Guía N° 8: Derivadas

Estudiante: Daniel Joaquín Orjuela Holguín
Código: 2243134
Docente: Iván Vega
Asignatura: Cálcuo 1
Fecha: 12 de Abril de 2025

Reglas de derivada

Las reglas de las derivadas son:

- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(f/g)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

5. Suponga que $f(5) = 1, f'(5) = 6, g(5) = -3, g'(5) = 2$. Encuentre los valores siguientes:

a) $(fg)'(5)$
b) $(f/g)'(5)$
c) $(g/f)'(5)$

Solucion:

a) $(fg)'(5) = [6 * (-3)] + (1 * 2) = -16$
b) $(f/g)'(5) = \dfrac{[6 * (-3)] - (1 * 2)}{(-3)^2} = \dfrac{-20}{9}$
c) $(g/f)'(5) = \dfrac{(2 * 1) - [(-3) * 6]}{1^2} = 20$

6. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2, g'(0) = 5$. Hallar $f'(0)$.

Solucion:
$f'(0) = (e^0 * 2) + (e^0 * 5) = 7$

7. Si f es una funcíon derivable, encuentre una expresíon para la derivada de cada una de las siguientes:

a) $y = x^2 f(x)$
b) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$

Solucion:

a) $y' = (2x)f(x) + (x^2)f'(x)$
b) $y' = \dfrac{(2x)f(x) - (x^2)f'(x)}{(f(x))^2}$

8. ¿Cúantas rectas tangentes a la curva $y = x/(x+1)$ pasan por el punto $(1,2)$?¿En qué puntos toca la curva a estas rectas tangentes?

Solucion:

Suponiendo que la recta tangente toca la curva en $x = a$:

- Sabemos que la tangencia se presentan en $(a, f(a))$
- La pendiente en ese punto será $f'(a)$

La ecuación punto pendiente de la recta tangente sería:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Derivamos...

- $y = x/(x+1)$
- $y' = \dfrac{(1)(x+1) - (x)(1)}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Usando el punto dado inicialmente, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{a}{a+1} &= \frac{1}{(a+1)^2}(1-a) \\ \frac{2a+2-a}{a+1} &= \frac{1-a}{(a+1)^2} \\ \frac{a+2}{a+1} &= \frac{1-a}{(a+1)^2} \\ (a+2)(a+1) &= (1-a) \\ a^2 + 3a + 2 &= 1 - a \\ a^2 + 4a + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Usando la formula general de las ecuaciones cuadráticas:

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tenemos que:

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$a_1 = -2 + \sqrt{3} \text{ y } a_2 = -2 - \sqrt{3}$$

Entonces, las rectas tangentes pasan por los puntos:

$$P_1 = (-2 + \sqrt{3}, \frac{-2+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}) \text{ y } P_2 = (-2 - \sqrt{3}, \frac{-2-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}})$$

Y racionalizando:

$$P_1 = (-2 + \sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \text{ y } P_2 = (-2 - \sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$$

9. Si $h(2) = 4$ y $h' = -3$, encuentre:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{h(x)}{x}\right]\bigg|_{x=2}$$

Solucion:

Usando la regla de la derivada del cociente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{h(x)}{x}\right]\bigg|_{x=2} = \frac{h'(2)x - h(2)}{x^2} = \frac{-3*2-4}{2^2} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

■ Derive las siguientes funciónes:

10. $g(x) = \sqrt{x} - 2e^x$

Solucion:

- $\sqrt{x} = x^{1/2}$
- $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - 2e^x$
- $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2e^x$

11. $y = 4\pi^2$

Solucion:

Es una constante, por lo tanto:

- $y' = 0$

12. $y = \dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$

Solucion:

- $y = (x^2+4x+3)(x^{-1/2})$
- $y' = (2x+4)(x^{-1/2}) + (x^2+4x+3)(-\frac{1}{2}x^{-3/2})$
- $y' = \dfrac{(2x+4)}{\sqrt{x}} - \dfrac{(x^2+4x+3)}{2x^{3/2}}$
- $y' = \dfrac{(2x+4)}{\sqrt{x}} - \dfrac{(x^2+4x+3)}{2\sqrt{x^3}}$

13. $v = t^2 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$

Solucion:

- $v = t^2 - t^{-3/4}$
- $v' = 2t - (-\frac{3}{4})t^{-7/4}$
- $v' = 2t + \dfrac{3}{4t^{7/4}}$

- $v' = 2t + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{t^7}}$

14. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

Solucion:

- $z = Ay^{-10} + Be^y$
- $z' = -10Ay^{-11} + Be^y$
- $z' = -\dfrac{10A}{y^{11}} + Be^y$

15. $g(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$

Solucion:

- $g'(x) = \dfrac{(3)(2x+1)-(3x-1)(2)}{(2x+1)^2}$
- $g'(x) = \dfrac{(6x+3)-(6x-2)}{(2x+1)^2}$

16. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y3)$

Solucion:

- $F(y) = (y^{-2} - 3y^{-4})(y + 5y^3)$
- $F'(y) = (-2y^{-3} + 12y^{-5})(y + 5y^3) + (y^{-2} - 3y^{-4})(1 + 15y^2)$
- $F'(y) = \left(-\dfrac{2}{y^3} + \dfrac{12}{y^5}\right)(y + 5y^3) + \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(1 + 15y^2)$

17. $y = \dfrac{t^2}{3t^2 - 2t + 1}$

Solucion:

- $y' = \dfrac{(2t)(3t^2-2t+1) - (t^2)(6t-2)}{(3t^2-2t+1)^2}$
- $y' = \dfrac{(6t^3-4t^2+2t) - (6t^3-2t^2)}{(3t^2-2t+1)^2}$

18. $f(x) = \dfrac{x}{x + \frac{c}{x}}$

Solucion:

- $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + c}$
- $f'(x) = \dfrac{(2x)(x^2+c) - (x^2)(2x)}{(x^2+c)^2}$
- $f'(x) = \dfrac{(2x^3 + 2cx - 2x^3)}{(x^2+c)^2}$
- $f'(x) = \dfrac{2cx}{(x^2+c)^2}$

19. $g(t) = t^3 cos\, t$

Solucion:

- $g'(t) = (3t^2)(cos\, t) + (t^3)(-sin\, t)$
- $g'(t) = 3t^2\, cos\, t - t^3 sin\, t$

20. $y = \dfrac{x}{cos\, x}$

Solucion:

- $y' = \dfrac{(1)(cos\, x) - (x)(-sin\, x)}{(cos\, x)^2}$
- $y' = \dfrac{cos\, x + x sin\, x}{(cos\, x)^2}$

21. $y = \dfrac{sec\, \theta}{1 + sec\, \theta}$

Solucion:

- $y' = \dfrac{[(sec\, \theta \cdot tan\, \theta)(1 + sec\, \theta)] - [(sec\, \theta)(sec\, \theta \cdot tan\, \theta)]}{(1 + sec\, \theta)^2}$
- $y' = \dfrac{sec\, \theta \cdot tan\, \theta}{(1 + sec\, \theta)^2}$

22. $f(x) = xe^x\, csc\, x$

Solucion:

Agrupamos los términos xe^x, por lo cual definimos que:

- g(x) = xe^x
- h(x) = $csc\, x$

Redefinimos la función como:

$$f(x) = g(x)h(x)$$

Y usamos la regla de la cadena y del producto para derivar:

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

De este modo, tenemos que:

- $f'(x) = [(e^x)(csc\, x)] + [(xe^x)(-csc\, x \cdot cot\, x)]$
- $f'(x) = e^x\, csc\, x - xe^x\, csc\, x\, cot\, x$
- $f'(x) = e^x\, csc\, x(1 - x\, cot\, x)$