Modelamiento y Optimización

Clase 13

Gonzalo Muñoz

26 de Abril 2024

Dualidad

Objetivo de Dualidad

Nos gusatría obtener información sobre la función objetivo usando las restricciones.

Consideremos el siguiente PL como motivación:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & -4x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeto a:} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& -x_1 + x_2 \geq -2 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

¿Qué pasa si multiplicamos la primera restricción por -2, la segunda por 6 y las sumamos?

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 &\leq 8 \quad \cdot (-2) \\
-x_1 + x_2 &\geq -2 \quad \cdot (6)
\end{aligned}
\Rightarrow
$$

$$
2x_1 - 4x_2 - 6x_1 + 6x_2 \geq -2 \cdot 8 - 2 \cdot 6
$$

Ejemplo

$$\Rightarrow \quad \overbrace{-4x_1 + 2x_2}^{\text{Función objetivo}} \geq -28$$

todo (x_1, x_2) factible debe cumplir esto.

Esto nos dice que el óptimo no puede ser < -28

min

-28 valor óptimo estará acá.

Ejemplo

Volvamos a considerar el mismo ejemplo,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -4x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \qquad \bullet\ -4 \\ & -x_1 + x_2 \geq -2 \qquad \bullet\ 8 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora multipliquemos la primera restricción por -4 y la segunda por 8.

$$(4-8)x_1 + (-8+8)x_2 \geq -32 - 16$$

$$\underbrace{-4x_1 + 0x_2}_{\text{No es fn. objetivo}} \geq -48 \qquad \text{Pero}$$

$$-48 \leq -4x_1 + 0x_2 \underset{x_2 \geq 0}{\leq} -4x_1 + 2x_2$$

$\Rightarrow$ óptimo ≥ -48 $\rightsquigarrow$ estimación válida pero peor que -28

Ejemplo

Generalicemos lo que acabamos de ver:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & -4x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeto a:} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \qquad \cdot\ \alpha \\
& -x_1 + x_2 \geq -2 \qquad \cdot\ \beta \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Multiplicamos la primera restricción por $\alpha \leq 0$ y la segunda por $\beta \geq 0$. Nos gustaría encontrar α y β que nos den la mejor estimación del óptimo.

$$\underbrace{(-\alpha - \beta)}_{\substack{\text{queremos} \\ = -4}} x_1 + \underbrace{(2\alpha + \beta)}_{\substack{\text{Queremos} \\ \leq 2}} x_2 \geq 8\alpha - 2\beta$$

pues x_1 es libre

Problema Dual

Con eso

$$-4x_1 + 2x_2 \geq (-\alpha - \beta)x_1 + (2\alpha + \beta)x_2 \geq 8\alpha - 2\beta$$

Por lo tanto:

Problema dual

$$\begin{cases} \max\ 8\alpha - 2\beta \\ -\alpha - \beta = -4 \\ 2\alpha + \beta \leq 2 \\ \alpha \leq 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ La mejor cota

Si (α, β) satisfacen esto, $8\alpha - 2\beta$ estima el objetivo por abajo

Dual de un PL

Primal

Restricciones

Dual

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín} & c^\top x & \\
\text{s.a:} & a_i^\top x \geq b_i, & i \in M_1 \\
& a_i^\top x \leq b_i, & i \in M_2 \\
& a_i^\top x = b_i, & i \in M_3 \\
& x_j \geq 0, & j \in N_1 \\
& x_j \leq 0, & j \in N_2 \\
& x_j \text{ libre}, & j \in N_3
\end{array}
$$

Filas de A

variables

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & b^\top y & \\
\text{s.a:} & y_i \geq 0, & i \in M_1 \\
& y_i \leq 0, & i \in M_2 \\
& y_i \text{ libre}, & i \in M_3 \\
& A_j^\top y \leq c_j, & j \in N_1 \\
& A_j^\top y \geq c_j, & j \in N_2 \\
& A_j^\top y = c_j, & j \in N_3
\end{array}
$$

Columnas de A

$$A = \begin{bmatrix} - a_1 - \\ - a_2 - \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & \\ A_1 & A_2 & \cdots \\ | & | & \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Calcular el dual de

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 \\
\text{sujeto a:} \quad & 2x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -10 && (y_1 \geq 0) \\
& 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 && (y_2 \leq 0) \\
& x_1 + x_3 = 7 && (y_3 \text{ libre}) \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \leq 0 \\
& x_3 \text{ libre}
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
b = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 7 \end{bmatrix}
\qquad
c = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}
$$

Ejemplo

$$\max \quad -10y_1 + 20y_2 + 7y_3$$

$$\text{s.a} \quad y_1 \geq 0$$

$$y_2 \leq 0$$

$$y_3 \text{ libre}$$

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq -3 \rightsquigarrow x_1$$

$$-2y_1 + y_2 \geq -7 \rightsquigarrow x_2$$

$$-y_1 - y_2 + y_3 = -2 \rightsquigarrow x_3$$

Dualidad débil

Teorema de dualidad débil

Teorema

Si x es una solución factible para el problema primal e y es una solución factible para su dual, entonces $b^\top y \leq c^\top x$.