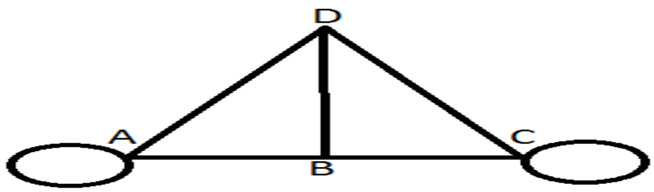
1. Considere o grafo:




   a) Construa a matriz adjacente; (2.0)

**Resposta:**

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \end{array}$$

   b) Determina o número de caminhos de comprimento 2 do vértice A até ao vértice C. (2.0)

**Resposta:**

$$N=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1x0 + 1x1 + 0x1 + 1x1 = 0 + 1 + 0 + 1 = 2$$

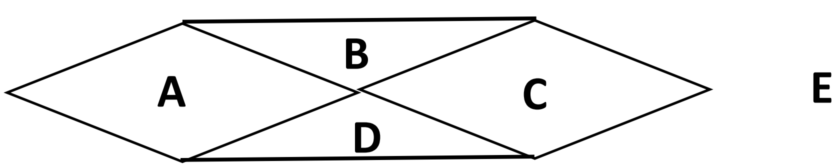
## Mapa e Grafo

Grafo correspondente ao mapa é um grafo plano G(V, E) tal que:

V – Conjunto de regiões inclusive a externa circundante.

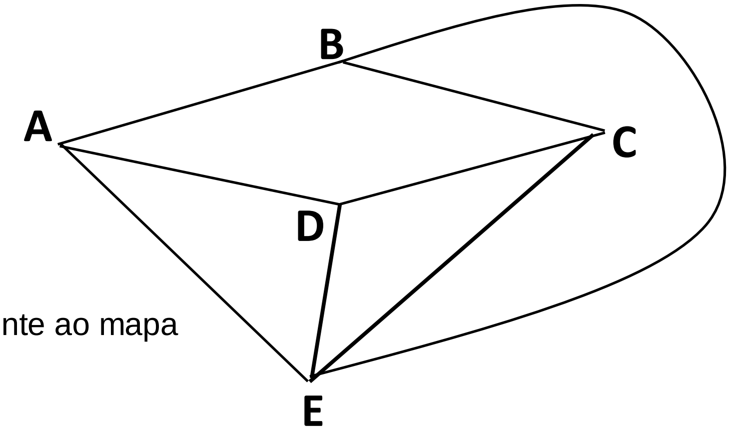
*x, y* ∈*V* ligados por uma aresta se as regiões x e y no mapa têm fronteira comum.

***Mapa***




Fórmula de Euler:

***f = e –v +2****, onde: f - Número de faces; e - número de arestas; v - número de vértices.*

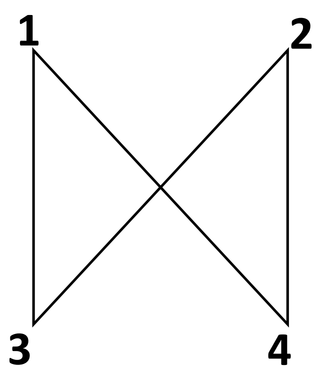


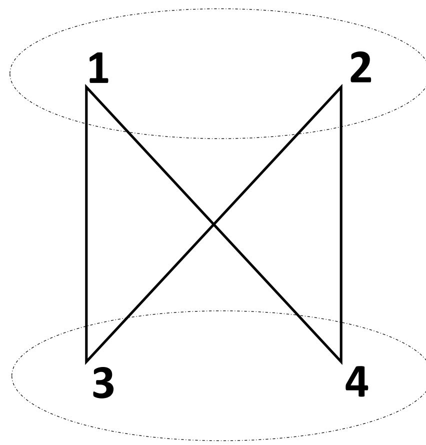

Grafo correspondente ao mapa

## Grafo $K_{m,n}$

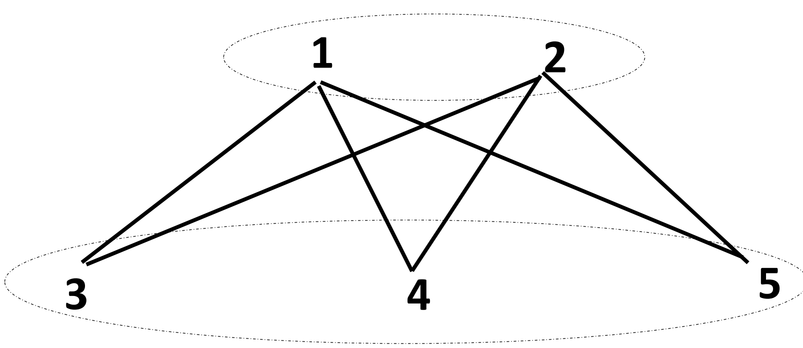
$K(K_{m,n}) = m \cdot n$

$K_{2,2}$

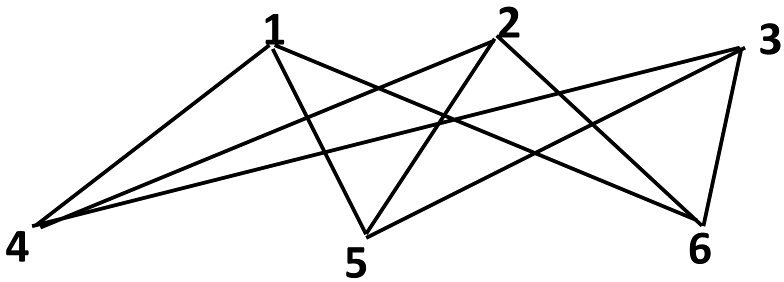



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



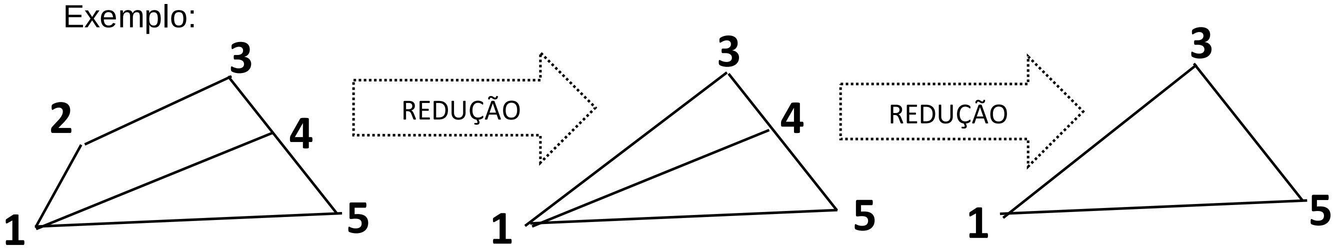

Nota: Em $K_{m,n}$ há circuito quando m e n são pares.

## Homeomorfismo

Dado um grafo, chama-se redução de grafos a operação:

1) Suprime-se um vértice intermediário de grau maior ou igual a 2.
2) Suprime-se as arestas incidentes ao vértice.
3) Os vértices extremos são ligados por arestas.

Exemplo:




**A)** **B)**

O grafo **B)** é homeomorfo ao grafo **A)**

**Definição:**

Diz-se que G’ é homeomorfo a G se se obtém a partir  da sequência de reduções. ***G’*** é homeomorfo a ***G***

## Teorema

Um grafo é plano se e somente se não tem subgrafos homeomorfos a $K_{3,3}$ ou $K_5$.

## Subgrafo

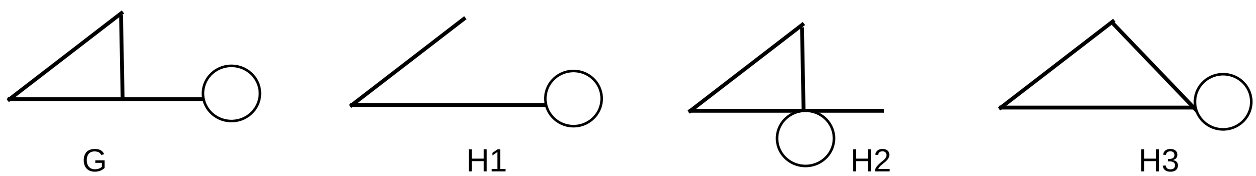
Seja G=(V, E, r); chama-se subgrafo de G a qualquer grafo H=(V', E', r'), tal que:

$$V' \subset V$$

$$E' \subset E$$

$$r'(e) = r(e'), \nvdash e' \epsilon H;$$ r'=r\E'

Exemplo:




- H1 é subgrafo de G
- H2 não é subgrafo de G
- H3 não é subgrafo de G

## Isomorfismo e Invariante

Sejam G(V, E) e G'(V', E') dois grafos.

Definição:

Diz-se que G é homeomorfismo de G para G' se existe um par de bijecção.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha: V \to V' \\ \beta: E \to E' \end{array}\right\} \; tal\ que, \beta(x, y) = (\alpha(x), \alpha(y))$$

$$\begin{array}{ccc} & x \qquad \alpha(x) & \\ e & \left( \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} \right) & e' \\ & y \qquad \alpha(y) & \end{array}$$

*x, y ∈V; α(x), α(y) ∈V'*

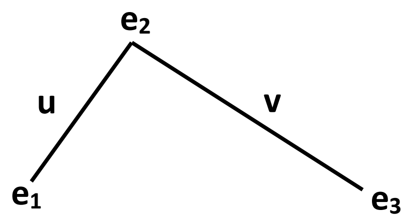
Se ɑ e ϒ são isomorfos de G→G', ɑ' e ϒ' isomorfos de G' → G, então G≡G', G e G' sao logicamente equivalentes. Onde ≡ é símbolo de equivalência lógica.

## Árvores

Chama-se árvore ao grafo conexo e acíclico.

Nota: O grafo não deve ter laços nem arestas paralelas.

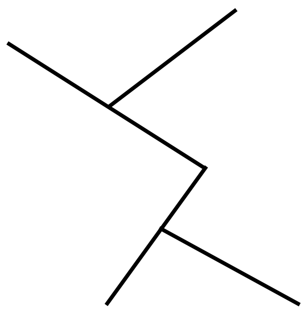
Exemplo:




P=2 arestas

N=3 vértices

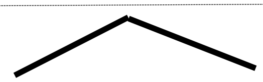
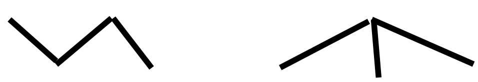
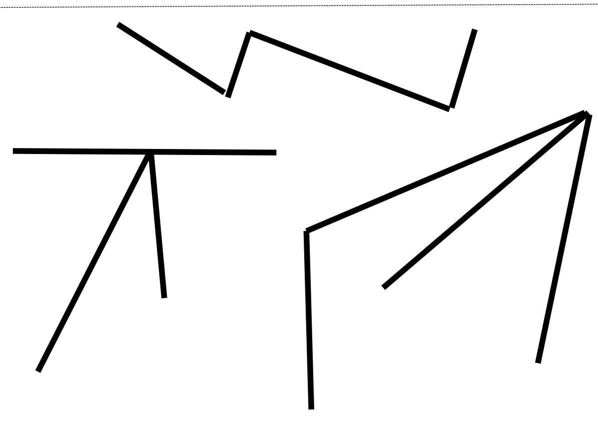
P=N-1



P=6 arestas

N=7 vértices

P=N-1

| Nº DE VERTICES | ARVORE | Nº DE ARVORES |
|---|---|---|
| 2 |  | 1 |
| 3 |  | 1 |
| 4 |  | 2 |
| 5 |  | 3 |

## Teorema 1

Cada grafo finito conexo tem árvore esqueleto.

G(V, E);  G'(V', E');  E' é subconjunto de E

## Teorema 2

As seguintes afirmações são equivalentes:

- G é árvore.
- Cada par de vértices pode ser ligado exactamente por um caminho simples.
- G é conexo mas se eliminarmos um arco arbitrário obteremos grafo não conexo.
- G é acíclico mas se adicionarmos um arco arbitrário obteremos grafo cíclico.

## Teorema 3

Seja G um grafo finito com n vértices sem laços nem arestas paralelas. As seguintes afirmações são equivalentes:

- G é árvore.
- G é acíclico e tem n-1 arcos.
- G é conexo e tem n-1 arcos onde n é o número de vértices.

***TPC:*** *<u>o estudante deve procurar informação sobre árvore esqueleto, árvore com raiz, árvore binária e os varrimentos (prefixa, infixa e postfixa) da árvore binária.</u>*

## Árvore esqueleto

## Árvore com raiz

- Raiz da árvore
- Nivel
- Altura da árvore

## Árvore binaria

- Preorder/ Prexifa
- Inorder/ infixa
- Postorder/ Postfixa