Modelamiento y Optimización

Clase 26

Gonzalo Muñoz

1 de Julio 2024

Repaso Optimización No-Lineal

Repaso

En esta parte del curso consideramos problemas del siguiente tipo

$$
\begin{aligned}
\min\ & f(x) \\
\text{s.a. } & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_j(x) = 0 \quad j = 1, \ldots, p \\
& x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Donde las funciones h_j son lineales afín. : $h_j(x) = a_j^T x + b_j$

Cuando las funciones $f, g_1, \ldots, g_m$ son convexas diremos que el problema es convexo.

Función convexa

$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Lagrangeano

Nos gustaría deshacernos de las restricciones para poder resolver un optimización sin restricciones; esto lo hacemos penalizando restricciones:

$$L(x,\lambda,\mu) := f(x) + \sum_{j=1}^{m} \overset{\geq 0}{\lambda_j} g_j(x) + \sum_{j=1}^{p} \overset{\text{libres}}{\mu_j} h_j(x)$$

Esta función se llama Lagrangeano, y siempre se tiene que para todo $x \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ y $\mu \in \mathbb{R}^p$:

$$f(x) \geq L(x,\lambda,\mu)$$

$$f(x) + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underbrace{g_j(x)}_{\substack{\leq 0 \\ \text{cuando} \\ x\in S}}}^{\leq 0} + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \underbrace{h_j(x)}_{\substack{=0 \\ \text{cuando} \\ x\in S}} \leq f(x)$$

Función dual

¿Qué pasa si minimizamos el Lagrangeano? Esto se conoce como la función dual:

$$d(\lambda, \mu) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \mu).$$

Ejemplo

Calculemos el Lagrangeano y la función dual de

$$\min \; x^2 + 2x$$
$$\text{s.a. } x + 5 \leq 0$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$L(x, \lambda) = x^2 + 2x + \lambda(x+5) \quad \} \text{ Función convexa}$$

Mínimo : $\frac{d}{dx} L(x, \lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 2 + \lambda = 0$$

Ejemplo

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-2-\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{d(\lambda)}_{\text{Función dual}} = \left(\frac{-2-\lambda}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{-2-\lambda}{2}\right) + \lambda\left(\frac{-2-\lambda}{2} + 5\right)$$

$$\vdots$$

$$= -\frac{1}{4}(2+\lambda)^2 + 5\lambda$$

— o —

Con el Lema siguiente:

$$d(1) = -\frac{1}{4}\cdot 9 + 5 = \frac{11}{4} \Rightarrow p^* \geq \frac{11}{4}$$

$$d(8) = -\frac{1}{4}\cdot 100 + 40 = 15 \Rightarrow p^* \geq 15$$

Relación de la función dual y el óptimo

La función dual simplifica las cosas, y siempre podemos garantizar que:

Lema

Sea $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p$ *y* p^* *el valor óptimo del problema original. Luego,*

$$d(\lambda, \mu) \leq p^*.$$

La mejor cota dada por el Lagrangeano es

$$d^* = \max\{d(\lambda, \mu) : \lambda \geq 0\}.$$

Este es el problema dual, y por el lema anterior

$$d^* \leq p^*$$

Lo que se conoce como dualidad débil.

La mejor cota inferior

Calculemos d^* en el ejemplo anterior:

$$d(\lambda) = -\frac{1}{4}(2+\lambda)^2 + 5\lambda \quad \Big\} \text{ cóncava}$$

Máximo:

$$\frac{d}{d\lambda} d(\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}(2+\lambda) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 8$$

$$\Rightarrow \quad d^* = 15$$

cálculos anteriores

La mejor cota inferior

En programación lineal, (casi) siempre se tenía que $d^* = p^*$. Sin embargo, en el caso no-lineal no siempre es el caso.

A $p^* - d^* \geq 0$ lo llamamos *gap de dualidad*, y cuando es cero diremos que el par primal-dual satisface *dualidad fuerte*.

Ejercicio: verificar "a mano" que el ejemplo anterior satisface dualidad fuerte.

Condiciones de KKT

Las consecuencias principales de dualidad fuerte para un par primal-dual óptimo son las siguientes:

Factibilidad Primal

$$
\begin{cases} g_i(x^*) \leq 0 & \forall i = 1, \ldots, m \\ h_j(x^*) = 0 & \forall j = 1, \ldots, p \end{cases}
$$

Factibilidad dual

$$
\lambda_i^* \geq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, m
$$

$$
\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, m
$$

Holgura Complementaria

$$
\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0
$$

Grad. de L $= 0$

Estas son las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, o KKT. Algunos puntos importantes:

- Dualidad fuerte podría no cumplirse, en cuyo caso no hay garantía de que el óptimo cumpla KKT
- En general, podrían existir puntos que cumplen KKT que no son óptimos

Dualidad fuerte en el caso convexo

Definición (Punto de Slater)

Diremos que $x \in S$ es un punto de Slater si $g_j(x) < 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Teorema

Supongamos que el problema es convexo y que existe un punto de Slater en S. Entonces se cumple dualidad fuerte ~~y~~ cualquier óptimo cumple KKT.

y por lo tanto

Teorema

Si el problema convexo y un punto satisface KKT, entonces es óptimo y se cumple dualidad fuerte.

Acá hay un pequeño caso patológico:

Un problema convexo podría no tener puntos que cumplan KKT

Ejemplo

$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = (x-2)^2 + 2(y-1)^2$
$+ \lambda_1(x+3y-3)$
$+ \lambda_2(-x+y)$

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \min\ & (x-2)^2 + 2(y-1)^2 \\ \text{s.a. } & x + 3y \leq 3 \qquad (\lambda_1) \\ & -x + y \leq 0 \qquad (\lambda_2) \end{aligned}$$

Ejercicio: verificar que el problema es convexo.

Veamos que cumple las condiciones de Slater y calculemos un óptimo usando KKT

Punto de slater: $(1.5, 0)$ Funciona ✓

KKT:

$x+3y \leq 3$ (1) $\qquad \lambda_1 \cdot (x+3y-3) = 0$ (5)

$-x+y \leq 0$ (2) $\qquad \lambda_2 \cdot (-x+y) = 0$ (6)

$\lambda_1 \geq 0$ (3) $\qquad 2(x-2) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ (7)

$\lambda_2 \geq 0$ (4) $\qquad 4(y-1) + 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (8)

Ejemplo

Caso 1 : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ Da $x = 2, y = 1$

que no es factible.

Caso 2 : $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$

$\hookrightarrow$ este nos lleva a

un punto válido.

(ver grabaciones)