<u>מבוא לאלקטרומגנטיות וגלים 361-1-3651</u>

<u>תרגיל מחשב I: פתרון TEM בקווי תמסורת</u>

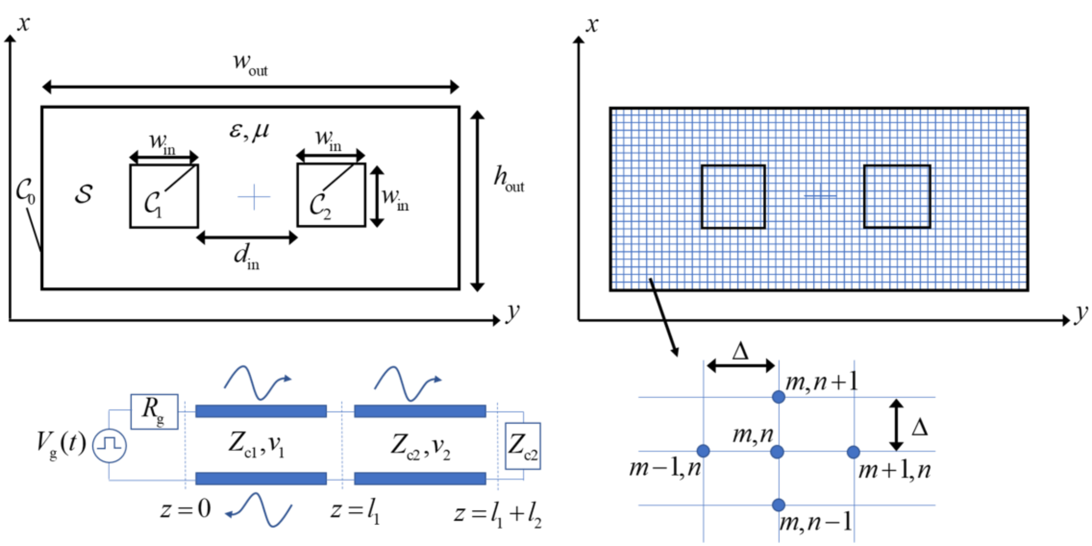
סמסטר א׳ תשע״ט

תאריך אחרון להגשה: 5 לדצמבר 2019.

<u>הנחיות כלליות:</u> מטרת מטלה זו היא הכרת שיטה לניתוח קווי תמסורת שצורתם אינה נוחה\מאפשרת פתרון אנליטי. יש להגיש באתר **דו"ח מסכם לעבודה, כקובץ PDF**, ובו כל התשובות לסעיפים השונים, כולל כל הפיתוחים האנליטיים והביטויים הסופיים, תרשימים ואיורים, הסברים, ניתוחים ופרשנויות של התוצאות. **הציון ינתן על סמך הדו"ח המסכם**. בנוסף, יש לצרף את כל קבצי קוד ה-MATLAB שכתבתם במסגרת העבודה, **מתועדים במידה מספקת** המאפשרת הבנה של מה מומש. על האיורים להיות ברורים ונוחים להבנה (לכלול מקרא, כותרות צירים ברורות, קווים וסמנים נוחים לקריאה וכדומה). ניתן להגיש מספר קבצי קוד, אך יש להשתמש בקובץ MAIN יחיד (שיקרא לשאר הקבצים) שרק אותו יריץ הבודק. עבודה שלא תאפשר שחזור של כלל התרשימים בה בקריאה לקובץ MATLAB יחיד או שהקוד בקבצים המצורפים לה אינו נהיר, לא תבדק ותחשב כלא הוגשה. עבודה שאינה מקורית לא תקבל ציון ותחשב כלא הוגשה. יופחת ניקוד על תרשימים לא ברורים. למטלה זו משקל של 10% בציון הסופי וניתן לבצעה בזוגות.

פקודות שימושיות: meshgrid, reshape, quiver, find, trapz

<u>רקע:</u> נתון קו תמסורת בעל החתך שבתרשים (שמאל), המורכב מזוג מוליכים ריבועיים פנימיים $\mathcal{C}_1$ ו- $\mathcal{C}_2$, בתוך מסגרת מלבנית חיצונית $\mathcal{C}_0$, גם כן מוליכה. חומר דיאלקטרי ממלא את שטח שבין המוליכים, $\mathcal{S}$. קו התמסורת מוזן על ידי מקור מתח המחבר את $\mathcal{C}_1$ ל- $\mathcal{C}_2$. ניתן להניח כי הראשית נמצאת **בפינה השמאלית התחתונה** של $\mathcal{C}_0$ וכי $\mathcal{C}_1$ ו- $\mathcal{C}_2$ ממוקמים סימטרית ביחס למרכז של $\mathcal{C}_0$. נרצה לנתח את התפשטותם של גלים במוליכים בעלי פרופיל מסוג זה.



<u>הקדמה: צורת הפתרון הכללית (10 נק'):</u>

א. כתבו ביטויים לשדות החשמלי והמגנטי $\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ המתקיימים בקו התמסורת, בהנחת פתרון מסוג TEM: בטאו שדות אלה כפונקציה של השדות המודאליים $\mathbf{e}(x,y),\mathbf{h}(x,y)$ והפונקציות $V^{\pm}(t)$. הביעו את השדות המודאליים כפונקציה של פוטנציאל סקלארי $\phi(x,y)$ המקיים את משוואת Laplace (אין צורך לחשבו בשלב זה) וכתבו ביטויים לתנאי השפה אותם נדרש לקיים $\phi(x,y)$ על המשטחים $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ ו- $\mathcal{C}_2$.

ב. כתבו ביטויים אנליטיים לחישוב הקיבול, ההשראות והעכבה האופיינית של הקו, מתוך $\mathbf{e}(x,y),\mathbf{h}(x,y)$.

חלק ראשון (60 נק'): חישוב נומרי של שדות מודאליים של פתרון מסוג TEM:

נפתח שיטה נומרית, מסוג "הפרשים סופיים", לחישוב $\phi(x,y)$. לשם כך, נחלק את תחום החישוב $[0,h_{\text{out}}]\times[0,w_{\text{out}}]$ למשבצות, על ידי רשת קרטזית במרווחים אחידים (וזהים עבור שני הצירים) $\Delta x=\Delta y=\Delta$ (צד ימין בתרשים). נסמן ב- $M=h_{out}/\Delta+1$ ו- $N=w_{out}/\Delta+1$ את מספר נקודות הצומת (או הדגימה) בציר x ובציר y, בהתאמה, בהן יחושב $\phi(x,y)$. לכל נקודת צומת נייחס זוג אינדקסים $(m,n)\in[0,1,...,M-1]\times[0,1,...,N-1]$, ונסמן את הפוטנציאל בנקודה זאת ב- $\phi_{mn}=\phi(m\Delta,n\Delta)$. נשים לב כי על השפות $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ ו- $\mathcal{C}_2$ הפוטנציאל ידוע וכי בשטח הפנימי ל- $\mathcal{C}_1$ ו- $\mathcal{C}_2$ אין לנו עניין בפוטנציאל. נותר למצוא את הפתרון רק בנקודות הדגימה שבתוך $\mathcal{S}$ ממש. נסמן את מספרן של נקודות אלה $N_{\mathcal{S}}$. לכל $(m\Delta,n\Delta)$ ב- $\mathcal{S}$ נייחס, בנוסף, אינדקס $j_{mn}\in[1,N_{\mathcal{S}}]$. נוכיח כי ניתן לכתוב אלגוריתם איטרטיבי שבכל איטרציה מקרב את הפוטנציאל בנקודה על ידי ממוצע ערכי הפוטנציאל בנקודות השכנות מהאיטרציה הקודמת, עד להתכנסות.

ג. השתמשו בקירוב הנומרי לנגזרת הראשונה במימד אחד:

$$\frac{\partial f(\upsilon)}{\partial\upsilon}\approx\frac{f(\upsilon+\Delta/2)-f(\upsilon-\Delta/2)}{\Delta}$$

ופתחו באמצעותו קירוב נומרי ללפלסיאן $\nabla^2\phi|_{(x,y)=(m\Delta,n\Delta)}$ מהצורה

$$\nabla^2\phi|_{(x,y)=(m\Delta,n\Delta)}\approx a\phi_{(m-1)n}+a\phi_{(m+1)n}+a\phi_{m(n-1)}+a\phi_{m(n+1)}+b\phi_{mn}$$

מצאו את המקדמים a ו-b המתאימים. לקירוב זה נקרא "קירוב ההפרשים הסופיים" של הלפלסיאן.

ד. עבור נקודה כללית $(x,y)=(m\Delta,n\Delta)$ בתוך התחום $\mathcal{S}$, השתמשו בקירוב ההפרשים הסופיים מסעיף ג' וכתבו קירוב למשוואת Laplace. הבחינו בין מקרים בהם נקודות הדגימה השכנות ל-$(x,y)=(m\Delta,n\Delta)$ נמצאות ב- $\mathcal{S}$ ובין המקרים השונים בהם ישנן נקודות שכנות הנמצאות על השפות $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ או $\mathcal{C}_2$ (בפרט, שימו לב למקרים בהם $(x,y)=(m\Delta,n\Delta)$ סמוכה לפינות התחום $\mathcal{S}$).

כעת, נבנה מערכת משוואות למציאת ערכי ϕ_{mn} הלא ידועים המתאימים לנקודות ב- $\mathcal{S}$. נסמן ב- $\tilde{\mathbf{f}}_{N_{\mathcal{S}}\times1}$ את הוקטור המכיל את כל ערכי ϕ_{mn} אלה. ניתן אז לכתוב מערכת משוואות שפתרונה $\tilde{\mathbf{f}}_{N_{\mathcal{S}}\times1}$, מהצורה:

$$\mathbf{Z}_{N_{\mathcal{S}}\times N_{\mathcal{S}}}\tilde{\mathbf{f}}_{N_{\mathcal{S}}\times1}=\mathbf{b}_{N_{\mathcal{S}}\times1}$$

כל שורה בה מתאימה לנקודה כלשהי j_{mn} וניתן לקבלה מתוך המשוואות הכלליות שכתבתם בסעיף ד', אם מעבירים את כל הגדלים הידועים לאגף ימין ולצד שמאל את הנעלמים (יחד עם הכופלים הקבועים שלהם כמובן).

ה. היעזרו בצורת המשוואה מסעיף ד', עבור נקודה $(m\Delta,n\Delta)\in\mathcal{S}$ כלשהי, והראו כי איבר כללי במטריצה מקיים:

$$\mathbf{Z}[j_{mn},j_{m'n'}]=\delta_{j_{m'n'}-j_{mn}}-1/4\left[\delta_{j_{m'n'}-j_{m(n-1)}}+\delta_{j_{m'n'}-j_{m(n+1)}}+\delta_{j_{m'n'}-j_{(m-1)n}}+\delta_{j_{m'n'}-j_{(m+1)n}}\right]$$

כאשר הסימון δ_j מייצג את פונקציית דלתא של קרונקר, בארגומנט יחיד. הראו גם שאיברי הוקטור $\mathbf{b}$ נתונים ע"י

$$\mathbf{b}[j_{mn}]=1/4\sum_{(\Delta m',\Delta n')\in\mathcal{C}_0\cup\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2}\phi_{m'n'}\{\delta_{m'-(m-1),n'-n}+\delta_{m'-(m+1),n'-n}+\delta_{m'-m,n'-(n-1)}+\delta_{m'-m,n'-(n+1)}\}$$

כאשר $\delta_{m,n}$ מייצג את פונקציית דלתא של קרונקר, בשני ארגומנטים.

למציאת $\tilde{\mathbf{f}}$, נשתמש בתהליך האיטרטיבי הבא: נסמן ב- $\mathbf{f}^{(i)}$ את הקירוב ל- $\tilde{\mathbf{f}}$ באיטרציה ה- i. נגדיר את צעד האיטרציה

$$\mathbf{f}^{(i+1)} = \mathbf{R}\mathbf{f}^{(i)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{R}[j_{mn}, j_{m'n'}] = 1/4\left[\delta_{j_{m'n'}-j_{m(n-1)}} + \delta_{j_{m'n'}-j_{m(n+1)}} + \delta_{j_{m'n'}-j_{(m-1)n}} + \delta_{j_{m'n'}-j_{(m+1)n}}\right]$$

ו. הראו כי <u>אם</u> סדרת הפתרונות $\mathbf{f}^{(i+1)}$ מתכנסת לוקטור כלשהו $\mathbf{s}$, אזי $\mathbf{s}$ הינו <u>פתרון</u> של מערכת המשוואות <u>המתוארת בסעיף ה'.</u> הסבירו מדוע צעד זה שקול להשמה, באיטרציה ה-$i+1$, לתוך כל אחד מערכי $\phi_{mn}^{(i+1)}$ (המתאימים לנקודות $(m\Delta, n\Delta) \in \mathcal{S}$), של ממוצע הפוטנציאלים של השכנים הקרובים מהאיטרציה ה-i (בין אם הם ידועים מתנאי השפה או מחושבים). כלומר, הראו שהצעד שקול ל- $\phi_{mn}^{(i+1)} := [\phi_{(m-1)n}^{(i)} + \phi_{(m+1)n}^{(i)} + \phi_{m(n-1)}^{(i)} + \phi_{m(n+1)}^{(i)}]/4$.

הפרשנות מסעיף ו' מאפשרת לכתוב תכנית לחישוב הפוטנציאל, על ידי בניית מערך התחלתי במימדים $M \times N$ של ערכי $\phi_{mn}^{(0)}$, בו ערכי הפוטנציאל על השפות קבועים, ולעדכנו בכל איטרציה רק בנקודות השייכות ל- $\mathcal{S}$.

נתונים כעת מידות קו התמסורת וערכי החומרים הממלאים אותו:

$$w_{\text{out}} = 10\text{mm},\ h_{\text{out}} = 4\text{mm},\ w_{\text{in}} = 0.8\text{mm},\ d_{\text{in}} = 2\text{mm}$$

בוחרים $\Delta = 0.1\text{mm}$ כך שנקודות הדגימה תתלכדנה עם השפות $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

ז. <u>כתבו תכנית מחשב</u> למימוש התהליך איטרטיבי המחשב את סדרת הפתרונות $\mathbf{f}^{(n+1)}$ (אין צורך להציגם כוקטור חד ממדי). הניחו תנאי התחלה $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{0}$ ובכל איטרציה, עדכנו את כל ערכי $\mathbf{f}^{(n+1)}$ מתוך ערכי $\mathbf{f}^{(n)}$, בהסתמך על הפרשנות מסעיף ו'. עצרו את התהליך כאשר מתקיים התנאי $\|\mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{f}^{(n)}\|_2 / \|\mathbf{f}^{(n)}\|_2 < 10^{-5}$. מה מספר האיטרציות שנדרשו להתכנסות?

ח. הציגו בתרשים את הפוטנציאל שחישבתם ב- $\mathcal{S}$ כמפת צבע דו-ממדית באמצעות פקודת imagesc. לשם כך, לכל משבצת ברשת הנקודות יחסו את ממוצע ערכי הפוטנציאל בקדקדים שלה – כולל כמובן הקדקדים הנמצאים על $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, בהם הערכים ידועים. הקפידו על הצגת מערכת צירים, יחידות, colorbar וכדומה.

ט. חשבו את השדות המודאליים $\mathbf{e}(x,y), \mathbf{h}(x,y)$ בנקודות הדגימה הנמצאות ב- $\mathcal{S}$ ***ממש***. לשם כך, השתמשו בקירוב

$$\nabla\phi|_{(x,y)=(m\Delta,n\Delta)} \approx \hat{\mathbf{x}}\frac{\phi_{m+1,n} - \phi_{m-1,n}}{2\Delta} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\phi_{m,n+1} - \phi_{m,n-1}}{2\Delta}$$

הציגו, עבור כל אחד מהשדות, על גבי מפה דו-ממדית, את וקטור השדה. היעזרו בפקודת quiver. הנחיה: חשבו את מקדם הפרופורציה γ ע"י אינטגרציה נומרית לאורך קווים ישרים בסמוך לשפה (אך לא על השפה ממש, שם השדות לא חושבו). ניתן לעבוד בשיטת אינטגרציה לבחירתכם (למשל נוסחאות מלבנים או טרפז מצרפיות – שימו לב כי פונקציות האינטגרציה הקיימות ב- MATLAB לא יודעות מעצמן לקחת בחשבון את המרחק בין זוג דגימות).

י. דיון והרחבות: עבור השיטה הנתונה, ציינו את כל גורמי השגיאה השונים בחישוב. עבור מוליך הגלים הנתון ואותם פרמטרים של שיטת הפתרון (ואותה רמת דיוק), הציעו דרך פשוטה להקטנת זמן החישוב בקבוע כפלי הקרוב ל-2. אם ניתן, הציעו דרך פשוטה להקטין את זמן החישוב עוד יותר, בקבוע כפלי הקרוב ל-4.

<u>חלק שני (30 נק'): הדהודים והחזרות בקו תמסורת</u>

נתונה הרשת שבאיור, בה לקווי התמסורת הפרופיל מהחלק הקודם. נתונים גם פרמטרי החומרים של קטעי קו התמסורת:

$$\varepsilon_1 = 2.5\varepsilon_0,\ \varepsilon_2 = 3.9\varepsilon_0,\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

יא. חשבו נומרית את ערכי הקיבול, ההשראות, והעכבה האופינית, עבור שני קטעי קו התמסורת. חשבו גם את מהירויות הגל בשני קטעי הקו v_1, v_2.

נגדיר את $T = l_1 / v_1$ ונדרוש ש- $l_2 = Tv_2$. מזינים את הרשת באמצעות פולס מתח בודד באורך $T_\mathrm{p} = T/10$ הנתון על ידי צירוף פונקציות מדרגה $U(t)$:

$$V_\mathrm{g}(t) = U(t) - U(t - T_\mathrm{p})$$

לצורך ניתוח התפשטות הגלים, שימו לב כי קו התמסורת הימני ברשת מסתיים בעומס מתואם. בנוסף, נתון כי התנגדות המקור נקבעת מתוך מספרי ת.ז. מגישי התרגיל (המסומנים $num_{1,2}$), ע"י הביטוי

$$R_\mathrm{g} = Z_{\mathrm{c}1} \frac{num_1}{num_1 + num_2}$$

בחרו את T שרירותית ונתחו את התפשטות הגלים ברשת המתוארת כתלות בזמן:

יב. שרטטו (איכותית, בכלי איור\שרטוט לבחירתכם) דיאגרמת הדים עבור שני מקטעי הקו וכתבו ביטויים אנליטיים כפונקציה של הזמן לגלים המתפשטים בקו בקטע הזמן $t \in [0, 3T]$.

יג. כתבו תכנית מחשב המציגה, על גבי מפת צבע דו-ממדית (באמצעות imagesc), את לוגריתם ערכו המוחלט של המתח הכולל בקו, $20\log|V(t,z)|$, בתחום $z \in [0, l_1 + l_2]$ ו- $t \in [0, 8T]$. השתמשו במרווחי דגימה $\Delta z = (l_1 + l_2)/1000$ ו- $\Delta T = T/50$. תארו והסבירו את התוצאות שקיבלתם.

בהצלחה!