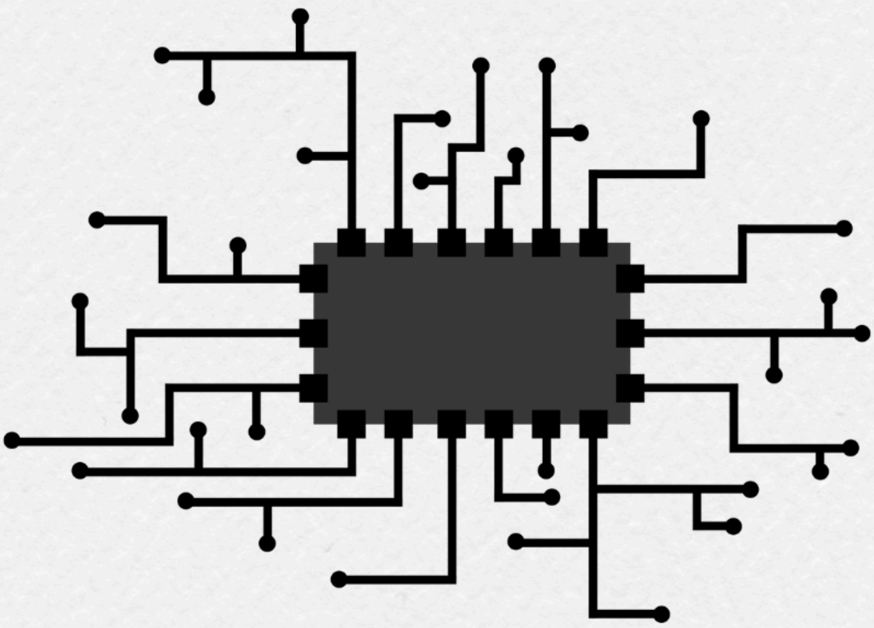
Docente: Dr. Carlos Iván Aldana López

Centro universitario de ciencias exactas e ingenierias

CONTROL I

Actividad 2



Equipo:
Flores Morán Adriana 219776077
Gutiérrez Iñiguez Karla Goretti 219555062
Hernández López Daniel Alejandro 219567621
Martínez Valdez Isidro 222834487
Sánchez Mendoza Ricardo Yahir 222834347

NCR:159311
Clave:I9914

1.- Obtenga la función de transferencia sinusoidal de (1) y obtenga la magnitud y la fase para las siguientes tres frecuencias: .5 rad/s, 20 rad/s y 100 rad/s (10 puntos).

$$G(s) \;=\; \frac{25}{6s^2+4s+8} \quad \textbf{(1)}$$

Para obtener la función de transferencia sinusoidal se sustituye en **(1)**:

$$\mathrm{s} \rightarrow j\omega$$

j → parte imaginaria

ω → frecuencia angular

Por lo que se obtiene:

$$G(s) \;=\; \frac{25}{6s^2+4s+8} \;=\; G(j\omega) \;=\; \frac{25}{6j^2\omega^2+4j\omega+8}$$

Recordar que:

$$j^2 \;=\; -\,1$$

En el denominador reacomodamos la parte real y la imaginaria, entonces:

$$G(j\omega) \;=\frac{25}{(-6\omega^2+8)+j(4\omega)} \quad \textbf{Ecuación 1.1}$$

Se necesita separar la parte real de la parte imaginaria por lo que se multiplica por el recíproco del denominador:

$$G(j\omega) \;=\; \frac{25}{(-6w^2+8)+\,j(4\omega)} \cdot \frac{(-6w^2+8)-j(4\omega)}{(-6w^2+8)-j(4\omega)}$$

$$=\; \frac{(25)(-6w^2)+(25)(8)-(25)j(4\omega)}{((-6w^2+8)+j(4\omega))((-6w^2+8)-j(4\omega))} \quad \textbf{Ecuación 1.2}$$

Desarrollamos la **ecuación 1.2**:

$$G(j\omega)\frac{(-150\omega^2)+(200)-j(100\omega)}{36\omega^4-48\omega^2+j24\omega^3-48\omega^2+64-j32\omega-j24\omega^3+j32\omega\,-j^2 16\omega^2}$$

Simplificamos términos semejantes:

$$\frac{(-150\omega^2)+(200)-j(100\omega)}{36\omega^4-48\omega^2+\cancel{j24\omega^3}-48\omega^2+64-\cancel{j32\omega}-\cancel{j24\omega^3}+\cancel{j32\omega}\,+16\omega^2} \;=\; \frac{-150\omega^2+200-j100\omega}{36\omega^4-80\omega^2+64}$$

Ecuación 1.3

Separamos la parte real de la parte imaginaria de la **ecuación 1.3**:

$$\boxed{\frac{-150\omega^2+200}{36\omega^4-80\omega^2+64}} \boxed{- \frac{100\omega}{36\omega^4-80\omega^2+64}j}$$ **Ecuación 1.4**

Ahora para obtener la magnitud $|G(j\omega)|$ se utiliza la siguiente ecuación:

$$\sqrt{Re(G(j\omega))^2 + Im(G(j\omega))^2}$$ **Ecuación 1.5**

Después, para obtener la fase $\angle G(j\omega)$ se utiliza la siguiente ecuación:

$$tan^{-1}\left(\frac{Im(G(j\omega))}{Re(G(j\omega))}\right)$$ **Ecuación 1.6**

NOTA: Se usará Atan2($Im(G(j\omega)),\ Re(G(j\omega))$) para sustituir a la **ecuación 1.6**
Ecuación 1.6.1

Re(G(jw)) → Parte real de la **ecuación 1.4**
Im(G(jw)) → Parte imaginaria de la **ecuación 1.4**

- Ahora para obtener la magnitud y la fase con 0.5 rad/seg, sustituimos la frecuencia (w) en la **ecuación 1.4**

$$\frac{-150(0.5)^2+200}{36(0.5)^4-80(0.5)^2+64} - \frac{100(0.5)}{36(0.5)^4-80(0.5)^2+64}j$$ **Ecuación 1.7**

Se calcula la magnitud $|G(j\omega)|$ de la **ecuación 1.7** utilizando la **ecuación 1.5**

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{-150(0.5)^2+200}{36(0.5)^4-80(0.5)^2+64}\right)^2 + \left(\frac{-100(0.5)}{36(0.5)^4-80(0.5)^2+64}\right)^2}$$ **Ecuación 1.8**

$$= \sqrt{\left(\frac{-150(0.25)\ +200}{36(0.0625)\ -80(0.25)\ +64}\right)^2 + \left(\frac{-100(0.5)}{36(0.0625)\ -80(0.25)\ +64}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(3.51351351)^2 + (-\ 1.081081081)^2} = \sqrt{12.3447\ +\ 1.1688} = \sqrt{13.5135} = 3.67$$

Ahora para convertir la magnitud en decibeles se utiliza la siguiente ecuación:

$$20log_{10}(|G(j\omega)|)$$ **Ecuación 1.9**

Se sustituye el resultado de la **ecuación 1.8** en la **ecuación 1.9**:

$$20log_{10}(3.67) = 11.29\ dB$$

Ahora se calcula la fase de la **ecuación 1.7** utilizando la **ecuación 1.6.1**:

$$\angle G(j\omega) = atan2(\frac{-100(0.5)}{36(0.5)^4-80(0.5)^2+64}, \frac{-150(0.5)^2+200}{36(0.5)^4-80(0.5)^2+64})$$

$$= atan2(\frac{-100(0.5)}{36(0.0625)\ -80(0.25)\ +64}, \frac{-150(0.25)\ +200}{36(0.0625)\ -80(0.25)\ +64})$$

$$= atan2(-\ 1.081081081,\ 3.51351351) =-\ 17.10°$$

- Ahora para obtener la magnitud y la fase con 20 rad/seg, sustituimos la frecuencia (w) en la **ecuación 1.4**

$$\frac{-150(20)^2+200}{36(20)^4-80(20)^2+64} - \frac{100(20)}{36(20)^4-80(20)^2+64}\,j \quad \textbf{Ecuación 2.0}$$

Se calcula la magnitud $|G(j\omega)|$ de la **ecuación 2.0** utilizando la **ecuación 1.5**

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{-150(20)^2+200}{36(20)^4-80(20)^2+64}\right)^2 + \left(\frac{-100(20)}{36(20)^4-80(20)^2+64}\right)^2} \quad \textbf{Ecuación 2.1}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-150(400)\ +200}{36(1.6x10^5)\ -80(400)\ +64}\right)^2 + \left(\frac{-100(20)}{36(1.6x10^5)\ -80(400)\ +64}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(-\ 0.0104398)^2 + (-\ 0.000349158)^2}$$

$$= \sqrt{0.000109\ +\ 1.21911 \times 10^{-7}} = \sqrt{0.000109} = 0.01044$$

Se sustituye el resultado de la **ecuación 2.1** en la **ecuación 1.9**:

$$20log_{10}(0.01044) =-\ 39.6213\ dB$$

Ahora se calcula la fase de la **ecuación 2.0** utilizando la **ecuación 1.6.1**:

$$\angle G(j\omega) = atan2\left(\frac{-100(20)}{36(20)^4-80(20)^2+64}, \frac{-150(20)^2+200}{36(20)^4-80(20)^2+64}\right)$$

$$= atan2\left(\frac{-100(20)}{36(1.6x10^{5})\ -80(400)\ +64},\ \frac{-150(400)\ +200}{36(1.6x10^{5})\ -80(400)\ +64}\right)$$

$$= atan2(-\ 0.000349158,\ \ -\ 0.0104398) =-\ 178.08°$$

- Ahora para obtener la magnitud y la fase con 100 rad/seg, sustituimos la frecuencia (w) en la **ecuación 1.4**

$$\frac{-150(100)^{2}+200}{36(100)^{4}-80(100)^{2}+64} - \frac{100(100)}{36(100)^{4}-80(100)^{2}+64}\ j \quad \textbf{Ecuación 2.2}$$

Se calcula la magnitud $|G(j\omega)|$ de la **ecuación 2.2** utilizando la **ecuación 1.5**

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{-150(100)^{2}+200}{36(100)^{4}-80(100)^{2}+64}\right)^{2} + \left(\frac{-100(100)}{36(100)^{4}-80(100)^{2}+64}\right)^{2}} \quad \textbf{Ecuación 2.3}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-150(10000)\ +200}{36(10^{8})\ -80(10000)\ +64}\right)^{2} + \left(\frac{-100(100)}{36(10^{8})\ -80(10000)\ +64}\right)^{2}}$$

$$= \sqrt{(-\ 0.000416)^{2} + (-\ 2.7784 \times 10^{-6})^{2}}$$

$$= \sqrt{1.7364 \times 10^{-7}\ +\ 7.7194 \times 10^{-12}} = \sqrt{1.7364 \times 10^{-7}} = 0.000416$$

Se sustituye el resultado de la **ecuación 2.3** en la **ecuación 1.9**:

$$20log_{10}(0.000416) =-\ 67.6181\ dB$$

Ahora se calcula la fase de la **ecuación 2.2** utilizando la **ecuación 1.6.1**:

$$\angle G(j\omega) = atan2\left(\frac{-100(100)}{36(100)^{4}-80(100)^{2}+64},\ \frac{-150(100)^{2}+200}{36(100)^{4}-80(100)^{2}+64}\right)$$

$$= atan2\left(\frac{-100(100)}{36(10^{8})\ -80(10000)\ +64},\ \frac{-150(10000)\ +200}{36(10^{8})\ -80(10000)\ +64}\right)$$

$$= atan2\left(-\ 2.7784 \times 10^{-6},\ \ -\ 0.000416\right) =-\ 179.61°$$

2.- Hacer los diagramas de Bode usando el método de aproximación por asíntotas y compruebe el resultado en Matlab de los sistemas modelados por las siguientes funciones de transferencia (rango de frecuencias: $10^{-3} - 10^{3}$rad/s) (25 puntos):

$$G(s) = \frac{2(s+0.3)(s+20)}{s^2(s+4)(4s+1)(s+7)}$$

Ecuación 3.0

$$G(s) = \frac{5s+2}{s^2+6s^2+8s}$$

Ecuación 3.1

Para realizar diagramas de Bode usando el método de aproximación por asíntotas primero se debe descomponer la función en expresiones simples de tal forma que quede factorizada en ganancias (K), derivadores (s), integradores ($\frac{1}{s}$), ceros simples (Ts+1) y polos simples ($\frac{1}{Ts+1}$). Es importante que tanto los ceros como lo polos queden en la forma bode:

Para los ceros:

$$Ts+1$$

Para los polos:

$$\frac{1}{Ts+1}$$

Donde "T" es un número real

Para cada expresión simple tiene un cierto comportamiento:

Para las ganancias (K):

- La magnitud es igual a $20log_{10}K$ para cualquier rango de frecuencias.
- La fase es igual a 0° si K > 0 o de lo contrario es 180° si K < 0. Ambas situaciones son para cualquier rango de frecuencias.

Para los derivadores (s → $j\omega$):

- La magnitud aumenta cuando la frecuencia aumenta a una pendiente constante de +20 dB/década con la característica de que cuando la frecuencia es igual a 1 rad/seg la magnitud siempre será 0 dB.
- La fase es constante en +90° en todo el rango de frecuencias.

Para los integradores ($\frac{1}{s} \rightarrow \frac{1}{j\omega}$):

- La magnitud disminuye cuando la frecuencia disminuye a una pendiente constante de -20 dB/década con la característica de que cuando la frecuencia es igual a 1 rad/seg la magnitud siempre será 0 dB.

- La fase es constante en -90° en todo el rango de frecuencias.

Para los ceros simples (Ts+1 $\rightarrow Tj\omega + 1$)

- La magnitud es igual a 0 dB para toda frecuencia menor a la frecuencia de corte, después, la magnitud aumenta a una pendiente constante de +20 dB/década para las demás frecuencias.
- La fase es igual a 0° hasta una década antes de la frecuencia de corte, entonces la fase aumenta a una pendiente de +45° hasta una década después de la frecuencia de corte, la fase será 90° para para las demás frecuencias.

Para los polos simples ($\frac{1}{Ts+1} \rightarrow \frac{1}{Tj\omega+1}$):

- La magnitud es igual a 0 dB para toda frecuencia menor a la frecuencia de corte, después, la magnitud disminuirá a una pendiente constante de -20 dB/década para las demás frecuencias.
- La fase es igual a 0° hasta una década antes de la frecuencia de corte, entonces la fase disminuirá a una pendiente de -45° hasta una década después de la frecuencia de corte, la fase será -90° para para las demás frecuencias.

Una vez sabiendo lo anterior se realizará el diagrama de Bode de la **ecuación 3.0**:

Se factoriza la **ecuación 3.0** en expresiones simples

$$(2)(s + 0.3)(s + 20)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right)\left(\frac{1}{4s+1}\right)\left(\frac{1}{s+7}\right)$$

Pasamos las expresiones en forma Bode

$$(2)\left((s + 0.3)\left(\frac{\frac{1}{0.3}}{\frac{1}{0.3}}\right)\right)\left((s + 20)\left(\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}}\right)\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\left(\frac{1}{s+4}\right)\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\right)\left(\frac{1}{4s+1}\right)\left(\left(\frac{1}{s+7}\right)\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\right)$$

$$(2)\left(\frac{1}{\frac{1}{0.3}}\left(\frac{1}{0.3}(s + 1)\right)\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{20}}\left(\frac{1}{20} + s + 1\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\right)\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}s+1}\right)\right)\left(\frac{1}{4s+1}\right)\frac{1}{7}\left(\frac{1}{\frac{1}{7}s+1}\right)$$

Separamos las ganancias

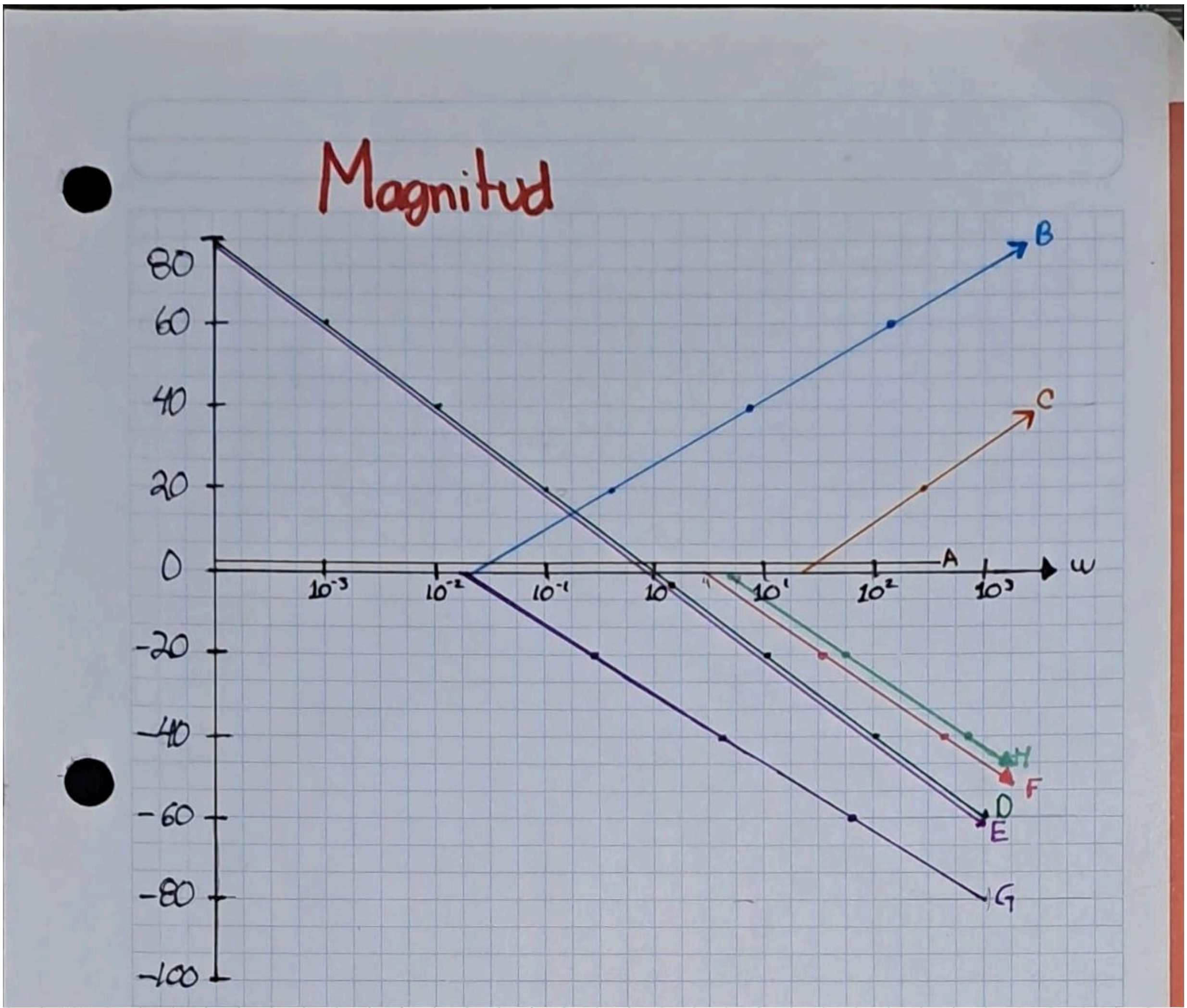
$$(2)(0.3)(20)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{7}\right) \quad \frac{3}{7} = 0.4285714286$$

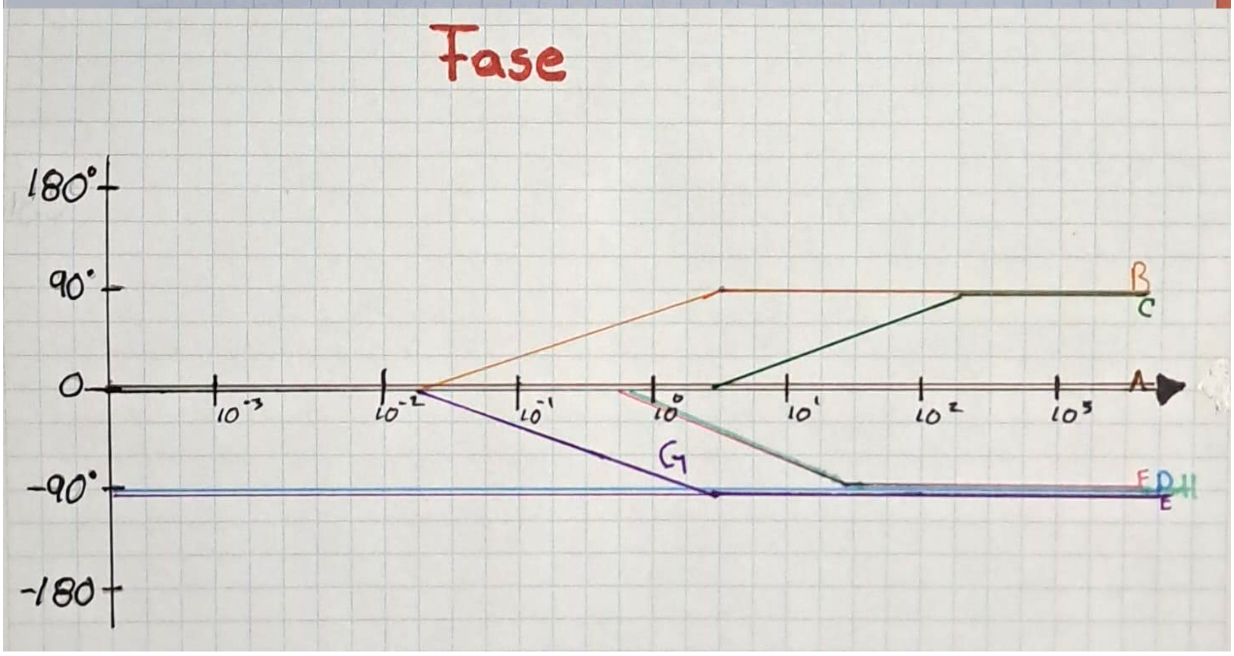
$$\left(\frac{1}{0.3}s + 1\right)\left(\frac{1}{20} + s + 1\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{4}s+1}\right)\left(\frac{1}{4s+1}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{7}s+1}\right)$$

Entonces si la frecuencia de corte es $\left(\frac{1}{T}\right)$

$$\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{0.3}s + 1\right)\left(\frac{1}{20}s + 1\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{4}s+1}\right)\left(\frac{1}{4s+1}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{7}s+1}\right)$$

A **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H**


Magnitud
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
10^-3
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
w
A
B
C
D
E
F
G
H


Fase
180°
90°
0
-90°
-180
10^-3
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
A
B
C
G
F
D
H
E

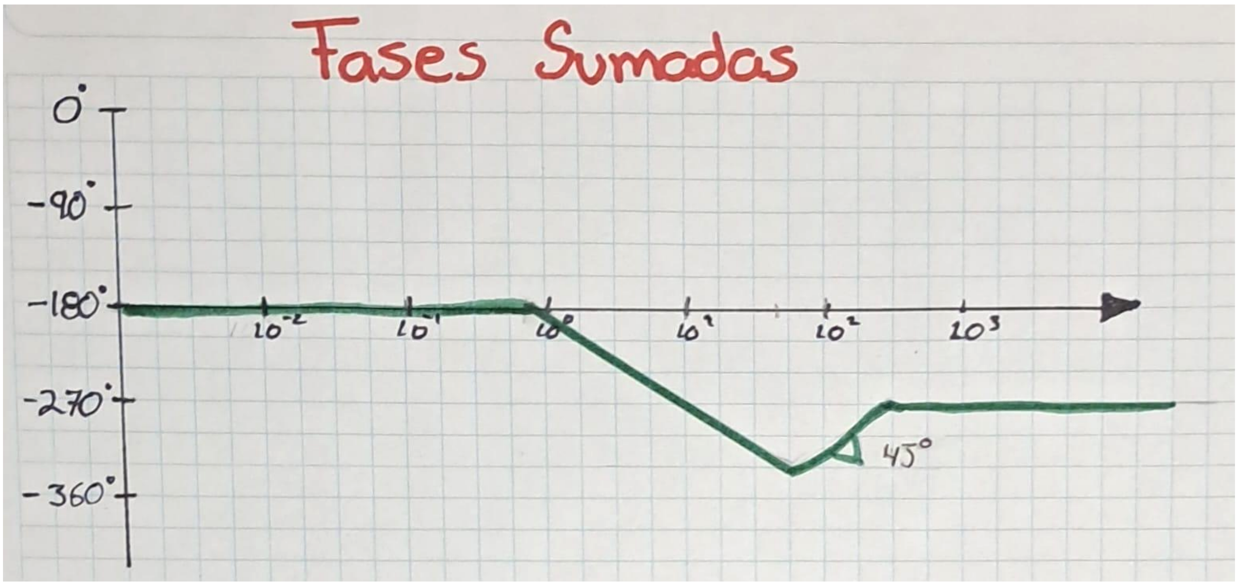


Figura 1.1.

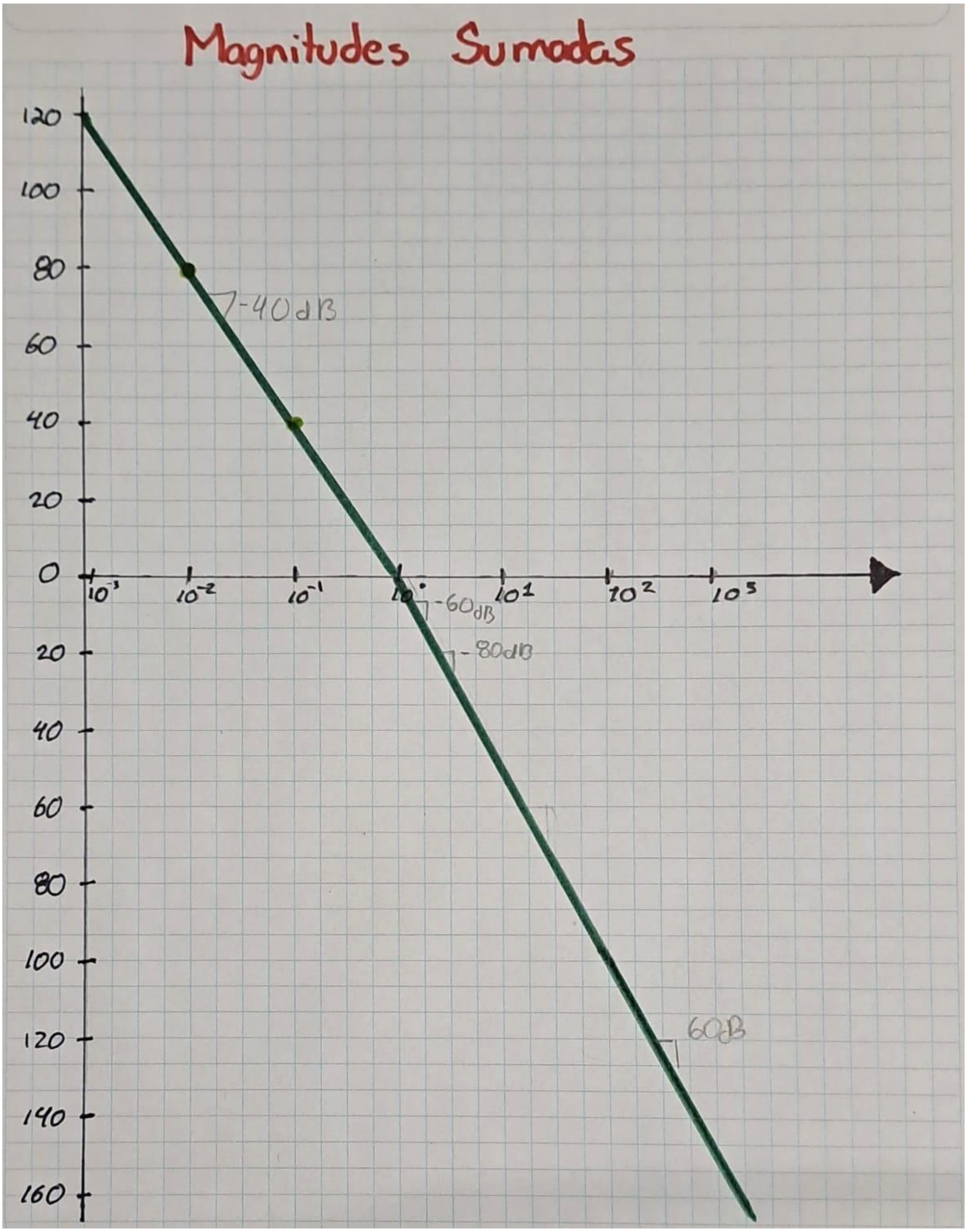

Magnitudes Sumadas
120
100
80
60
40
20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
10⁻³
10⁻²
10⁻¹
10⁰
10¹
10²
10³
-40dB
-60dB
-80dB
60dB

Figura 1.2.

```
G=tf([2 40.6 12],[4 45 123 28 0 0]); %Función de transferencia
w = logspace(-3,3); % limites del diagrama
bode(G, w),grid %mostrar el diagrama de bode
```

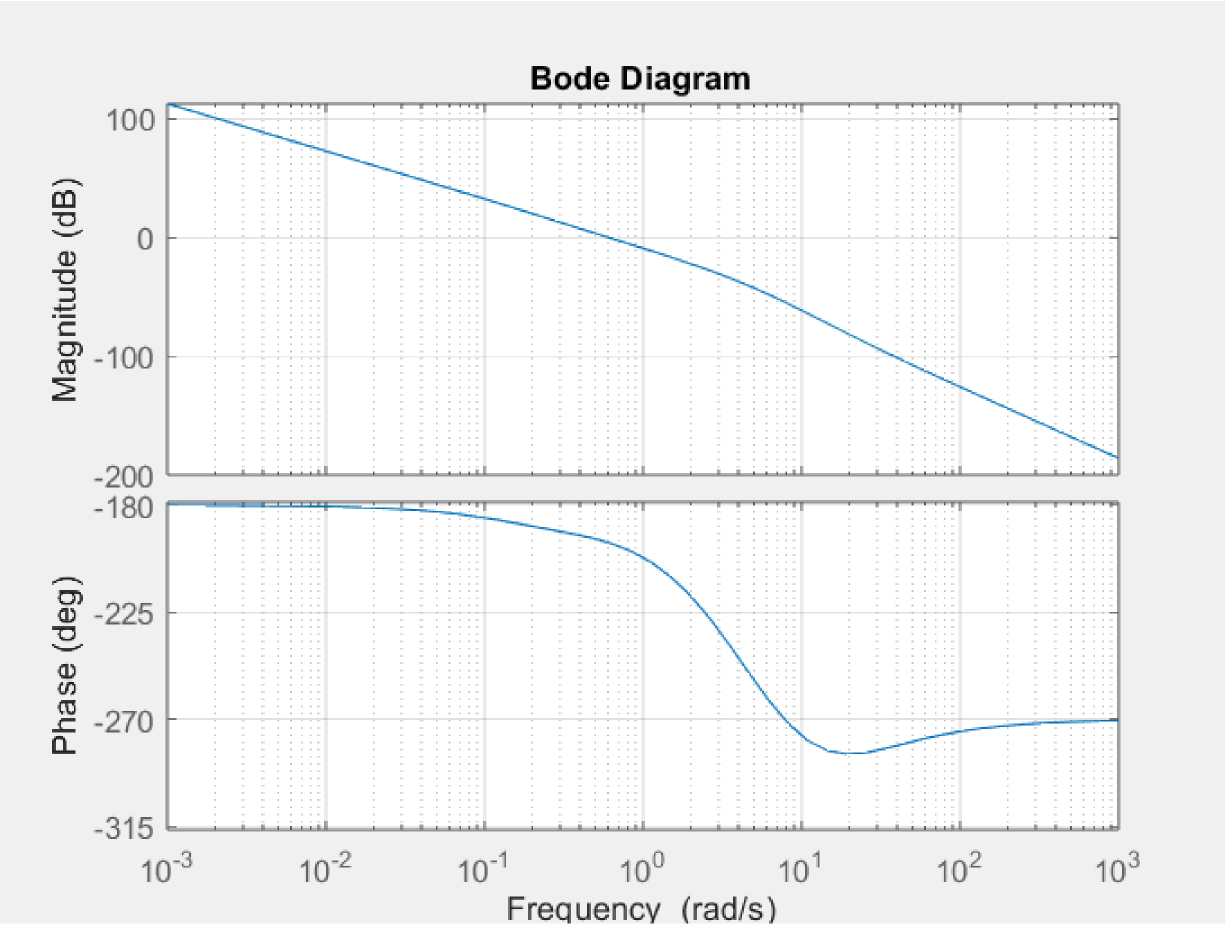


Figura 1.3. Diagrama de Bode de la ecuación 3.0 forma exacta

Como se puede ver en la **figura 1.3** al compararlo con la suma de fases (**figura 1.1)** y la suma de magnitudes (**figura 1.2)** los resultados son prácticamente iguales siendo más suavizado en el generado por MATLAB ya que este en la **figura 1.1** y en la **figura 1.2** fue hecho por el método de de aproximación por asíntotas mientra que en MATLAB es la forma exacta.

Hacer el diagrama de Bode usando el método de aproximación por asíntotas y compruebe el resultado en Matlab de los sistemas modelados por las siguientes funciones de transferencia (rango de frecuencias: $10^{-3} - 10^{3}$rad/s) (25 puntos):

$$G(s) = \frac{5s+2}{s^2+6s^2+8s} = \frac{5s+2}{s(s^2+6s+8)} = \frac{5s+2}{s(s+4)(s+2)}$$

Se factoriza la **ecuación 3.1** en expresiones simples

$$(5s + 2)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right)\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

Lo pasamo a la forma de bode

$$\left((5s + 2)\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\left(\frac{1}{s+4}\right)\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\right)\left(\left(\frac{1}{s+2}\right)\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}s + 1\right)\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}s+1}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}s+1}\right)\right)$$

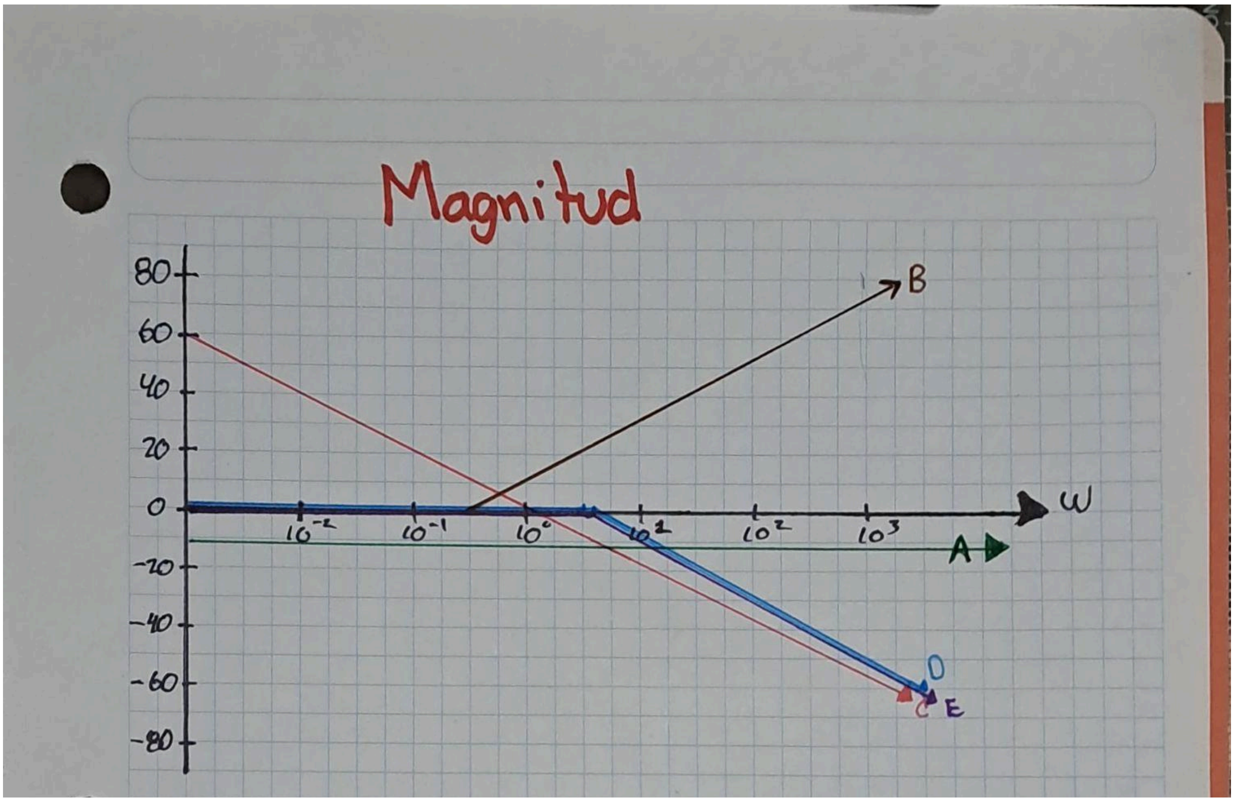
separando las ganancias

$$(2)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \quad \frac{1}{4} = 0.25 \qquad \left(\frac{5}{2}s + 1\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{4}s+1}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{2}s+1}\right)$$

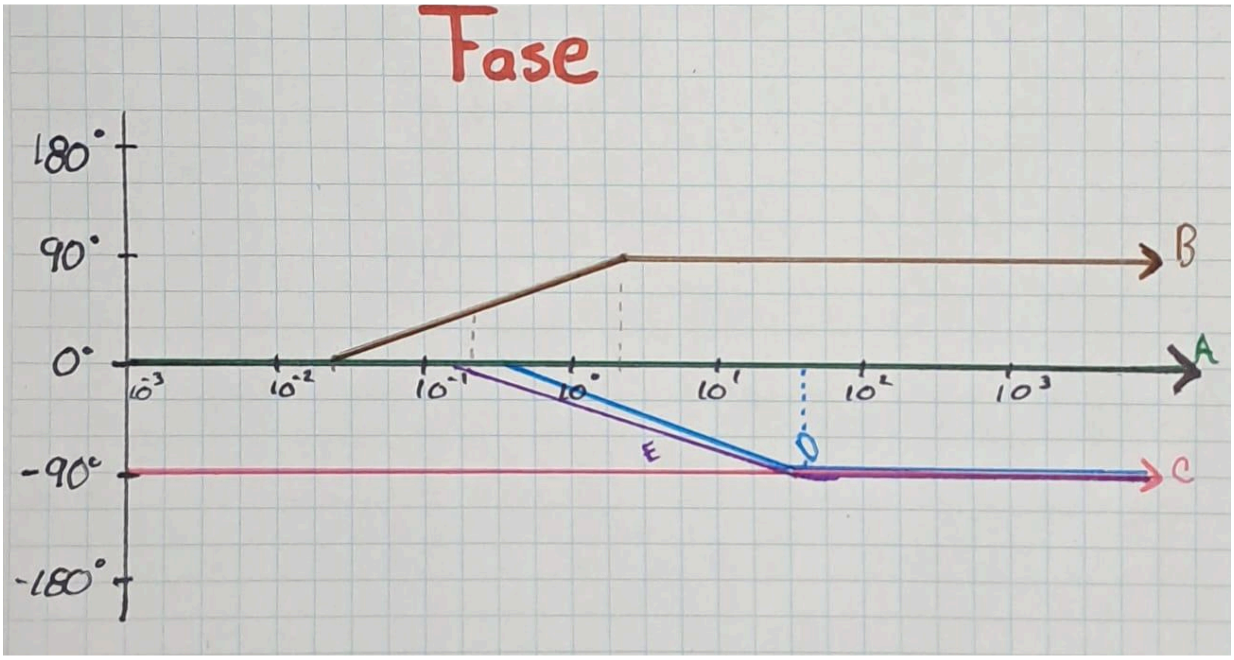
Entonces si la frecuencia de corte es $\left(\frac{1}{T}\right)$

$$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{2}s + 1\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{4}s+1}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{2}s+1}\right)$$

A **B** **C** **D** **E**



Magnitud
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
ω
A
B
C
D
E



Fase
180°
90°
0°
-90°
-180°
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
A
B
C
D
E

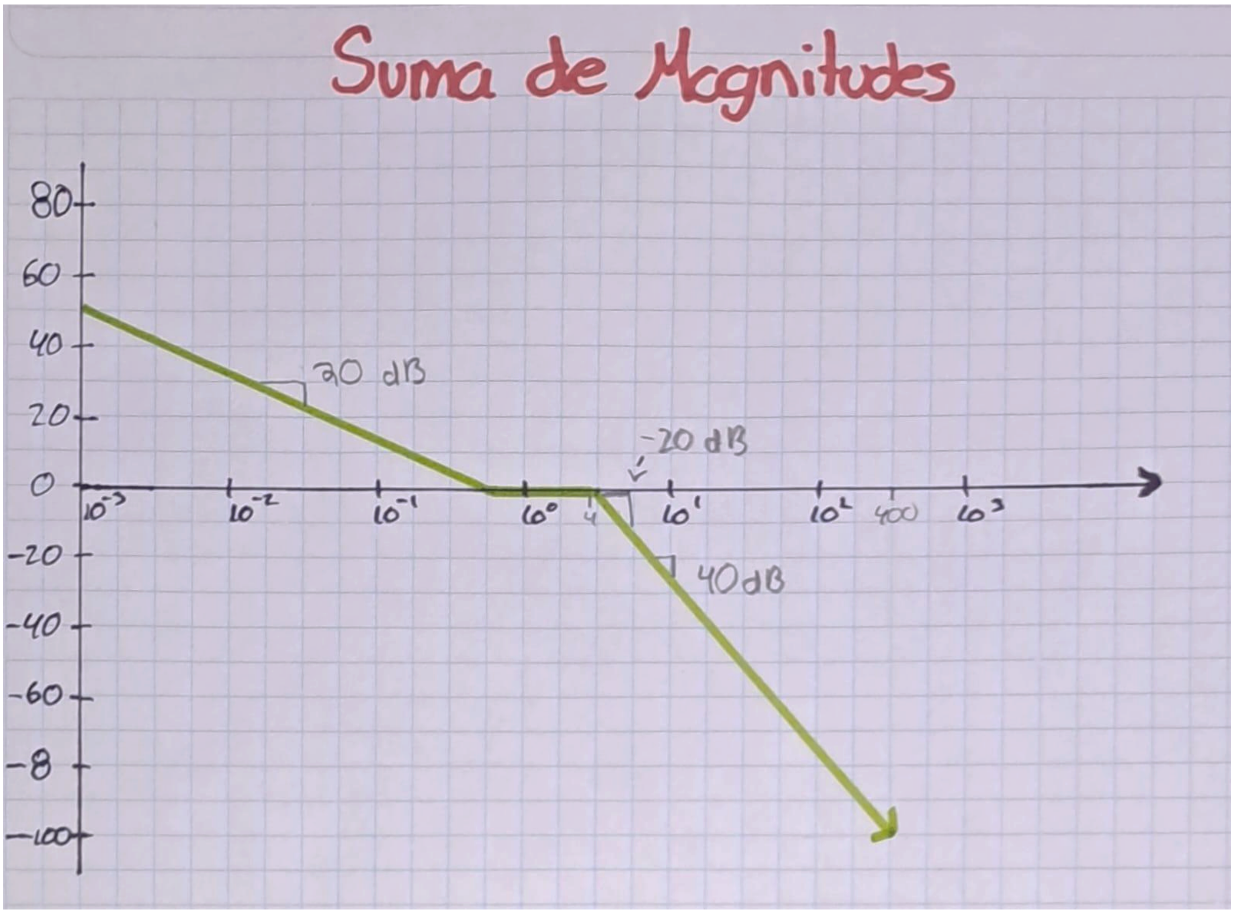


Figura 1.4.

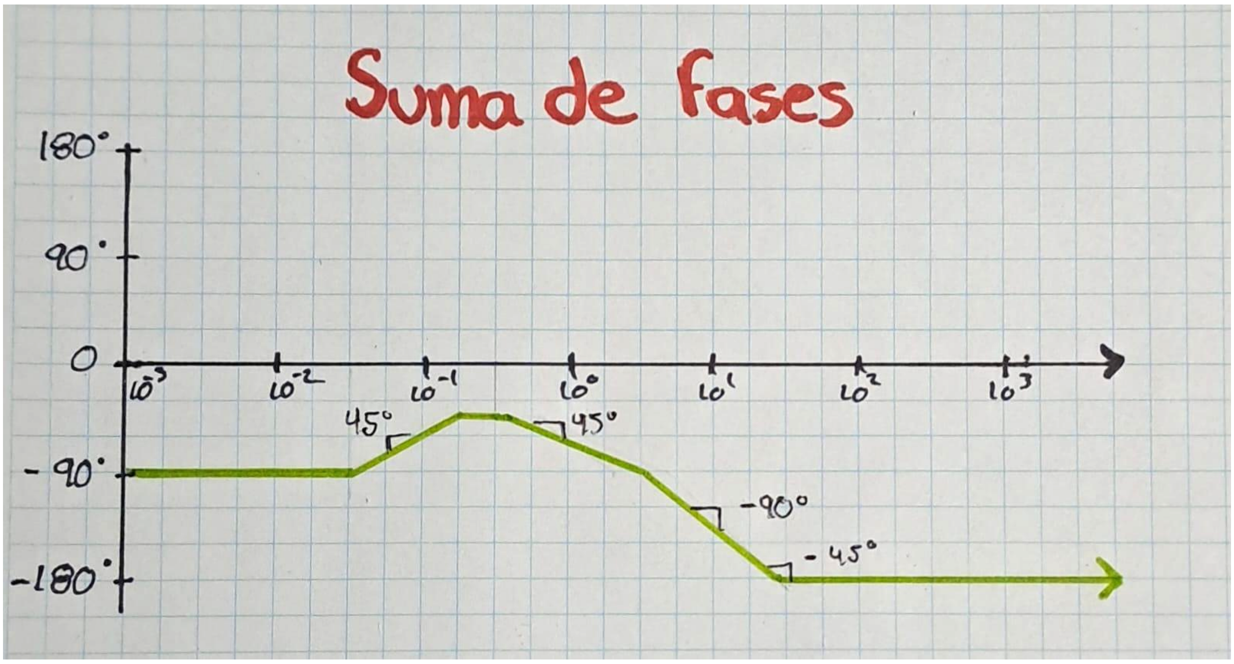


Figura 1.5.

```
G=tf([5 2],[1 6 8 0]); %Función de transferencia
w = logspace(-3,3); % limites del diagrama
bode(G, w),grid %mostrar el diagrama de bode
```

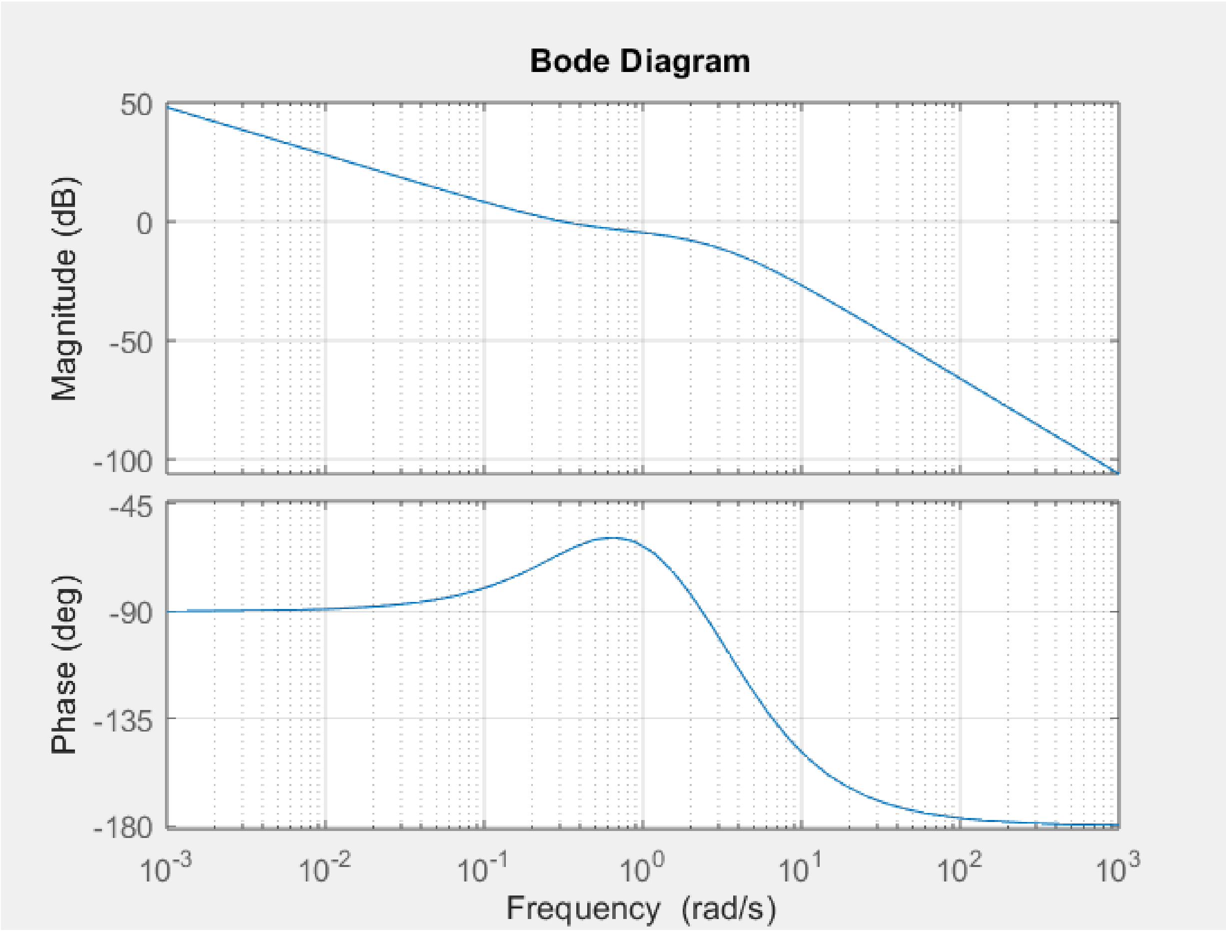


Figura 1.6. Diagrama de Bode de la ecuación 3.1 forma exacta

Al observar en la **figura 1.6** al compararlo con la suma de fases (**figura 1.4)** y la suma de magnitudes (**figura 1.5)** los resultados son prácticamente iguales siendo más suavizado en el generado por MATLAB ya que este en la **figura 1.4** y en la **figura 1.5** fue hecho por el método de de aproximación por asíntotas mientra que en MATLAB es la forma exacta.

3.- Para el sistema que se muestra en la Figura 1, diseñe un compensador de adelanto Gc(s) tal que cumpla con los siguientes requerimientos (25 puntos):

a. Constante de error estático de velocidad = 8 seg^{-1}
b. Margen de fase sea de al menos 35°
c. Margen de ganancia mayor de 8 dB.

<u>Favor de detallar su procedimiento.</u> Adjuntar a su reporte las gráficas y código utilizado.Usando Matlab o Simulink grafique, analice y comente las respuestas del sistema en lazo cerrado (Figura 1) a una entrada escalón unitario y a una rampa unitaria. Calcule analiticamente los errores en estado estacionario a las
dos entradas.

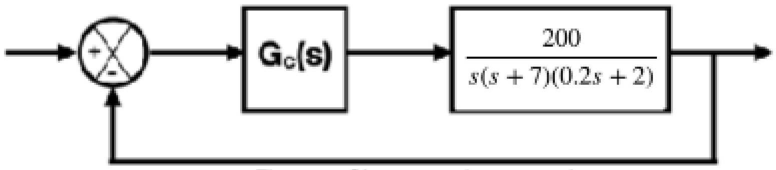


Figura 1. Sistema en lazo cerrado.

De la función de transferencia del compensador de adelanto $G_c(s)$:

$$G_c(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p)} = K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$$

K_C → es la ganancia

K → es la ganancia

z → es un cero
p → es un polo
z < p

α → es un factor de atenuación el cual $0 < \alpha < 1$

La función de transferencia del sistema G(s) es:

$$G(s) = \frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)}$$

sacamos el G1 con :

$$G_c(s)\,G(s) = k_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} * \frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)}$$

donde $K = k_c\alpha$ y $G_1(s) = KG(s)$

$$G_1(s) = K\frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)}$$

Para que al aplicar nuestro compensador cumpla que con los $K_v = 8\,seg^{-1}$ tenemos que comenzar sacando nuestra ganancia K:
El error estático de velocidad se define como:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G_1(s)$$

Entonces:

$$\lim_{s \to 0} s\,K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} * \frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)} = \frac{T\cancel{(0)}+1}{\alpha T\cancel{(0)}+1}\lim_{s \to 0} \cancel{s} * \frac{K200}{\cancel{s}(s+7)(0.2s+2)}$$

$$= \frac{1}{1} * \frac{K200}{((0)+7)(0.2(0)+2)} = \frac{K200}{(7)(2)} = \frac{K200}{14}$$

Y como queremos que nuestra K_v sea de 8 seg^{-1} entonces:

$$\frac{K200}{14} = 8$$

Despejamos para K:

$$14 * \frac{K200}{14} = 8 * 14$$

$$\frac{1}{200}K200 = 112 * \frac{1}{200}$$

$$K = \frac{112}{200} \qquad K = 0.56$$

Tenemos nuestra K podremos obtener nuestra G1:

$$G_1(s) = 0.56\frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)} = \frac{112}{s(s+7)(0.2s+2)} = \frac{112}{\frac{1}{5}s^3+\frac{17}{5}s^2+14s}$$

El siguiente paso es obtener el diagrama de bode de G1(s) con la ganancia ajustada sin compensar. Lo haremos en MatLab con el siguiente código:

```
G=tf([0 200],[1/5, 17/5, 14,0 ]);
K=0.56;

 figure(2)
 title('SISTEMA G');
 bode(K*G,{0.01,1000})
 margin(K*G)
 grid on
```

Obtenemos el siguiente diagrama de Bode:

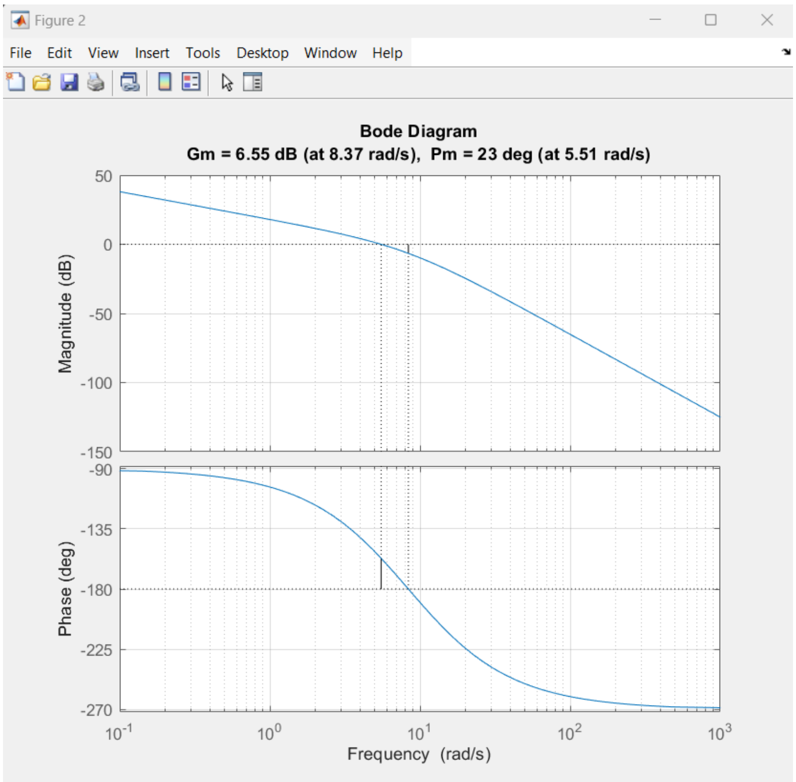


Figura 2.0. Diagrama de Bode de G1(s)

Podemos observar en la **figura 2.0** el margen de fase es de 23° grados, como se pide al menos 35 grados , vemos que es lo que nos falta y agregamos un ajuste adicional entre 5 y 12 comenzaremos con 5°

$$\Phi_m = 35° - 23° + 5° = 17°$$

con este Φ_m obtendremos α

tenemos que $Sen(\Phi_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ entonces:

$$\alpha = \frac{1-Sen(\Phi_m)}{1+Sen(\Phi_m)} = \frac{1-Sen(17°)}{1+Sen(17°)} = 0.5475$$

Ahora obtenemos $M\omega_c$ con la siguiente fórmula:

$$M_{\omega c} =- 20\ log_{10}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}})$$

Sustituyendo α:

$$-\ 20\ log_{10}(\frac{1}{\sqrt{0.5475}}) =-\ 2.6161$$

observando en el diagrama de bode podemos ver que con la magnitud de -2.6161 nos da una frecuencia de :

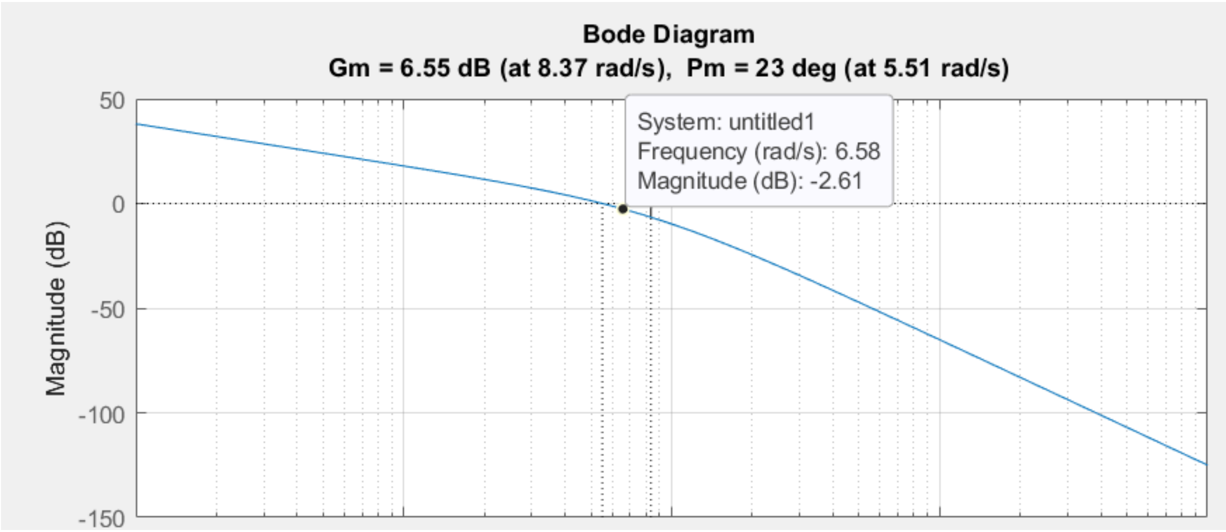


Figura 2.1. Diagrama de Bode de G1(s) magnitud

ω_c=6.58

Una vez obtenido ω_c ahora podemos obtener las dos frecuencias esquinas

Para encontrar el valor del cero (z):

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha} * \omega_c = \sqrt{0.5475} * 6.58 = 4.8687$$

Para encontrar el valor del polo (p):

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = \frac{6.58}{\sqrt{0.5475}} = 8.8927$$

Obtenemos el valor de la ganancia del compensador K_c:

$$k_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{0.56}{0.5475} = 1.0228$$

Sustituimos los valores correspondientes en el compensador de adelanto:

$$G_c(s) = k_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} = 1.0228\frac{s+4.8687}{s+8.8927}$$

Lo graficamos en MATLAB:

```
G=tf([0 200],[1/5, 17/5, 14,0 ]);
K=0.56;
Kc=1.0228;
Gc=tf([Kc*1 Kc*4.8687],[1 8.8927]);
```

```
figure(3)
title('SISTEMA Compensado (Gc*G)');
bode(Gc*G,{0.01,1000})
margin(Gc*G)
grid on
```

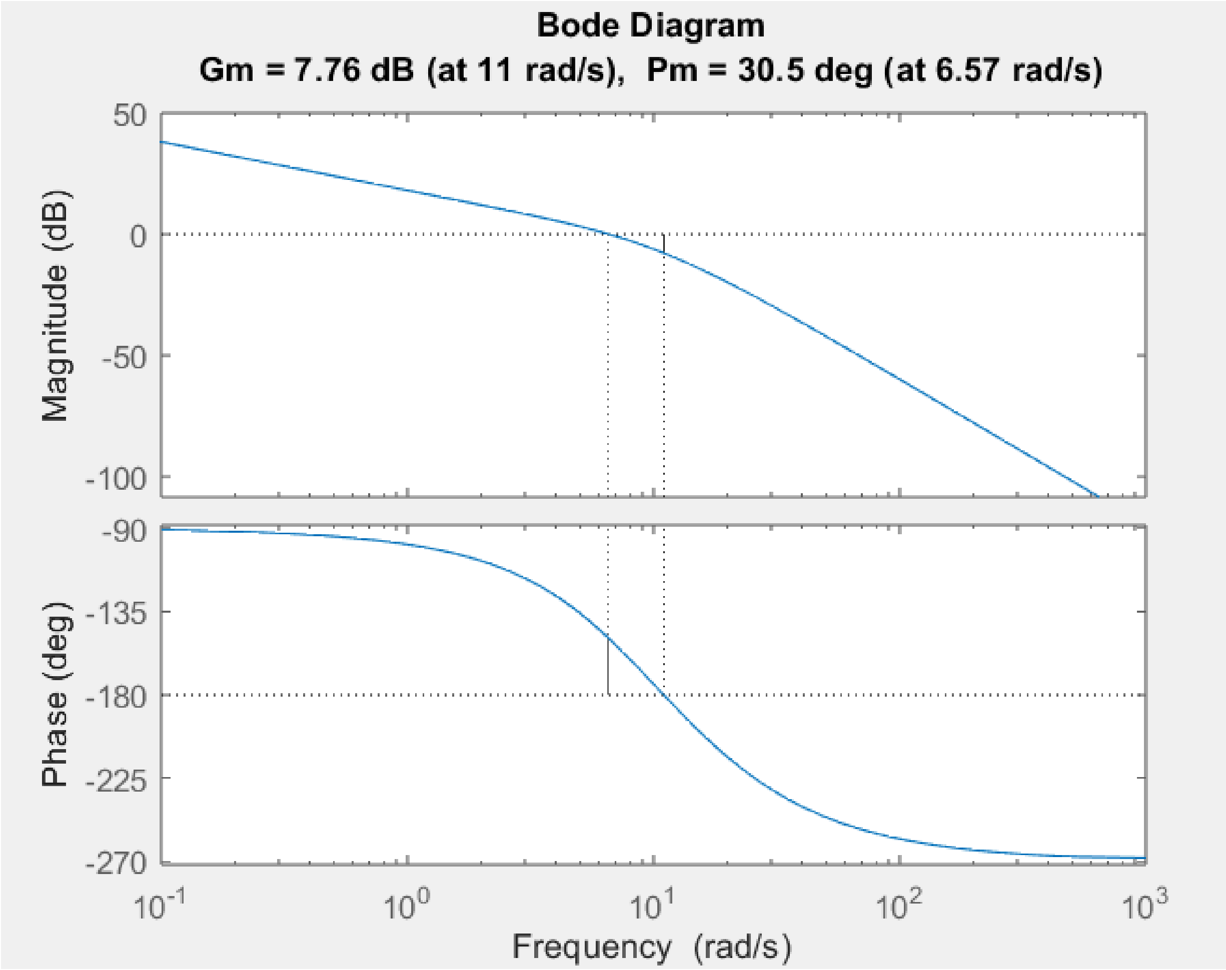


Figura 2.2. Diagrama de Bode de Gc(s)G(s) con un ajuste de 5°

como se puede ver en la **figura 2.2**, el ajuste no cumplio con las características pedidas de 35 grados de margen de fase y los 8 dB de margen de ganancia así que probaremos con más ajustes:

Probamos con 6° 7° 10° y no obtuvimos las características deseadas, hasta que intentamos con 12° de ajuste y entonces:

$$\Phi_m = 35° - 23° + 12° = 24°$$

con este Φ_m obtendremos α

tenemos que $Sen(\Phi_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ entonces al despejar α:

$$\alpha = \frac{1-Sen(\Phi_m)}{1+Sen(\Phi_m)} = \frac{1-Sen(24°)}{1+Sen(24°)} = 0.421$$

Una vez obtenido α se obtiene el cruce de la ganancia de la siguiente forma:

$$M_{\omega c} =- 20\,log_{10}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}) =- 20\,log_{10}(\frac{1}{\sqrt{0.421}}) =- 3.7571$$

Revisemos en el diagrama de bode que frecuencia corresponde

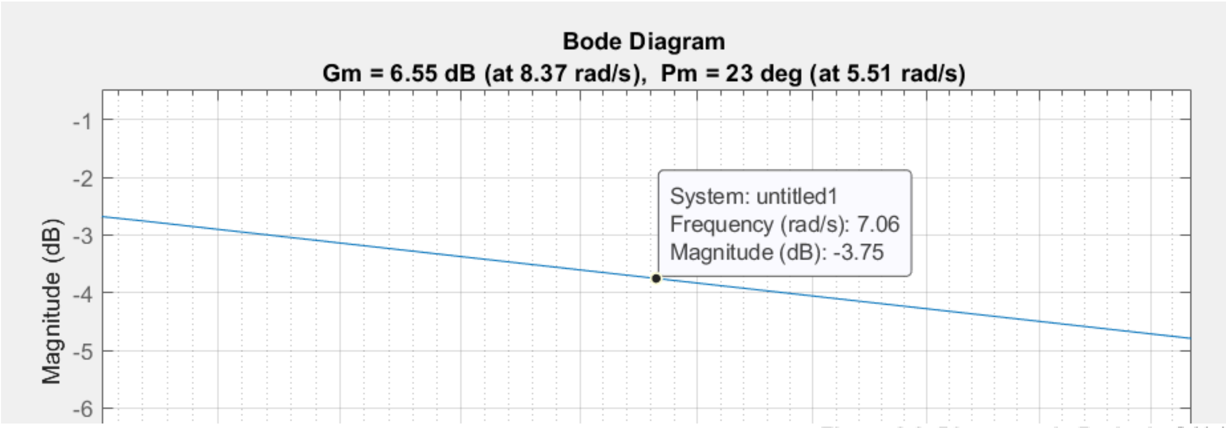


Figura 2.3. Diagrama de Bode de G1(s) magnitud con un ajuste de 12°

son 7.06 rad/seg $= \omega_c$

Saquemos las frecuencias esquinas
para el cero es:

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha} * \omega_c = \sqrt{0.4217} * 7.06 = 4.5846$$

Para el polo es:

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = \frac{7.06}{\sqrt{0.4217}} = 10.8718$$

Obtenemos el valor de la ganancia del compensador K_c:

$$k_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{0.56}{0.4217} = 1.3$$

Sustituimos los valores correspondientes en el compensador de adelanto:

$$G_c(s) = k_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} = 1.3 \frac{s+4.5846}{s+10.8718}$$

Comprobemos nuestro diagrama de bode con MATLAB:

```
figure(3)
title('SISTEMA Compensado (Gc*G)');
bode(Gc*G,{0.01,1000})
margin(Gc*G)
grid on
```

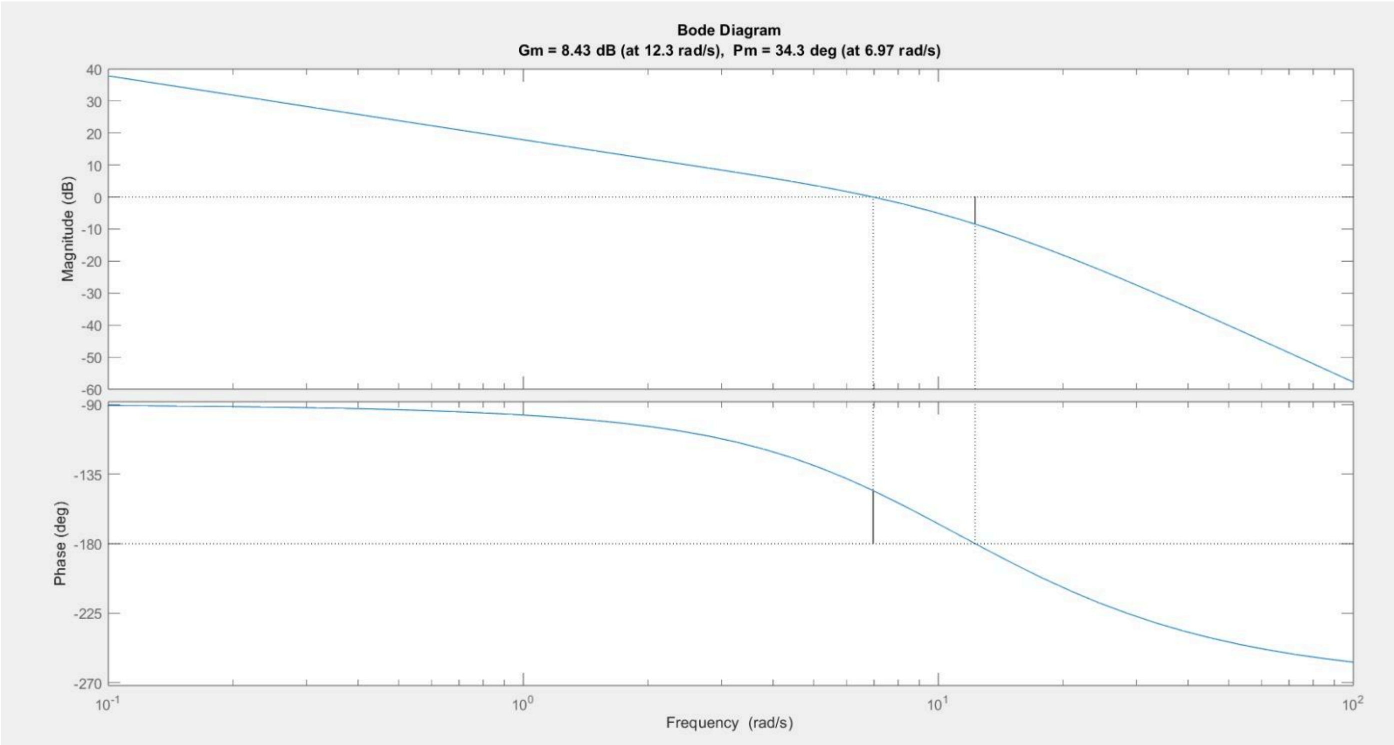


Figura 2.4. Diagrama de Bode de Gc(s)G(s) con un ajuste de 12°

Como se puede observar en la **figura 2.4** es el diagrama de Bode el cual muestra la respuesta del sistema G(s) en conjunto con el controlador Gc(s) previamente diseñado, por lo tanto, el sistema ya cumple con los requisitos de la constante de error estático de velocidad K_v es igual a $8\ seg^{-1}$ el margen de ganancia si se cumple ya que se pidió al menos un margen de ganancia de 8 dB y se obtuvo un margen de 8.43 dB. Sin embargo, el margen de fase no se cumplió ya que se pidió al menos 35° y en este se obtuvo un margen de fase de 34.4° aun habiendo agregado el máximo de ajuste posible. Esto pudo haber ocurrido ya que el método que nosotros usamos no es un método exacto ya que hay valores que se pierden al ser omitidos y la pérdida de estos puede tener como resultado en un margen de fase muy cercano a los 35°.

- Sistema en lazo cerrado (Figura 1) a una entrada escalón unitario:
  Como nuestra función de transferencia está en lazo abierto, debemos hacerla en lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

Entonces:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{260s + 1191}{0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 152.3s}}{1 + \frac{260s + 1191}{0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 152.3s}}$$

Simplificamos y queda de esta forma:

$$=\frac{260s+1191}{0.2s^4+5.57s^3\ +\ 50.99s^2+152.3s+(260s+1191)}$$

Simplificamos términos semejantes:

$$=\frac{260s+1191}{0.2s^4+5.57s^3\ +\ 50.99s^2+412.3s\ +1191}$$

Cómo es una entrada escalón unitario $U(s)$ = $\frac{1}{s}$:

$$\frac{Y(s)}{\frac{1}{s}}=\frac{260s+1191}{0.2s^4+5.57s^3\ +\ 50.99s^2+412.3s\ +1191}$$

$$Y(s)\ =\frac{1}{s}\frac{260s+1191}{0.2s^4+5.57s^3\ +\ 50.99s^2+412.3s\ +1191}$$

La salida de nuestro sistema ante el escalón unitario es la siguiente:

$$Y(s)\ =\frac{260s+1191}{s(0.2s^4+5.57s^3\ +\ 50.99s^2+412.3s\ +1191)}$$

Ahora comprobamos la respuesta en el tiempo ante esta entrada en Matlab:

```
%Función de transferencia del sistema no compensado
num = 200;
den = [0.2 3.4 14 200];
Gs = tf(num,den);

%Función de transferencia del sistema compensado
numc = [260 1191];
denc = [0.2 5.57 50.99 412.3 1191];
Gs_Gc = tf(numc,denc);

%Gráfica de los sistemas
hold on
t = 0:0.02:15;
step(Gs,t);
step(Gs_Gc,t);
grid
title('Respuesta a escalón unitario de sistema compensado y no compensado')
xlabel ('t Segundos');
ylabel('Sistemas');
legend("G(s)","Gc(s)G(s)")
```

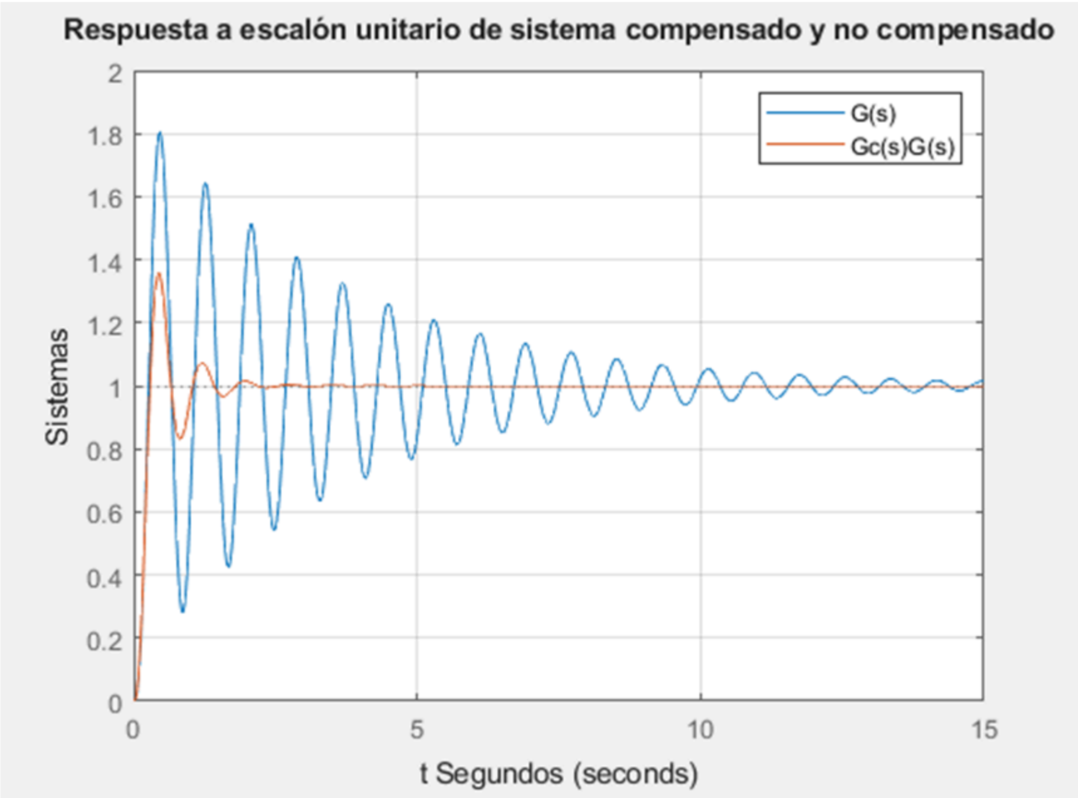


Figura 2.5. Respuesta en el tiempo de G(s) (Azul) y de Gc(s)G(s) (Naranja).

En la **figura 2.5** se pueden observar las gráficas de ambos sistemas, la gráfica azul es la función de transferencia del sistema sin compensar y la gráfica naranja es la función de transferencia del sistema compensado, el sistema no compensado nos muestra oscilaciones más pronunciadas y tarda más tiempo en llegar al estado estacionario, mientras que el sistema compensado no muestra mucha oscilación y llega más rápido al estado estacionario, todo esto ante una entrada escalón unitario y en lazo cerrado, por lo que podemos decir que al ver el diagrama de Bode de la **figura 2.4**, nuestro sistema compensado cumple con los requisitos pedidos y es más rápido y más estable que el sistema no compensado.

Ahora calculamos el error en estado estacionario ante la entrada escalón en lazo abierto:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

donde $R(s) = \frac{1}{s}$, por lo tanto:

$$E(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{260s + 1191}{0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 152.3s}}$$

Para encontrar el error utilizamos el teorema del valor final:

$$e_{step} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \cancel{s}\frac{\cancel{\frac{1}{s}}}{1 + \frac{260s + 1191}{0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 152.3s}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{260s + 1191}{0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 152.3s}} = \frac{1}{1 + \frac{260(0) + 1191}{0.2(0)^4 + 5.57(0)^3 + 50.99(0)^2 + 152.3(0)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1191}{0}} = \frac{1}{1 + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

- Sistema en lazo cerrado (Figura 1) a una entrada rampa unitaria:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

Cómo es una entrada rampa unitaria $U(s) = \frac{1}{s^2}$:

$$\frac{Y(s)}{\frac{1}{s^2}} = \frac{260s + 1191}{0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 412.3s + 1191}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}\frac{260s + 1191}{0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 412.3s + 1191}$$

La salida de nuestro sistema ante la rampa unitaria es la siguiente:

$$Y(s) = \frac{260s + 1191}{s^2(0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 412.3s + 1191)}$$

Ahora comprobamos la respuesta en el tiempo ante esta entrada en Matlab:

```
%Función de transferencia del sistema no compensado
num = 200;
den = [0.2 3.4 14 200 0];
Gs = tf(num,den);

%Función de transferencia del sistema compensado
numc = [260 1191];
denc = [0.2 5.57 50.99 412.3 1191 0];
Gs_Gc = tf(numc,denc);

%Gráfica de los sistemas
hold on
t = 0:0.02:10;
step(Gs,t);
step(Gs_Gc,t);
grid
title('Respuesta a rampa unitaria de sistema compensado y no compensado')
xlabel ('t Segundos');
ylabel('Sistemas');
legend("G(s)","Gc(s)G(s)")
```

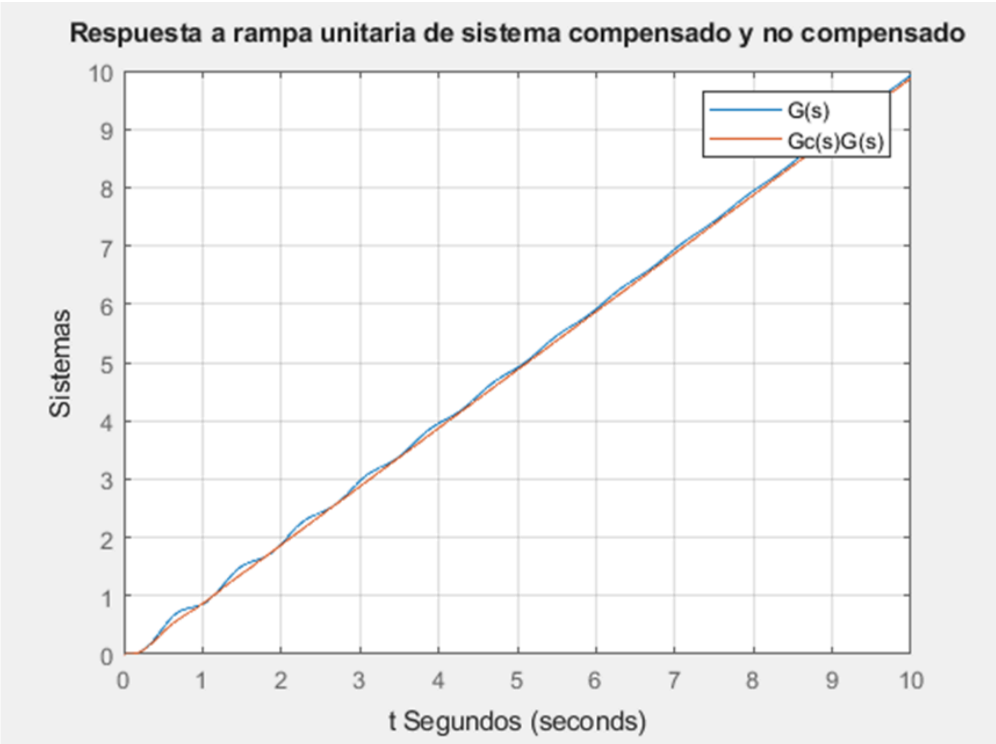


Figura 2.6. Respuesta en el tiempo de G(s) (Azul) y de Gc(s)G(s) (Naranja).

En la **figura 2.6** se pueden observar las gráficas de ambos sistemas, la gráfica azul es la función de transferencia del sistema sin compensar y la gráfica naranja es la función de transferencia del sistema compensado, el sistema no compensado nos muestra oscilaciones más pronunciadas y no se puede apreciar el tiempo que tarda en llegar al estado estacionario, por lo que deducimos que tarda más en llegar a dicho estado, mientras que el sistema compensado no muestra mucha oscilación y llega más rápido al estado estacionario, todo esto ante una entrada rampa unitaria y en lazo cerrado, por lo que podemos decir que al ver el diagrama de Bode de la **figura 2.4**, nuestro sistema compensado cumple con los requisitos pedidos y es más rápido y más estable que el sistema no compensado.

Ahora calculamos el error en estado estacionario ante la entrada rampa:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

donde $R(s) = \frac{1}{s^2}$, por lo tanto:

$$E(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{260s + 1191}{0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 152.3s}}$$

Para encontrar el error utilizamos el teorema del valor final:

$$e_{ramp} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{260s + 1191}{0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 152.3s}}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{260s + 1191}{0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 152.3s}} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s(1 + \frac{260s + 1191}{0.2s^4 + 5.57s^3 + 50.99s^2 + 152.3s})}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + \frac{s(260s + 1191)}{s(0.2s^3 + 5.57s^2 + 50.99s + 152.3)}}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + \frac{260s + 1191}{0.2s^3 + 5.57s^2 + 50.99s + 152.3}}$$

$$= \frac{1}{0 + \frac{260(0) + 1191}{0.2(0)^3 + 5.57(0)^2 + 50.99(0) + 152.3}}$$

$$= \frac{1}{0 + \frac{1191}{152.3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1191}{152.3}} = \frac{1}{7.82} = 0.128$$

4.- Para el sistema que se muestra en la Figura 1, diseñe un compensador de retardo Gc(s) tal que cumpla con los siguientes requerimientos (20 puntos):

a. Constante de error estático de velocidad $k_v = 8\, seg^{-1}$

b. Margen de fase sea de al menos 36°.

c. Margen de ganancia mayor de 10 dB.

Favor de detallar su procedimiento. Adjuntar a su reporte las gráficas y código utilizado.

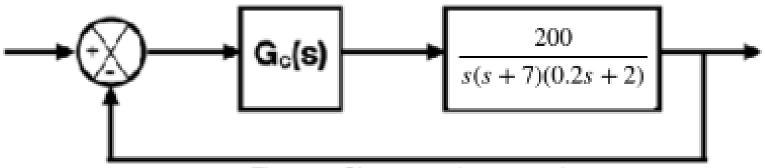


Figura 1. Sistema en lazo cerrado.

La función de transferencia del sistema G(s) es:

$$G(s) = \frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)}$$

El compensador de retardo tiene la siguiente forma:

$$G_c(s) = K_c\beta\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\beta\tau}}$$

$K_C \rightarrow$ es la ganancia

β → es el factor de atenuación el cual debe ser mayor a 1.

Se sustituye $K = K_c\beta$

La función de transferencia del sistema compensado en lazo abierto es:

$$G_c(s)G(s) = \frac{\tau s+1}{\tau s+1}KG(s)$$

Para que al aplicar nuestro compensador cumpla que con los $K_v = 8\, seg^{-1}$ tenemos que comenzar sacando nuestra ganancia K:

El error estático de velocidad se define como:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s)$$

Entonces:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sK\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1} * \frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)} = \frac{\tau\cancel{(0)}+1}{\beta\tau\cancel{(0)}+1}\lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{K200}{\cancel{s}(s+7)(0.2s+2)}$$

$$= \frac{1}{1} * \frac{K200}{((0)+7)(0.2(0)+2)} = \frac{K200}{(7)(2)} = \frac{K200}{14}$$

Y como queremos que nuestra K_v sea de 8 seg^{-1} entonces:

$$\frac{K200}{14} = 8$$

Despejamos para K:

$$14 * \frac{K200}{14} = 8 * 14$$

$$\frac{1}{200}K200 = 112 * \frac{1}{200}$$

$$K = \frac{112}{200} \qquad K = 0.56$$

Tenemos nuestra K podremos obtener nuestra KG(s):

$$KG(s) = 0.56\frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)} = \frac{112}{s(s+7)(0.2s+2)} = \frac{112}{\frac{1}{5}s^3+\frac{17}{5}s^2+14s}$$

El siguiente paso es obtener el diagrama de bode de G1(s) con la ganancia ajustada sin compensar. Lo haremos en MatLab con el siguiente código:

```
G = tf([0 200],[1/5 17/5 14 0]);
K= 0.56;
figure(2)
title('SISTEMA G');
bode(K*G,{0.01,1000})
margin(K*G)
grid on
```

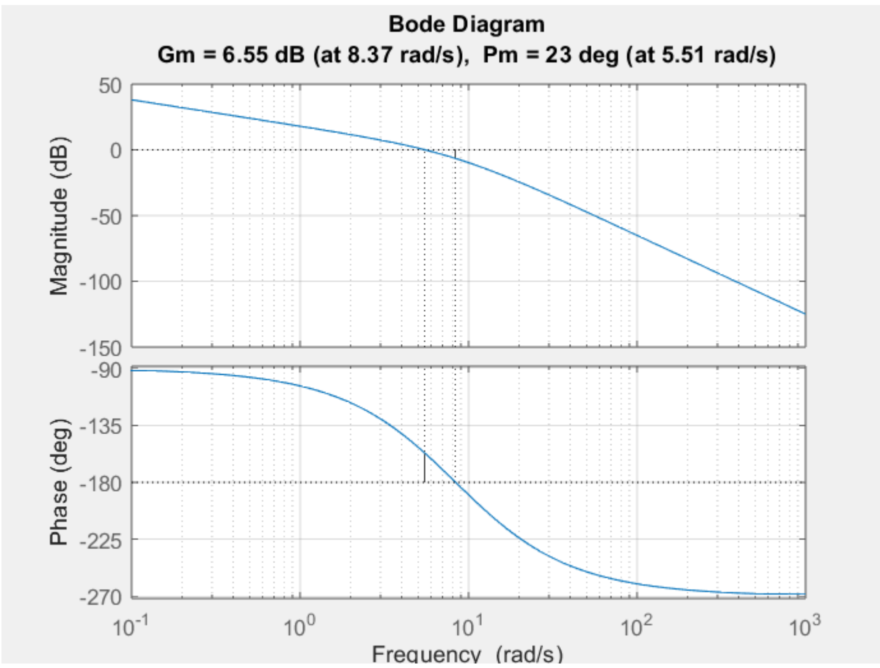


Figura 2.7. Diagrama de Bode de KG(s)

Podemos observar en la **figura 2.7** el margen de fase es de 23° grados, como se pide al menos 36 grados, se realiza el siguiente cálculo:

$$-180° + margen\ de\ fase\ deseado + (ajuste\ de\ entre\ 5°\ y\ 12°)$$

Como se desea tener un margen de fase de 36° entonces:

$$-180° + 36° + 5° = -139°$$

Revisemos en el diagrama de bode que frecuencia corresponde

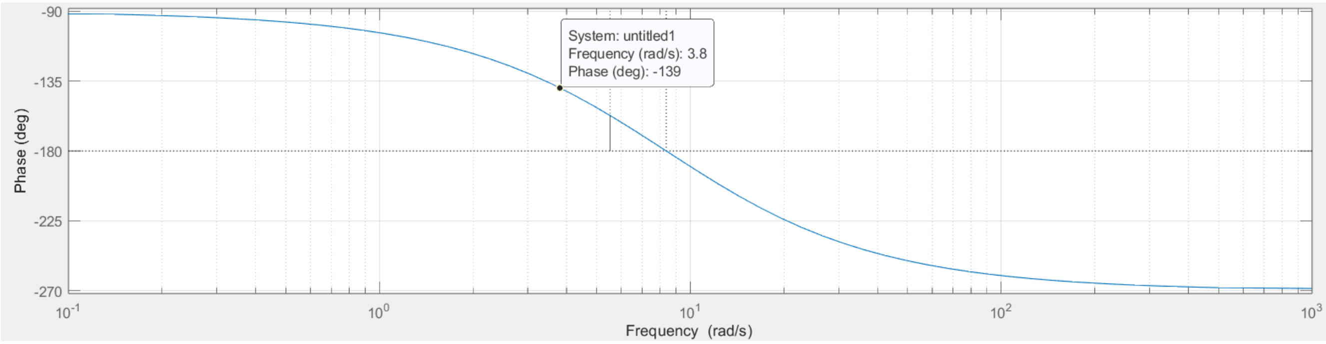


Figura 2.8. Diagrama de Bode de KG(s) fase

En -139° la frecuencia es de 3.8 rad/seg la cual es mi nueva frecuencia de cruce.

Ahora toca encontrar la frecuencia de cruce del cero y la forma para encontrarlo es en una década menor a la nueva frecuencia de cruce, por lo tanto:

$$\frac{1}{\tau} = 0.38\, rad/seg$$

Ahora se necesita hacer que la nueva frecuencia de cruce tenga una magnitud de 0 dB.

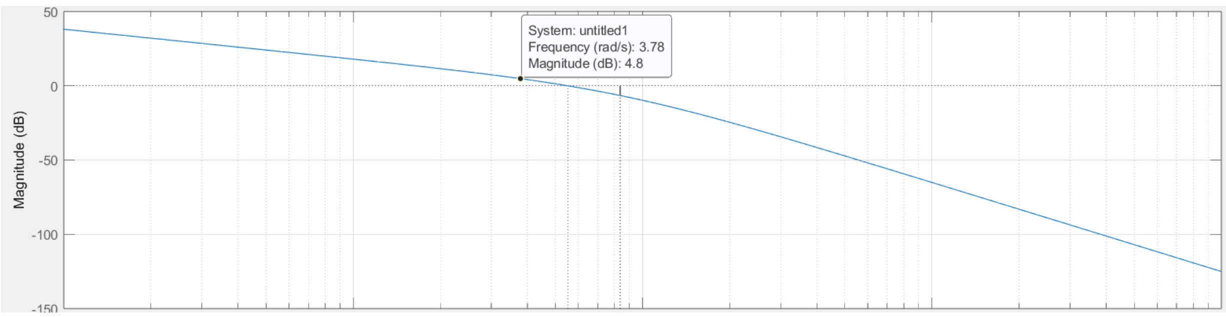


Figura 2.9. Diagrama de Bode de KG(s) magnitud

Como se puede observar en la **figura 2.9** en la nueva frecuencia de cruce la magnitud es de 4.8 dB ≈ 5 dB entonces se le tienen que restar esos 5 dB para que la magnitud de la nueva frecuencia de cruce sea igual a 0 así que:

$$-5 = -20 log_{10} \beta$$

$$\frac{-5}{-20} = log_{10} \beta$$

$$\frac{1}{4} = log_{10} \beta$$

$$10^{\frac{1}{4}} = \beta$$

$$\beta = 1.778$$

Una vez obtenida β y el valor del cero $\frac{1}{\tau}$ se puede obtener el valor del polo de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\beta\tau} = \frac{0.38}{1.778} = 0.213\, rad/seg$$

Por último se obtiene la ganancia del compensador:

$$K_C = \frac{K}{\beta} = \frac{0.56}{1.778} = 0.314$$

Una vez ya obtenidos todo los valores del compensador de retardo queda de la siguiente forma:

$$G_c(s) = K_c \frac{s+\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\beta\tau}} = 0.31 \frac{s+0.38}{s+0.213}$$

Comprobemos esto en Matlab:

```
G=tf([0 200],[1/5, 17/5, 14, 0]);
K=0.56;
Kc=0.314;
Gc=tf([Kc*1 Kc*0.38],[1 0.213]);
figure(1)
title('SISTEMA compensado Gc(s)G(s)');
bode(Gc*G,{0.01,1000})
margin(Gc*G)
grid on
```

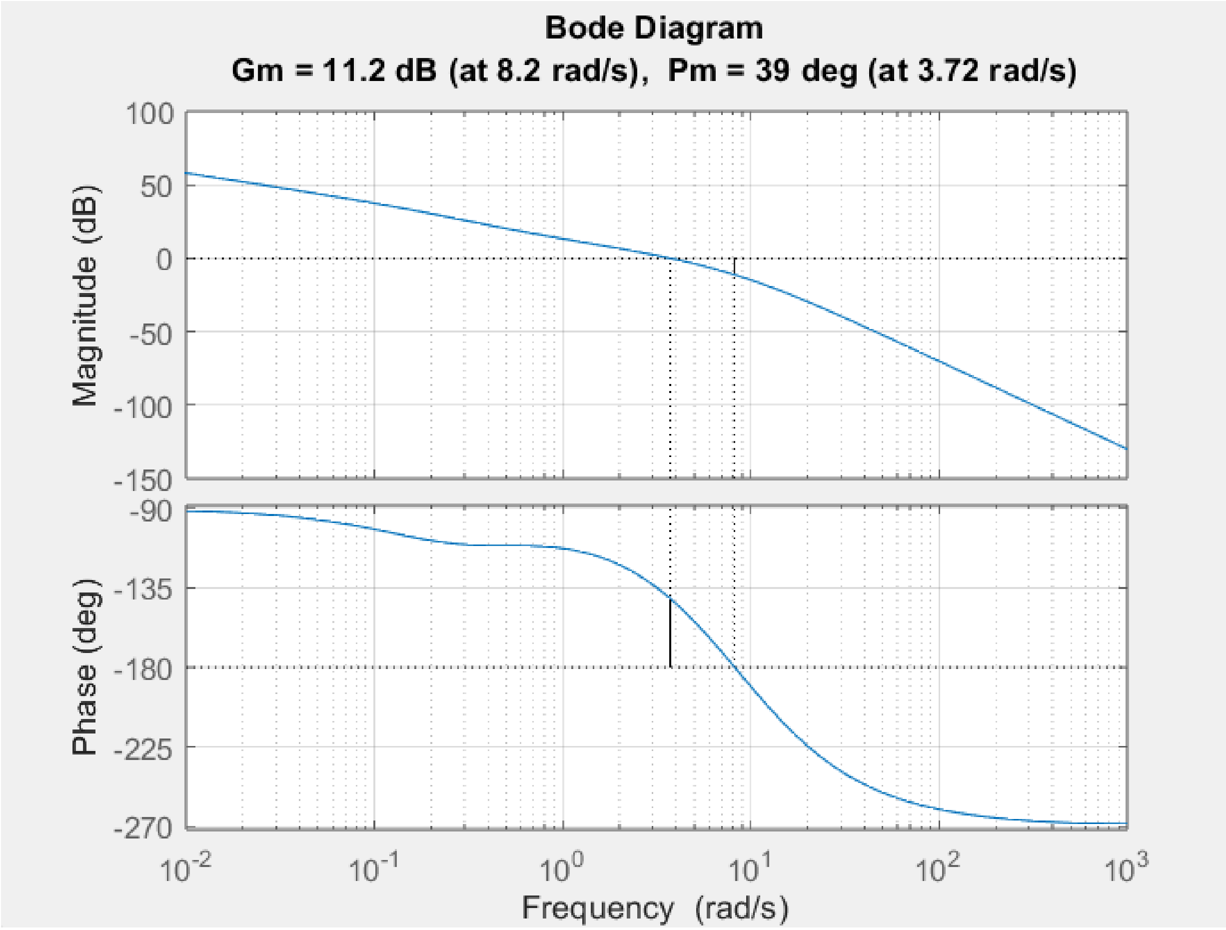


Figura 3.0. Diagrama de Bode de Gc(s)G(s) con un ajuste de 5°

Afortunadamente con el ajuste de 5° fue suficiente para cumplir con los requerimientos. Como se puede observar en la **figura 3.0** es el diagrama de Bode en el que se muestra la respuesta del sistema G(s) en conjunto con el controlador Gc(s) previamente diseñado, por lo tanto, el sistema ya cumple con los requisitos de la constante de error estático de velocidad K_v es igual a $8\ seg^{-1}$, el margen de ganancia si se cumple ya que se pidió al menos un margen de ganancia de 10 dB y se obtuvo de 11.2 dB, y por último se pidió un margen de fase de al menos 36° y se obtuvo de 39°.

La función de transferencia en lazo abierto queda de la siguiente forma:

$$G_c(s)G(s) = 0.31\frac{s+0.38}{s+0.213} * \frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)}$$

$$= \frac{0.31s+0.1178}{s+0.213} * \frac{200}{0.2s^3 + 3.4s^2 + 14s}$$

$$G_c(s)G(s) = \frac{62.8\,s + 23.86}{0.2\,s^4 + 3.443\,s^3 + 14.73\,s^2 + 2.996\,s}$$

5.- Para el sistema que se muestra en la Figura 1, diseñe un compensador de retardo-adelanto Gc(s) tal que cumpla con los siguientes requerimientos (20 puntos):

a. Constante de error estático de velocidad $k_v = 8\, seg^{-1}$

b. Margen de fase sea de al menos 65°.

c. Margen de ganancia mayor de 25 dB.

Favor de detallar su procedimiento. Adjuntar a su reporte las gráficas y código utilizado.

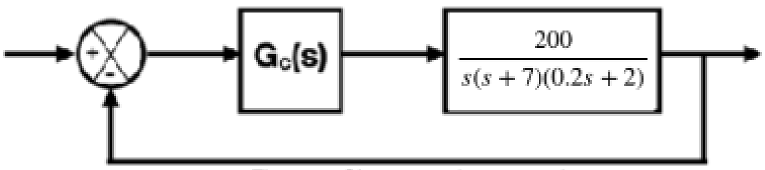


Figura 1. Sistema en lazo cerrado.

La función de transferencia del sistema G(s) es:

$$G(s) = \frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)}$$

El compensador de retardo tiene la siguiente forma:

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s+\frac{1}{\tau_1}}{s+\frac{\gamma}{\tau_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{\tau_2}}{s+\frac{1}{\beta\tau_2}}\right)$$

$K_C \rightarrow$ es la ganancia la cual es igual a 1

β → debe ser mayor a 1.

ɣ→ es igual a β.

La función de transferencia del sistema compensado en lazo abierto es:

$$G_c(s)G(s) = \frac{(\tau_1 s+1)}{(\frac{\tau_1}{\gamma}s+1)}\frac{(\tau_2 s+1)}{(\beta\tau_2 s+1)}KG(s)$$

Para que al aplicar nuestro compensador cumpla que con los $K_v = 8\, seg^{-1}$ tenemos que comenzar sacando nuestra ganancia K:

El error estático de velocidad se define como:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s)$$

Entonces:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sK\frac{(\tau_1 s+1)}{(\frac{\tau_1}{\gamma}s+1)}\frac{(\tau_2 s+1)}{(\beta\tau_2 s+1)}\frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)} = \frac{(\tau_1\cancel{(0)}+1)}{(\frac{\tau_1}{\gamma}\cancel{(0)}+1)}\frac{(\tau_2\cancel{(0)}+1)}{(\beta\tau_2\cancel{(0)}+1)}*$$

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s}\frac{K200}{\cancel{s}(s+7)(0.2s+2)}$$

$$= \frac{1}{1} * \frac{K200}{((0)+7)(0.2(0)+2)} = \frac{K200}{(7)(2)} = \frac{K200}{14}.$$

Y como queremos que nuestra K_v sea de 8 seg^{-1} entonces:

$$\frac{K200}{14} = 8$$

Despejamos para K:

$$14 * \frac{K200}{14} = 8 * 14$$

$$\frac{1}{200}K200 = 112 * \frac{1}{200}$$

$$K = \frac{112}{200} \qquad K = 0.56$$

El siguiente paso es obtener el diagrama de bode de G1(s) con la ganancia ajustada sin compensar. Lo haremos en MatLab con el siguiente código:

```
G=tf([0 200],[1/5, 17/5, 14,0 ]);
K=0.56;

figure(2)
title('SISTEMA G');
bode(K*G,{0.01,1000})
margin(K*G)
grid on
```

Obtenemos el siguiente diagrama de Bode:

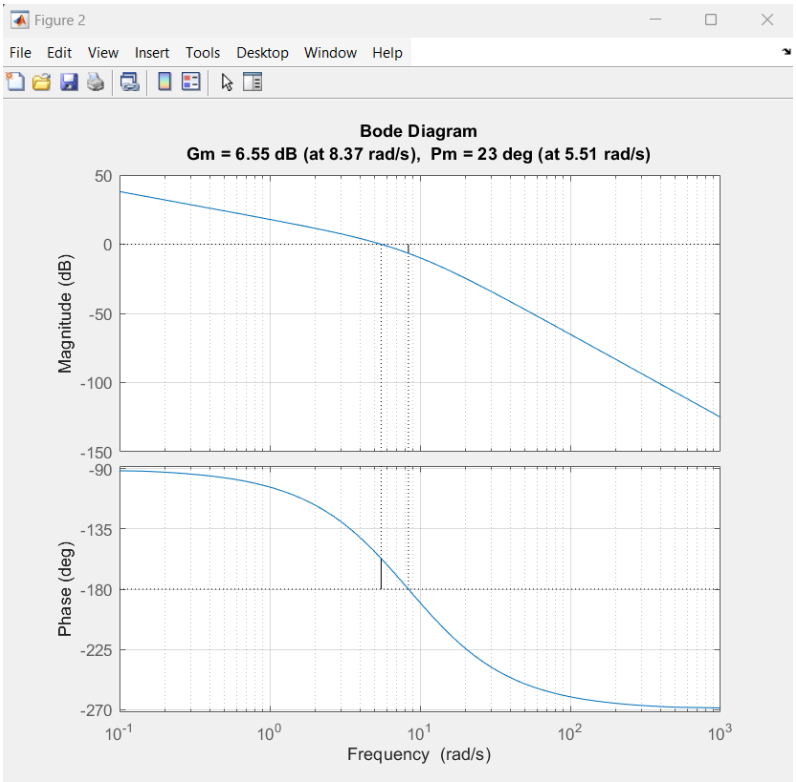


Figura 3.1. Diagrama de Bode de G1(s)

El paso siguiente en el diseño de un compensador de retardo-adelanto es seleccionar una nueva frecuencia de cruce de ganancia que cruce con -180 grados

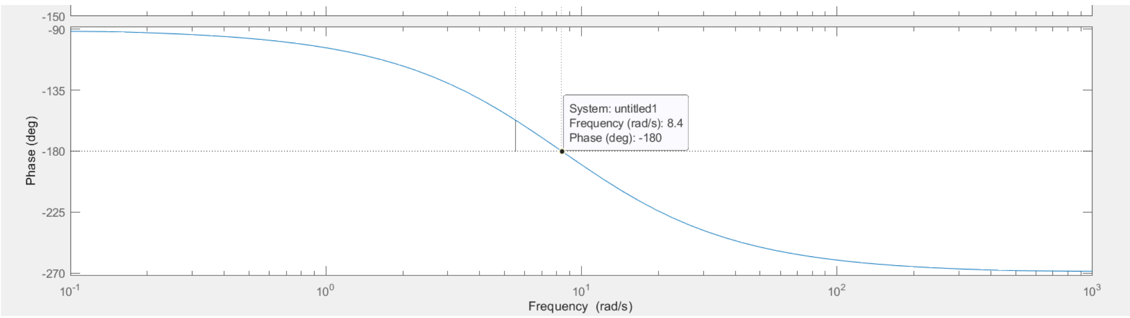


Figura 3.2. Diagrama de fase de G1(s)

Como podemos observar en la **Figura 3.2** tenemos un punto marcado en -180 grados la cual corresponde a la frecuencia de **8.4 rad/seg**. la cual será nuestra nueva frecuencia de cruce de ganancia.

Una vez que se ha seleccionado la frecuencia de cruce de ganancia en 8.4 rad/seg se puede determinar la frecuencia esquina de la parte de retardo de fase del compensador de retardo-adelanto. Se selecciona la frecuencia esquina:

$$\omega = \frac{1}{\tau_2}$$

Que corresponde al cero de la parte de retardo de fase del compensador que se encuentra una década menor de la nueva frecuencia de cruce de ganancia por lo que:

$$\omega = \frac{1}{\tau_2} = 0.84$$

Ahora para obtener β se tiene que despejar la siguiente fórmula:

$$sen\phi_m = \frac{\beta-1}{\beta+1}$$

$$(\beta + 1)sen\phi_m = \beta - 1$$

$$\beta sen\phi_m + sen\phi_m = \beta - 1$$

$$1 + sen\phi_m = \beta - \beta sen\phi_m$$

$$1 + sen\phi_m = (1 - sen\phi_m)\beta$$

$$\frac{1+sen\phi_m}{1-sen\phi_m} = \beta$$

Bien, dado ahora que el margen de fase deseado es de 65 grados, en este caso 65 toma el valor de Φ_m cosa que en los anteriores compensadores no era el caso, pero se puede también sumar un ángulo pequeño para asegurar nuestro margen. Pero en este caso no optamos por sumar ningún ángulo así que decimos:

$$\Phi_m = 65°$$

Para el caso del compensador de retardo tenemos ahora que $\alpha = \frac{1}{\beta}$, así que para despejar β tenemos la siguiente fórmula:

$$\beta = \frac{1+Sen(\Phi_m)}{1-Sen(\Phi_m)} = \frac{1+Sen(65°)}{1-Sen(65°)} = 20.34$$

Ya una vez obtenido $\frac{1}{\tau_2}$ y β entonces:

$$\omega = \frac{1}{\beta\tau_2} = \frac{1}{20.34}(0.84) = 0.04$$

Para esta parte ya podemos calcular la parte de retardo de nuestro compensador:

$$\left(\frac{s+\frac{1}{\tau_2}}{s+\frac{1}{\beta\tau_2}}\right) = \frac{s+0.84}{s+0.04}$$

Para continuar con lo siguiente que ahora es obtener los valores del polo y cero de la parte de adelanto, para esto tenemos que, como la nueva frecuencia de cruce de ganancia es ω = 8.4 rad/seg, de la **Figura 3.2**, se debe de hallar una nueva magnitud que ahora esté en esta nueva frecuencia, y a partir de ese requisito es posible dibujar una línea recta con pendiente de 20dB/década, que debe de pasar por el punto antes encontrado. Y así hallar la intersección en 0 dB y hallar la intersección -20 dB.

Bien dicho esto, comenzamos con definir nuestro nuevo punto. la cual utilizando la gráfica del diagrama de bode no compensado pero ajustada en ganancia.

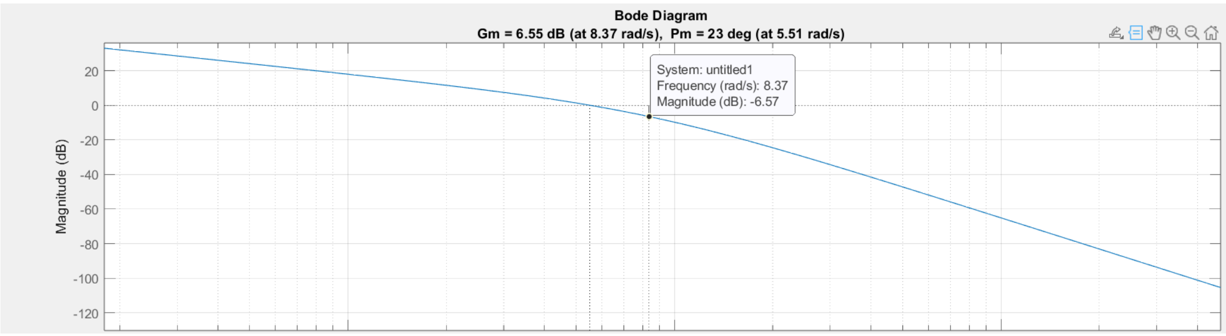


Figura 3.3. Diagrama de magnitud de G1(s)

Ahora que tenemos nuestro punto que la magnitud de fase es igual a -6.55 dB como se observa en la **Figura 3.3,** Sabiendo lo anterior agregamos recta con pendiente de 20dB/década que pasa por ese punto.

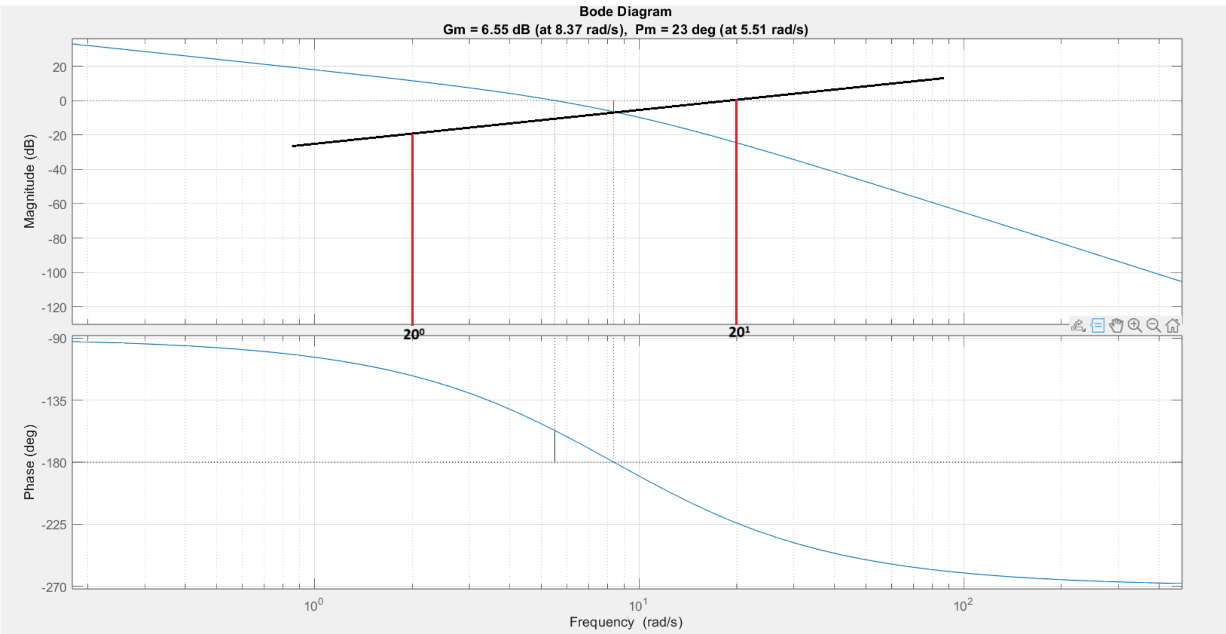


Figura 3.4. Análisis del diagrama de bode de G1(s) con una línea recta con pendiente de 20 dB/dec que pasa por el punto (8.4rad/seg, -6.55 dB)

Se puedo observar en la **figura 3.4** que el cruce por 0 dB fue en la frecuencia de 20 rad/seg por lo tanto ese es el valor del polo y en el cruce de -20 dB la frecuencia fue de 2 rad/seg por lo tanto ese es el valor del cero, por lo que la parte de adelanto queda de la siguiente manera:

$$\frac{s+\frac{1}{\tau_1}}{s+\frac{\gamma}{\tau_1}} = \frac{s+2}{s+20}$$

Una vez ya encontrada tanto la parte de retardo como la parte de adelanto y recordando que K_c es igual a 1, el compensador queda definido como:

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s+\frac{1}{\tau_1}}{s+\frac{\gamma}{\tau_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{\tau_2}}{s+\frac{1}{\beta\tau_2}}\right) = \frac{s+2}{s+20}\,\frac{s+0.84}{s+0.04}$$

Y para tener nuestro planta con el controlador tenemos:

$$G_c(s)G(s) = \frac{(0.56)(s+2)(s+0.84)}{(s+20)(s+0.04)} * \frac{200}{s(s+7)(0.2s+2)}$$

Resolviendo:

$$G_c(s)G(s) = \frac{0.56s^2+1.585s+0.9296}{s^2+20.04s+0.8} * \frac{200}{0.2s^3+3.4s^2+14s} =$$

$$G_c(s)G(s) = \frac{112s^2+317s+185.9}{0.2s^5+7.408s^4+82.3s^3+283.3s^2+11.2s}$$

Entonces tenemos que $G_c(s)G(s)$ sistema compensado.

Observando los resultados.

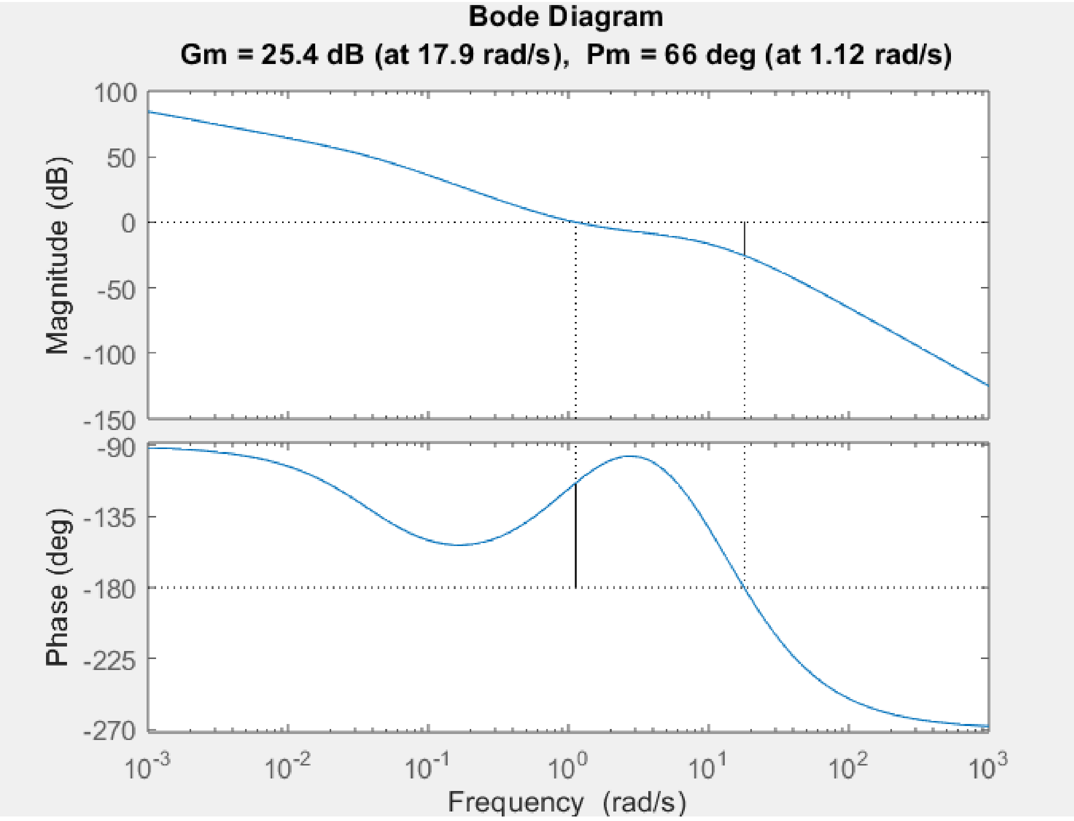


Figura 3.7. Diagrama de bode del sistema compensado Gc(s)*G(s)

Como se puede observar en la **figura 3.7**, el diagrama de Bode del sistema compensado cumple con lo pedido, ya que el sistema ya cumple con los requisitos de la constante de error estático de velocidad K_v es igual a $8\ seg^{-1}$, el margen de fase es de 66° y se pidió de al menos 65°, mientras que el margen de ganancia es de 25.4 dB y se pidió que fuera mayor a 25 dB, entonces podemos concluir que el procedimiento fue el correcto.

```
G = tf([0 200],[1/5 17/5 14 0]);
Gca = tf([1 2],[1 20]);
Gcr = tf([1 0.83],[1 0.04]);
Gc= Gca*Gcr;
K=0.56;
GcG = K*Gc*G;
w = logspace(-3,3);
bodeplot(GcG,'r',G,'g',Gc,'b')
grid on
```

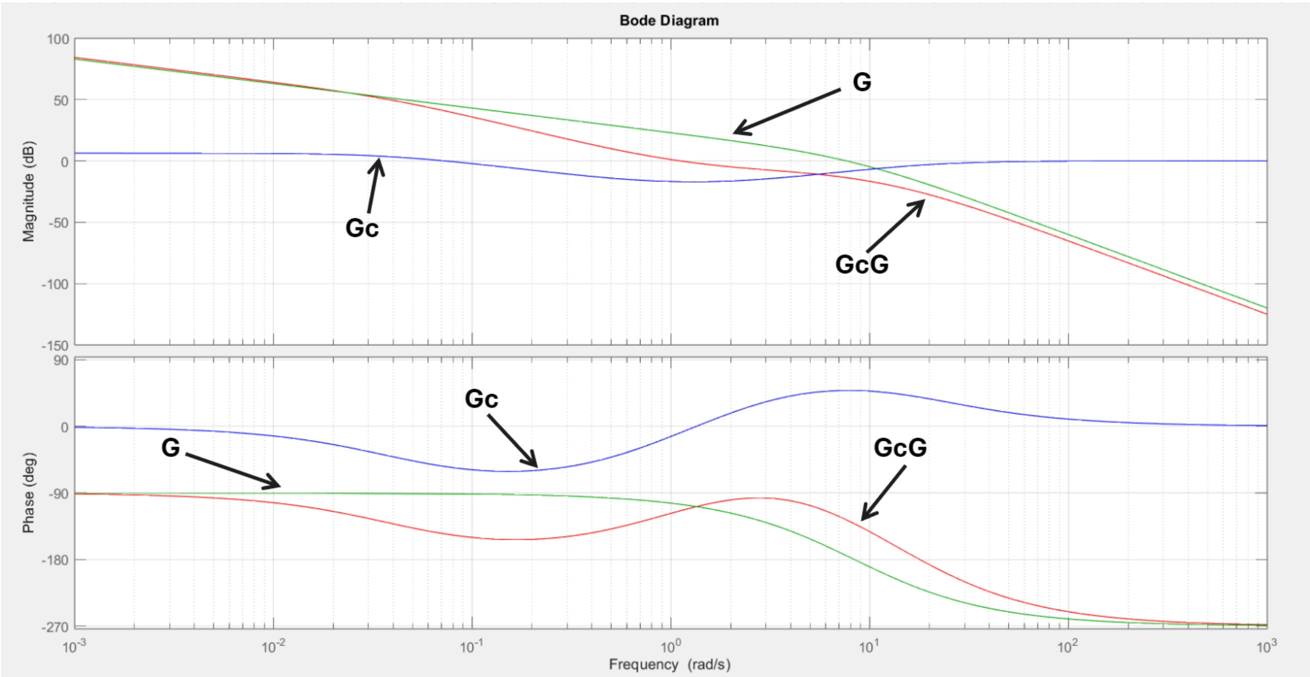


Figura 3.8. Diagramas de Bode de G, Gc y GcG

Por último en la **figura 3.8** se muestra el diagrama de Bode de tres escenarios distintos. La línea verde representa el diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo abierto, la línea roja corresponde a la función de transferencia modificada por los efectos del compensador, y la línea azul muestra el compensador. Estas curvas permiten visualizar cómo el compensador afecta el comportamiento en frecuencia del sistema, mejorando aspectos como la estabilidad y el margen de fase.