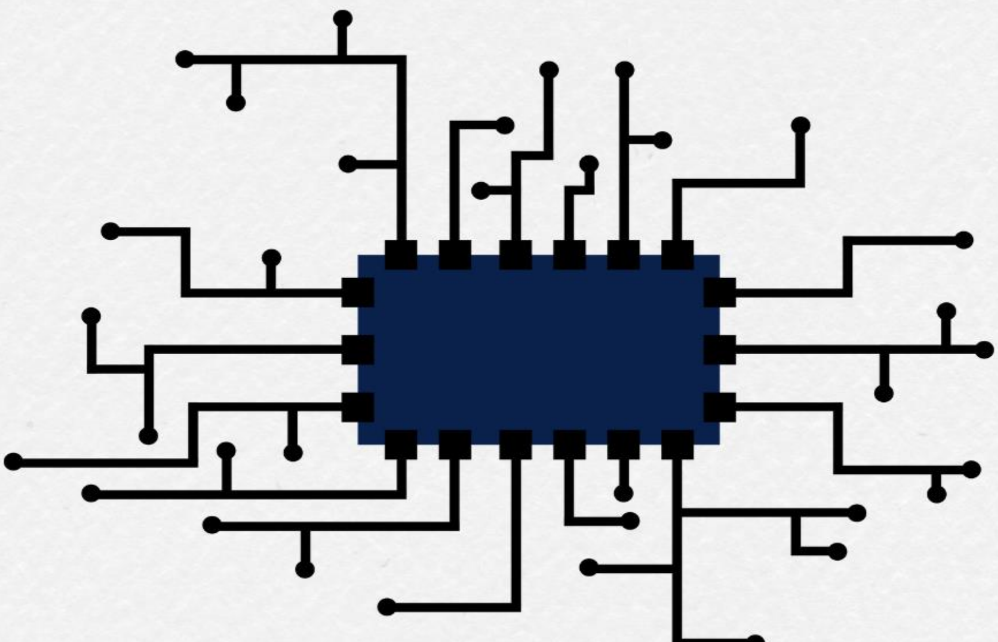
Docente: Dr. Carlos Iván Aldana López

Centro universitario de ciencias exactas e ingenierias

CONTROL I

Actividad 1



Equipo:

Flores Morán Adriana 219776077

Gutiérrez Iñiguez Karla Goretti 219555062

Hernández López Daniel Alejandro 219567621

Martínez Valdez Isidro 222834487

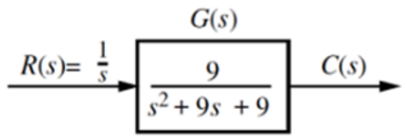
Rodríguez Leyva Sherlyn Arlette 222834428

Sánchez Mendoza Ricardo Yahir 222834347

NCR:159311

Clave: I9914

1- Obtenga la respuesta en el tiempo c(t) del siguiente sistema de manera manual y usando Matlab/Simulink.



Primero realizamos la multiplicación por el escalón:

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{9}{s^2+9s+9}\frac{1}{s} = \frac{9}{s(s^2+9s+9)}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{9}{s(s^2+9s+9)}\right]$$

Resolvemos $C(s)$ por fracciones parciales:

$$\frac{9}{s(s^2+9s+9)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+9s+9}$$

$$9 = A(s^2+9s+9) + s(Bs+C)$$

$$9 = As^2 + 9As + 9A + Bs^2 + Cs$$

Separamos por factor común y obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$9 = (A+B)s^2 + (9A+C)s + 9A$$

$$A + B = 0$$

$$9A + C = 0$$

$$9A = 9$$

Despejamos A,por lo tanto, nos queda:

$$A = \frac{9}{9} = 1$$

$$A = 1$$

Ahora sustituimos A en las otras dos ecuaciones para obtener B y C

$$(1) + B = 0$$

$$B = -1$$

$$9(1) + C = 0$$

$$9 + C = 0$$

$$C = -9$$

Ahora sustituimos los valores en las fracciones:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{9}{s(s^2+9s+9)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{-s-9}{s^2+9s+9}\right]$$

Utilizamos la propiedad de la linealidad de la transformada:

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{-s-9}{s^2+9s+9}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-9}{s^2+9s+9}\right]$$

Como se puede observar, el trinomio que está en el denominador no es perfecto, por lo tanto, se necesita completar el cuadrado:

$$\left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 9 = \left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} + 9 = \left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-9}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}}\right]$$

Desarrollamos:

$$\frac{s-9}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}} = \frac{\left(s+\frac{9}{2}\right) - 9}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}} = \frac{s-\frac{9}{2}}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}} = \frac{s}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}} - \frac{\frac{9}{2}}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}}$$

Sustituyendo$\left(s+\frac{9}{2}\right)$ en s para no afectar la expresión, nos queda así:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+\frac{9}{2}\right)}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{9}{2}}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}}\right]$$

Se procede a poner una raíz en la fracción $-\frac{45}{4}$ y elevarla al cuadrado, esto para poder aplicar las fórmulas de la transformada inversa, de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+\frac{9}{2}\right)}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{9}{2}}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2}\right]$$

Lo siguiente es sacar la constante de la última fracción y nuevamente, para poder aplicar la fórmula de la transformada inversa, se tiene que multiplicar por 1, de esta forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+\frac{9}{2}\right)}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2}\right]-\frac{9}{2}\left(\frac{\sqrt{\frac{45}{4}}}{\sqrt{\frac{45}{4}}}\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+\frac{9}{2}\right)}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2}\right]-\frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{\frac{45}{4}}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{45}{4}}}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+\frac{9}{2}\right)}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2}\right]-\frac{3\sqrt{5}}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{45}{4}}}{\left(s+\frac{9}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2}\right]$$

Ahora se pueden aplicar las fórmulas de la transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}=\left[\frac{s-a}{(s-a)^2-k^2}\right]=e^{at}\cosh kt$$

$$\mathcal{L}^{-1}=\left[\frac{k}{(s-a)^2-k^2}\right]=e^{at}\sinh kt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1$$

Entonces nos queda:

$$1-e^{-\frac{9}{2}t}\cosh\left(\sqrt{\frac{45}{4}}t\right)-\frac{3\sqrt{5}}{5}e^{-\frac{9}{2}t}\sinh\left(\sqrt{\frac{45}{4}}t\right)$$

Sabemos qué $\sqrt{4}=2$ pero $\sqrt{45}$ se puede simplificar, obtenemos el mínimo común múltiplo de 45 y el número que esta repetido lo ponemos fuera de la raíz:

45	5
9	3
3	3
1	

$$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Entonces:

$$\sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Por último, la respuesta queda así:

$$1 - e^{-\frac{9}{2}t} \cosh\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}t\right) - \frac{3\sqrt{5}}{5} e^{-\frac{9}{2}t} \sinh\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}t\right)$$

Evaluamos la respuesta en 20 segundos:

$$1 - e^{-\frac{9}{2}(20)} \cosh\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}(20)\right) - \frac{3\sqrt{5}}{5} e^{-\frac{9}{2}(20)} \sinh\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}(20)\right) = 0.9999999999 = 1$$

1. **Grafique la respuesta por 20 segundos y comente la respuesta transitoria.**

La respuesta obtenida del sistema G(s)= $\frac{9}{s^2+9s+9}$ con una entrada escalón R(s)=$\frac{1}{s}$ transcurridos 20 segundos se puede observar en la **figura 1.1** y el cual se puede identificar como un sistema críticamente amortiguado donde sabemos llegamos más rápido a la nueva posición de equilibrio pues al acercarse a los 5 segundos inicia el estado estacionario.

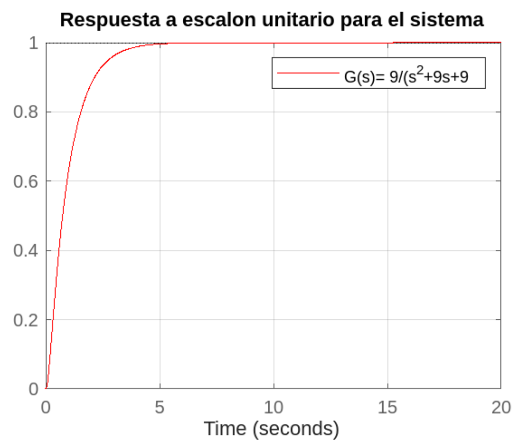


Figura 1.1 Respuesta del sistema G(s) a una entrada escalón

En las siguientes figuras observaremos resaltadas las características de nuestra respuesta transitoria del sistema ante nuestra entrada escalón R(s)=$\frac{1}{s}$

2. Tiempo de subida t_r:

En la **figura 1.2** se puede apreciar que para el segundo 1.95 la respuesta del sistema ya había subido aproximadamente del 10 al 90% de su valor final

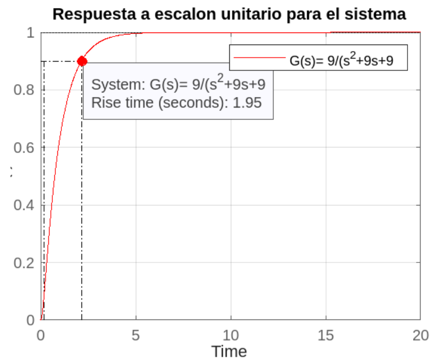


Figura 1.2 Tiempo de subida t_r

3. Tiempo pico t_p:

Para la **Figura 1.3** tenemos el tiempo pico que indica el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreelongacion, pero como podemos observar nuestro sistema marca 0 en el porcentaje de sobreelongacion (es el máximo valor del pico de la curva de respuesta y nuestro sistema rápidamente llega al estado estacionario en 1 y ahí se mantiene)

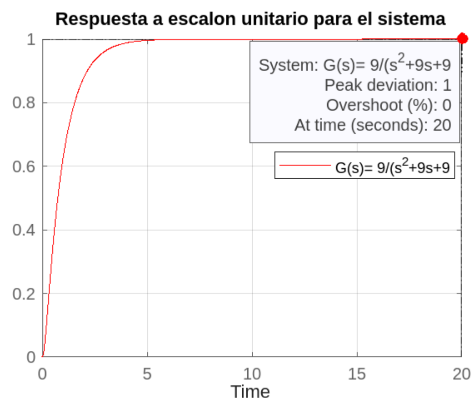


Figura 1.3 Tiempo pico t_p

4. Tiempo de asentamiento t_s

figura 1.3 Es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final, Matlab por defecto establece el 2% de su valor final

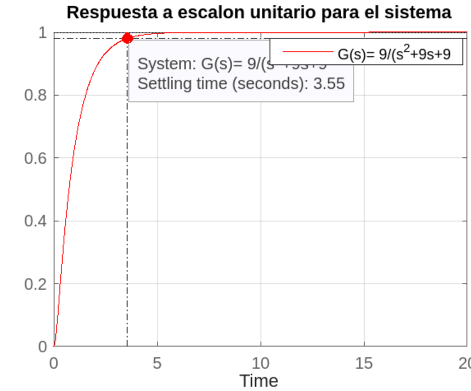


Figura 1.4 Tiempo de asentamiento t_s

```
clc
clear all

num = [0 0 9]
den = [1 9 9]
sis = tf(num,den) %G(s)
t = 0:0.01:20    %tiempo de 0.01 s hasta los 20 segundos
step(sis,t,'r')  %entrada escalon
stepinfo (sis)
grid
ylabel('C(t)')
title('Respuesta a escalon unitario para el sistema')
legend('G(s)= 9/(s^2+9s+9')
```

Código 1.1 Código ejecutado en Matlab para visualizar gráficamente nuestro resultado de una entrada escalón y la función de transferencia asignada

```
struct with fields:

        RiseTime: 1.9528
   TransientTime: 3.5516
    SettlingTime: 3.5516
     SettlingMin: 0.9012
     SettlingMax: 0.9999
       Overshoot: 0
      Undershoot: 0
            Peak: 0.9999
        PeakTime: 8.6661
```

Imagen 1.1 Se muestra información sobre la respuesta al escalón del sistema, incluyendo parámetros como el tiempo de subida, el sobreimpulso, el tiempo de establecimiento, y el valor final.

Finalmente Observamos en nuestra Figura 1.5 que coinciden nuestra respuesta en función del tiempo y la respuesta en la función de transferencia obteniendo que se trata de una exponencial que tiende a 1 al llegar a los 5 segundos

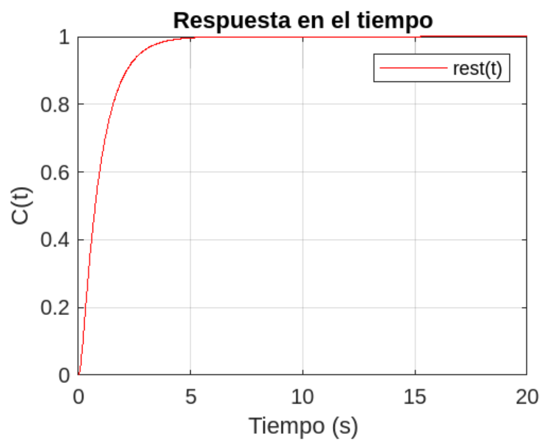
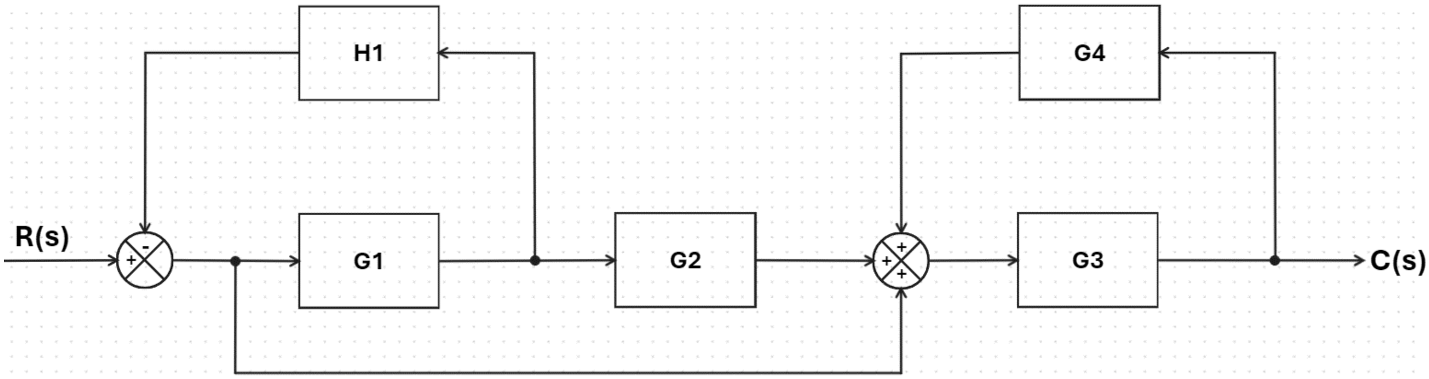


Figura 1.6 Respuesta en el tiempo

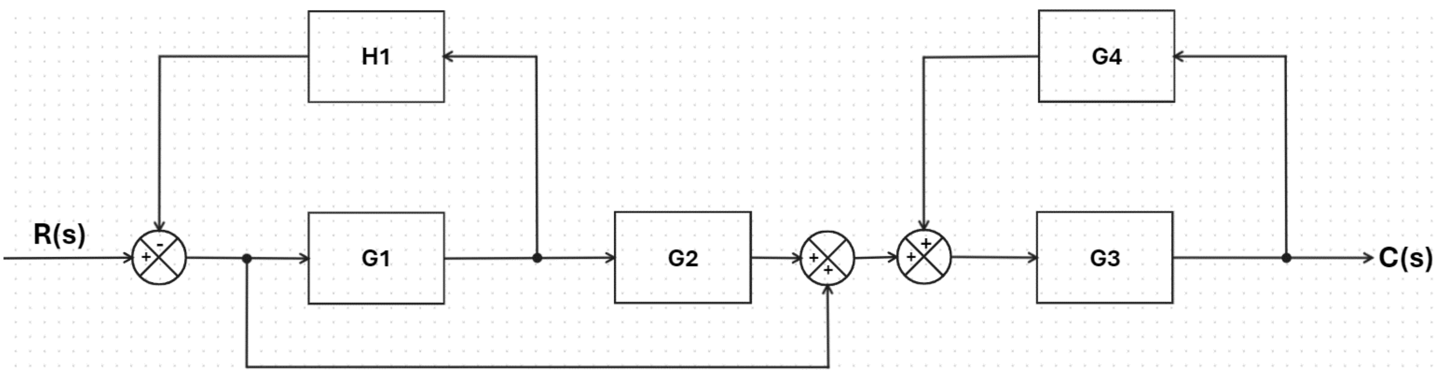
```
clc
clear all

% Definición del tiempo
t = 0:0.01:20;    % Tiempo de 0.01 s hasta los 20 segundos

% Definición de la respuesta en el tiempo
rest = 1 - exp(-9/2 * t) .* cosh((3*sqrt(5))/2 * t) - (3*sqrt(5)/5) .* exp(-9/2 * t) .* sinh((3*sqrt(5))/2 * t);

% Graficar la respuesta en el tiempo
figure;
plot(t, rest, 'r')  % Gráfica en rojo
grid on
ylabel('C(t)')
xlabel('Tiempo (s)')
title('Respuesta en el tiempo')
legend('rest(t)')
```

Código 1.2 Código ejecutado en Matlab para la grafica en respuesta al tiempo

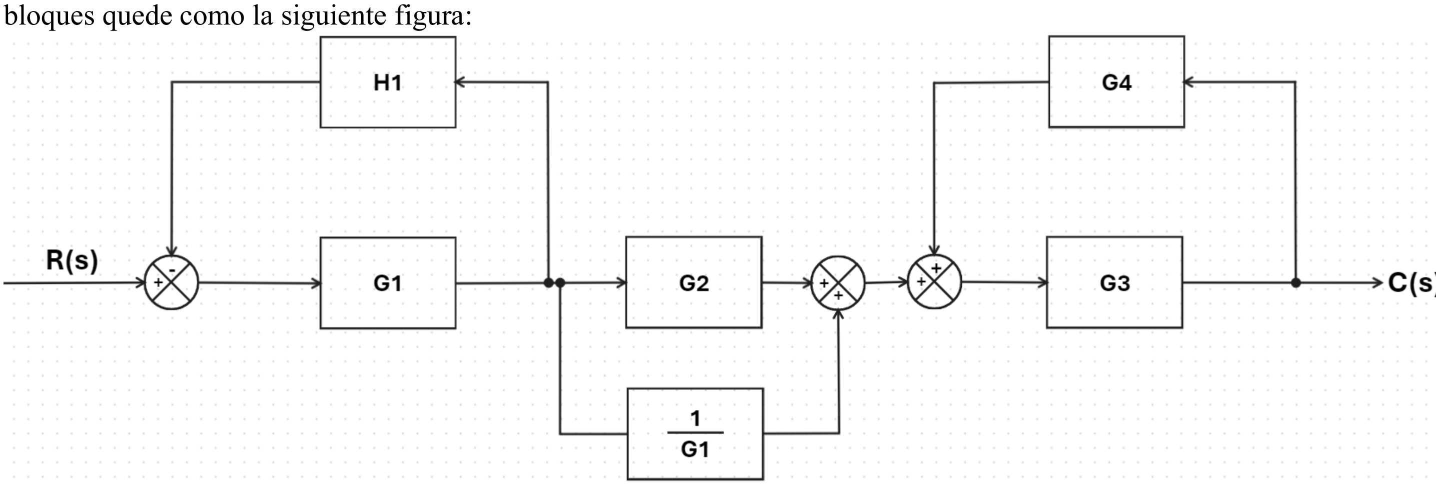
2. **Encuentre la función de transferencia T(s)= C(s)/R(s) del sistema mostrado en la siguiente figura usando el álgebra de diagramas de bloques.**



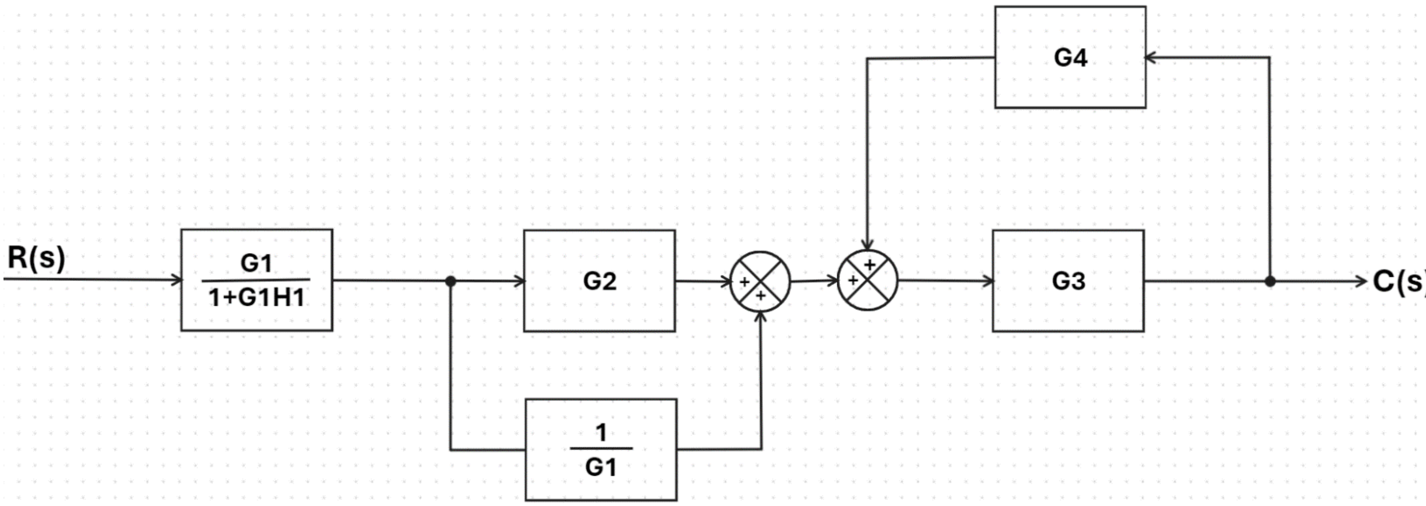
Realizando una redistribución de los puntos de suma (**contenido extra**) que se encuentra sumando los bloques G2, G4 y el punto de bifurcación que se encuentra antes del bloque G1 haciendo que el diagrama de bloques quede como la siguiente figura:



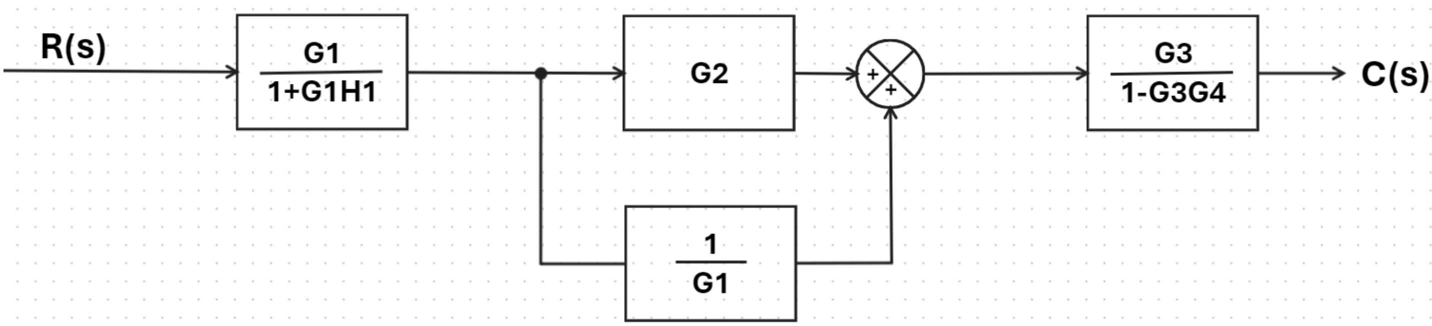
Posteriormente, se realiza un desplazamiento de un punto de bifurcación más allá de un bloque (**contenido extra**). En este caso, el punto de bifurcación se desplaza más allá del bloque G1, pero antes del bloque G2, haciendo que el diagrama de bloques quede como la siguiente figura:



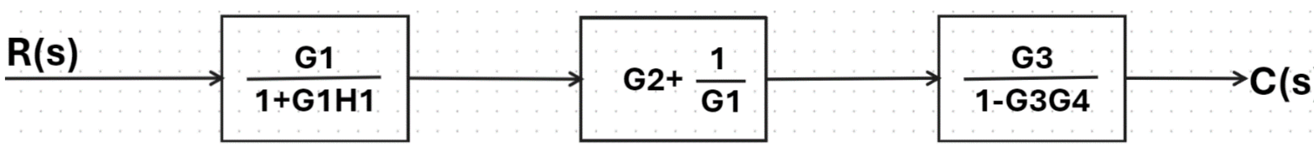
Luego, se realiza una eliminación de un lazo de retroalimentación negativa (**contenido extra**) de los bloques H1 y G1, haciendo que el diagrama de bloques quede como la siguiente figura:



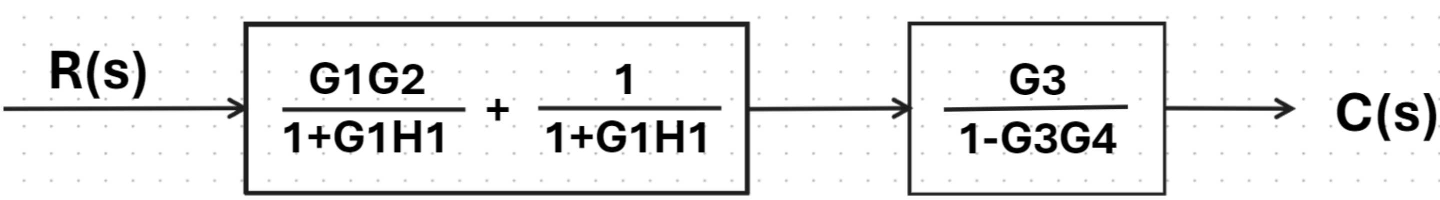
Después, se realiza una eliminación de un lazo de retroalimentación positiva (**contenido extra**) de los bloques G3 y G4, haciendo que el diagrama de bloques quede como la siguiente figura:



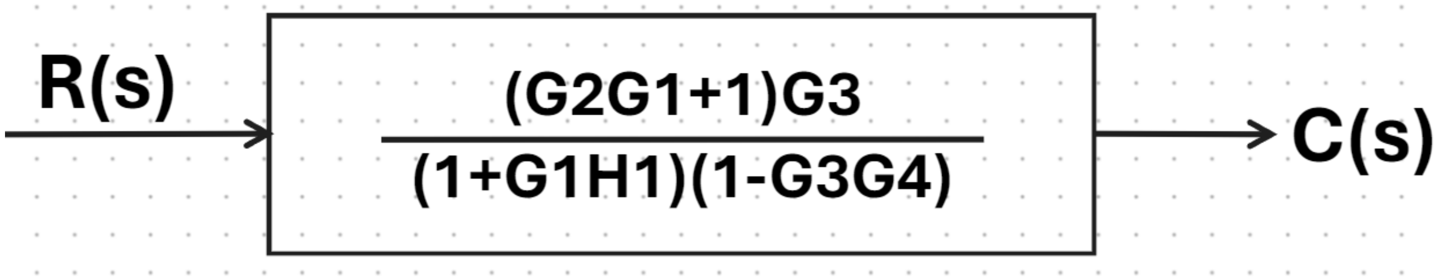
Se combinan los bloques G2 y $\frac{1}{G1}$ utilizando la transformación de bloques en paralelo (**contenido extra**) haciendo que el diagrama de bloques quede como la siguiente figura:



Los bloques de $\frac{G1}{1+G1H1}$ y $G2+\frac{1}{G1}$ son bloques en cascada (**contenido extra**) al realizar la multiplicación el diagrama de bloques queda como la siguiente figura:



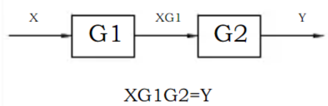
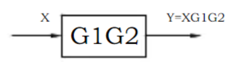
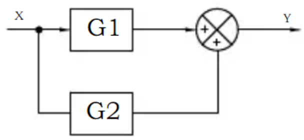
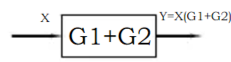
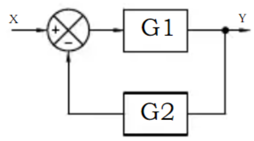
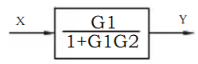
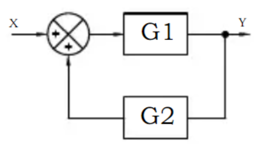
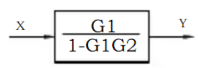
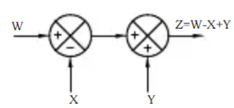
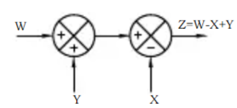
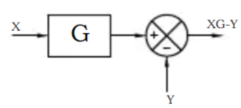
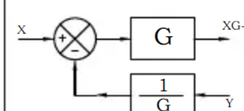
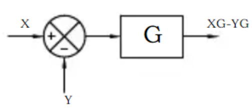
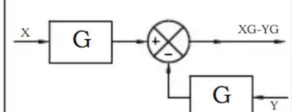
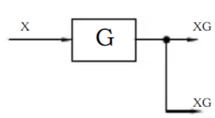
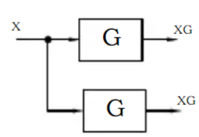
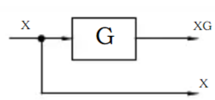
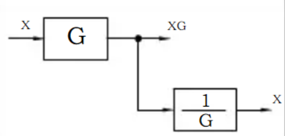
Los dos bloques restantes, al quedar en cascada, vuelven a utilizar la transformación de la figura anterior (bloques en cascada), obteniendo la función de transferencia.



Por lo tanto:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(G2G1+1)G3}{(1+G1H1)(1-G3G4)}$$

Contenido extra

<table>
<tr><th>TRANSFORMACIÓN</th><th>DIAGRAMA DE BLOQUES</th><th>DIAGRAMA DE BLOQUE EQUIVALENTE</th></tr>
<tr><td>BLOQUES DE CASCADA</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>BLOQUES EN PARALELO</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>ELIMINACION DE UN LAZO DE RETROALIMENTACIÓN</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>ELIMINACION DE UN LAZO DE RETROALIMENTACIÓN</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>REDISTRIBUCIÓN DE LOS PUNTOS DE SUMA</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO DE SUMA HACIA ADELANTE DE UN BLOQUE</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO DE TOMA HACIA ADELANTE DE UN BLOQUE</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO DE TOMA HACIA ADELANTE DE UN BLOQUE</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>DESPLAZAMIENTO DE UN PUNTO DE TOMA MAS ALLA DE UN BLOQUE</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

MRA

3. Hacer el análisis de estabilidad del sistema Masa-Resorte-Amortiguador, con los siguientes valores de los parámetros: M= 4, fv= 0.5, K= 17. Hacer el análisis de la respuesta transitoria del sistema MRA para la entrada escalón unitario. Encuentre los errores en estado estacionario para las entradas f(t)=1, f(t)=3t y $f(t)=5t^2$ para el sistema MRA.

Para este análisis fv=fb

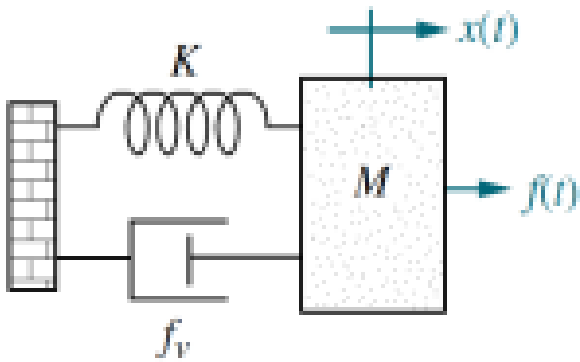
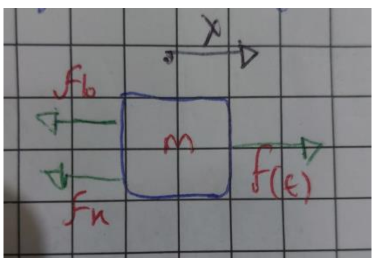


Fig 1. Sistema de masa resorte amortiguador. (MRA)

Diagrama de cuerpo libre y ecuación.



Como se observa en la figura anterior, el primer paso para obtener la respuesta es un diagrama de cuerpo libre, es mucho más fácil observarlo así, nos da una idea de hacia donde tenemos las fuerzas dentro del sistema, así obtenemos una ecuación diferencial.

F = ma: la ecuación de fuerza y partimos por aquí.

Nos podemos dar cuenta que en este modelo consta de tres fuerzas, f(t), -fb(negativa ya que apunta al sentido contrario de la fuerza f(t)), -fk(mismo caso, apunta al lado contrario).

Un despeje sencillo y sin tantos dilemas, dando como resultado la siguiente ecuación:

$$f(t) - fb - fk = m\ddot{x}$$

$$f(t) = m\ddot{x} + fb - fx$$

$\sum \vec{F} = ma$ $$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t) \ \ la\ ecuacion\ diferencial$$

Transformada de Laplace.

$$Laplace$$

$$x_{(s)}ms^2 + x_{(s)}bs + x_{(s)}k = F_{(s)}$$

$$x_{(s)}(ms^2 + bs + k) = F_{(s)}$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Teniendo en cuenta la ecuación anteriormente resultante, convertimos al dominio de la frecuencia, es una sustitución por la ecuación, en este caso con nuestros valores, x(s) multiplica a cada respectiva variable, ahora tenemos tres, m*s^2, b*s, k, todo esto es igual a F(s), podemos sacar la x(s) que multiplica a cada valor y de aquí la despejamos, es lo que queríamos logras, saber cuánto es x(s), resultando en la ecuación siguiente:

$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + bs + k}$$

La entrada 1 es :

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} escalon$$

Entrada 2 y 3.

$$\mathcal{L}\{3t\} = 3\frac{1}{s^2}\ \ Rampa$$

$$\mathcal{L}\{5t\} = 5\frac{2}{s^3} = \frac{10}{s^3}$$

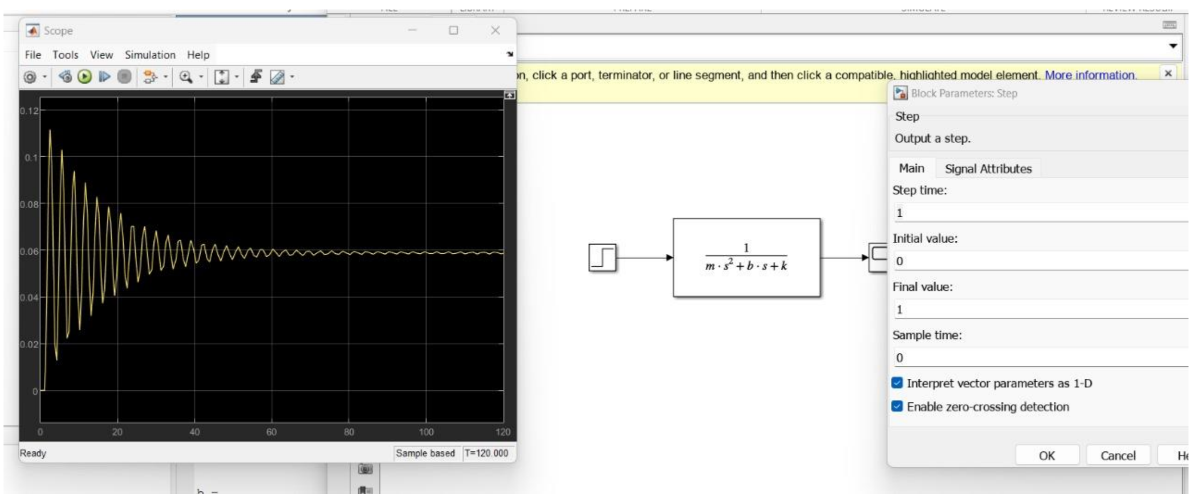
La entrada 2 es la Laplace de (3t), sencillamente el valor cambia, mismo procedimiento, distinta variable(3t), Laplace de (5t), como podemos observar se tiene en cuenta ambos casos de entrada y salida en el sistema, la segunda es una función rampa.

3.1 COMENZAMOS CON LA SIMULACION EN SIMULNK

Comenzamos corriendo el sig. código:

```
%PAractica de COntrol

m=4
k=17
b=0.5
```

La ecuación que obtuvimos al principio es la utilizaremos para esta simulación, un escalón para la entrada 1 ahí se puede ver y esa es la gráfica que da su comportamiento: se puede observar el movimiento



Para la entrada escalón donde R1=1 el error en estado estable “ess” es y H(s) =1:

$$R(s) = \frac{R_1}{s}$$

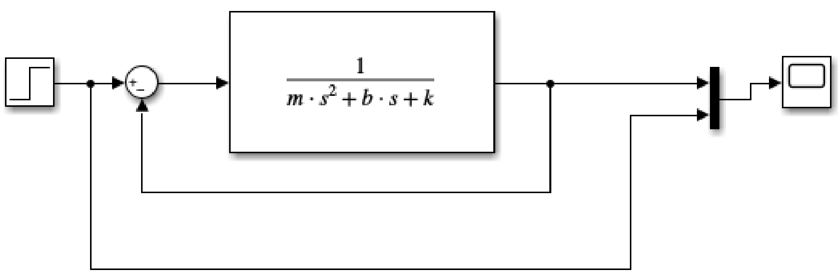
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s}\left(\frac{R_1}{\cancel{s}}\right)}{(1 + G(s)H(s))}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{R_1}{(1 + G(s)H(s))}$$

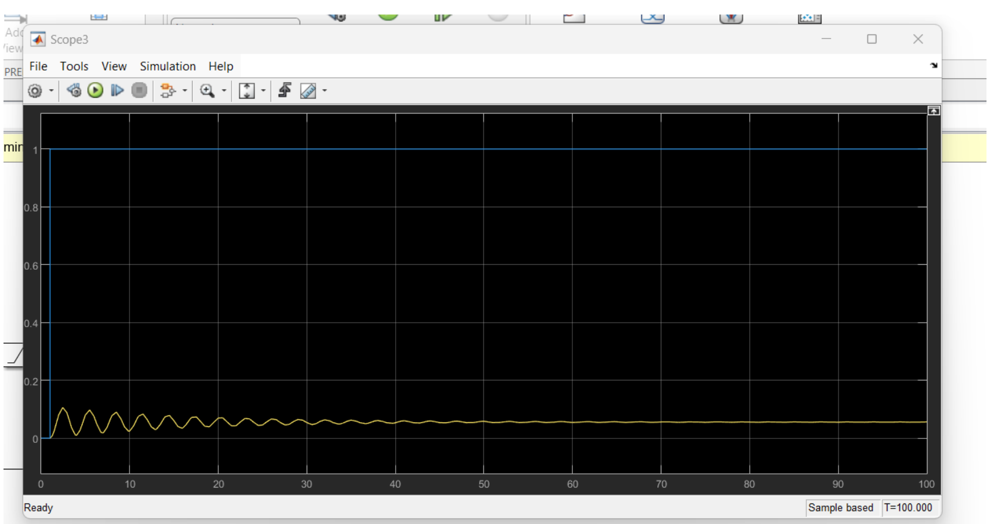
Por lo que:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{ms^2 + bs + k}} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{\frac{ms^2 + bs + k + 1}{ms^2 + bs + k}} = \lim_{s \to 0} \frac{ms^2 + bs + k}{ms^2 + bs + k + 1}$$

$$= \frac{k}{k + 1} = \frac{17}{18} \approx 0.94444444$$

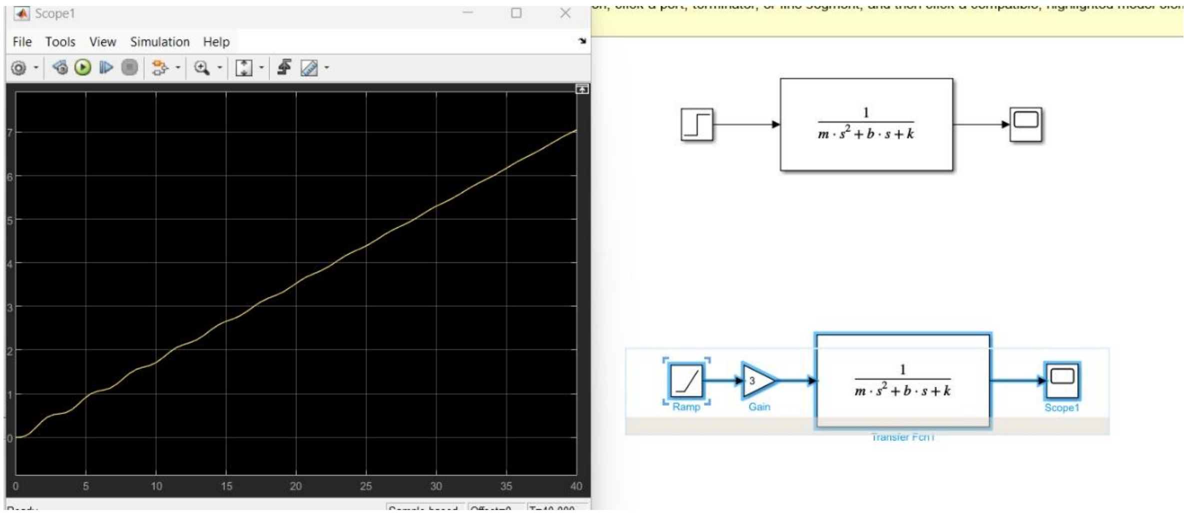


Y gráficamente podemos ver que el error si es de 0.9



Para la entrada 2 ponemos una rampa unitaria con ganancia 3 que es igual a:

$$3\frac{1}{s^2}$$



Segundo valor (rampa) con una ganancia de 3.

Para sacar el error en estado estacionario nos basamos en:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{(1 + G(s)H(s))}$$

Donde R(s) es la entrada y H(s) es la retroalimentación que en este caso vale 1

Para el error en estado estable de esta entrada:

$$R(s) = \frac{R_2}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s}\left(\frac{R_2}{s^{\cancel{2}}}\right)}{(1 + G(s)H(s))}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{\frac{R_2}{s}}{(1 + G(s)H(s))}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{R_2}{(\cancel{s} + sG(s)H(s))}$$

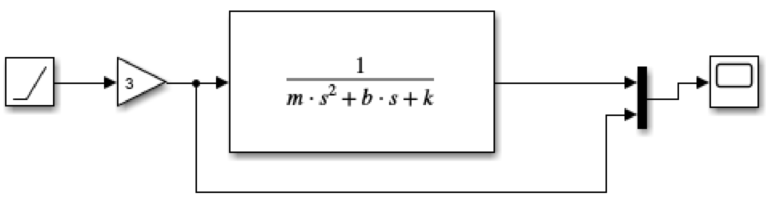
Donde R2=3 y H(s) =1

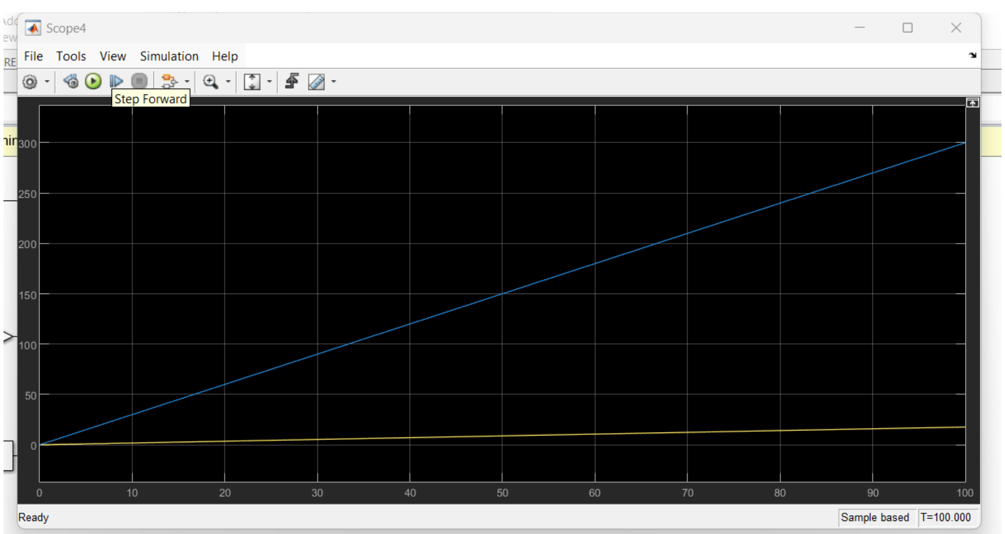
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{3}{s\,\frac{1}{ms^2+bs+k}} = \lim_{s\to 0} \frac{3}{\frac{s}{ms^2+bs+k}\,\frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}}} = \lim_{s\to 0} \frac{3}{\frac{1}{ms+b+\frac{k}{s}}} = \lim_{s\to 0} 3(ms+b+\frac{k}{s})$$

$$= \lim_{s\to 0} 3(ms+b+\frac{k}{s}) = \infty$$

En realidad, el resultado es divergente pero como en el espacio de Laplace solo hay valores positivos se toma el límite para x tiende a +0 por eso es infinito positivo

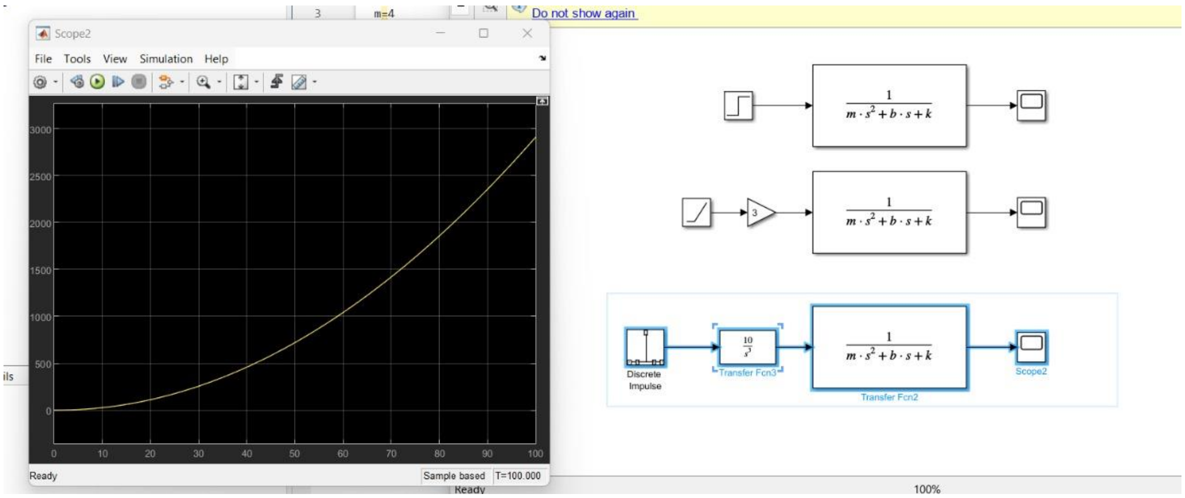
A continuación, la gráfica de entrada vs salida y vemos que el error aumenta a infinito





Para la entrada 3 que ponemos una entrada impulso que en Laplace es como multiplicar por 1 y le ponemos la función de transferencia de la entrada 3:

$$: \frac{10}{s^3}$$



Tercer valor (impulso discreto), apreciamos una curvatura que va haciéndose más grande con respecto al tiempo.

Para el error en estado estacionario

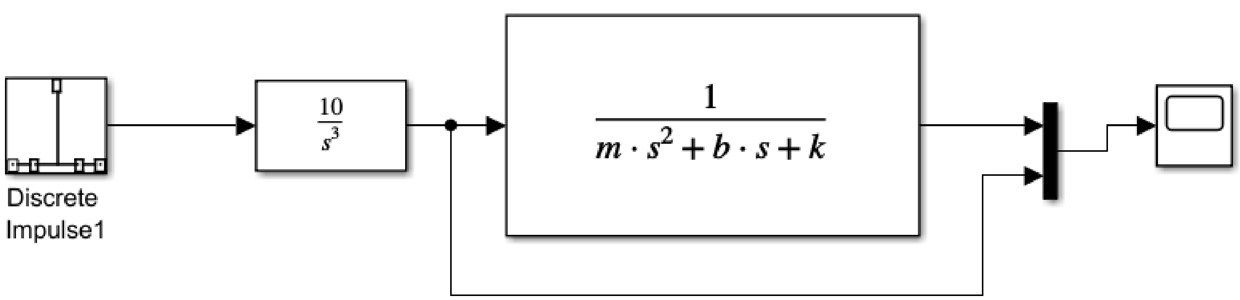
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\,\frac{10}{s^3}}{1+\frac{1}{ms^2+bs+k}} = \lim_{s\to 0} \frac{\frac{10}{s^2}}{1+\frac{1}{ms^2+bs+k}} = \lim_{s\to 0} \frac{10}{s^2\left(1+\frac{1}{ms^2+bs+k}\right)}$$

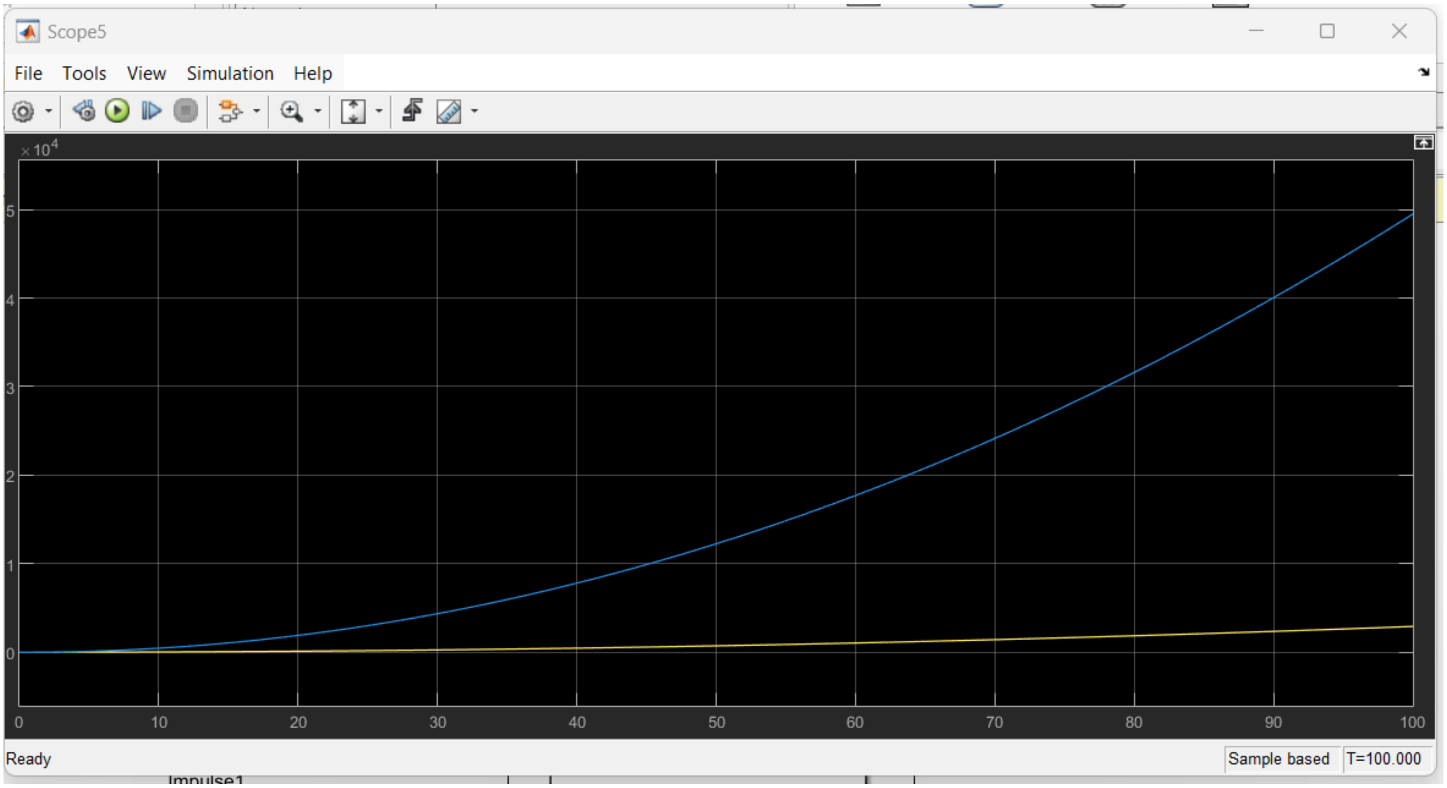
$$= \lim_{s\to 0} \frac{10}{\left(s^2+\frac{s^2}{ms^2+bs+k}\right)} = \lim_{s\to 0} \frac{10}{\frac{s^2}{ms^2+bs+k}\frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{1}{s^2}}} = \lim_{s\to 0} 10\left(m+\frac{b}{s}+\frac{k}{s^2}\right)$$

$$= \lim_{s\to 0} 10\left(m+\frac{b}{s}+\frac{k}{s^2}\right) = \infty$$

En realidad, el resultado es divergente pero como en el espacio de Laplace solo hay valores positivos se toma el límite para x tiende a +0 por eso es infinito positivo

A continuación, la gráfica de entrada vs salida y vemos que el error aumenta a infinito




Scope5
File Tools View Simulation Help
×10^4
5
4
3
2
1
0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
Ready
Sample based
T=100.000
Impulse1