Modelamiento y Optimización

Clase 4

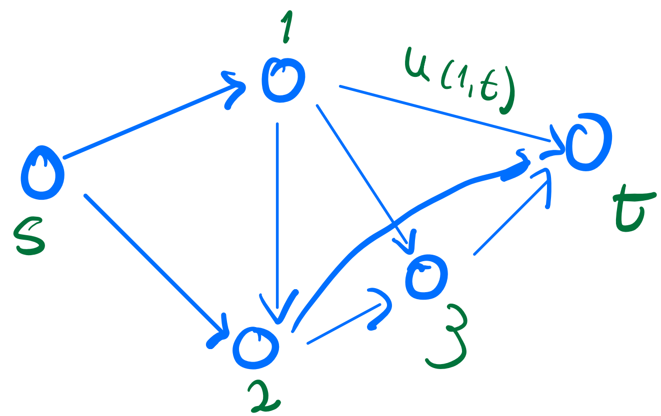
Gonzalo Muñoz

22 de Marzo 2024

Flujo máximo

Tenemos un grafo dirigido $G = (V, A)$, y dos nodos especiales $s, t \in V$. Para cada arco $e \in A$ tenemos una capacidad u_e. El objetivo es enviar la mayor cantidad de flujo posible de s a t.

$x_{i,j}$ = Flujo en $(i,j) \in A$



$$\max \sum_{i:(s,i)\in A} x_{s,i}$$

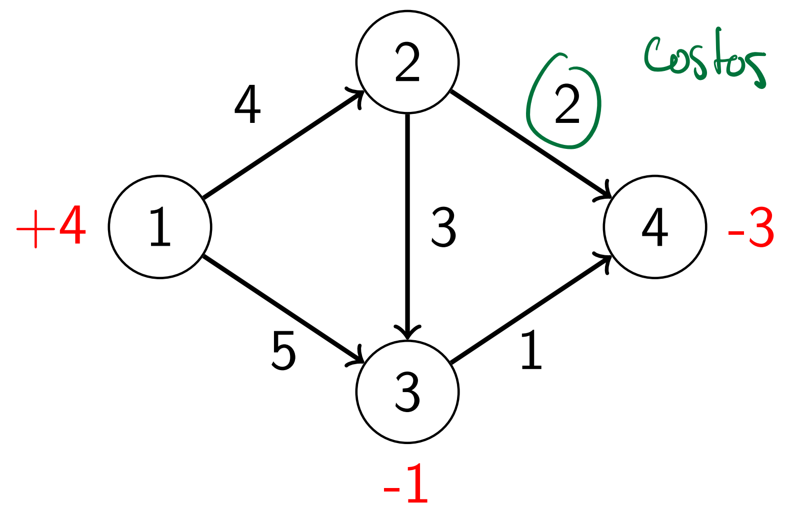
$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{i,j} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{j,i} = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s,t\}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

$$x_{ij} \leq u_{i,j} \quad \forall (i,j) \in A$$

Flujo a costo mínimo

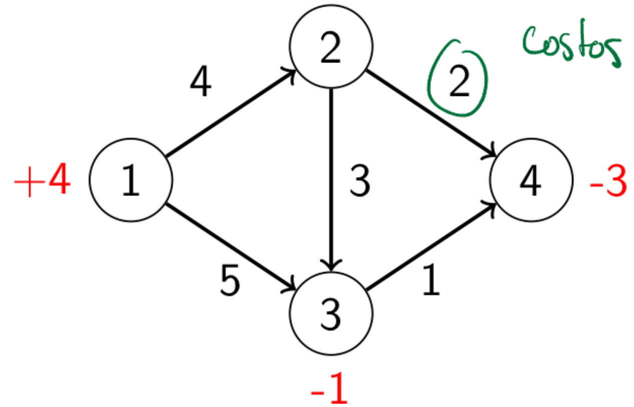
Supongamos que tenemos el siguiente grafo dirigido, donde ahora los nodos tienen una oferta/demanda asociada y los arcos tienen un costo por cada unidad de flujo que pasa por ellos.



¿Cómo decidir por donde enviar flujo de manera de minimizar costos?

Decisión : x_{ij} = Flujo de i a j

Flujo a costo mínimo



$$\min \quad 4x_{12} + 5x_{13} + 3x_{23} + 2x_{24} + 1x_{34}$$

(nodo 2) $\quad x_{24} + x_{23} - x_{12} = 0$

(nodo 1) $\quad x_{12} + x_{13} = 4$

(nodo 3) $\quad x_{34} - x_{23} - x_{13} = -1$

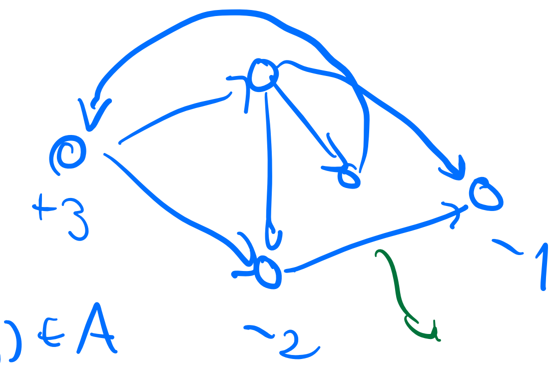
(nodo 4) $\quad -x_{24} - x_{34} = -3$

$$x_{ij} \geq 0$$

Flujo a costo mínimo

En general, consideremos un grafo dirigido $G = (V, A)$. Cada nodo $v \in V$ tiene una oferta/demanda de flujo dada por b_v (si $b_v > 0$ es oferta, si $b_v < 0$ es demanda), cada arco $e \in A$ tiene un costo de c_e por cada unidad de flujo que pasa por e, y cada arco e tiene una cantidad mínima y máxima de flujo, ℓ_e y u_e respectivamente. El objetivo del problema es enviar flujo por los arcos de manera de satisfacer la demanda total, minimizando el costo.

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij}$$



c_e, ℓ_e, u_e

ej: 2, 1, 3

capacidades
$$\begin{cases} x_{i,j} \leq u_{i,j} & \forall (i,j) \in A \\ x_{i,j} \geq \ell_{i,j} & \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

balances de flujo
$$\left\{ \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in V \right.$$

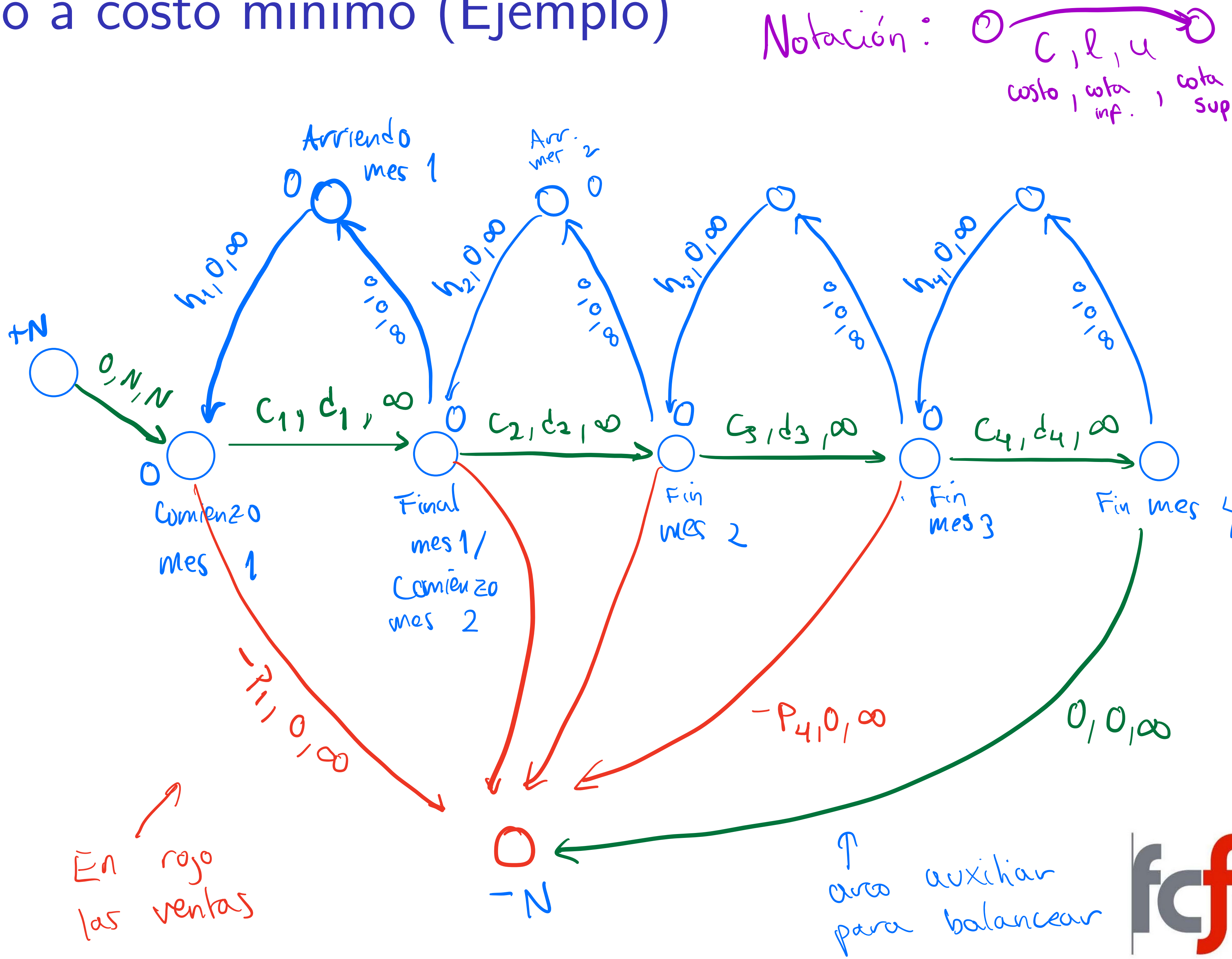
Flujo a costo mínimo (Ejemplo)

Usted tiene una empresa de arriendos mensuales de autos. Actualmente tiene N autos, y para los próximos 4 meses tiene demandas $d_1, \ldots, d_4$ ya comprometidas (pagadas).

Cada auto le genera un costo de c_i en el mes i. Además, al comienzo de cada mes i usted tiene la opción de vender un auto a un precio p_i, o puede arrendarle a otra empresa a precio h_i por el mes para cubrir su propia demanda.

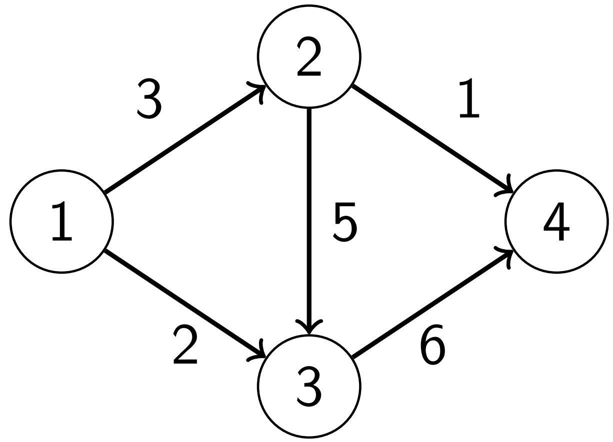
Formule el problema de minimizar los costos de manera de satisfacer la demanda para los siguientes 4 meses como un problema de flujo a costo mínimo.

Flujo a costo mínimo (Ejemplo)

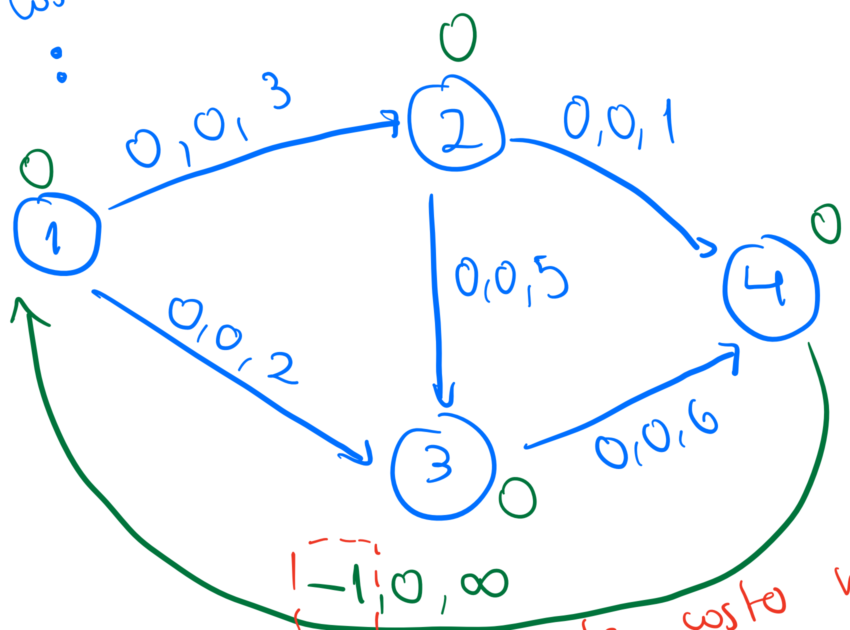


Flujo Máximo como Flujo a Costo Mínimo

Flujo máximo también se puede ver como un caso particular de Flujo a Costo Mínimo:



Como Flujo a costo mínimo:



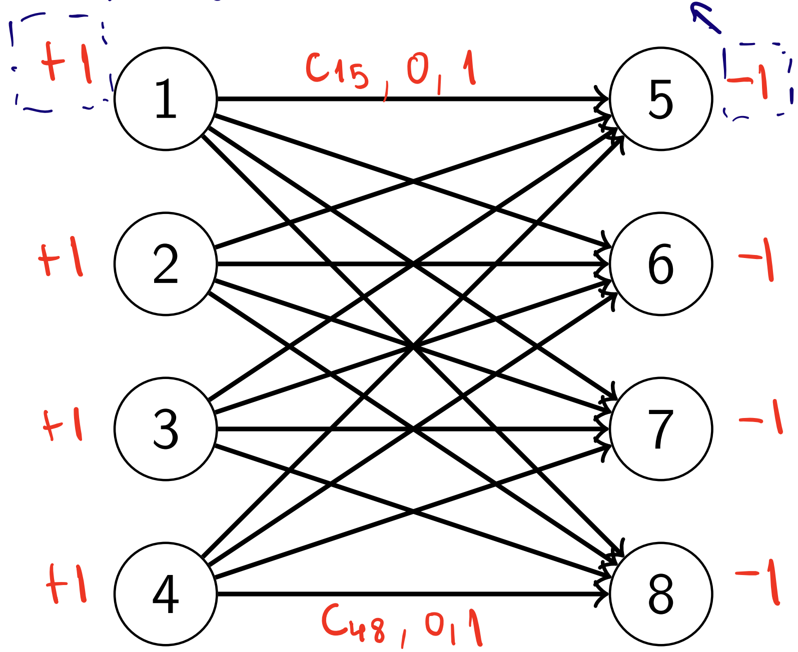
Todos los nodos con balance 0!

este costo hace que lo mejor sea enviar la mayor cantidad de flujo de 1 a 4

Revisitando asignación como un problema de flujos

Tenemos M máquinas, J tareas, y un costo c_{ij} de asignar i a j. Queremos encontrar una asignación 1-a-1 que minimice el costo total.

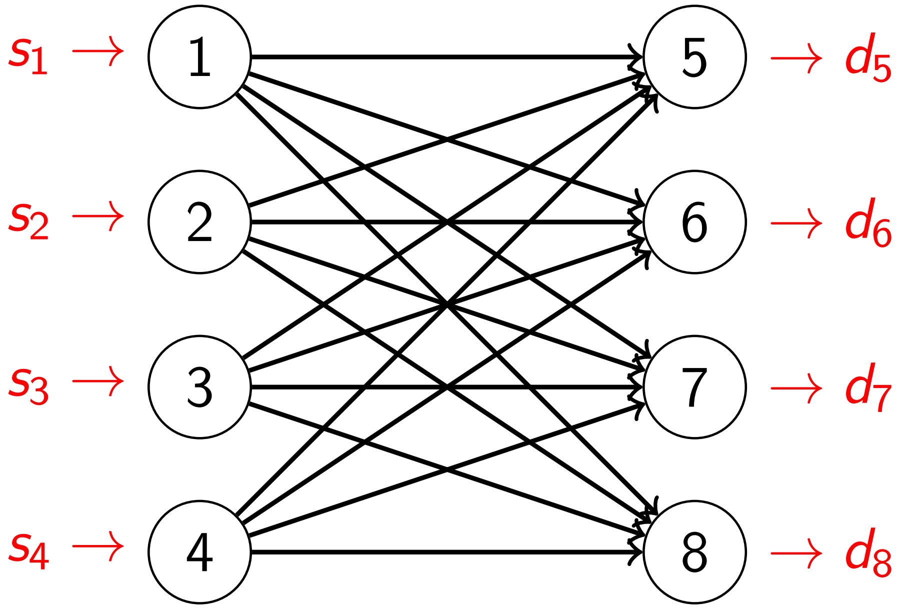
gracias a esto, cada máquina "enviará" una unidad a una tarea. Lo que induce un emparejamiento o asignación.



Para resolver esto como un problema de flujo a costo mínimo basta el grafo de arriba, con las máquinas como nodos de oferta (balance 1) y las tareas como nodos de demanda (balance -1).

Transporte Óptimo

Otro problema similar es el de transporte óptimo: acá tenemos nodos con oferta S y demanda D, y costos entre ellos c_{ij}. Queremos escoger cómo transportar de manera de minimizar costos.



Este problema es un poco más general que el problema de asignación, pero también es fácilmente un caso particular del problema de flujo a costo mínimo. Lo particular de este problema es que solo hay origenes y destinos (sin nodos intermedios).