

# Modelamiento y Optimización

## Clase 14

Gonzalo Muñoz

6 de Mayo 2024



# Dual de un PL

Primal  
(Dual del dual)

$$\text{mín } c^T x$$

$$\text{s.a: } a_i^T x \geq b_i, i \in M_1$$

$$a_i^T x \leq b_i, i \in M_2$$

$$a_i^T x = b_i, i \in M_3$$

$$x_j \geq 0, j \in N_1$$

$$x_j \leq 0, j \in N_2$$

$$x_j \text{ libre}, j \in N_3$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Dual (mejor cota inferior del primal)

$$\text{máx } b^T y$$

$$\text{s.a: } y_i \geq 0, i \in M_1$$

$$y_i \leq 0, i \in M_2$$

$$y_i \text{ libre}, i \in M_3$$

$$A_j^T y \leq c_j, j \in N_1$$

$$A_j^T y \geq c_j, j \in N_2$$

$$A_j^T y = c_j, j \in N_3$$

# Ejemplo

Calcular el dual de

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & 100x_1 + 100x_2 \\ \text{sujeto a:} & x_1 + 2x_2 \geq 3 \quad \leadsto (\gamma_1) \\ & 2x_1 + x_2 \geq 1 \quad \leadsto (\gamma_2) \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

$$\text{max} \quad 3\gamma_1 + 1\gamma_2$$

$$\gamma_1 \geq 0$$

$$\gamma_2 \geq 0$$

$$(x_1) \quad \gamma_1 + 2\gamma_2 \leq 100$$

$$(x_2) \quad 2\gamma_1 + \gamma_2 \leq 100$$

# Dualidad débil y Fuerte



# Teorema de dualidad débil

## Teorema

Si  $x$  es una solución factible para el problema primal e  $y$  es una solución factible para su dual, entonces  $b^T y \leq c^T x$ .

minimización



Ejemplo de la clase pasada:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -4x_1 + 2x_2 \quad \} c^T x \\ \text{sujeto a:} & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 \geq -2 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 8y_1 - 2y_2 \\ \text{sujeto a:} & -y_1 - y_2 = -4 \\ & 2y_1 + y_2 \leq 2 \\ & y_1 \leq 0 \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

Tomemos  $x = (2, 0)$  e  $y = (-2, 6)$ :

Ej: Verificar factibilidad.

$$c^T x = -4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -8$$

$$b^T y = 8 \cdot (-2) - 2 \cdot 6 = -28$$

$$-8 \geq -28$$



# Teorema de dualidad débil

## Corolario

Sea  $x$  solución factible para el primal e  $y$  solución factible para el dual tales que  $b^T y = c^T x$ . Entonces  $x$  e  $y$  son óptimos para el primal y el dual respectivamente.

Consideremos  $x = (12, 10)$  en el ejemplo anterior:

Ej: verificar factibilidad

$$c^T x = -4 \cdot 12 + 2 \cdot 10 = -28$$

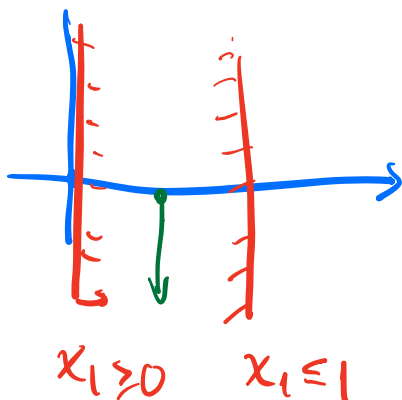
$$= \underbrace{(8, -2)}_b \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (12, 10)$  es óptimo para el primal  
 $(-2, 6)$  es óptimo para el dual

# Consecuencia de dualidad débil

## Corolario

*Si el valor del primal es  $-\infty$ , entonces el dual es infactible. Si el valor del dual es  $+\infty$ , entonces el primal es infactible.*



Primal

$$\begin{array}{ll} \min & x_2 \\ \text{s.a} & x_1 \leq 1 \quad (y_1) \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \text{ libre} \end{array}$$

No acotado  $\rightarrow$  valor  $-\infty$

Dual

$$\begin{array}{ll} \max & y_1 \\ & y_1 \leq 0 \\ (x_1) & y_1 \leq 0 \\ (x_2) & 0 \cdot y_1 = 1 \end{array}$$

In factible.

# Dualidad fuerte

## Teorema

Supongamos que el primal posee solución óptima. Entonces, el dual también posee un óptimo y sus valores **son iguales**.

Veamos la demostración de esto cuando el primal está en **forma estándar** y tiene un óptimo no-degenerado.

costos reducidos no-negativos

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{óptimo: } \quad & x_B = B^{-1}b \\ & x_N = 0 \end{aligned}$$

$$\text{valor obj: } c_B^T B^{-1} b$$

debería ser  $y^T$

Defino  $y = (c_B B^{-1})^T$  (tiene mismo valor que  $x$ )  
Factibilidad:

$$A^T y - c \leq 0$$

$$A^T (c_B B^{-1})^T - c \leq 0$$

$$-(c_B B^{-1} A)^T + c \geq 0 \rightsquigarrow \text{costos reducidos}$$



# Combinaciones posibles entre primal y dual

<div>Dual Primal</div>	óptimo se alcanza	no acotado	Infactible
óptimo se alcanza	Posible	Imposible	Imposible
no acotado	Imposible	Imposible	Posible
Infactible	Imposible	Posible	Posible

lo veremos

*M* por dualidad fuerte

*m* por dualidad débil