Universidad Centroamericana "José Simeón Cañas"
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Matemática
Cálculo III Ciclo 01/2025
Segundo Examen Parcial

1. Calcule el volumen del sólido Q, delimitado por las superficies $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+z^2=4$, $x^2+z^2=1$ y los planos $x=y=z=0$ en el primer octante. Debe incluir un gráfico que represente la región de integración sobre el plano de referencia que justifique los límites de integración usados.

   Solución. Utilizando el cambio a coordenadas polares, es posible hacer

$$x = r\cos\theta$$
$$z = r\operatorname{sen}\theta$$
$$y = r$$

   Por tanto, la proyección de la región en R_{xz} está entre las circunferencias $r=1$, $r=2$ y el ángulo $\theta \in [0, \pi/2]$. El sólido quedaría comprendido entre $y=0$ e $y=\sqrt{9-x^2-z^2}=\sqrt{9-r^2}$. Por tanto, el volumen estaría dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2\int_0^{\sqrt{9-r^2}} 1r\,dy\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 r\sqrt{9-r^2}\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(9-r^2)^{3/2}\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{6}\cdot(16\sqrt{2}-5\sqrt{5})\mu^3 \end{aligned}$$

2. Usando integrales dobles en un sistema de coordenadas conveniente. Calcular el área de la región limitada dentro de la curva $(x^2+y^2)^2x^2+y^2=0$, $x \geq 0$, y afuera de $4x^2+4y^2=1$. Debe incluir un gráfico que represente la región de integración sobre el plano de referencia que justifique los límites de integración usados.

   Solución. Al cambiar la curva a coordenadas polares

$$\begin{aligned} (x^2+y^2)^2x^2+y^2 &= 0 \\ (r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)^2 - r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta &= 0 \\ r^2 &= \cos 2\theta \end{aligned}$$

Por otro lado, la circunferencia $4x^2 + 4y^2 = 1$ se convierte en $r = \frac{1}{2}$, por tanto,

$$\frac{1}{2} = \sqrt{\cos 2\theta}$$
$$\theta \cong 0.659058$$

Luego, el área estaría dada por

$$A = 2\int_0^{0.6590} \int_{1/2}^{\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta = 0.319358\mu^2$$

3. Calcule la masa de un sólido delimitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ si la densidad del cuerpo es $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, luego calcular las coordenadas de su centro de gravedad. Debe incluir un gráfico que represente la región de integración sobre el plano de referencia que justifique los límites de integración usados. Datos complementarios: Masa:

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z) dV$$

Primeros momentos de inercia con respecto a los planos coordenados

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z)dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z)dV, \quad M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)dV$$

Centro de masa:

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Solución. Se tiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x$$
$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$Z = \sqrt{1-(x-1)^2 - y^2}$$

Donde

$$M = \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2-y^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2-y^2}} (x^2+y^2) dz dy dx$$
$$= \frac{28\pi}{15} um$$

Finalmente

$$\overline{x} = \frac{\frac{12\pi}{5}}{\frac{28\pi}{15}} = \frac{9}{7}$$
$$\overline{y} = \frac{0}{\frac{28\pi}{15}} = 0$$
$$\overline{z} = \frac{0}{\frac{28\pi}{15}} = 0$$

4. Dada la hélice circular $C: r(t) = (2\cos t)\vec{i} + (2\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$, $t \in [0, 2\pi]$, calcular:

   a) La longitud de C

      Solución. La longitud está dada por

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 1}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\,dt$$

$$= 2\pi\sqrt{5}.$$

   b) Evalúe $ydx + xdy + zdz$

      Solución. Se tiene

$$\int_0^{2\pi} [-4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t + t]\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\cos 2t + t)\,dt$$

$$= 2\pi^2$$

5. Encuentra el trabajo realizado por la fuerza

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x + e^{-y})\vec{i} + (4y - xe^{-y})\vec{j}$$

al mover una partícula desde el punto $(2, 0)$ sobre l acurva

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Solución. La parametrización de la curva está dada por $r(t) = \langle 2\cos t, 3\operatorname{sen} t\rangle$, $t \in [0, \pi]$ por tanto

$$\int_C \vec{F}dr = \int_0^{2\pi} (-2\operatorname{sen} t)\cdot(4\cos t + e^{-3\operatorname{sen} t}) + 3\cos t(12\operatorname{sen} t - 2\cos t e^{-3\operatorname{sen} t})dt$$

$$= -4$$