Universidad de Guadalajara

Piensa y trabaja

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Actividad 4 por equipo

Control I

Carlos Iván Aldana López

Ingeniería en robótica

Equipo 4:

Osmar Josel Méndez Rosales

Luis Fernando Loza López

Josué Esaú Hernández Ramírez

Daniel Alejandro Hernández López

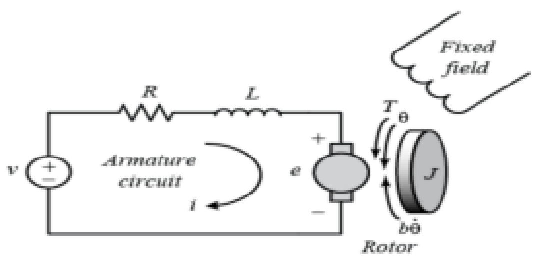
Isidro Martínez Valdez

Ricardo Yahir Sánchez Mendoza

Karla Goretti Gutiérrez Iñiguez

1.- Para el motor de corriente directa que se muestra en la Figura 1 realice los siguientes puntos:

a) Encuentre su representación en Espacio de Estado, use la posición θ, la velocidad rotacional $\widehat{\theta}$ y la corriente i como variables de estado. Señal de salida: posición θ.



$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = Ki$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\dot{\theta}$$

Figura 1. Motor y su modelo (***J=0.05 kg·m², b=0.07 N·m·s, K=0.04 N·m/A, R=4 ohm, L=1.7 H***).

Para comenzar se va a realizar un pequeño análisis del sistema de este modo se comprenderán las relaciones

Para la primer ecuación se tiene:

$J\theta'' + b\theta' = Ki$ (1)

Esta nos indica que la fuerza que actúa sobre el torque generado por la corriente eléctrica menos las fuerzas de fricción está relacionada con su aceleración angular.

El torque generado por el motor se puede representar como $T_e = Ki$

El torque resistente incluye dos componentes:

Fricción viscosa: Proporcional a la velocidad angular θ’, con un coeficiente b.

Inercia del rotor: Resiste los cambios en aceleración angular, representada por Jθ''

En la segunda ecuación se tiene:

$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\theta'$ (2)

Esta ecuación relaciona el movimiento del rotor θ’ con la corriente i, describiendo el aspecto eléctrico.

$L\frac{di}{dt}$: Representa el cambio de corriente debido a la inductancia del circuito.

Ri: La caída de voltaje resistivo debido a la corriente i.

V: El voltaje aplicado al circuito.

Kθ' La fuerza contraelectromotriz generada por el rotor al moverse en el campo magnético, que se opone al voltaje V.

Ahora que se entiende el sistema se deben seleccionar unas variables de estado que describen el sistema en función de su estado actual. En este caso se necesitan las magnitudes que conectan las ecuaciones eléctricas y mecánicas, y juntas describen tanto el movimiento del rotor como el comportamiento del circuito.

En este ejercicio son:

$x_1 = \theta : \textit{posición angular del rotor}$

$x_2 = \theta' : \textit{velocidad angular del rotor}$

$x_3 = i : \textit{corriente eléctrica en el circuito}$

Ya que el objetivo de representar un sistema en espacio de estado es describir la dinámica en términos de un conjunto de derivadas de primer orden se despejan los términos de mayor orden.

Partimos de:

Jθ’’+bθ’=Ki

Aislamos θ’’ para describirla como función de θ’ y i:

$\theta'' = \frac{1}{J}(Ki - b\theta')$

En términos de las variables de estado:

$\theta' = x_2$

$i = x_3$ por lo tanto: $\theta'' = \frac{1}{J}(Kx_3 - bx_2)$ o $x_2' = \frac{1}{J}(Kx_3 - bx_2)$

Para la ecuación 2 se despeja $\frac{di}{dt}$:

$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(V - Ri - K\theta')$

En términos de las variables de estado:

$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(V - Rx_3 - Kx_2)$ o $x_3' = \frac{1}{L}(V - Rx_3 - Kx_2)$

entonces por definición: $x_1' = x_2$

La posición angular cambia con la velocidad angular x_2.

Agrupamos las ecuaciones obtenidas en forma matricial.

Vector de estado:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \\ i \end{bmatrix}$$

Sistema:

$x' = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

En este caso la salida y = posición θ

en cambio la entrada es u=V voltaje aplicado

Entonces:

$A = [\,[0,\ 1,\ 0],\ [0,\ -\frac{b}{J},\ \frac{K}{J}],\ [0,\ -\frac{K}{L},\ -\frac{R}{L}]\,]$

$B = [[0],\ [0],\ [\frac{1}{L}]]$

$C = [[1],\ [0],\ [0]]$

$D = [0]$ ya que no existe una conexión directa entre la entrada y la salida

En la **figura 1.1** se puede apreciar el modelo en espacio de estados de una manera más clara

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 0 \cdot u$$

Figura 1.1 espacios de estado del sistema que aparece en la figura 1

Sustituyendo los valores por los otorgados en la **Figura 1**:

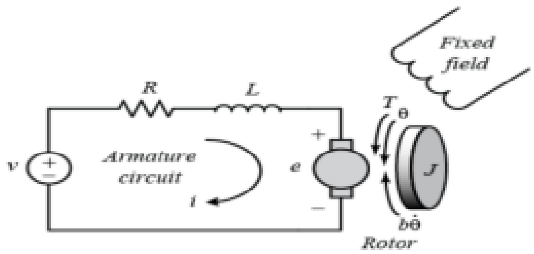
$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{.07}{.05} & \frac{.04}{.05} \\ 0 & -\frac{.04}{1.7} & -\frac{4}{1.7} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{1.7} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Se puede observar que se cumple A de tamaño nxn ya que las variables de estado son 3 (θ, θ', i), el vector x tamaño nx1, la entrada al igual que el vector x es de tamaño 3x1 y el vector y es de tamaño mx1 donde m son las variables de salida en este caso es solo 1 (θ).

b) Diseñe un controlador por retroalimentación de estado para asignar los polos en: p1 = -1-3i, p2 =-1+3i y p3 =-1. Hacerlo con el método de colocación

de polos y con el método de Ackerman. Detalle y comente cada uno de los pasos de ambos métodos.



$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = Ki$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\dot{\theta}$$

Figura 1. Motor y su modelo (***J=0.05 kg·m², b=0.07 N·m·s, K=0.04 N·m/A, R=4 ohm, L=1.7 H***).

Método de colocación de polos

Primero tenemos definidas nuestras matrices A y B, obtenidas en el inciso a:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1.4 & 0.8 \\ 0 & -0.023 & -2.35 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.58 \end{bmatrix}$$

Procedemos a calcular la matriz de controlabilidad para saber si nuestro sistema es controlable:

$$C = \left[B \;\; AB \;\; A^2B\right] \qquad AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1.4 & 0.8 \\ 0 & -0.023 & -2.35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.464 \\ -1.363 \end{bmatrix}$$

$$A(AB) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1.4 & 0.8 \\ 0 & -0.023 & -2.35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0.464 \\ -1.363 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.464 \\ -1.73 \\ 3.18 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.464 \\ 0 & 0.464 & -1.73 \\ 0.58 & -1.36 & 3.18 \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante de C:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0.464 \\ 0 & 0.464 & -1.737 \\ 0.58 & -1.36 & 3.185 \end{vmatrix} = -0.12$$

Vemos que el determinante es distinto de cero, por lo que nuestro sistema es controlable.

Ahora utilizamos la fórmula de retroalimentación de estado $[A \; - \; BK]$, con ella obtenemos la ecuación de estado en lazo cerrado y la matriz del sistema en lazo cerrado A_C

$$\mathrm{Ac} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1.4 & 0.8 \\ 0 & -0.023 & -2.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.58 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1.4 & 0.8 \\ 0 & -0.023 & -2.35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.58k_1 & 0.58k_2 & 0.58k_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1.4 & 0.8 \\ -0.58k_1 & -0.023 - 0.58k_2 & -2.35 - 0.58k_3 \end{bmatrix}$$

La asignación de polos se determina a través de la ecuación característica A_C

$$|s\mathbf{I} - \mathrm{Ac}| = \left| \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1.4 & 0.8 \\ -0.58k_1 & -0.023 - 0.58k_2 & -2.35 - 0.58k_3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= |s\mathbf{I} - \mathrm{Ac}| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s + 1.4 & -0.8 \\ 0.58k_1 & 0.023 + 0.58k_2 & s + 2.35 + 0.58k_3 \end{vmatrix}$$

Finalmente calculamos el determinante

$$= (s)(s + 1.4)(s + 2.35 + 0.58k_3) + (-1)(-0.8)(0.58k_1) - (s(-0.8)(0.023 + 0.58k_2))$$

Lo resolvemos separándolo por partes

1. $(s)(s + 1.4)(s + 2.35 + 0.58k_3) = s^3 + 2.35s^2 + 0.58k_3 + 1.4s^2 + 3.29s + 0.81k_3$
2. $(-1)(-0.8)(0.58k_1) = 0.464k_1$
3. $-(s(-0.8)(0.023 + 0.58k_2)) = 0.018s + 0.464k_2$

Juntando todos los resultados

$$s^3 + 2.35s^2 + 0.58k_3 + 1.4s^2 + 3.29s + 0.81k_3 + 0.464k_1 + 0.018s + 0.464k_2$$

Realizamos factorización por factor común

$$s^3 + (1.4 + 2.35 + 0.58k_3)s^2 + (3.29 + 0.81k_3 + 0.018 + 0.464k_2)s + 0.464k_1$$

Ahora vemos que nuestros polos deseados son
$s_1 = -1 - 3i,\ s_2 = -1 + 3i,\ s_3 = -1$

Obtenemos nuestra ecuación característica del sistema con dichos valores multiplicando los factores correspondientes a cada uno de ellos. Entonces nuestra ecuación característica deseada es:

$$(s + 1 - 3i)(s + 1 + 3i)(s + 1) = (s + 1^2) + 3^2 = s^2 + 2s + 10\,(s + 1)$$

$$= s^3 + 3s^2 + 12s + 10$$

Comparando los términos similares, obtenemos el sistema de ecuaciones algebráicas para resolver k_1, k_2 y k_3

$$3.75 + 0.58k_3 = 3 \Rightarrow 0.58k_3 = 3 - 3.75 \Rightarrow k_3 = -\frac{0.75}{0.58} \Rightarrow k_3 = -1.29$$

$$3.308 + 0.81k_3 + 0.464k_2 = 12 \Rightarrow 3.308 + 0.81(-1.29) + 0.464k_2 = 12$$

$$= 2.26 + 0.464k_2 = 12 \Rightarrow 0.464k_2 = 9.74 \Rightarrow k_2 = \frac{9.74}{0.464} \Rightarrow k_2 = 20.99$$

$$0.464k_1 = 10 \Rightarrow k_1 = \frac{10}{0.464} \Rightarrow k_1 = 21.55$$

$K = [21.55 \quad 20.99 \quad -1.29]$

Recordando que la ley de control es $u = -Kx + r$ tenemos que:

$$u = [-21.55 \quad -20.99 \quad 1.29]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$u = [-21.55x_1 - 20.99x_2 + 1.29x_3]$

Método de Ackerman

Primero tenemos definidas nuestras matrices A y B, obtenidas en el inciso a:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1.4 & 0.8 \\ 0 & -0.023 & -2.35 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.58 \end{bmatrix}$$

Diseñaremos un controlador por retroalimentación de estado para asignar los polos en $s_1 = -1 - 3i,\ s_2 = -1 + 3i,\ s_3 = -1$

Obtenemos la ecuación característica deseada

$(s + 1 - 3i)(s + 1 + 3i)(s + 1) = (s + 1^2) + 3^2 = s^2 + 2s + 10\,(s + 1)$

$= s^3 + 3s^2 + 12s + 10$

Utilizamos la fórmula de Ackerman para las ganancias de retroalimentación:

$K = [0\ \ 0\ \ 1]\left[B\ \ AB\ \ A^2B\right]^{-1} \text{Ø}(A)$

Obtenemos la ecuación característica deseada evaluando s=A en la siguiente fórmula:

$\text{Ø}(A) = A^3 + 3A^2 + 12A + 10I$

Sustituimos nuestra matriz A

$\varnothing(A)$=

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1.4 & 0.8\\ 0 & -0.023 & -2.35\end{bmatrix}^3 + 3\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1.4 & 0.8\\ 0 & -0.023 & -2.35\end{bmatrix}^2 + 12\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1.4 & 0.8\\ 0 & -0.023 & -2.35\end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Resolvemos cada parte de la ecuación característica

$$\phi(A) = \begin{bmatrix}0 & 1.94 & -3\\ 0 & -2.64 & 8.6\\ 0 & -0.25 & -12.86\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -4.2 & 2.4\\ 0 & 5.82 & -9\\ 0 & 0.258 & 16.5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 12 & 0\\ 0 & -16.8 & 9.6\\ 0 & -0.27 & -28.2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix}10 & 9.74 & -0.6\\ 0 & -3.62 & 9.2\\ 0 & -0.26 & -14.56\end{bmatrix}$$

Ahora tenemos la matriz de controlabilidad ya calculada anteriormente:

$$C= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0.464\\ 0 & 0.464 & -1.73\\ 0.58 & -1.36 & 3.18\end{bmatrix}$$

Teniendo la matriz de controlabilidad C tendremos que calcular la inversa

$C^{-1} = \left[B \;\; AB \;\; A^2B\right]^{-1}$

Utilizamos la fórmula de la inversa de una matriz: $\frac{1}{det(C)}(Adj(C))^T$

Calculamos el determinante de C:

$$\det(C) = \begin{vmatrix}0 & 0 & 0.464\\ 0 & 0.464 & -1.737\\ 0.58 & -1.36 & 3.185\end{vmatrix} = -0.12$$

Teniendo el determinante calculamos la adjunta de la matriz C:

$$\mathrm{Adj}(\mathrm{C}) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0.464 & -1.73 \\ -1.36 & 3.18 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1.73 \\ 0.58 & 3.18 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0.464 \\ 0.58 & -1.36 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0.464 \\ -1.36 & 3.18 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0.464 \\ 0.58 & 3.18 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0.58 & -1.36 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0.464 \\ 0.464 & -1.73 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0.464 \\ 0 & -1.73 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.464 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Resolviendo los menores de la matriz adjunta calculando cada determinante nos queda la matriz de la siguiente forma:

$$\mathrm{Adj}(\mathrm{C}) = \begin{bmatrix} -0.87 & 1 & -0.27 \\ 0.63 & -0.27 & 0 \\ -0.21 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Después calculamos la matriz transpuesta de la adjunta para ello sólo cambiamos las filas por las columnas de la matriz:

$$\mathrm{Adj}(\mathrm{C}) = \begin{bmatrix} -0.87 & 0.63 & -0.21 \\ 1 & -0.27 & 0 \\ -0.27 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ya tenemos todos los datos que necesitamos para calcular la inversa de la matriz C sustituyendo en la fórmula:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot Adj(C)^T = -\frac{1}{0.12} \begin{bmatrix} -0.87 & 0.63 & -0.21 \\ 1 & -0.27 & 0 \\ -0.27 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo nos queda la matriz inversa de C nos queda:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 7.25 & -5.25 & 1.75 \\ 8.33 & 2.25 & 0 \\ 2.25 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo todos los valores en la fórmula de Ackerman tenemos que:

$$K = [0 \ \ 0 \ \ 1]\left[B \ \ AB \ \ A^2B\right]^{-1} \emptyset(A)$$

$$K = [0 \ \ 0 \ \ 1]\begin{bmatrix} 7.25 & -5.25 & 1.75 \\ 8.33 & 2.25 & 0 \\ 2.25 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 9.74 & -0.6 \\ 0 & -3.62 & 9.2 \\ 0 & -0.26 & -14.56 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos las matrices y resolvemos:

$$\mathrm{K} = [2.25 \ \ 0 \ \ 0]\begin{bmatrix} 10 & 9.74 & -0.6 \\ 0 & -3.62 & 9.2 \\ 0 & -0.26 & -14.56 \end{bmatrix}$$

$$K = [22.5 \quad 21.91 \quad -1.35]$$

Recordando que la ley de control es $u =- Kx + r$ tenemos que:

$$u = -[\ \mathbf{22.5} \quad \mathbf{21.91} \quad \mathbf{-1.35}\ ]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix}$$

$$u = [-\ 22.5x_1 - 21.91x_2 + 1.35x_3]$$

```
%% Espacio de estados
J=0.05;
b=0.07;
K=0.04;
R=4;
L=1.7;
% Matrices del modelo en espacio de estado
A_o = [0        1        0;
       0   -b/J   K/J;
       0   -K/L  -R/L];
B_o = [0;0;1/L];
A = [0        1        0;
       0   -1.4   .8;
       0   -0.0235  -2.353];
B = [0;0;0.58];
C = [1 0 0];
D = 0;
% Crear el sistema en espacio de estado
sys = ss(A, B, C, D);
sys2 = ss(A_o, B_o, C, D);
syms s
P_1=(s+1-3i)*(s+1+3i)*(s+1);
P=s^3+3*s^2+12*s+10;
Pol  = [-1-3i,-1+3i,-1];
o1=acker(A_o,B_o,Pol)
o2=place(A_o,B_o,Pol)
```

```
e1=acker(A,B,Pol)

e2=place(A,B,Pol)

% K=[2.25 0 0]*[10 9.74 -.6;0 -3.62 9.2;0 -.26 -14.56]

C_1=[B A*B A*A*B]

inv(C_1)

K=[0 0 1]*inv(C_1)*[1*(A)^3+3*(A)^2+12*(A)+10*[1 0 0;0 1 0;0 0 1]]
```

c) Programe en Simulink el sistema en Espacio de Estados con el controlador diseñado en el inciso b) y comente la respuesta transitoria y en estado estacionario a un escalón unitario (1 rad) (20 puntos).

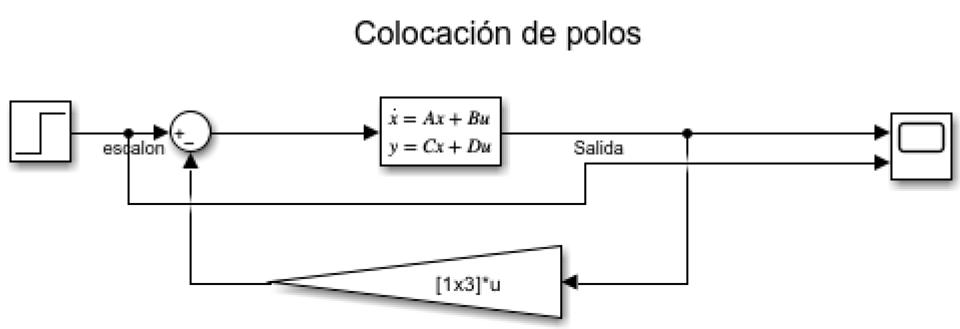


Figura 2: Esquema del sistema controlado usando colocación de polos.

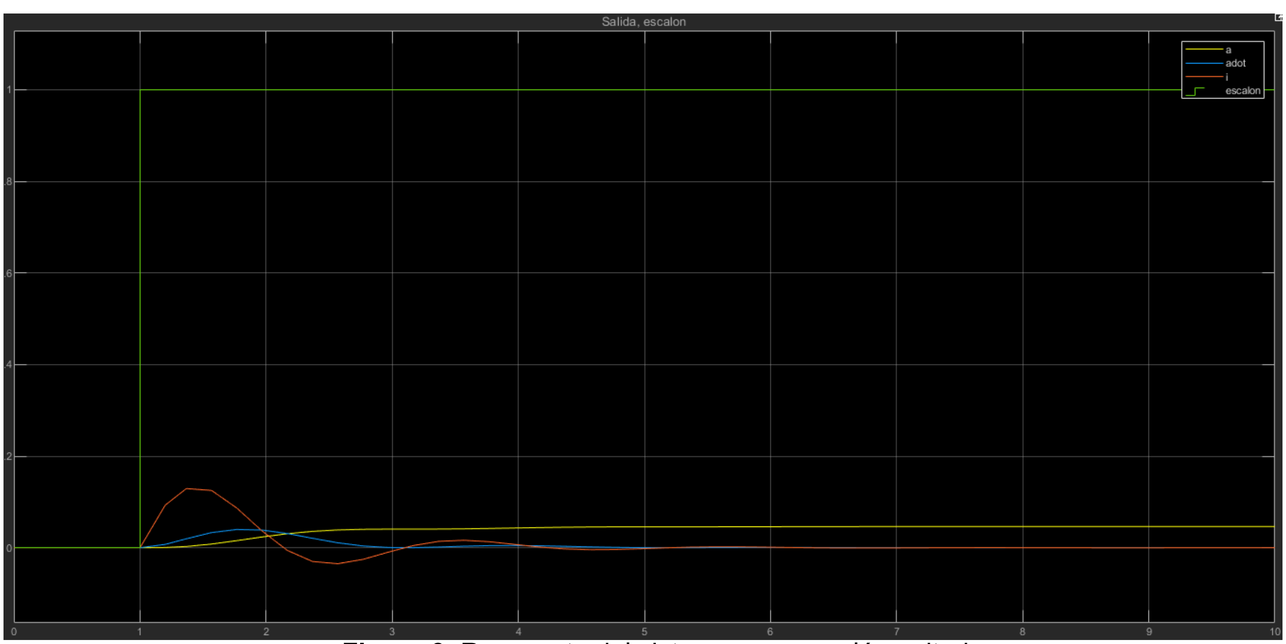


Figura 3: Respuesta del sistema a un escalón unitario.

En la **Figura 2** se muestra el esquema del sistema simulado en Simulink ya conectada con la matriz de ganancias *K* de retroalimentación, por otro lado, la **Figura 3** muestra la respuesta del sistema de la **Figura 2** ante una entrada escalón unitario. Las Respuestas mostradas son la posición, velocidad y la corriente suministrada al motor. Centrándonos en la posición, vemos que si bien la respuesta transitoria no tiene sobreimpulso, si es un poco lenta; además, no llega a la posición deseada o hay mucho error en el estado estacionario, quizás se deba a un integrador en el origen o un mal cálculo o sobreajuste en las ganancias. Lo que se puede hacer para solucionarlo es agregar un PI para solucionar o disminuir enormemente el error en estado estacionario, un PID también serviría y además mejoraría la respuesta transitoria, más aún teniendo en cuenta que el PI podría causar un sobre impulso más allá de lo deseado.

En la **Figura 2** observamos el esquema del sistema, su simulación en Simulink, con la matriz k calculada por el método de colocación de polos de retroalimentación. En la **Figura 4** ahora observamos el método de Ackerman.

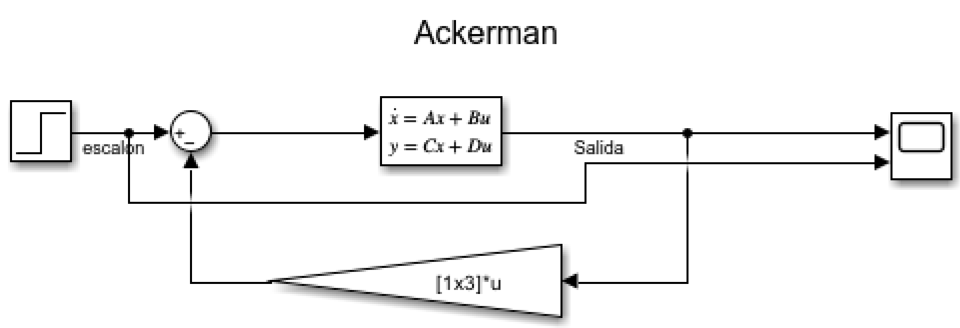


Figura 4: Esquema del sistema controlado usando el método Ackerman.

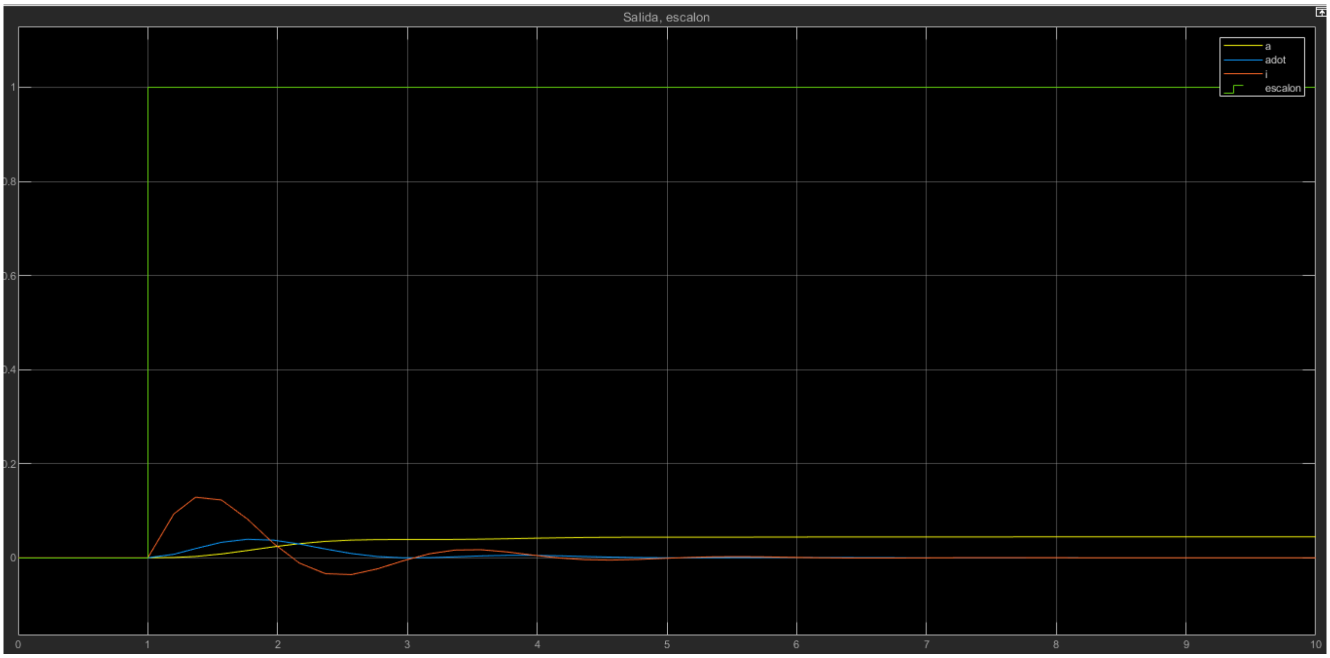


Figura 5: Respuesta del sistema a un escalón unitario.

La **Figura 4** y **Figura 5** muestran el mismo sistema controlado y su respuesta a la misma entrada solo que esta vez la matriz de ganancias fue calculada por el método de Ackerman. No hay mucho que comentar, con solo ver las dos matrices notamos que son casi idénticas, por lo tanto, las respuestas son prácticamente iguales.