# Modelamiento y Optimización

## Clase 2

Gonzalo Muñoz

15 de Marzo 2024

# Modelamiento

# En la clase pasada

Una empresa vende cajas de bombones en dos versiones distintas, $A$ y $B$. La versión $A$ corresponde a una caja con 2 bombones grandes y 4 pequeños, mientras que la versión $B$ va con 3 bombones grandes y 3 pequeños. La empresa cuenta con un total de 18 bombones grandes y 24 pequeños, y obtiene una utilidad de 8 y 7 unidades con las versiones $A$ y $B$, respectivamente.

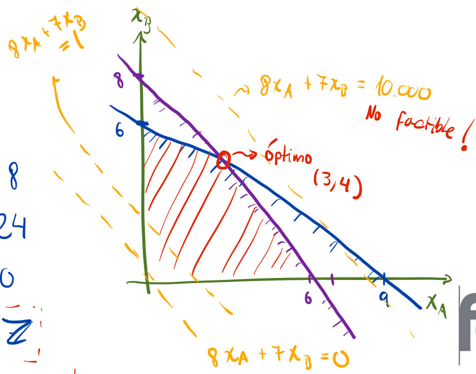
$x_A$ = Cajas A

$x_B$ = Cajas B

$$\max \quad 8x_A + 7x_B$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} 2x_A + 3x_B &\leq 18 \\ 4x_A + 3x_B &\leq 24 \\ x_A, x_B &\geq 0 \\ \boxed{x_A, x_B \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Ignoremos por ahora



# Producción con capacidades

Un alquimista desea crear medallones de oro, plata y bronce para vender. Los medallones son creados con latas y polvos de hadas. A continuación se resumen los materiales disponibles, requerimientos y precios:

| | Oro | Plata | Bronce | Disponible |
|---|---|---|---|---|
| Días de trabajo | 2 | 4 | 5 | 100 |
| Latas (kg) | 1 | 1 | 1 | 30 |
| Polvos de hadas (gr) | 10 | 5 | 2 | 204 |
| Precio de venta | 52 | 30 | 20 | |

Formular un modelo de optimización lineal que determine qué medallones producir.

Variables : $x_O$ = Medallones de oro

$x_P$ = " " plata

$x_B$ = " de Bronce

# Producción con capacidades

$$\max \quad 52x_0 + 30x_P + 20x_B$$

$$2x_0 + 4x_P + 5x_B \leq 100$$

$$x_0 + x_P + x_B \leq 30$$

$$10x_0 + 5x_P + 2x_B \leq 204$$

$$x_0, x_P, x_B \geq 0$$

$$x_0, x_P, x_B \in \mathbb{Z}$$

Modelo lineal entero

# El problema de la mochila

Supongamos que tenemos una mochila de capacidad 10 Kg, y tenemos 5 elementos que nos gustaría llevar. Los elementos pesan $\{4, 2, 7, 3, 4\}$ Kg, y les hemos asignado un valor de $\{3, 1, 4, 2, 2\}$. ¿Cómo podemos elegir qué elementos llevar de manera de maximizar el valor total en la mochila?

Variables: $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si llevo } i \text{ en la mochila} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$$\max \quad 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5$$

s.a:

$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 4x_5 \leq 10$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

# El problema de la mochila

Formulemos el problema de la mochila en general. Contamos con $n$ elementos, con peso $w_i$ y un beneficio $u_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. La mochila tiene capacidad $C$. ¿Cómo podemos elegir qué elementos llevar de manera de maximizar el valor total en la mochila?

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si llevo } i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$$

$$\text{s.a: } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq C$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

# Dimensionamiento de lote (Lot sizing)

Tenemos un emprendimiento de almuerzos congelados, y una demanda para los próximos $T$ periodos de $d_1, d_2, \ldots, d_T$. Producir un almuerzo en el periodo $t$ cuesta $p_t$. El costo de producir en el periodo $t$ es $c_t$ (fijo). El costo de inventario del periodo $t$ al $t+1$ es de $h_t$ por cada almuerzo.

Formular un problema de optimización que decida cuánto producir en el periodo completo de manera de satisfacer la demanda al costo mínimo.

Decisiones: $x_t$ = cuántos almuerzos cocinan en $t$

relacionadas $y_t$ = cocinar o no

$z_t$ = inventario de $t$ a $t+1$

# Dimensionamiento de lote (Lot sizing)

$$\min \sum_{t=1}^{T} (p_t x_t + c_t y_t + h_t z_t)$$

$$x_t + z_{t-1} = d_t + z_t \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

$$z_0 = 0$$ (o un inventario inicial)

$$x_t, z_t \geq 0$$

$$x_t, z_t \in \mathbb{Z} \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

$$y_t \in \{0, 1\}$$

$$x_t \leq M y_t$$

↳ Big-M

(Ej: $M = \sum_{t=1}^{T} d_t$)

# Localización (Facility location, P-median)

Queremos instalar $P$ nuevos almacenes en una comuna. Consideramos $J$ posibles ubicaciones, y tenemos un conjunto $K$ de almacenes ya existentes. Además, tenemos un conjunto $I$ de clientes que utilizarían estos almacenes. El cliente $i \in I$ está a distancia $d_{ij}$ del lugar $j \in J \cup K$.

Formular el problema de decidir dónde abrir los almacenes de manera de minimizar la distancia total (suma) entre clientes y almacenes.

Decisiones:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si instalamos almacén } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si cliente } i \text{ usa almacén } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

# Localización (Facility location, P-median)

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J \cup K} d_{ij} x_{ij}$$

s.a:

$$\sum_{j \in J} y_j = P$$ (almacenes a instalar)

$$\sum_{j \in J \cup K} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I$$ (toda persona tiene un almacén)

(si i se asigna a j, j debe existir) $$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in I \; \forall j \in J$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

$$y_j \in \{0,1\}$$

# Localización (Facility location, P-Centering)

Supongamos ahora que queremos minimizar la distancia máxima entre un almacén y un cliente. ¿Cómo modificar el modelo anterior?

$$\min \quad t$$

$$\sum_{j \in J \cup K} d_{ij} x_{ij} \leq t \qquad \forall i \in I$$

$$\sum_{j \in J} y_j = P \qquad \text{(almacenes a instalar)}$$

$$\sum_{j \in J \cup K} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I \quad \text{(toda persona tiene un almacén)}$$

(si i se asigna a j, j debe existir) $$x_{ij} \leq y_j \qquad \forall i \in I \quad \forall j \in J$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

$$y_j \in \{0,1\}$$