אוניברסיטת בן גוריון בנגב

הפקולטה למדעי ההנדסה

המחלקה להנדסת חשמל ומחשבים

עבודה מס' 1

בקורס "מבוא לעיבוד אותות"

סמסטר א' תש"פ

מגישים: 1. [illegible] ת.ז. 203389270

2. ______ ת.ז. ______

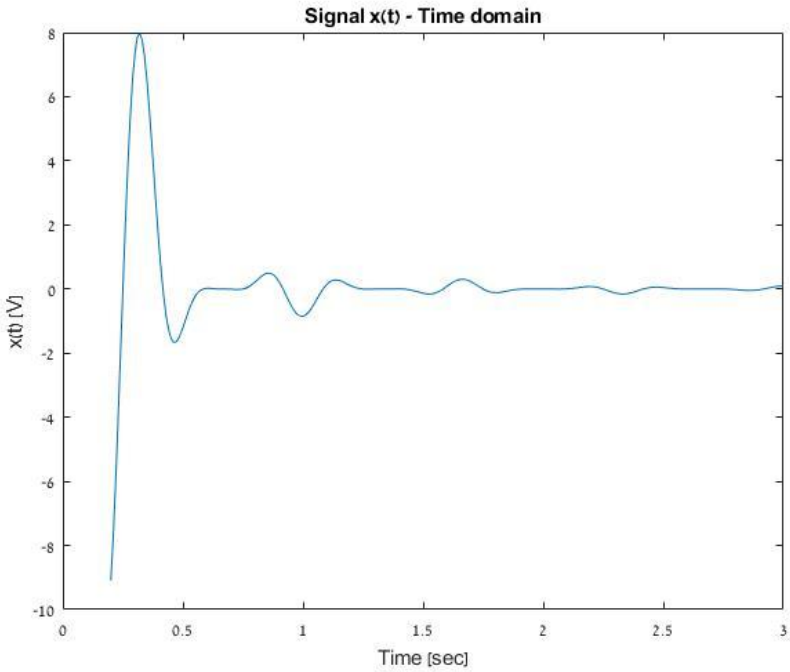
בהגשת עבודה זו, אנו מצהירים כי זוהי עבודתנו המקורית.

<u>שאלה 1: דגימה ושחזור</u>

א. עבור $\omega_m = 3\pi$, נתון לנו האות הרציף הבא :

$$x(t) = \frac{8}{\omega_m t^2}\sin^3\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)\cos(2\omega_m t) \quad [V]$$

נדרשנו לצייר את האות הנתון בתחום $t \in [0.2, 3]$, נציג זאת בגרף הבא:



ב. בסעיף זה נדרשנו לפתח ביטוי לאות $X(j\omega) = F\{x(t)\}$, שהינה ייצוג של התמרת פורייה על האות $x(t)$. בנוסף, נציג את הגרף של $|X(jw)|$, עבור סט הערכים $\omega \in [-17\pi, 17\pi]$.

$$x(t) = \frac{8}{\omega_m t^2}\sin^3\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)\cos(2\omega_m t)$$

$$x(t) = \frac{4}{\frac{1}{2}\omega_m t^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2\pi}\omega_m t\right)\left(\sin\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)\cos(2\omega_m t)\right)$$

$$x(t) = 4\,\text{sinc}^2\left(\frac{1}{2\pi}\omega_m t\right)\left(\sin\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)\cos(2\omega_m t)\right)$$

$$x(t) = 4\,\text{sinc}^2\left(\frac{1}{2\pi}\omega_m t\right)\left(\frac{\left(e^{j\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)} - e^{-j\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)}\right)}{2j}\cdot\frac{\left(e^{j(2\omega_m t)} + e^{-j(2\omega_m t)}\right)}{2}\right)$$

$$x(t) = 2j\,\text{sinc}^2\left(\frac{1}{2\pi}\omega_m t\right)\left(\left(-e^{j\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)} + e^{-j\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)}\right)\cdot\left(e^{j(2\omega_m t)} + e^{-j(2\omega_m t)}\right)\right)$$

לאחר שהגענו לביטוי הזה, נוכל להפעיל את התמרת פורייה, ולהשתמש בתכונת הכפל של התמרה זו לפי הנוסחא: $F\{x(t)\cdot y(t)\} = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)$, ובנוסף, לחשב את ההתמרה של $sinc^2\left(\frac{1}{2\pi}\omega_m t\right)$ בלבד, ולאחר מכן להתייחס לאקספוננטים כהזזות, כיוון שהתמרת הפורייה שלהם הינה בעצם פונקציית דלתא.

$$F\left\{sinc^2\left(\frac{1}{2\pi}\omega_m t\right)\right\} = F\left\{sinc\left(\frac{t}{T_m}\right)\cdot sinc\left(\frac{t}{T_m}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi}\left(T_m \prod\left(\frac{j\omega}{2\pi/T_m}\right)\right) * \left(T_m \prod\left(\frac{j\omega}{2\pi/T_m}\right)\right)$$

אנו יודעים כי קונבולוציה של חלונות זהים, הינה תוצר של פונקציית משולש, לכן:

$$F\left\{sinc^2\left(\frac{1}{2\pi}\omega_m t\right)\right\} = \frac{2\pi}{\omega_m}\bigwedge\left(\frac{j\omega}{\omega_m}\right)$$

כבר ציינו כי התמרת הפורייה של אקספוננט הינה פונקציית הלם של דיראק בזמן (דלתא), לכן:

$$F\left\{\left(e^{j\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)} - e^{-j\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)}\right)\cdot\left(e^{j(2\omega_m t)} + e^{-j(2\omega_m t)}\right)\right\} =$$

$$= \frac{2\pi}{2\pi}\cdot\left(\delta\left(j\left(\omega - \frac{\omega_m}{2}\right)\right) - \delta\left(j\left(\omega + \frac{\omega_m}{2}\right)\right)\right) * \left(\delta\left(j(\omega - 2\omega_m)\right) + \delta\left(j(\omega + 2\omega_m)\right)\right)$$

$$= \left(\delta\left(j(\omega - 2.5\omega_m)\right) + \delta\left(j(\omega + 1.5\omega_m)\right) - \delta\left(j(\omega - 1.5\omega_m)\right) - \delta\left(j(\omega + 2.5\omega_m)\right)\right)$$

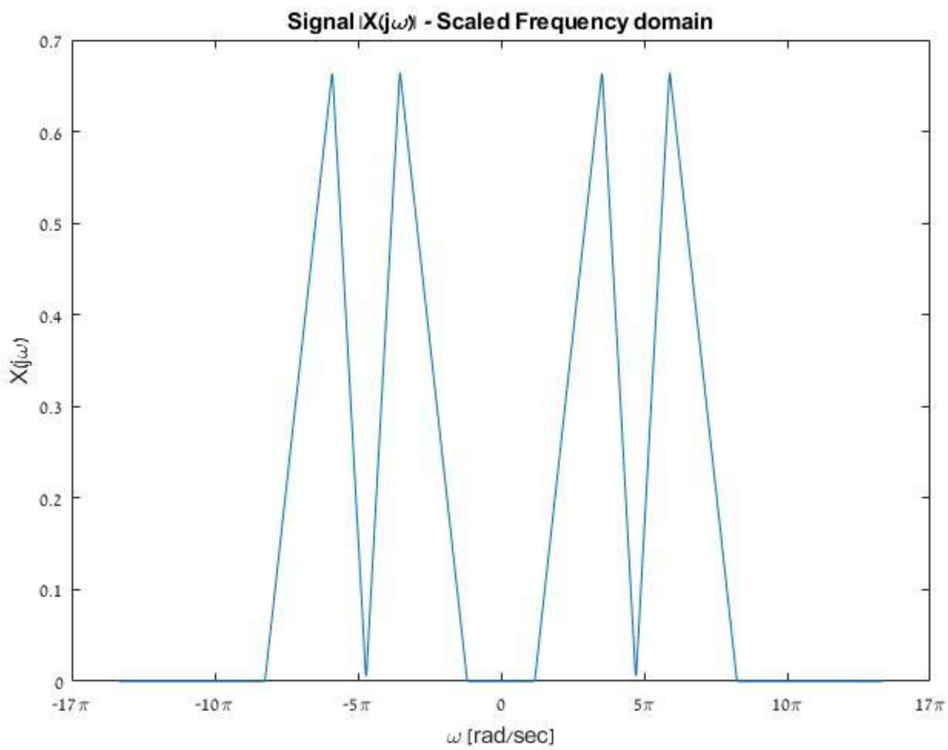
נציג את הביטוי שקיבלנו עד כה:

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_m}\bigwedge\left(\frac{j\omega}{\omega_m}\right) * \left(\delta\left(j(\omega - 2.5\omega_m)\right) - \delta\left(j(\omega + 2.5\omega_m)\right) - \delta\left(j(\omega - 1.5\omega_m)\right) + \delta\left(j(\omega + 1.5\omega_m)\right)\right)$$

לכן, קיבלנו כי הביטוי באופן מלא הינו:

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_m}\left(\bigwedge\left(\frac{j(\omega - 2.5\omega_m)}{\omega_m}\right) - \bigwedge\left(\frac{j(\omega + 2.5\omega_m)}{\omega_m}\right) - \bigwedge\left(\frac{j(\omega - 1.5\omega_m)}{\omega_m}\right) + \bigwedge\left(\frac{j(\omega + 1.5\omega_m)}{\omega_m}\right)\right)$$

עבור ה $\omega_m = 3\pi$ שכבר נתון לנו, נציג את הערך המוחלט של התמרת הפורייה של האות בגרף הבא:



ג. לפי תוצאת הגרף, בדקתי כי התומך של התמרת הפורייה של האות שלנו, הינו $\omega_{max} = 4.6441\pi$, כלומר שיקיים את התנאי: $X(j\omega) = 0 \ \forall|\omega| \geq \omega_{max}$.

לפי מה שלמדנו בהרצאות, על מנת לדגום באופן שניתן לשחזר את האות, נוכל להשתמש בתדר נייקוויסט לדגימת האות, שמציין כי על מנת שנוכל לשחזר אות דגם, תדר הדגימה יהיה בגודל של פעמיים (לפחות) מרוחב הסרט. לכן, נוכל לציין כי:

$$\omega_s \geq 2\omega_m \qquad ; \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$T_s \leq \frac{T_m}{2}$$

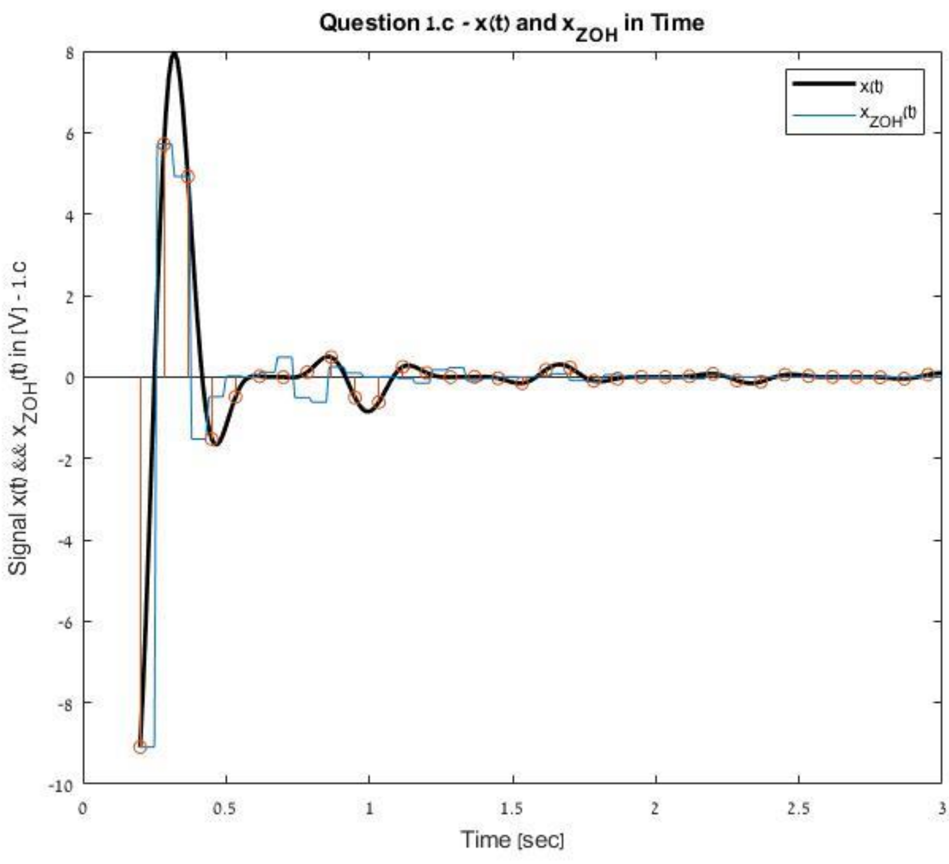
כיוון שכבר חישבנו את רוחב הסרט, נוכל לחשב T_m:

$$\omega_m = 4.6441\pi = \frac{2\pi}{T_m} \rightarrow T_m = 0.4307\ [sec]$$

ומכאן לחשב את זמן המחזור לדגימה T_s:

$$\mathrm{T}_s \leq \frac{0.4307}{2} = 0.2154$$

מכאן, נוכל לקבוע כי $T_s = 0.0538$ לפי תדר הדגימה של נייקוויסט. נוכל לראות את התוצאה בגרף הבא :



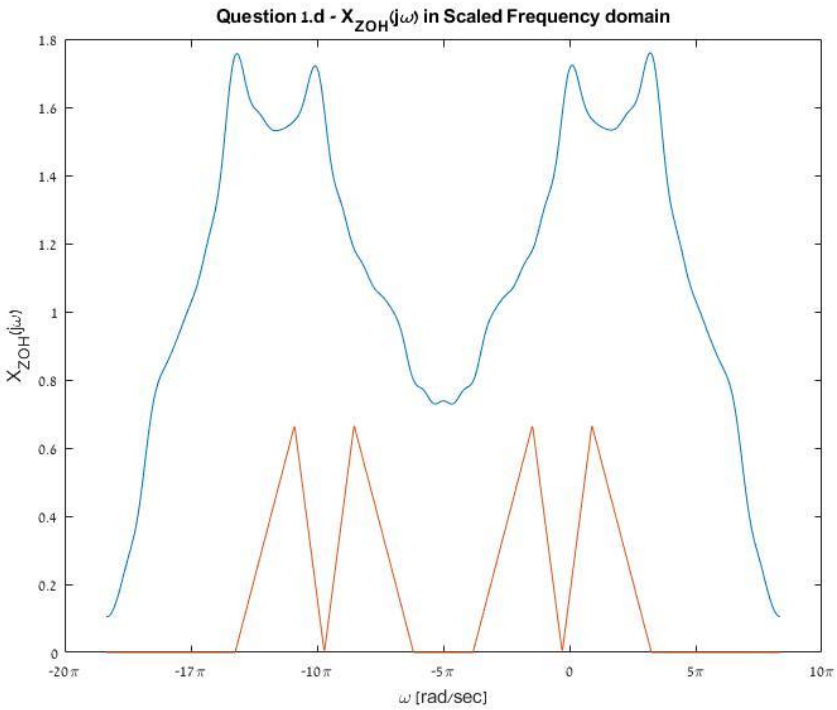
ד. נפתח ביטוי ל $X_{ZOH}(j\omega) = F\{x_{ZOH}(t)\}$, לפי נוסחאת השחזור של שאנון:

$$X_{ZOH}(j\omega) = F\{x_{ZOH}(t)\} = F\left\{\sum_n x(nT_s)\prod\left(\frac{t - nT_s - \frac{T_s}{2}}{T_s}\right)\right\}$$

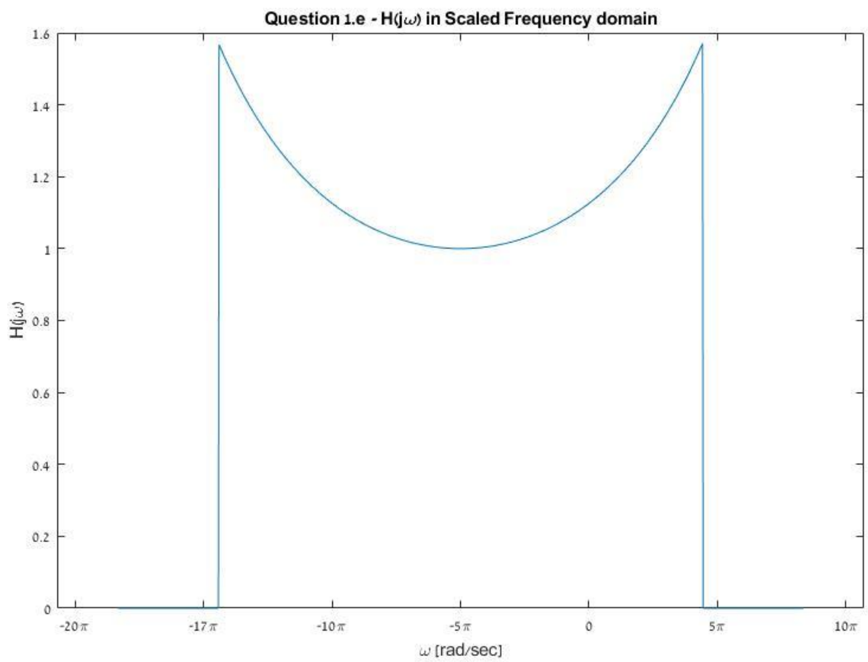
$$X_{ZOH}(j\omega) = \ T_s \cdot \sum_k X(j\omega)\sin\left(\frac{j(\omega - k\omega_s)}{\omega_s}\right)\exp\left(-\frac{j\omega T_s}{2}\right)$$

$$= T_s \sum_k X(j\omega)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{j(\omega - k\omega_s)}{\omega_s}\right)\exp\left(-\frac{j\omega T_s}{2}\right)$$

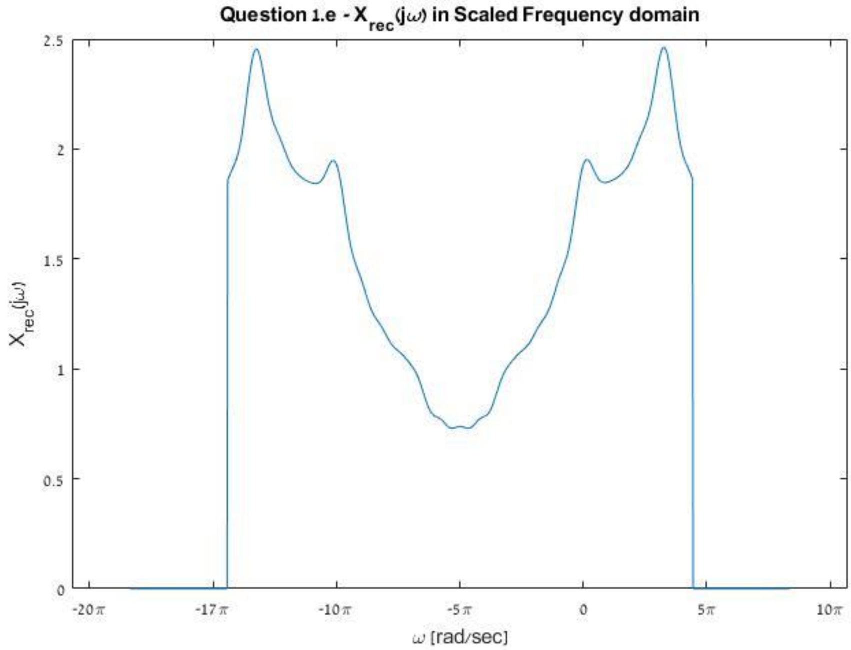
קיבלנו כי האות נראה כך, בתדר :



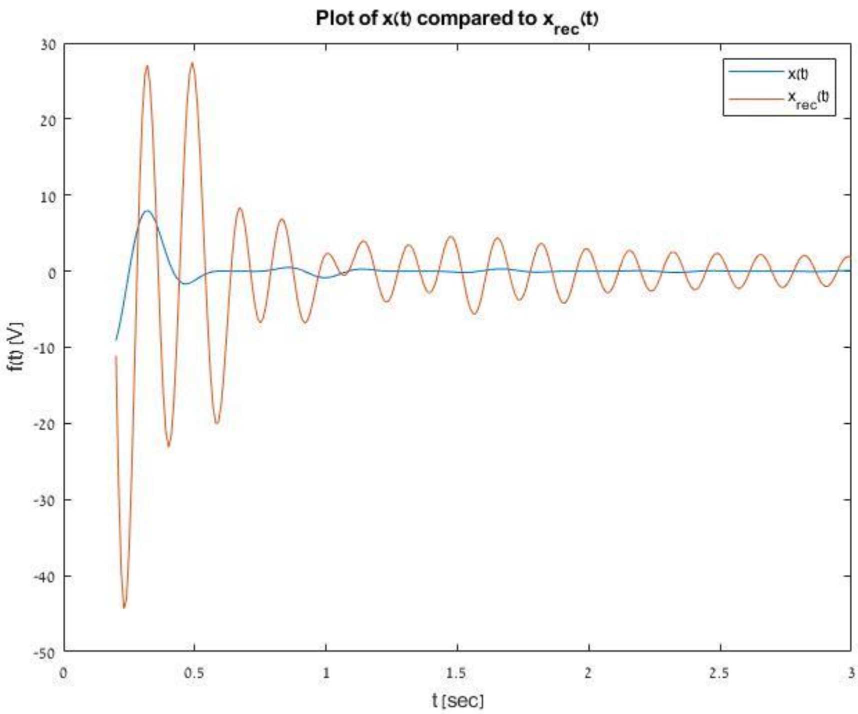
ה. יצרנו את המסנן האידיאלי במשיור התדר, שנראה כך :



העברנו את האות במסנן האידיאלי ובמוצאו קיבלנו את האות מהצורה:



וקיבלנו לאחר הפעלת פונקציית trapz את האות המשוחזר:

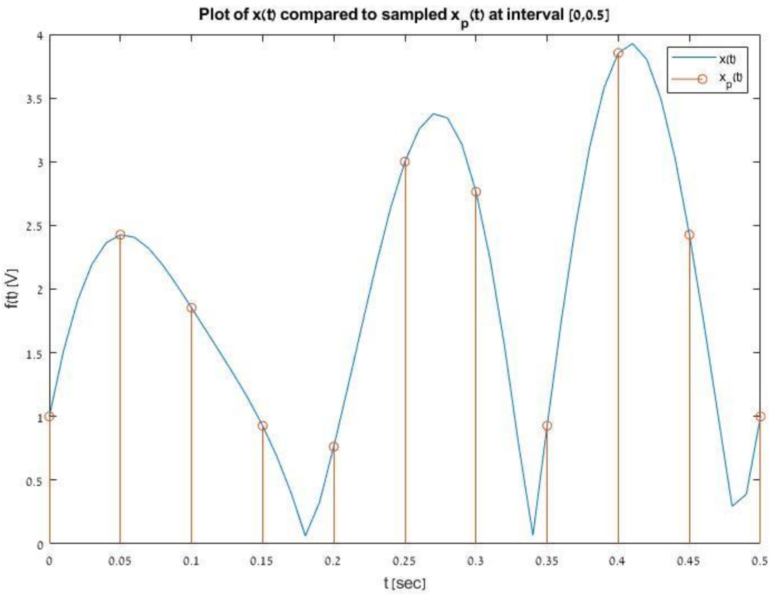


האות המשוחזר שקיבלנו איננו דומה לאות שהתקבל, אני מניח כי ישנה טעות בחישוב עצמו של האות בתדר הדגום, כלומר, $X_s(j\omega)$.

שאלה 2: דגימה לא אחידה של אות מחזורי

$$x(t) = jcos(\omega_A t) + 3jsin(\omega_B t); \qquad \omega_A = 10\pi, \quad \omega_B = 6\pi$$

א. אנו יודעים כי התדירות של סכום של פונקציות טריגונומטריות, הינה התדירות המקסימלית, לכן זמן המחזור של האות הנתון הינו $T_{x(t)} = 0.5\ [sec]$, על מנת שנקבל את שני חלקי באות עם מספר שלם של מחזורים.
נדגום את האות ונציג אותו יחד עם האות הרציף עבור 11 נקודות עם מרווח נתון:



ב. נדרשות 11 נקודות דגימה לפחות כיוון שהתדירות המקסימלית של האות הינה $\omega_A = 10\pi$, כלומר פי 5 מתדירות הבסיס, שהינה $\omega_0 = 2\pi$.

ייצוג האות כטור פורייה ידרש 11 מקדמים, כלומר $M = 5$, כלומר כמות מקדמים שתהיה שווה ל - $N = 2M + 1 = 11$.

עבור המקרה שלנו, אנו נשתמש בפתרון המשוואה לפי המקרה שבו $N = 2M + 1$, לכן:

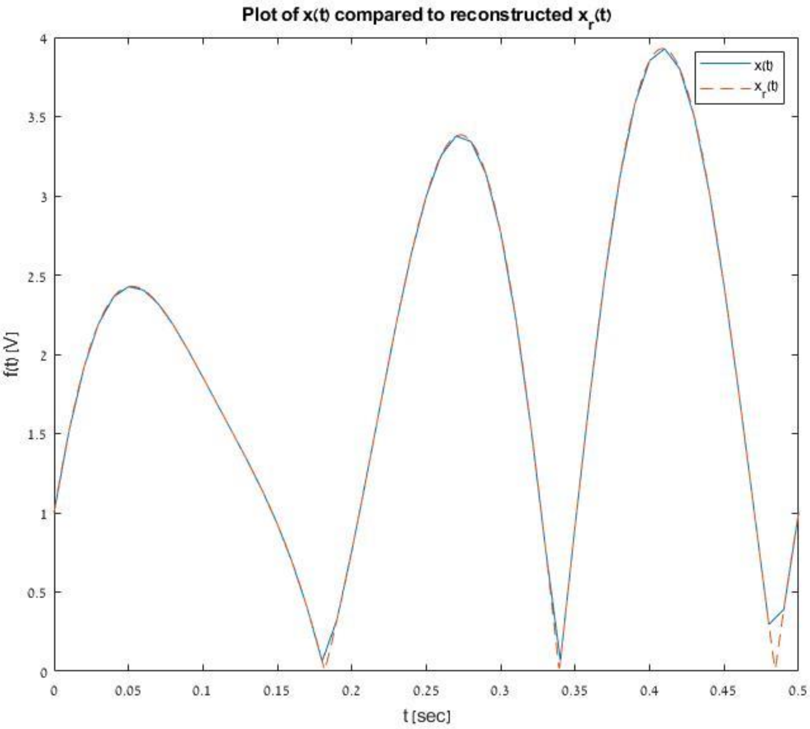
$$a = F^{-1}x$$

עבור 11 הדגימות, חישבנו את וקטור מקדמי הטור פורייה:

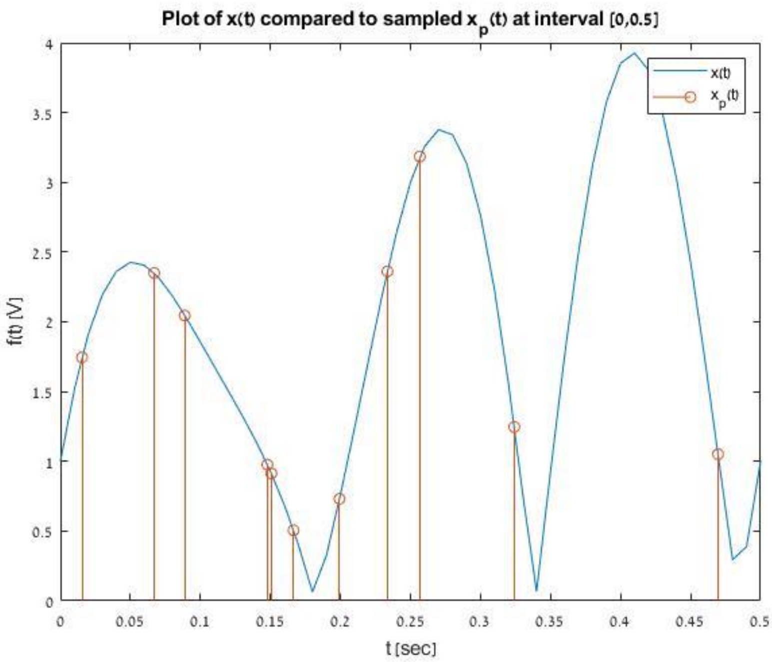
k	a_k
-5	$-0.5i$
-4	0
-3	1.5
-2	0
-1	0
0	0
1	0
2	0
3	-1.5
4	0
5	$-0.5i$

האות הינו אות הרמוני שמורכב משני רכיבים בהרמוניות שונות, לכן רק המקדמים $k = -5, -3, 3, 5$ אינם מתאפסים

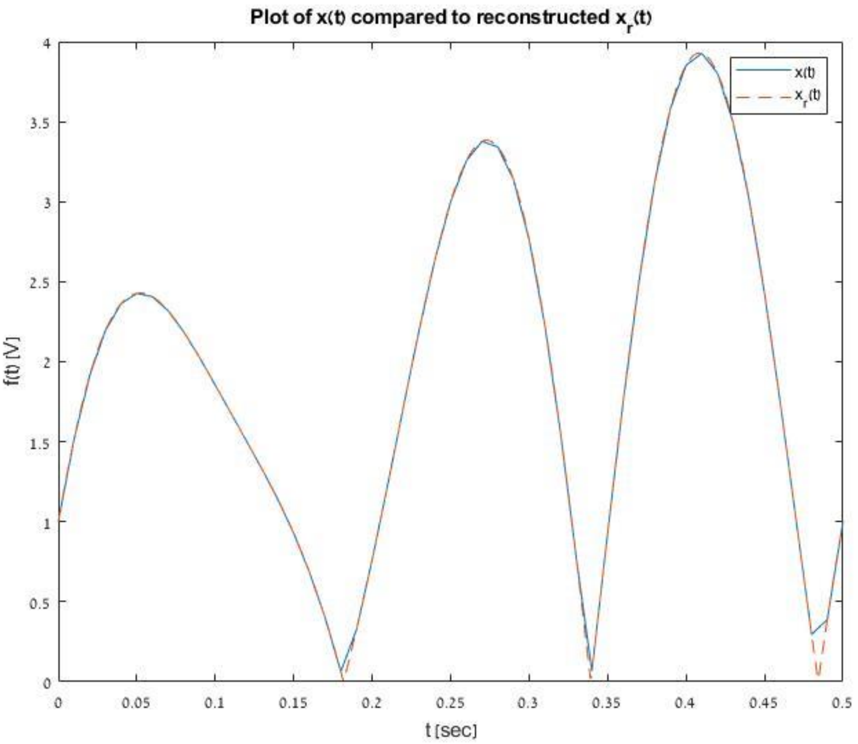
ג. נשחזר כעת את האות:



ד. עבור דגימה בפיזור אקראי אנו נדרוש את אותם התנאים, אך ננסה לשחזר את האות עם דגימות אקראיות:

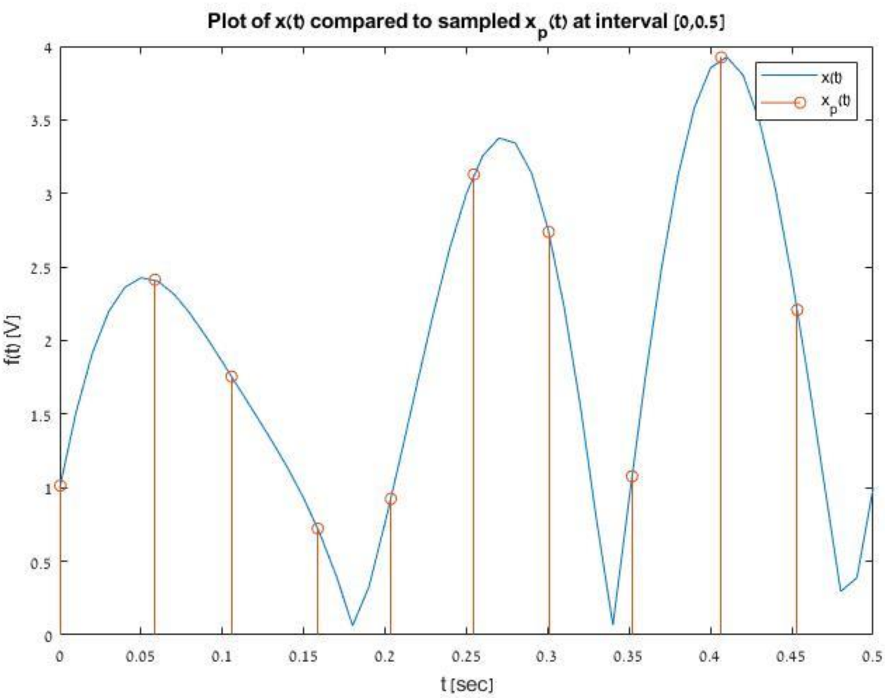


כפי שניתן לראות, בגרף הבא, אקראיות הדגימות איננו מוביל לשינוי בשחזור, ונוכל לשחזר בצורה מדוייקת:

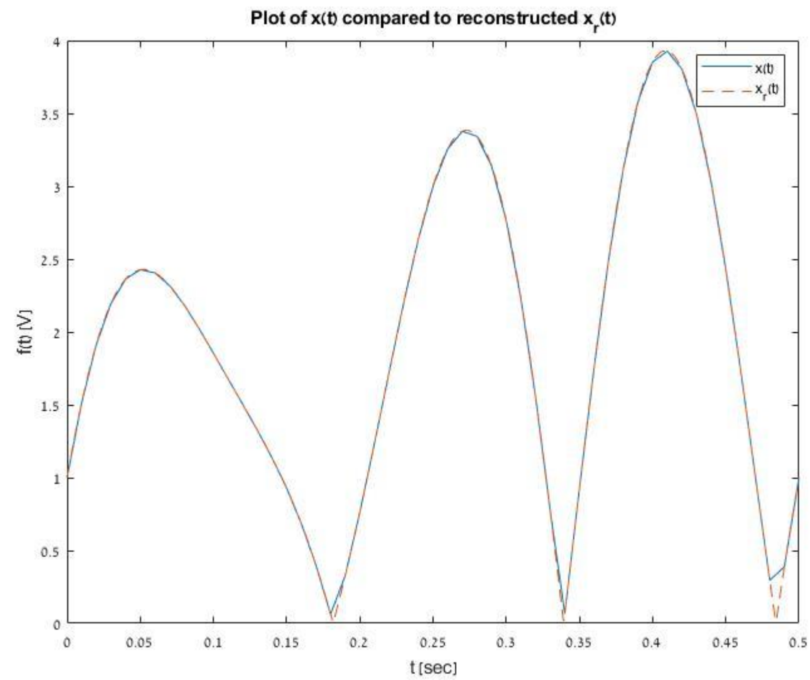


יש להיזהר במקרה של דגימה אקראית בו המקרה ששתי נקודות דגימה יוגרלו באותו זמן, ובצורה זו אנו מאבדים נקודת דגימה. כאשר מספר הדגימות קטן, נוכל לאבד מספר דגימות קריטית ובעצם לאבד את היכולת של השחזור.

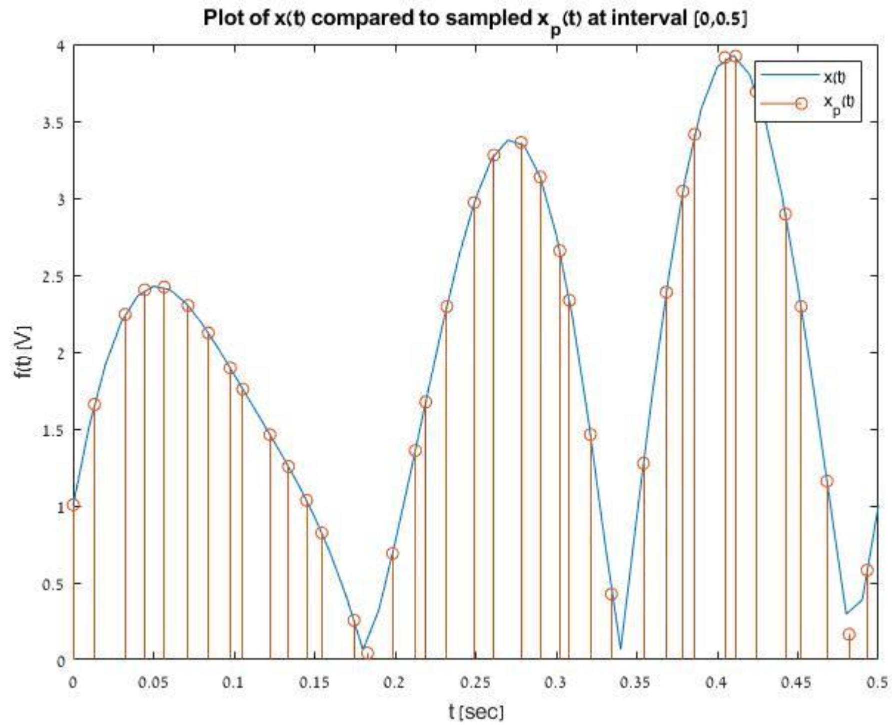
ה. בסעיף זה לקחנו מרווח דגימות אחיד, והוספנו לכל דגימה פאקטור רנדמולי בגובה 0.01.



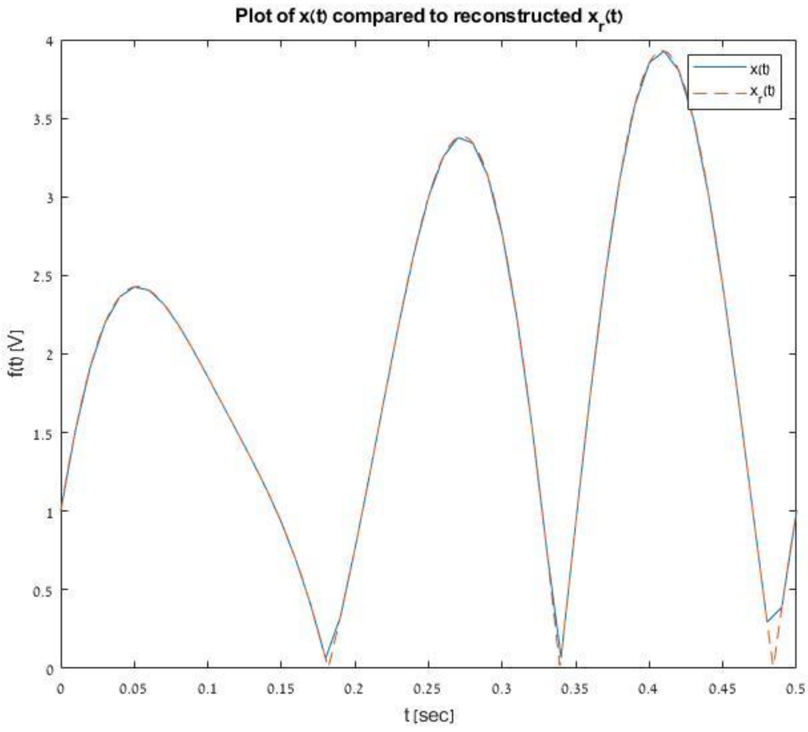
גם במקרה זה נותרנו ללא שינוי בדגימה עצמה:



ו. עבור מספר דגימות גבוהות יותר, אנו מקבלים חסינות גבוהה יותר למערכת המשחזרת, לכן:



במקרה של אי וודאות זו, השגיאה שמתקבלת בשחזור האות קטנה יחסית למקרה של דגימה אחידה או אקראית, כפי שניתן לראות באיור הבא:



שאלה 3: דגימה ואנליזה פונקציונאלית

א. מימוש הפונקציה במטלב הינו :

```
function [c_n] = projection(x,A,T)
%projection will find the projection coefficients of signal x(t) on
the
%base functions given in matrix A which have period T
%The function inputs must be :
%x size (M x 1)
%A size (M x N)
%T size (1 x 1) Real number
c_n = zeros(1,size(A,2));
      for i = 1:size(A,2)
          c_n(i) =
      trapz(x.*conj(A(:,i)))/(trapz(A(:,i).*conj(A(:,i))));
      end
end
```

פונקציה זו מקבלת וקטור עמודה המכיל ערכים ממחזור אחד של האות בזמן הרציף, ארגומנט נוסף עם מטריצה בעלת N עמודות המכילה בכל עמודה פונקציית בסיס אחת וסקלר השווה לזמן המחזור T.

הפונקצייה מחזירה וקטור באורך N המכיל את מקדמי ההטלה של האות על כל אחת מפונקציות הבסיס.

ב. טבלת המקדמים עבור כל אחד מההטלות:

$c_n of\ g(t) on\ \psi_n(t)$	$c_n of\ f(t) on\ \psi_n(t)$	n
−2.00200200200200	3.35794241521792	0
−2.00200200200200	3.13958933935507	1
−2.00200200200200	1.29274627766883	2
−4.00800800800801	−0.929245514116762	3
−1.99399399399399	−1.91233880595559	4
2.00200200200200	−0.929245514116756	5
2.00200200200200	3.13958933935507	6
4.00800800800801	3.35794241521791	7
6.00600600600601	3.35794241521791	8
1.99399399399399	1.98561713077350	9
−2.00200200200200	0.237201950627367	10
−4.00800800800801	−0.529061103282292	11
−6.00600600600601	0.100729490262386	12
−6.00600600600601	1.33810515227548	13
−1.99399399399399	1.94510854841260	14
4.00800800800801	1.33810515227548	15
6.00600600600601	0.100729490262384	16
6.00600600600601	−0.529061103282292	17
6.00600600600601	0.237201950627371	18
1.99398194583751	1.98559206052282	19

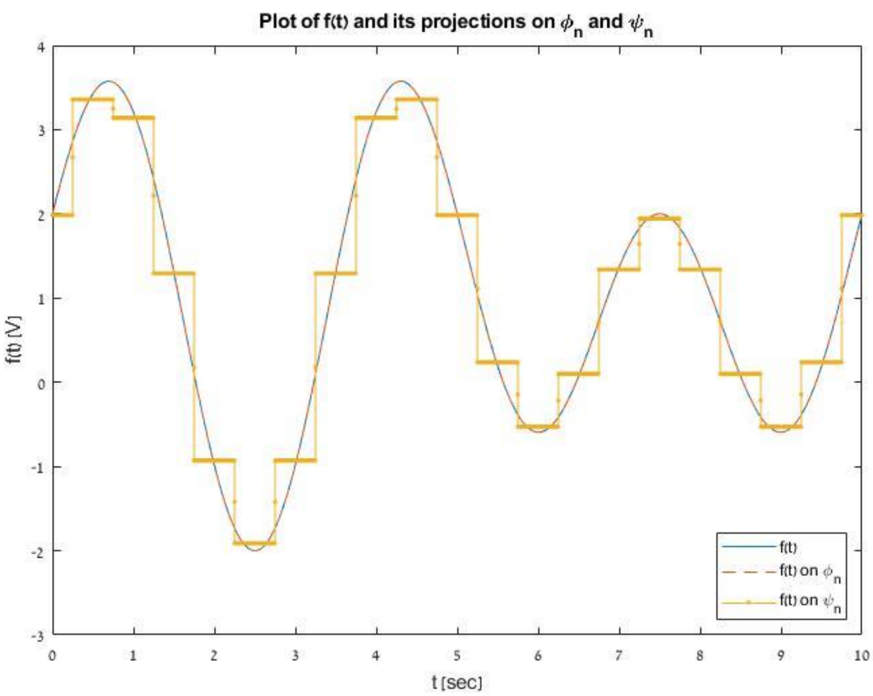
$c\_n\ of\ g(t) on\ \phi\_n\ (t)$	$c\_n\ of\ f(t) on\ \phi\_n\ (t)$	n
-0.0002 - 0.0000i	-0.0002 - 0.0000i	-20
-0.0245 - 0.0001i	-0.0002 - 0.0000i	-19
-0.1107 + 0.2823i	-0.0002 - 0.0000i	-18
0.1151 + 0.0006i	-0.0002 - 0.0000i	-17
0.0287 + 0.0001i	-0.0002 - 0.0000i	-16
-0.0002 - 0.0000i	-0.0002 - 0.0000i	-15
-0.0348 + 0.3637i	-0.0002 - 0.0000i	-14
-0.1509 - 0.0006i	-0.0002 - 0.0000i	-13
0.1631 + 0.0006i	-0.0002 - 0.0000i	-12
0.0419 + 0.0001i	-0.0002 - 0.0000i	-11
-0.0018 + 0.5093i	-0.0002 - 0.0000i	-10
-0.0516 - 0.0001i	-0.0002 - 0.0000i	-9
-0.2451 - 0.0006i	-0.0002 - 0.0000i	-8
0.2797 + 0.0006i	-0.0002 - 0.0000i	-7
0.0753 + 0.8491i	-0.0002 - 0.0000i	-6
-0.0002 - 0.0000i	-0.0002 - 0.0000i	-5
-0.1158 - 0.0001i	-0.0002 - 0.0000i	-4
-0.6534 - 0.0006i	-0.0002 - 1.0001i	-3
0.9780 + 2.5473i	0.4999 - 0.0000i	-2
0.4624 + 0.0001i	-0.0002 - 0.0000i	-1
0.3998 + 0.0000i	0.9999 + 0.0000i	0
0.4624 - 0.0001i	-0.0002 + 0.0000i	1
0.9780 - 2.5473i	0.4999 + 0.0000i	2
-0.6534 + 0.0006i	-0.0002 + 1.0001i	3
-0.1158 + 0.0001i	-0.0002 + 0.0000i	4
-0.0002 + 0.0000i	-0.0002 + 0.0000i	5
0.0753 - 0.8491i	-0.0002 + 0.0000i	6
0.2797 - 0.0006i	-0.0002 + 0.0000i	7

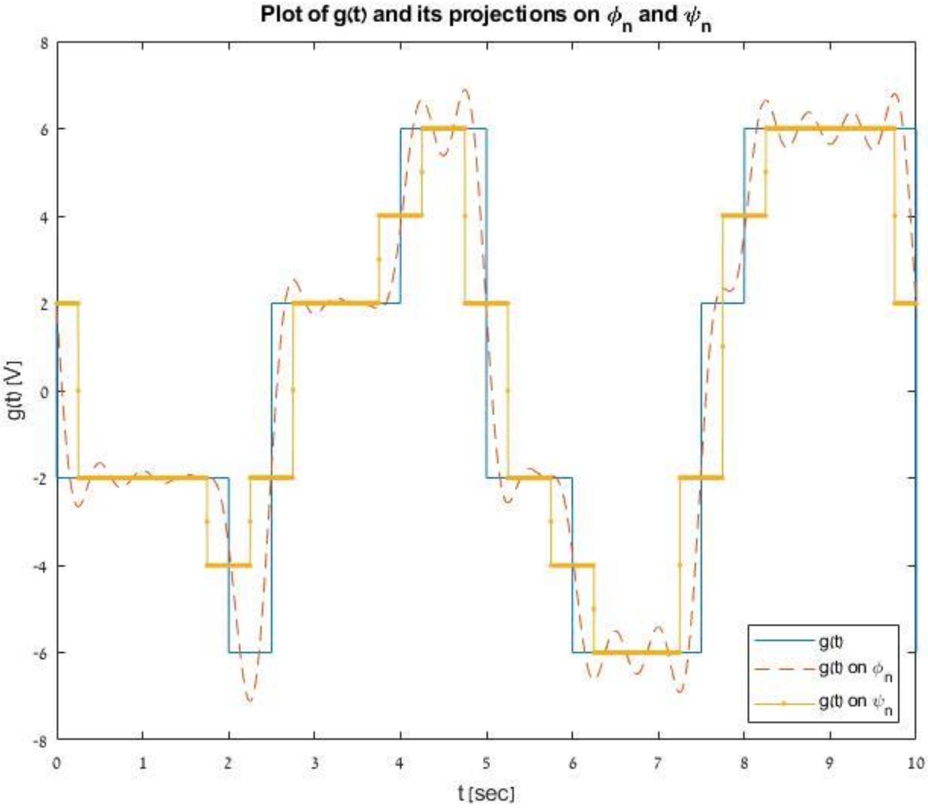
-0.2451 + 0.0006i	-0.0002 + 0.0000i	8
-0.0516 + 0.0001i	-0.0002 + 0.0000i	9
-0.0018 - 0.5093i	-0.0002 + 0.0000i	10
0.0419 - 0.0001i	-0.0002 + 0.0000i	11
0.1631 - 0.0006i	-0.0002 + 0.0000i	12
-0.1509 + 0.0006i	-0.0002 + 0.0000i	13
-0.0348 - 0.3637i	-0.0002 + 0.0000i	14
-0.0002 + 0.0000i	-0.0002 + 0.0000i	15
0.0287 - 0.0001i	-0.0002 + 0.0000i	16
0.1151 - 0.0006i	-0.0002 + 0.0000i	17
-0.1107 - 0.2823i	-0.0002 + 0.0000i	18
-0.0245 + 0.0001i	-0.0002 + 0.0000i	19
-0.0002 + 0.0000i	-0.0002 + 0.0000i	20

ג. שחזור האותות מתוך מקדמי ההטל שחושבו בסעיף ב' נתון על ידי נוסחת השחזור הבאה :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \phi_n(t)$$

נציג את האות המקורי ואת האותות ששחזרנו $f(t)$ בגרף אחד ובגרף נוסף את האות $g(t)$:





רק עבור הטלת $f(t)$ על פונקציית הבסיס ϕ_n אנו מקבלים שחזורק מדוייק.

בשחזור האות $g(t)$ נוכל לקבל שיחזור מדוייק, אך נצטרך להוסיף אינסוף מקדמים – ככל שנגדיל את מספר המקדמים, נקבל דיוק גבוה יותר.

עבור $f(t)$ ומקדמי ההטלה על ψ_n לא ניתן לקבל שיחזור מדוייק על ידי הוספת מקדמים מעבר לאלו שחושבו, כיוון שמדובר בחלונות מוזזים. הוספת חלונות עם הזזות גדולות לא תקין את השגיאה וניתן לשפר את הדיוק על ידי שימוש בבסיס אחר שבו החלונות יהיו צרים יותר.

ד.

עבור פונקציית הבסיס ϕ_n, עדיף להשתמש לאותו המכילים הרמוניות, כמו פונקצייה $f(t)$

עבור ψ_n חלון מוזז מתאים לייצוג אותו מסוג $g(t)$

<u>יתרונות</u>:

- ψ_n – מתאים לתיאור סכמתי ופחות מדוייק של פונקציות עם מספר מקדמים קטן.

- ϕ_n - מתאים לתיאור אותות שמורכבות מהמרמוניות, וניתן לשפר רזולוציית דיוק ע"י הוספת מקדמים.

<u>חסרונות</u>:

- ψ_n –לא ניתן לשפר דיוק על ידי הוספת מקדמים.

- ϕ_n - לא מתאים לתיאור פונקציות עם מעברים חדים ותופעות מעבר "בדידות"

נציין כי השימוש ב ψ_n לא זהה לשחזור ZOH, כיוון שבשחזור מסוג זה, הדגימה נשמר למשך זמן T, ובשימוש ψ_n מקבלים את הערך הממוצע של הפונק' לכל ערך שאיננו אפס עבור כל חלון זמן.

Git Repository :

https://github.com/DanielKatzav/DSP_Ex1