Modelamiento y Optimización

Clase 7

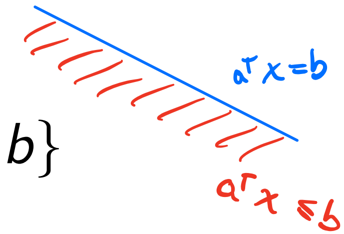
Gonzalo Muñoz

5 de Abril 2024

Definiciones básicas

Definición

Un semi-espacio es un conjunto del tipo $S_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, a^\top x \leq b\}$



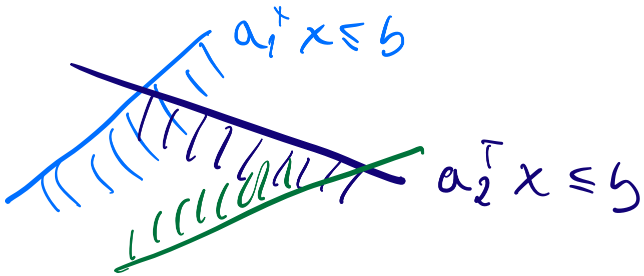
Definición

Un hiperplano corresponde al conjunto $H_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, a^\top x = b\}$

Definición

Un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro si existe $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ para algún m, y $b \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax \leq b\}.$$



Definición

Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|x_i| \leq K \; \forall x \in C$.

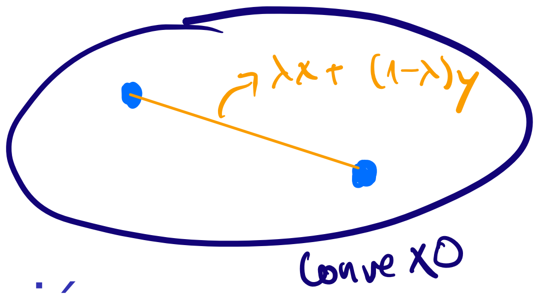
A un poliedro acotado se le llama polítopo.

Convexidad

Multiplicadores λ y $(1-\lambda)$ es lo mismo que λ_1 y λ_2 con $\lambda_1+\lambda_2=1$

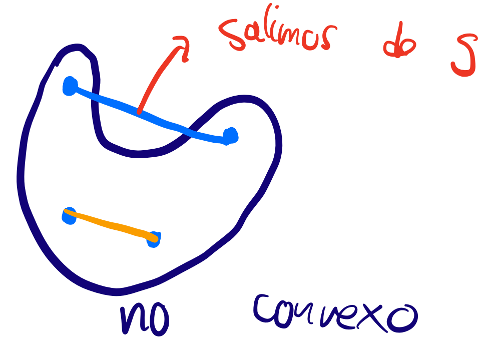
Definición

Diremos que S es un conjunto convexo si para todo $x, y \in S$ y para todo $\lambda \in [0,1]$, se tiene que $\lambda x + (1-\lambda) y \in S$.



línea que une a x e y

combinación convexa de x e y

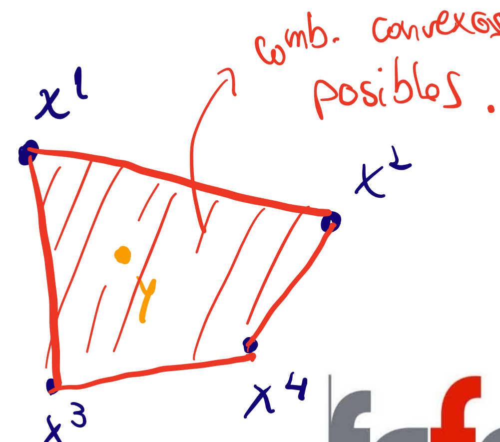


Definición

Dados k vectores $x^1, \ldots x^k$, y multiplicadores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, al vector

$$y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

se le llama combinación convexa de $x^1, \ldots x^k$.



Convexidad

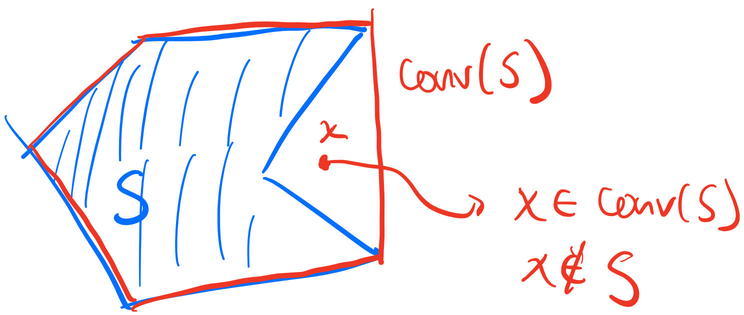
Una última definición antes de analizar a los poliedros:

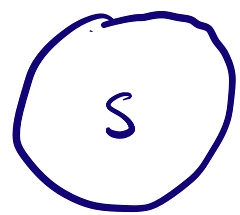
Definición

Dado un conjunto S cualquiera, su envoltura convexa conv(S) es

$$\text{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \ : \ x^1, \ldots x^k \in S, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, k \right\}$$

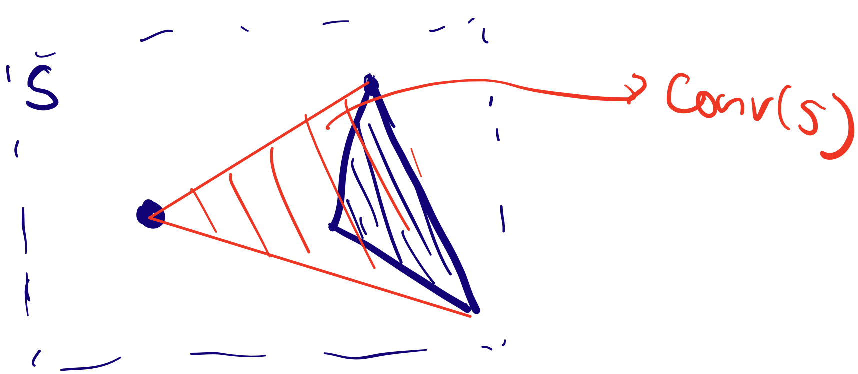
= "todas las combinaciones posibles de elementos en S"





Si S es convexo

con(S) = S

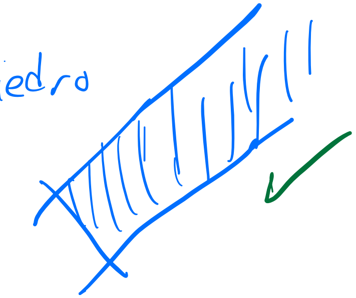


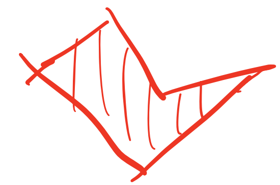
Convexidad

Teorema

Todo poliedro es un conjunto convexo.

Poliedro





No es poliedro

Dem: Tomamos $P = \{x : Ax \leq b\}$ ↳ poliedro.

Queremos: Dado $x, y \in P$ y $\lambda \in [0,1]$ arbitrarios, mostrar

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y \in P$$

$$Az = A(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

$$= \lambda \underbrace{Ax}_{\leq b} + (1-\lambda) \underbrace{Ay}_{\leq b}$$

pues $\lambda \in [0,1]$ pues $x, y \in P$

$$\leq \lambda b + (1-\lambda) b$$

$$= b$$

$\Rightarrow z \in P \Rightarrow P$ es convexo.

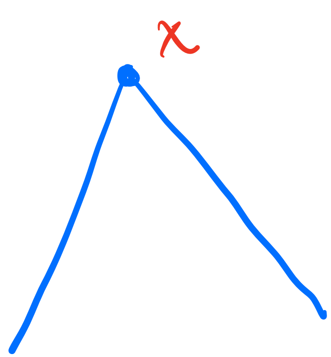
Ej:

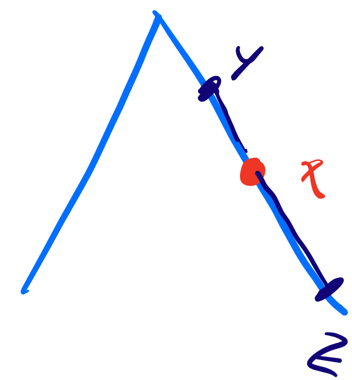
$$\begin{array}{l} \\ x_1 + x_2 \leq \\ x_1 - 2x_2 \leq \end{array} \begin{array}{c} b \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array}} \end{array}$$

“Esquinas” de un poliedro

Definición

Sea P un poliedro. Un vector $x \in P$ es un *punto extremo* de P si es que no existen $y, z \in P$, ambos diferentes de x, y $\lambda \in]0,1[$, tales que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$.





comb convexa de y y z

$x = \lambda x + (1-\lambda) x$

pero x no es combinación convexa de elementos distintos

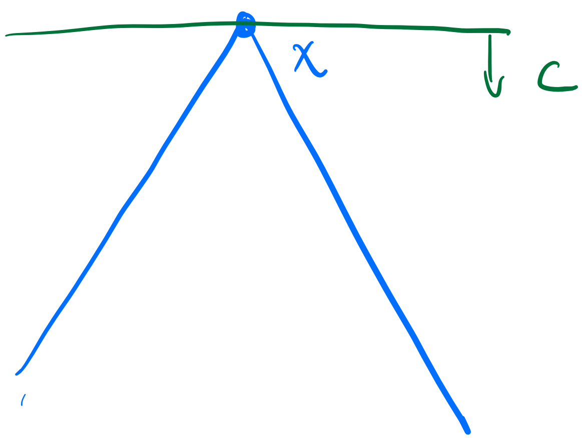
$\Rightarrow$ x es punto extremo

“Esquinas” de un poliedro

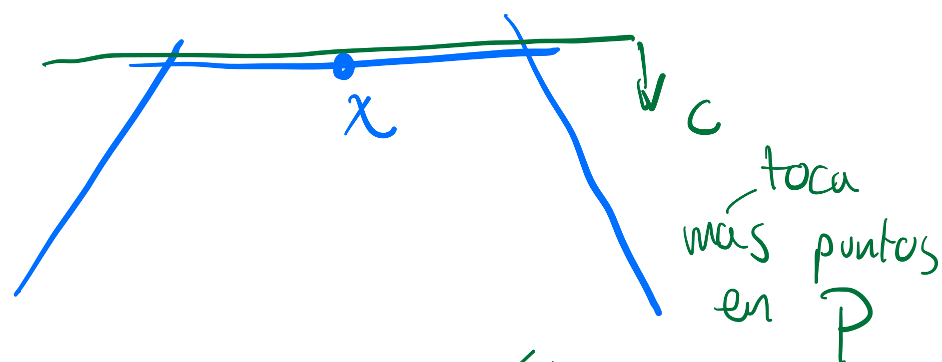
Definición

Sea P un poliedro. Un vector $x \in P$ es un vértice de P si existe c tal que $c^\top x < c^\top y$ para todo $y \in P$ tal que $y \neq x$.

x es el único optimo para $\min\limits_{x \in P} c^\top x$



Vértice



No es vértice

Una noción más algebraica

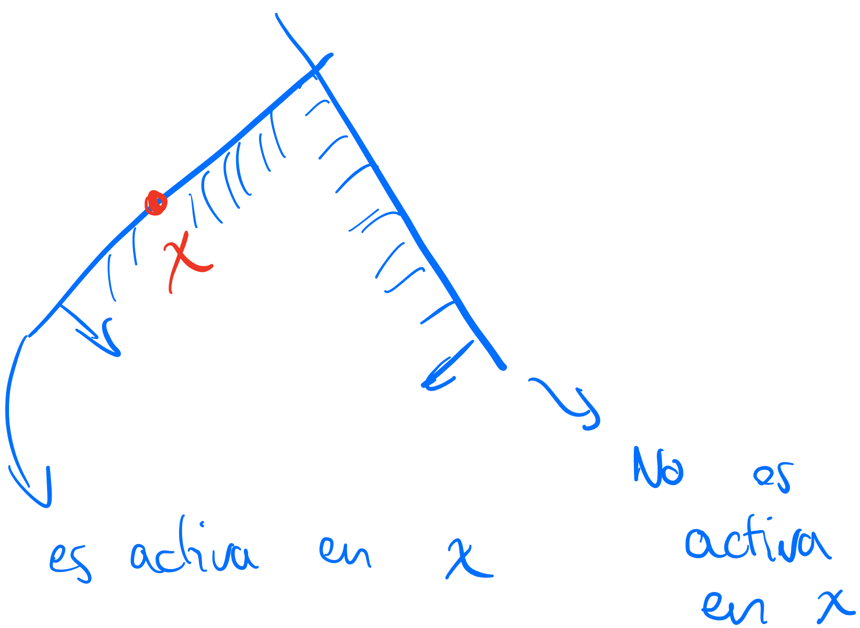
Las dos definiciones de arriba son geométricas. Pero será útil tener una noción más algebraica.

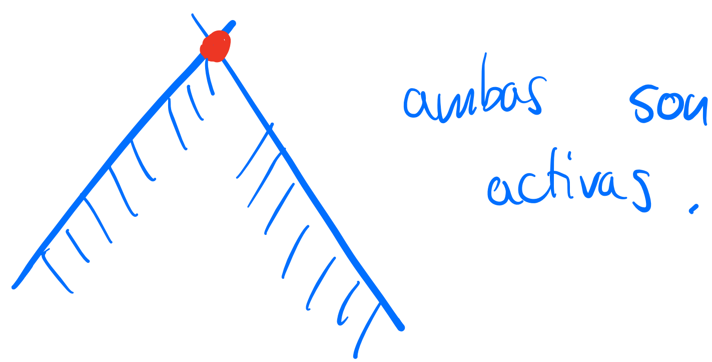
$[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ número de restricciones

Definición

Sea $x \in P$. La restricción $i \in [m]$ es *activa* en x si $a_i^\top x = b_i$. Al conjunto de restricciones activas en x lo denotamos por

$$I(x) = \{i \in [m] \,:\, a_i^\top x = b_i\}.$$





Una noción más algebraica

Definición

Considere un poliedro P en $\mathbb{R}^n$ y sea $x^* \in \mathbb{R}^n$.

1. El vector x^* es solución básica existen n restricciones linealmente independientes en $I(x^*)$.
2. El vector x^* es solución básica factible si además de ser básica se tiene $x^* \in P$.

Teoremas fundamentales

Teorema

Sea $x \in P$ con P un poliedro. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- *x es un vértice.*
- *x es un punto-extremo.*
- *x es una solución básica factible.*

Teorema

Todo polítopo es la envoltura convexa de sus puntos extremos