible	
no acotado	Impossible	Impossible	Possible	
In factible	Impossible	Possible	Possible	

lo vereamos

M por dualidad fuerte

m por dualidad débil

