Modelamiento y Optimización

Clase 11

Gonzalo Muñoz

19 de Abril 2024

Simplex

Repaso del algoritmo Simplex:

1. Partimos con una solución básica factible x con base B (pendiente cómo obtenerla desde cero).
2. Si $\bar{c} \geq 0$ estamos en un óptimo (demo pendiente) ✓
3. Si no, existe una variable no-básica x_j tal que $\overline{c}_j < 0$ y conviene movernos en la dirección básica de x_j (pendiente qué hacer si hay más de una)
4. Escogemos el $\delta \geq 0$ más grande que mantenga a $x + \delta d$ dentro del poliedro.

Simplex

Sólo podemos salir del poliedro si una variables se vuelve negativa.

4.1 Si $d \geq 0$, siempre $x + \delta d \geq 0$ y el valor del problema es $-\infty$. ✓

4.2 Si no, existe i básico tal que $d_i < 0$. Luego, $x_i + \delta d_i \geq 0$ equivale a tomar $\delta \leq -x_i/d_i$.

De esta forma, el mayor valor que puede tomar δ es

$$\delta^* = \min_{i\,:\,d_i<0} \left\{ -\frac{x_i}{d_i} \right\}.$$

Si $\delta^* > 0$ la nueva SBF esta dada por $x + \delta^* d$. Alguna variable básica se hará 0 y sale de la base (pendiente qué hacer si hay más de una).

Si $\delta^* = 0$ estamos en un caso degenerado. No cambiaremos de SBF pero si cambiará la base (detalles pendientes).

Costos reducidos y optimalidad

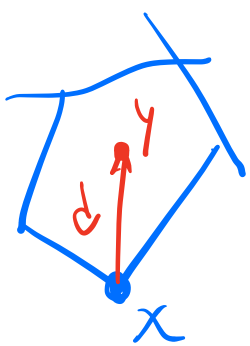
Teorema

Considere una solución básica factible x asociada a una base B, y sea $\overline{c}$ el vector de costos reducidos. Si suponemos un problema de minimización, tenemos que:

(*)
- *Si $\overline{c} \geq 0$ entonces x es solución óptima.*
- *Si x es óptima y no-degenerada, entonces $\overline{c} \geq 0$.*

Dem de (*): sea x SBF tal que $\overline{c} \geq 0$.

sea y factible cualquiera, y $d = y - x$



$$c^T d = c_B^T d_B + c_N^T d_N = c_B^T(-B^{-1} N d_N) + c_N^T d_N$$

$$= \underbrace{(c_N^T - c_B^T B^{-1} N)}_{\overline{c} \geq 0} \underbrace{d_N}_{y_N - \cancel{x_N}^{\,0} \geq 0} \geq 0$$

$Ad = 0$

$\Leftrightarrow [B \mid N] \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow d_B = -B^{-1} N d_N$

$\Rightarrow c^T y \geq c^T x \Rightarrow x$ óptimo.

Problemas no-acotados

Teorema

Dada una solución básica factible x con su base B, si existe una variable no-básica x_j con costo reducido $\bar{c}_j < 0$ y $\underbrace{-B^{-1}A_j}_{d_B} \geq 0$, entonces el problema es no-acotado (valor $-\infty$).

d_B componente básica de dirección

$d_N = (0, 0, \ldots, 0\, 1, 0 \ldots)$

Dem: En este caso

$$d = (d_B, d_N) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x + \delta d \geq 0 \quad \forall \delta \geq 0$$

(podemos movernos indefinidamente)

$$c^T(x + \delta d) = c^T x + \delta \underbrace{c^T d}_{\bar{c}_j < 0}$$

cuando d es la dirección que aumenta a x_j

$\longrightarrow -\infty$ cuando $\delta \to \infty$

Problema no acotado.

Cómo encontrar una SBF inicial: Simplex Fase I

Supongamos que queremos partir el algoritmo, pero no contamos con una base inicial. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\
& -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\
& -4x_2 - 9x_3 = -5 \qquad / \cdot -1 \\
& 3x_3 + x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Primero que todo, convertimos el modelo de tal manera que $Ax = b$ cumpla $b \geq 0$.

Multiplicar la restricción con lado derecho negativo por -1.

Cómo encontrar una SBF inicial: Simplex Fase I

Ahora, agreguemos variables que hagan el problema más fácil: haremos que $x = 0$ sea factible artificialmente:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_1 &= 3 \\
-x_1 + 2x_2 + 6x_3 + y_2 &= 2 \\
4x_2 + 9x_3 + y_3 &= 5 \\
3x_3 + x_4 + y_4 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqslant 0 \\
y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Variables artificiales

Base inicial $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

$B = I$ (identidad)

Y con la función objetivo tratamos de lograr encontrar un x realmente factible. ¿Cómo asegurar esto?

Función objetivo $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 0$

Si el óptimo es $0 \Rightarrow y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$

y podemos identificar base en las $\underline{\underline{x}}$.

Cómo encontrar una SBF inicial: Simplex Fase I

Caso general:

Problema Original

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con $b \geq 0$.

Simplex Fase I:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{s.a.} \quad & Ax + Iy = b \\ & \underbrace{x, y \geq 0}_{\text{Base inicial fácil}} \end{aligned}$$

Si óptimo es $> 0 \longrightarrow$ infactible.

Si óptimo es $= 0$ y no hay variable y_i en la base final $\longrightarrow$ encontramos una base para el original.

Si óptimo es $= 0$ y quedó algún y_i en la base final, $\longrightarrow$ solución degenerada y hay que empujar a y_i fuera de la base.