אוניברסיטת בן גוריון בנגב
הפקולטה למדעי ההנדסה
המחלקה להנדסת חשמל ומחשבים

עבודה מס' 1

בקורס "מבוא לעיבוד אותות"

סמסטר א' תש"פ

מבוא

מטרה

לעבודה זו, שתי מטרות עיקריות:

1. המחשת החומר התיאורטי הנלמד בהרצאות ובתרגילים.
2. התנסות בפתרון בעיות בסיסיות בעיבוד אותות באמצעות הכלים לניתוח אותות שנלמדו בהרצאות.

על מנת להשיג מטרות אלה , נדרשים הסטודנטים בקורס לפתור בעיות בסיסיות בעיבוד אותות באמצעות כתיבת סימולציות בתכנת MATALB.

פרטי הגשה

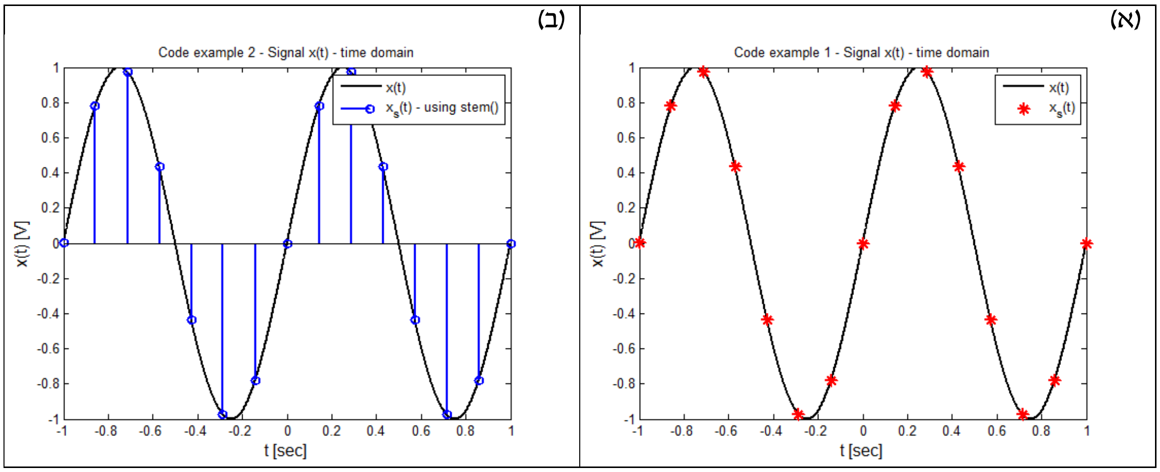
1. את העבודות יש להגיש עד ה-12/12/2019 בשעה 14:00 לאתר הקורס: http://moodle2.bgu.ac.il - ההגשה אלקטרונית.
2. יש להגיש את העבודה עם דף השער שנמצא באתר ולהצהיר על מקוריות העבודה.
3. יש להגיש את העבודה מוקלדת כולל תשובות מילוליות וחישובים אנליטיים כקובץ .pdf
4. נא להקפיד על שם קובץ בצורה הבאה: HW1_ID1_ID2.pdf, כאשר במקום ID1,ID2 הנכם מתבקשים לרשום את מספרי ת.ז. של המגישים. זאת על מנת למנוע טעויות במתן הציונים.
5. ניתן לבצע את העבודה בזוגות או ביחידים, במידה ומגישים כזוג יש להגיש באתר פעם אחת בלבד.
6. יש לצרף את קוד ה-MATALB עם הערות רלוונטיות כקבצי *.m
7. את כל הגרפים יש ליצור בעזרת MATALB.
8. לגבי שאלות בקשר לעבודה יש לפנות ל: shiru@post.bgu.ac.il.

אופן ביצוע העבודה

1. במהלך העבודה נדרש לייצג ולבצע חישובים על אותות "רציפים" ו"בדידים" או "דגומים" באמצעות MATLAB. אות "רציף" מיוצג ב-MATLAB כוקטור ערכים של הפונקציה שמתארת את האות בנקודות זמן צפופות באופן יחסי. אות "בדיד" או "דגום" ייוצג כוקטור שכולל מספר מועט יותר של ערכים בהתאם לתדר הדגימה.
2. על מנת לחשב את הוקטור שמכיל את ערכי הפונקציה בנקודות זמן שונות, נדרש ראשית להגדיר וקטור זמן (למשל t=0:0.01:1) ולאחר מכן להשתמש בפונקציות הרצויה לחישוב ערכה בכל אחת מנקודות הזמן שבוקטור (למשל x=sin(2*pi*1000*t))
3. גרף שמציג אות "רציף" יוצג של ידי שימוש בפונקציה plot(),(למשל plot(t,x)), וגרף שמציג אות "בדיד" או "דגום" יוצג על ידי שימוש בפונקציה stem() או plot() עם פרמטרים מתאימים כפי שמתואר בדוגמא באיור 1.
4. הגרפים הנדרשים, חייבים להיות מפורטים ולכלול את שם הגרף ושמות הצירים כולל יחידות . ניתן להיעזר בפונקציות: title(); xlabel(); ylabel()
5. כאשר נדרש להציג מספר אותות באותו הגרף, יש להשתמש בסימון צבע ו/או עובי ו/או סגנון שונה להצגת כל אות. כמו כן חשוב להוסיף מקרא לגרף. ניתן להיעזר בפונקציות hold on; legend(); ובפרמטרים של plot כגון: 'LineWidth'; 'LineStyle'; 'Marker'; 'Color'
6. לדוגמא: נתון האות $x(t) = \sin(2\pi t)$ ביחידות וולט [V] כפונקציה של הזמן בשניות [sec]. האות $x(t)$ נדגם בתדר דגימה $F_s = \frac{1}{T_s} = 7\ [Hz]$ לקבלת אות דגום $x_s[n]$. נדרש להציג בגרף אחד את האות ה"רציף" $x(t)$

והאות ״הדגום״ $x_s[n]$. הגרף צריך להיראות כפי שמתואר באיור 1 א׳ או ב׳ כולל הקפדה על כל הפירוט הנדרש. גרפים ללא פירוט ייפסלו.

7. כאשר נדרש לבצע חישוב אנליטי יש לכתוב פתרון מלא (מוקלד ולא סרוק). תשובות חלקיות יפסלו.



איור 1. אות סינוס בתדר 1 [Hz] דגום בתדר 7[Hz]. (א) אות דגום מוצג כ * (ב) אות דגום מוצג עם stem()

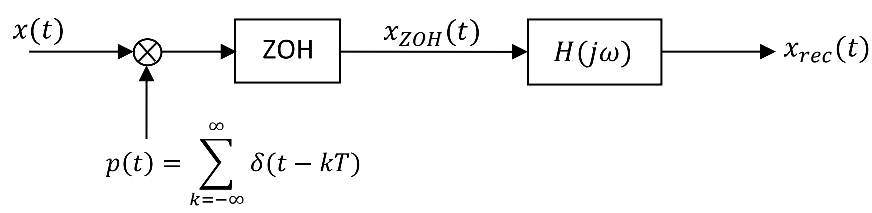
קוד למימוש הגרף מצורף באתר בקובץ Code_Example.m :

```
clc;
clear all;
close all;

%% Code example
T=1;                 %[sec] signal period time
W0=2*pi/T;
A=1;
t=-1:1/1000:1;       %continuous time vector
x=A*sin(W0*t);     %continuous signal

Ws=7*2*pi;           %[rad/sec] sampling angular frequency
Ts=2*pi/Ws;          %[sec] sampling time period
ts=-1:Ts:1;          %sampling time vector
xs=A*sin(W0*ts);   %discrete signal

%showing two signals over the same figure
figure;                             %new figure window
plot(t,x,'k','LineWidth',2);        %draw the continuous signal graph - plot(t,x,'LineStyle','-
','Color','k','LineWidth',2);
hold on;                            %retain current graph in figure, to allow several graphs over the same
figure
plot(ts,xs,'*r','LineWidth',1.5,'MarkerSize',10);    %draw the continuous signal graph -
%other form to write the above command:
plot(ts,xs,'LineStyle','*','Color','r','LineWidth',1.5,'MarkerSize',10);
title('Code example 1 - Signal x(t) - time domain'); xlabel('t [sec]','FontSize',12); ylabel('x(t)
[V]','FontSize',12);
legend([{'x(t)'};{'x_s(t)'}]);

%showing two signals over the same figure - using "stem()" for descrete signal
figure;                             %new figure window
plot(t,x,'k','LineWidth',2);        %draw the continuous signal graph
hold on;                            %retain current graph in figure, to allow several graphs over the same
figure
stem(ts,xs,'b','LineWidth',1.5);    %draw the continuous signal graph using "stem()"
title('Code example 2 - Signal x(t) - time domain'); xlabel('t [sec]','FontSize',12); ylabel('x(t)
[V]','FontSize',12);
legend([{'x(t)'};{'x_s(t) - using stem()'}]);
```

שאלה 1. דגימה ושחזור (40 נק')

ב

איור 2 מוצגת מערכת המבצעת דגימה של אות הכניסה בעזרת רכבת הלמים ושחזור בעזרת תהליך ZOH ומסנן מעביר נמוכים $H(j\omega)$.



איור 2. מערכת דגימה ושחזור

נתון האות הרציף הבא: $x(t)=\frac{8}{\omega_m t^2}\cdot\sin^3\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)cos(2\omega_m t)\ \ [V],\quad \omega_m=3\pi$.

א. 5 נק'). צייר/י את $x(t)$ בעזרת MATLAB בתחום $t\in[0.2,3]\ [sec]$. לצורך כך היעזר/י בשלבים הבאים:

- יש ליצור וקטור שורה של נקודות הזמן בהן יוצג האות: $t=0.2{:}\,1/100{:}\,3$.
- חשב/י את האות בנקודות הזמן שיצרת:
  - `8./(wm*t.^2) .* ((sin((1/2)*wm*t)).^3).*cos(2*wm*t);`
- הצג/י את החלק הממשי של תוצאות החישוב: $plot(t,x)$.
- השתמש/י בפונקציות $xlabel, ylabel, title$ לצורך הוספת כותרת ושמות לצירים.

ב. 10 נק'). יש לפתח ביטוי ל-$X(j\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}$, התמרת פורייה של האות $x(t)$. הצג/י גרף של $|X(j\omega)|$, כאשר $\omega\in[-17\pi,17\pi]\ \left[\frac{rad}{sec}\right]$. **את התמרת הפורייה יש לפתח עם הפרמטר ω_m ורק לאחר מכן להציב את ערכו.**

הערה: בפיתוח כדאי לפשט תחילה את האות כך שיהיה מורכב מפונקציות בעלות התמרות מוכרות: exp(),sinc(),sin() וכו'.

ג. 5 נק').

- מהו התדר המקסימלי ω_{max} של האות $x(t)$? (עבור התדר המקסימלי מתקיים $X(j\omega)=0\ \forall|\omega|\geq\omega_{max}$)
  הצע/י זמן מחזור לדגימה, T_s, שיאפשר שחזור ללא שגיאות.
- דגמו את האות בנקודות $t_n=nT_s$. מהדגימות יש לייצר אות מדרגות מסוג ZOH, שיסומן ב-$x_{ZOH}(t)$. הצג/י את האותות $x_{ZOH}(t)$ ו-$x(t)$ בגרף אחד.

ד. (10 נק׳) יש לפתח ביטוי ל$X_{ZOH}(j\omega) = \mathcal{F}\{x_{ZOH}(t)\}$, התמרת פורייה של האות $x_{ZOH}(t)$. הצג/י גרף של $|X_{ZOH}(j\omega)|$, כאשר $\left[\frac{rad}{sec}\right]$ $\omega \in [-17\pi, 17\pi]$.

ה. (5 נק׳) ספקטרום המסנן המשחזר האידיאלי נתון על ידי הפונקציה

$$H(\omega) = \begin{cases} \dfrac{e^{j\pi\omega/\omega_s}}{\mathrm{sinc}(\omega/\omega_s)} & |\omega| \le \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$

יש להפעיל את המסנן האידיאלי במישור התדר על $X_{ZOH}(j\omega)$ לקבלת ביטוי ל$X_{rec}(j\omega)$. השתמש/י בפונקצית trapz() על מנת לחשב את האות המשוחזר, $x_{rec}(t)$, על ידי אינטגרל התמרת פורייה. הציגו את האותות $x_{rec}(t)$ ו-$x(t)$ בגרף אחד. האם התקבל שחזור מדויק של $x(t)$? הסבר/י.

ו. (5 נק׳). כעת הנח/י כי האות $x(t)$ נדגם בתדר $\left[\frac{rad}{sec}\right]$ $\omega_s = 5\omega_m$, האם במקרה זה ניתן לקבל שחזור מדויק? הסבר/י. חזור על סעיף ה׳ ו-וודא שתוצאותיך מתיישבות עם המסקנה מסעיף זה.

שאלה 2. דגימה לא אחידה של אות מחזורי (30 נק')

נתון אות מחזורי מוגבל סרט: $x(t) = j\cos(\omega_A t) + 3j\sin(\omega_B t);\quad \omega_A = 10\pi,\ \omega_B = 6\pi$

א. (10 נק'). מה זמן המחזור של הפונקציה $x(t)$? דיגמו את האות בצורה אחידה על פני מחזור אחד בעזרת 11 נק' דגימה. הצג/י את האות ה"דגום" x_s יחד עם האות המקורי ה"רציף" $x(t)$, על פני מחזור אחד.

מדוע נדרשות לפחות 11 נקודות דגימה?

הערה: שימו לב שנקודת הדגימה ה 11 של האות ה"דגום" לא ממוקמת בתחילת המחזור השני של האות "הרציף".

הערה: שימו לב כי וקטור הדגימות x_s אינו אות רציף ויש להציג את הדגימות בלבד. לצורך כך השתמשו בתכונות הקו של פונקציית ()plot כפי שהוצג בתחילת העבודה.

ב. (10 נק'). כפי שהוצג בשיעור, ניתן להשתמש בדגימות מסעיף א' על מנת למצוא את מקדמי טור פורייה ע"י כתיבת מערכת משוואות מהצורה $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{a}$, כאשר הוקטור $\boldsymbol{x}$ מכיל את ערכי הפונקציה בN נקודות הדגימה והוקטור $\boldsymbol{a}$ מכיל את 2M+1 מקדמי טור פורייה.

כתב/י בצורה מפורשת את מטריצת האקספוננטים $\boldsymbol{F}$ (מספיק לכתוב ביטוי לאיבר כללי).

יש לפתח ביטוי למציאת הוקטור $\boldsymbol{a}$ מתוך מערכת המשוואות. התייחס/י למקרים: N=2M+1 , N>2M+1.

עבור N נקודות הדגימה מסעיף א', חשב/י באמצעות MATLAB את וקטור מקדמי טור פורייה. הצג/י את ערכי המקדמים בטבלה.

ג. (10 נק'). שחזרו את האות מתוך וקטור מקדמי טור פורייה והציגו את האות המשוחזר והאות המקורי בגרף אחד.

הערה: האות המשוחזר יוצג כאות רציף ולכן כולל כמות נקודות גבוהה מכמות הדגימות בסעיף א'.

ד. (6 נק'). חיזרו על סעיפים א', ב' וג' כאשר 11 נקודות הדגימה מפוזרות בצורה אקראית על פני מחזור אחד של האות. לצורך דגימה אקראית השתמשו בפונקצית rand. ממה יש להיזהר במקרה זה אם ברצוננו לשחזר את האות?

ה. (8 נק'). חזרו על סעיפים א'-ד' כאשר יש אי-ודאות במיקום הדגימות, כלומר כאשר בונים את המטריצה $\boldsymbol{F}$, במקום להכניס את זמן הדגימה האמיתי, t_n , יש להכניס $t_n + 0.01 * rand(1)$. חשבו את ה-condition number של מטריצה $\boldsymbol{F}$ בשני המקרים (דגימה אחידה ולא אחידה) ע"י פונקצית cond. הסבירו את ההבדלים בין האותות המשוחזרים בשני המקרים.

ו. (6 נק'). חזרו על סעיף ה' כאשר דוגמים את האות ב-40 נק' על פני מחזור אחד, עבור המקרה של דגימה לא אחידה (שימו לב שמספר המקדמים שמחפשים נשאר זהה). הסבירו את ההבדלים שהתקבלו.

שאלה 3 - דגימה ואנליזה פונקציונאלית (30 נק')

נתונים שני סטים של פונקציות בסיס מחזוריות:

- $\phi_n(t) = \exp\left(j\frac{2\pi}{T}nt\right)$, כאשר n מספר שלם.
- $\psi_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t}{T/20} - (n+0.5) - 20k\right)$ אשר מייצגת גל ריבועי, אשר מקבל ערכים בתחום [0,1] בעל זמן מחזור T ו- duty cycle של 5% . $n \in [0,19]$ מספר שלם.

נתונים שני אותות בעלי זמן מחזור $T = 10\ [sec]$:

- $f(t) = 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + 2\sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right)$
- $g(t)$ פונקציה מחזורית עם זמן מחזור T כך שמחזור אחד מקיים :

$$g(t) = 2sign\left(\sin\left(\frac{5\pi}{T}t\right)\right) - 4sign\left(\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right), t \in [0,T]$$

א. (5 נק') כתבו פונקציה ב MATLAB המקבלת שלושה ארגומנטים :

- וקטור עמודה המכיל ערכים ממחזור אחד של האות בזמן "רציף".
- מטריצה בעלת N עמודות המכילה בכל עמודה פונקציית בסיס אחת (ערכים של פונקציית הבסיס), כך שהמטריצה תייצג סט אחד של פונקציות. הערה : שימו לב שמספר השורות במטריצה ובווקטור צריכים להתאים.
- סקלר השווה לזמן המחזור T.

הפונקציה מחזירה וקטור באורך N, המכיל את מקדמי ההטלה של האות על כל אחת מפונקציות הבסיס. מקדמי ההטלה עבור פונקציות בסיס ואותות מחזוריים יחושבו כך :

$$c_n = \frac{\langle x(t), \phi_n(t)\rangle}{\|\phi_n(t)\|^2} = \frac{\int_0^T x(t)\phi_n^*(t)dt}{\int_0^T |\phi_n(t)|^2 dt}$$

(השתמשו בפונקציה trapz על מנת לחשב את האינטגרלים)

ב. (10 נק') בעזרת הפונקציה מסעיף א' חשבו את מקדמי ההטלה c_n של כל אחד משני האותות על כל אחד משני הסטים של פונקציית הבסיס הנתונים. עבור $\phi_n(t)$ חשבו את המקדמים $c_{-20}, \dots, c_{20}$, ועבור $\psi_n(t)$ חשבו את המקדמים $c_0, \dots, c_{19}$. הציגו בטבלה את המקדמים שקיבלתם והסבירו את התוצאה.

הערה : נסו להגדיר את מטריצת פונקציות הבסיס בשורה אחת, ללא שימוש בלולאה.

ג. (10נק') שחזרו את האותות מתוך מקדמי ההטלה שחישבתם בסעיף ב', על ידי נוסחת השחזור :

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \phi_n(t)$$

הציגו את האות המקורי ואת האותות ששחזרתם בגרף אחד עבור $f(t)$ ובגרף נוסף עבור $g(t)$, עבור מחזור אחד.

- האם מתקבל שחזור מדויק בכל אחד מהמקרים?

- בשחזור האות $g(t)$ מתוך מקדמי ההטלה על $\phi_n(t)$, האם ניתן לקבל שיחזור מדויק (ללא שגיאה) על ידי הוספת מקדמים מעבר לאלו שחושבו? כיצד ניתן לשפר את דיוק השחזור?
- בשחזור האות $f(t)$ מתוך מקדמי ההטלה על $\psi_n(t)$, האם ניתן לקבל שיחזור מדויק (ללא שגיאה) על ידי הוספת מקדמים מעבר לאלו שחושבו? כיצד ניתן לשפר את דיוק השחזור?

ד. (5 נק'). הסבר/י :

- באיזה בסיס עדיף להשתמש עבור כל אחד מהאותות הנתונים?
- מהם היתרונות והחסרונות בכל אחד מהבסיסים?
- האם השימוש בבסיס $\psi_n(t)$ זהה לשחזור ZOH?

בהצלחה!