

# Modelamiento y Optimización

## Clase 16

Gonzalo Muñoz

13 de Mayo 2024



# Modificaciones al lado derecho

En la clase pasada vimos que si una solución básica es **no-degenerada**, y la modificación es pequeña, **la misma base sigue siendo óptima**.

Si el cambio es  $\Delta$  en la **primera restricción**, el nuevo valor objetivo es:

$$c_B^\top B^{-1}(b + (\Delta, 0)) = \underbrace{c_B^\top B^{-1}b}_{\text{valor original}} + \underbrace{c_B^\top B^{-1}(\Delta, 0)}_{\text{cambio óptimo}}$$

Y como el óptimo del dual es  $y^* = c_B^\top B^{-1}$ , concluimos que el cambio en la función objetivo es:

$$y_1^* \Delta$$

si el cambio es en la  $i$ -ésima restricción aparece  $y_i^*$

Por lo tanto, los duales óptimos nos dan **el beneficio/costo** por unidad de cambio en el lado derecho. Esto se conoce como **precio sombra**.

**Importante: esto vale siempre, no solo para forma estándar!**



## Ejemplo 1

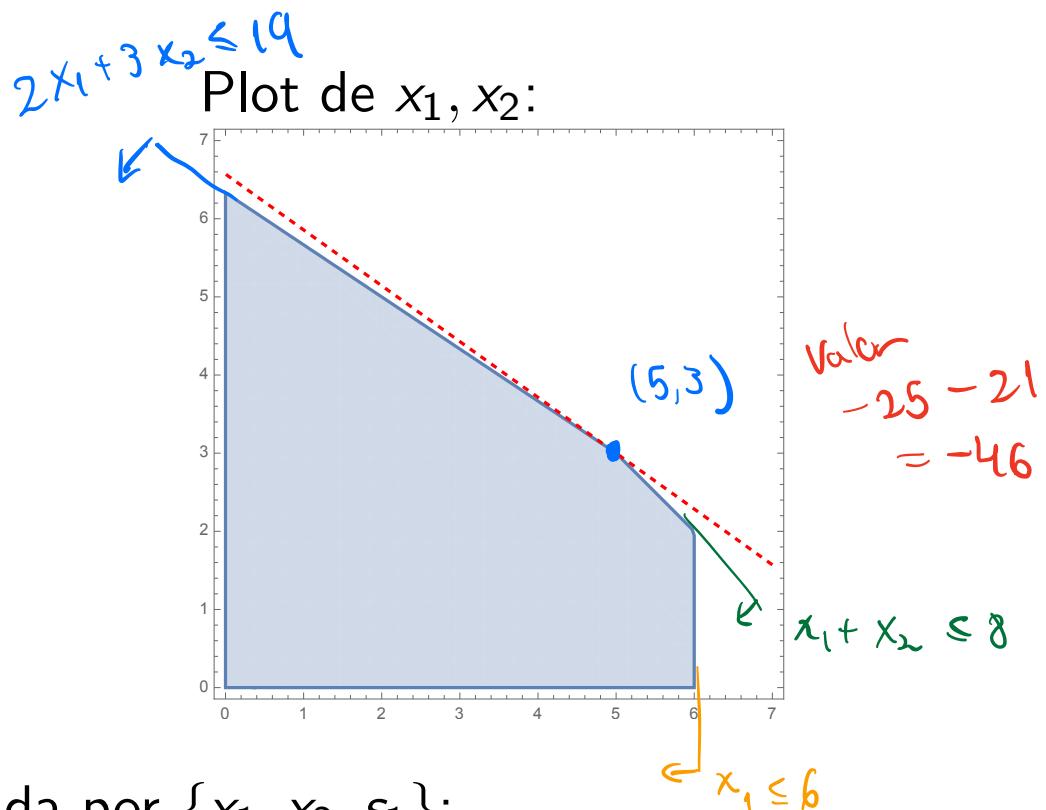
$$\min -5x_1 - 7x_2$$

$$\text{sujeto a: } x_1 + s_1 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 19$$

$$x_1 + x_2 + s_3 = 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



En este caso la base óptima está dada por  $\{x_1, x_2, s_1\}$ :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = (5, 3, 1)^\top,$$

$$c_B B^{-1} = (0, -2, -1)$$

dúas óptimas

# Ejemplo 1

Veamos cuál es el efecto que tiene el cambio:

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 19 + \Delta$$

La misma base anterior es óptima si:

$$B^{-1} \left( \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{bmatrix} \right) \geq 0$$

$\underbrace{\phantom{0}}_{b}$        $\underbrace{\phantom{0}}_{\text{modificación}}$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$



$$\begin{aligned}\Delta &\leq 5 \\ \Delta &\geq -3 \\ \Delta &\geq -1\end{aligned}$$



$\Delta \in [-1, 5]$   
Rango donde la  
base es óptima



# Ejemplo 1

Y en el rango de  $\Delta$  encontrado anteriormente, el valor óptimo cambia como:

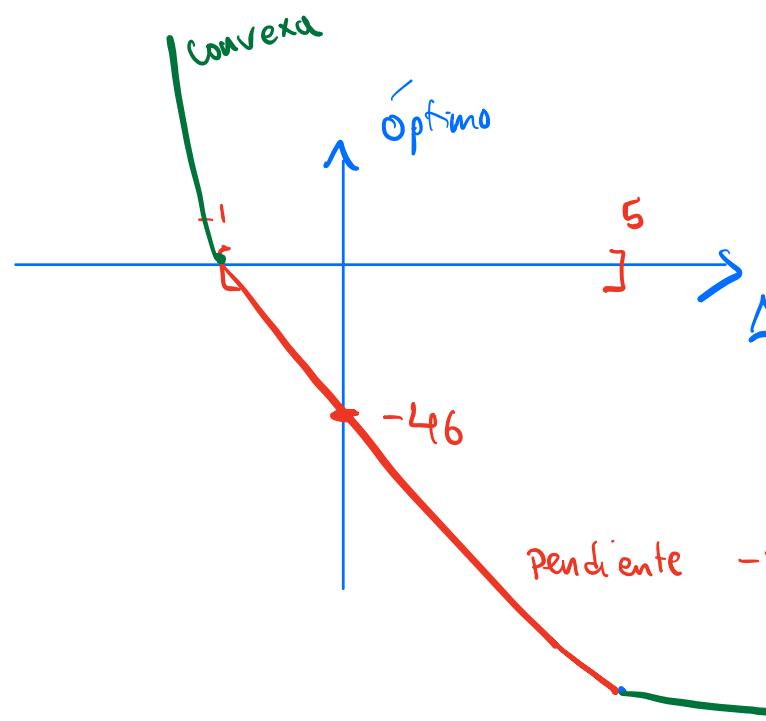
$$\tilde{y}_2^* \cdot \Delta = -2 \cdot \Delta$$

dual óptimo de  
la 2<sup>da</sup> restr.

Ej:  $19 \rightarrow 21$

Valor  $-46 \rightarrow -46$   
 $-2 \cdot 2$   
 $= -50$

Si graficamos el valor óptimo v/s  $\Delta$ , esto se ve de la siguiente forma:



## Ejemplo 2

Analicemos el siguiente ejemplo de producción de **llaves** (wrenches) por día y **alicates** (pliers) por día:

$$\text{máx } 130w + 100p$$

$$\text{s.a } 1.5w + p \leq 27 \quad (\text{lbs. acero})$$

$$w + p \leq 21 \quad (\text{horas de fundición})$$

$$0.3w + 0.5p \leq 9 \quad (\text{horas de armado})$$

$$w \leq 15 \quad (\text{demanda})$$

$$p \leq 16 \quad (\text{demanda})$$

$$w, p \geq 0$$

Todo está en miles. Resolver el problema, y determinar lo siguiente:

- (a) ■ ¿Cuánto conviene pagar por 1.000 horas extra de fundición?
- (b) ■ ¿Conviene comprar comprar acero a \$55/1.000 lbs?  
Si conviene, ¿cuánto comprar?



## Ejemplo 2

(a) Nos conviene pagar a lo más \$ 40  
(precio sombra)

(b) El precio sombra era 60,  
así que sí conviene.

El rango era  $[-2.25, 1.5]$ .

así que conviene comprar 1500 lbs

Ganaremos  $\underbrace{5}_{(60-55)} \cdot 1.5$  extra.

