2019

חלק ראשון : חישוב נומרי של שדות מודאליים של פתרון מסוג :TEM

עבודת מחשב 1

DANIEL KATZAV 203389770

הקדמה: צורת הפתרון הכללית:

אנו נדרשים בסעיף זה להציג ביטויים של השדות החשמליים והמגנטיים המתקיימים בקו התמסורת, בהנחת פתרון מסוג TEM, שיסומנו ב - $E(\mathrm{r,t}), \mathrm{H(r,t)}$ בהתאמה.

נייצג תחילה את הביטויים הללו בצורה:

$$E(r,t) = F(z,t) \cdot e(x,y)$$
$$H(r,t) = G(z,t) \cdot h(x,y)$$

תחילה, נרצה לבטא את השדות המודאליים $e(x,y), h(x,y)$ כתלות בפונקציית הפוטנציאל $\phi(x,y)$.

עבור משטח C כלשהו, מעקרון מינימום/מקסימום לבעיית לפלס, ישנה דרישה שהפוטנציאל בכל התחום יהיה שווה לפוטנציאל על משטח C. כיוון שאנו יודעים כי מתקיימת משוואת לפלס, ושתנאי השפה על מוליך מושלם הינם, נוכל להסיק כי:

$$\phi|_{c_0} = \phi|_{c_1} = \phi|_{c_2} = const_{\ c_0,c_1,c_2}$$

כפי שהוזכר בהרצאה, פתרון מסוג TEM מקיים את תכונה השדה המשמר ולכן ניתן להסיק כי:

$$e(x,y) = -\nabla_T \cdot \phi(x,y)$$

עבור פונקציית פוטנציאל $\phi(x,y)$ סקלארית .

בנוסף, ראינו ש $\nabla_T E_T = 0$, מכאן ניתן לפתח:

$$\nabla_T \cdot \big(F(z,t) \cdot e(x,y)\big) = 0$$
$$\Rightarrow \nabla_T \cdot e(x,y) = 0$$
$$\Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$$

ידוע לנו ש E_T, H_T הינם שדות משמרים, ואנו יודעים כי ההגדרה למתח (והזרם, בהתאמה) בין מוליכים (לצורך העניין, מוליך c_0 ומוליך c_1) הינה:

$$V(z,t) = \int_{p_{0,1}} \underline{E_T} \cdot \underline{dl} = 0$$
$$I(z,t) = \int_{p_{0,1}} \underline{H_T} \cdot \underline{dl} = 0$$

לכן, לא משנה איזה מסלול $p_{0,1}$ בין מוליך c_0 למוליך c_1 נבחר. בנוסף, נדרוש תנאי לנרמול עבור הגדרת המתח והזרם (בהתאמה), כי:

$$\int_{p_{0,1}} \underline{e} \cdot \underline{dl} = 1 \Rightarrow \phi_0 - \phi_1 = 1$$

$$\oint_{c_n} \underline{h} \cdot dl = 1$$

בכיתה הראנו כי קיים יחס קבוע כלשהו בין $\underline{h}$ לבין $\hat{z} \times e(x,y)$:

$$h(x,y) = \frac{1}{\gamma}\left(\hat{z} \times e(x,y)\right)$$

וניתן למצוא אותו מהאינטגרל הבא:

$$\gamma = \oint_{c_1} dl\left(\underline{e} \cdot \hat{n}\right)\ ;\ \hat{n}_1 = \hat{l} \times \hat{z}$$

מפתרון משוואת הגלים, קיבלנו כי הפונקציות הסקלאריות של השדות $E(\mathrm{r,t}),\mathrm{H(r,t)}$ נראות כך :

$$F(z,t) = V(z,t) = V^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + V^-\left(t + \frac{z}{v}\right)$$
$$G(z,t) = I(z,t) = Z_c\left[V^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + V^-\left(t + \frac{z}{v}\right)\right]$$
$$Z_c = \sqrt{\frac{C}{L}} - Impedance\ of\ Transmittion\ line$$
$$C = \epsilon \cdot \gamma - \left[\frac{F}{m}\right] - Capacitance\ per\ Length\ unit$$
$$L = \frac{\mu}{\gamma} - \left[\frac{Hy}{m}\right] - Inductance\ per\ Length\ unit$$

לכן, הביטויים שאותם נדרשנו להציג, כפונקציייה של הפוטנציאל הסקלרי, הינם :

$$E(r,t) = \left[V^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + V^-\left(t + \frac{z}{v}\right)\right] \cdot e(x,y)$$
$$H(r,t) = Z_c\left[V^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + V^-\left(t + \frac{z}{v}\right)\right] \cdot \left[\frac{1}{\gamma}\left(\hat{z} \times e(x,y)\right)\right]$$

חלק ראשון: חישוב נומרי של שדות מודאליים של פתרון מסוג TEM:

ג. אנו נדרשים בסעיף זה לפתח קירוב נומרי ללפלסיאן $\nabla^2\phi|_{(x,y)=(m\Delta,n\Delta)}$ מהצורה הבאה:

$$\nabla^2\phi|_{(x,y)=(m\Delta,n\Delta)} \approx \mathrm{a}\cdot\phi_{(m-1)n} + \mathrm{a}\cdot\phi_{(m+1)n} + \mathrm{a}\cdot\phi_{m(n-1)} + \mathrm{a}\cdot\phi_{m(n+1)} + \mathrm{b}\cdot\phi_{mn}$$

לכן, נעזר בקירוב הנומרי לנגזרת ראשונה במימד אחד:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \mathrm{x}} \approx \frac{f\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta}$$

על הביטוי הבא:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi(x)}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial \mathrm{y}^2}$$

נבצע את הקירוב לנגזרת שנייה:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial \mathrm{x}^2} \approx \frac{f'\left(x+\frac{\Delta}{2}\right)-f'\left(x-\frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta} = \frac{f(x+\Delta)-2f(x)+\ f(x-\Delta)}{\Delta^2}$$

נציב את הקירוב לנגזרת שנייה בביטוי השל הלפלס:

$$\nabla^2\phi = \frac{\phi(x+\Delta,y)+\ \phi(x-\Delta,y)+\ \phi(x,y+\Delta)+\ \phi(x,y-\Delta)-\ 4\cdot\phi(x,y)}{\Delta^2}$$

לכן, נוכל להסיק מכך כי המקדמים a,b הינם:

$$a=\frac{1}{\Delta^2}\ ;\ \ b=-4\cdot a$$

ד. נוכל לייצג את הארגומנטים של $\phi(x,y)$ גם בצורה הבאה ולייצג את הקירוב למשוואת לפלס על ידי קירוב ההפרשים:

$$\nabla^2\phi|_{(x,y)=(m\Delta,n\Delta)} \approx \frac{\phi_{(m-1)n}+\ \phi_{(m+1)n}+\ \phi_{m(n-1)}+\phi_{m(n+1)}-\ 4\cdot\phi_{mn}}{\Delta^2}$$

כאשר $(x,y)=(m\Delta,n\Delta)$.

כיוון שיש לנו תחומים שבהם איננו רוצים לחשב את הפוטנציאל (התחום הריק כמתואר בשרטוט בתחילת התרגיל), נגדיר כי לפי נתוני התרגיל:

$$C_1(0,0)=\left(\frac{h_{out}}{2}-\frac{w_{in}}{2},\frac{w_{out}}{2}-\frac{d_{in}}{2}-w_{in}\right)$$

$$C_2(0,0)=\left(\frac{h_{out}}{2}-\frac{w_{in}}{2},\frac{w_{out}}{2}+\frac{d_{in}}{2}\right)$$

ונתאר את השטח שממנו אנו רוצים להתעלם בחישוב הפוטנציאל:

$$C_{1_{disregard}}=\forall(x,y)\in[C_1(0,0),C_1(w_{in},w_{in})]$$

$$C_{2_{disregard}}=\forall(x,y)\in[C_2(0,0),C_2(w_{in},w_{in})]$$

ובנוסף, נתאר זה באופן דיסקרטי על ידי $(x,y)=(m\Delta,n\Delta)$:

$$C_{1_{disregard}}=\forall(m\Delta,n\Delta)\in[C_1(0,0),C_1(D,D)]$$

$$C_{2_{disregard}}=\forall(m\Delta,n\Delta)\in[C_2(0,0),C_2(D,D)]$$

כאשר אנו מגדירים $D=\ \frac{w_{in}}{\Delta}$.

בנוסף, ערכי הפוטנציאל בשפות, שידועים לנו כי הם שווים לאפס, נוכל לתאר כך:

$$\phi_{C_1(0,0),C_2(0,0)}\ (m,n) \equiv \phi_1, \phi_2\ \ IF:$$

$$\{m = 0, n = [0, D]\}\ OR$$

$$\{m = [0, D], n = 0\}\ \mathrm{OR}$$

$$\{m = [0, D], n = D\}\ \mathrm{OR}$$

$$\{m = D, n = [0, D]\}$$

באותו האופן, ניתן לומר זאת גם על השפות של המשטח C_0.

ה. בסעיף זה אנו מסמנים עבור N_s נקודות הדגימה שבתוך השטח S ממש, את וקטור הערכים של ϕ_{mn} ב $\tilde{f}_{Ns\times 1}$ - מכאן, ניתן לכתוב את מערכת המשוואות שפתרונה הינו וקטור זה:

$$\mathrm{Z}_{N_s\times N_s}\, \tilde{f}_{Ns\times 1} = b_{N_s\times 1}$$

$$\tilde{f}_{Ns\times 1} = \left(\phi_{11}, \phi_{21}, \dots, \phi_{(M-1)1}, \phi_{12}, \phi_{22}, \dots \phi_{((M-1)(N-1))}\right)^T$$

מסעיף ד', *וממהות השיטה הנומרית*, אשר אנו מחשבים את הפוטנציאל של נקודה (m, n) מסויימת, על ידי חישוב ממוצע של השכנים שלה, נוכל להסיק כי:

$$\phi_{mn} = \frac{\phi_{(m-1)n} + \phi_{(m+1)n} + \phi_{m(n-1)} + \phi_{m(n+1)}}{4}$$

כלומר, מטריצת $\mathrm{Z}_{N_s\times N_s}$ תצטרך לעשות פעולת סינון (הכפלה ב-0 עבור איברים שהם לא שכנים קרובים) לארבעת השכנים של הנקודה הנבחרת, (m, n), והכפלה בקבוע של $\frac{1}{4}$. לכן על ידי קביעת הדיסטרבוציות δ_{mn} במקום "הנכון" נוכל לייצג את המטריצה המבוקשת:

$$\mathrm{Z}_{N_s\times N_s} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Z\left[j_{mn}, j_{m'n'}\right] = \ \phi_{mn} - \frac{\phi_{(m-1)n} + \phi_{(m+1)n} + \phi_{m(n-1)} + \phi_{m(n+1)}}{4}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}\left[j_{mn}\right] \cdot \left(\delta_{mn} - \frac{\delta_{j_{m'n'} - j_{(m-1)n}} + \delta_{j_{m'n'} - j_{(m+1)n}} + \delta_{j_{m'n'} - j_{m(n-1)}} + \delta_{j_{m'n'} - j_{m(n+1)}}}{4} \right)$$

$$\delta_{mn} = \delta(m'n' - mn)$$

ומכיוון שאנו יודעים שהביטוי הבא מייצג את הפתרון שלנו עבור פוטנציאל בנקודה מסויימת:

$$\phi_{mn} = \frac{\phi_{(m-1)n} + \phi_{(m+1)n} + \phi_{m(n-1)} + \phi_{m(n+1)}}{4}$$

ניתן להסיק גם כי הוקטור $b[j_{mn}]$ מייצג זאת, ועל כן:

$$b[j_{mn}] = \frac{1}{4}\left(\phi_{(m-1)n} + \phi_{(m+1)n} + \phi_{m(n-1)} + \phi_{m(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \sum_{(\Delta m', \Delta n') \in C_0 \cup C_1 \cup C_2} \phi_{m'n'} \cdot \left(\delta_{(m-1),n} + \delta_{(m+1),n} + \delta_{m,(n-1)} + \delta_{m,(n+1)}\right)$$

$$\delta_{(m,n)} = \delta[m' - m, n' - n]$$

ו. התהליך האיטרטיבי הבא:

$$f^{(i+1)} = R \cdot f^{(i)} + b$$

$$\mathrm{R}[\mathrm{j_{mn}}, \mathrm{j}_{\mathrm{m}'n'}] = \frac{1}{4}\left[\delta_{j_{m'n'}-j_{(m-1)n}} + \delta_{j_{m'n'}-j_{(m+1)n}} + \delta_{j_{m'n'}-j_{m(n-1)}} + \delta_{j_{m'n'}-j_{m(n+1)}}\right]$$

$$f^{(i)} \approx \tilde{f}[j_{mn}]$$

יתאר לנו את הביטויים שפיתחנו, לכל איטרציה (כך בעצם נוכל לחשב זאת באמצעות תכנית מחשב). נציג את התהליך באופן הבא:

$$\tilde{f}^{(i+1)}[\phi_{nm}] = R \cdot \tilde{f}^{(i)}[\phi_{nm}] + b$$

נניח כי סדרת הפתרונות $\tilde{f}^{(i+1)}[\phi_{nm}]$ מתכנסת עבור אינדקס מספיק גדול לוקטור s , ולכן נוכל לרשום כי:

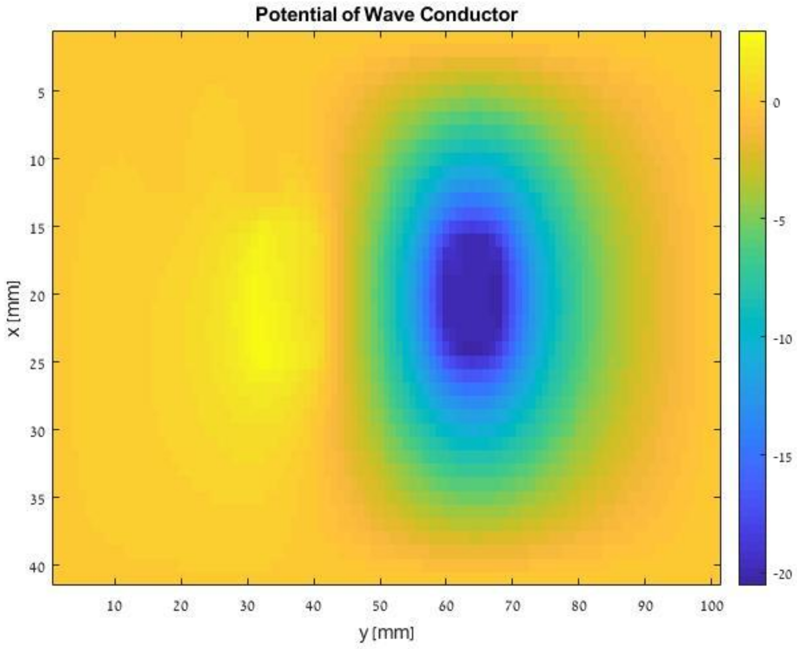
$$s = f(\phi_{nm}) = R \cdot \tilde{f}^{(i)}[\phi_{nm}] + b = \phi_{nm}$$

לכן, נוכל להסיק כי הוקטור s הינו נקודת שבת של מערכת המשוואות המתוארת בסעיף ה', ולכן הוא פתרון של המערכת. כלומר, ניתן לרשום את הפתרון האיטרטיבי אם כך, בצורה:

$$\phi_{nm}^{(i+1)} = R \cdot \phi_{nm}^{(i)} + b = 0 + \frac{1}{4}\left(\phi_{(m-1)n}^{(i)} + \phi_{(m+1)n}^{(i)} + \phi_{m(n-1)}^{(i)} + \phi_{m(n+1)}^{(i)}\right)$$

ולכן, צעד זה שקול להשמה באיטרציה $i+1$, לתוך כל אחד מערכי $\phi_{nm}^{(i+1)}$, של ממוצע הפוטנציאלים של השכנים הקרובים מהאיטרציה ה- i.

ז. לאחר הרצת תוכנית המטלב, קיבלנו את תמונת הפוטנציאל :



בסעיף זה נגדיר את השפות החיצונית של החורים בשדה להיות בפוטנציאל של :

$$\phi|_{C_1} = 0.5V$$

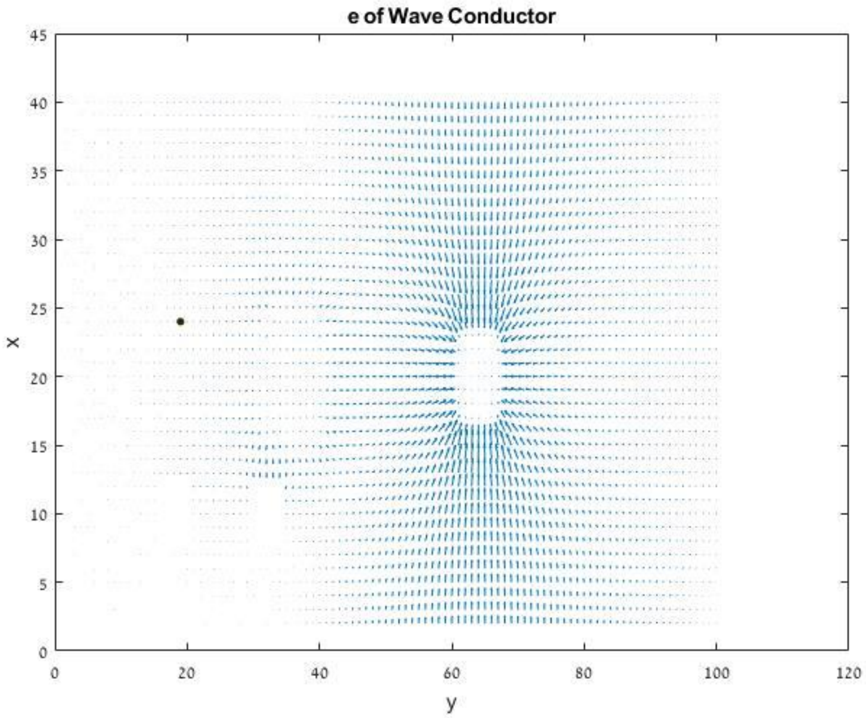
$$\phi|_{C_2} = -0.5V$$

ע"מ לשמור את תנאי הנרמול, שדרשנו בסעיפים הקודמים.

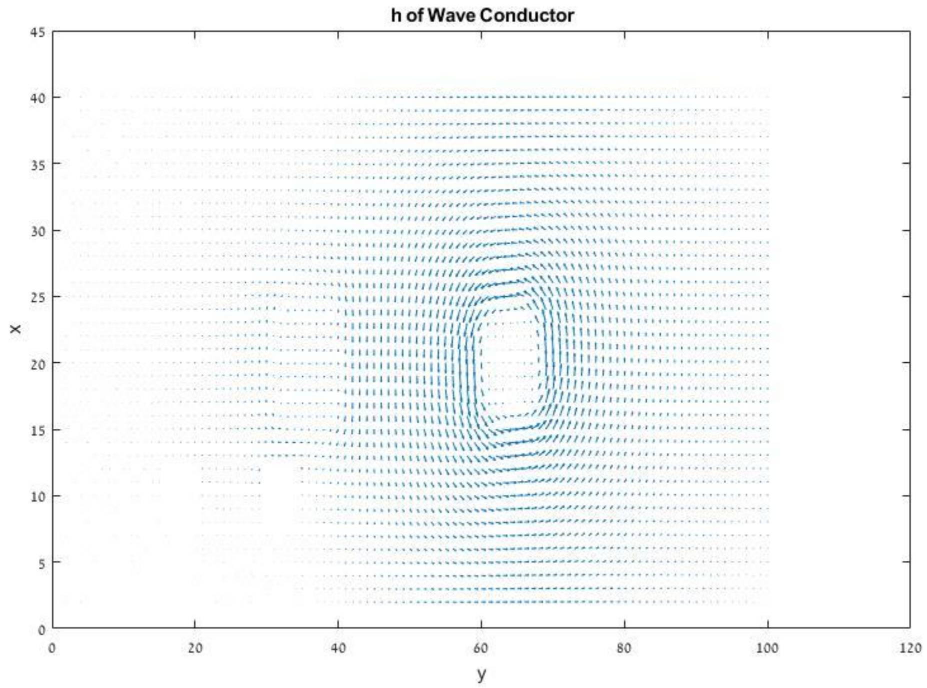
בנוסף, במהלך החישוב, התעלמנו מהחורים, כך שלא התייחסנו במהלך בניית המטריצה R, וחישוב הכולל, לשטח זה.

במהלך התוכנית הפתרון מתכנס לאחר 2604 איטרציות, אנו יכולים להניח כי מספר רב כזה של איטרציות איננו סביר, ולפי התמונה של השדות המודאליים שנציג בסעיף הבא, ניתן לשים לב כי ישנה בעיה במטריצת R (ככל הנראה), שלא הצלחתי למצוא.

ח. מהחישוב שניתן לנו בסעיף זה, קיבלנו את התמונה של השדה :



לאחר חישוב השדה $e(\mathrm{x},\mathrm{y})$, על מנת למצוא את $h(x,y)$ כפי שציינו בסעיפים התאורטיים, אנו צריכים למצוא את המשתנה γ, כדי שנוכל לייצג את השדה $h(x,y)$ כהכפלה במשתנה זה. לכן :



בשני השדות אנו שמים לב כי יש מתחת לריבוע השמאלי,ריבוע נוסף, לכן, אני מניח כי מטירצת R לא נבנתה כראוי, אך נציין שוב, כי זוהי התוצאה שהגעתי אליה ולאחר ניסיונות רבים למצוא היכן הבעיה, זהו הפתרון שאני הגעתי אליו.

י. כיוון שאנו מחלקים את קו התמסורת לאזורים קטנים, החישוב בסופו של דבר הוא בדיד וישנה שגיאה שמגיעה מכך מיידית. ע"מ לקבל שגיאה נמוכה יותר בפתרון, נוכל להקטין את Δ, וכך נחלק את הקו תמסורת בעת החישוב ליותר חלקים – ה Trade-Off שלנו יהיה זמן חישוב. עולה עוד בעיה נוספת שמוסיפה לשגיאה והיא הפינות של האזורים שאינם נכללים בחישוב, כיוון שבפינות הללו הגרדיאנט איננו מוגדר היטב.

חלק שני: הדהודים והחזרות בקו תמסורת:

א. נחשב את הביטויים הבאים כפי שהתבקשנו :

$$L_1 = L_2 = \frac{\mu_0}{\gamma} = \ 2.0684e^{-8}\ [H]$$
$$C_1 = 2.5 \cdot \epsilon_0 \cdot \gamma = 1.3448e^{-9} \qquad ; \qquad C_2 = 3.9 \cdot \epsilon_0 \cdot \gamma = 2.0979e^{-9}$$
$$Z_{C_1} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = 0.255 \qquad ; \quad Z_{C_2} = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} = 0.3185$$

נחשב את מהירות הגל לפי הנוסחא :

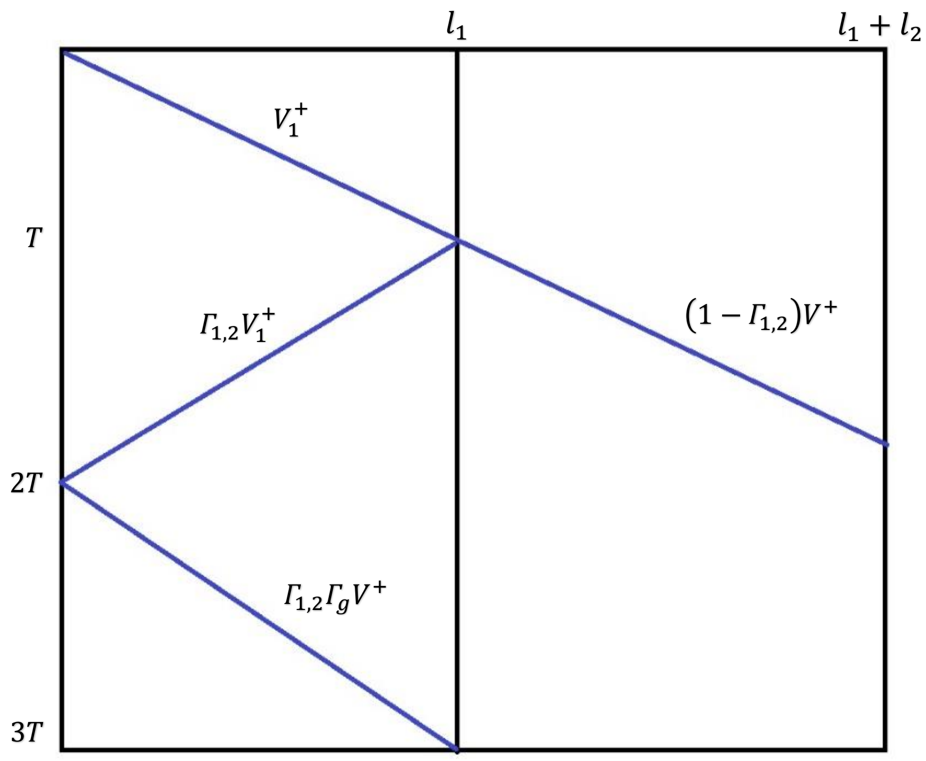
$$v_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i \cdot \epsilon_i}}$$
$$v_1 = 1.8961e^{8} \qquad ; \qquad v_2 = 1.5181e^{8}$$

ב. כעת אנו מזיני את הרשת בפולס בודד באורך $T_p = \frac{T}{10}$, אנו מגדירים את R_g להיות לפי :

$$R_g = Z_{C_1} \cdot \frac{ID}{ID + ID} = 0.5 \cdot Z_{C_1} \quad ; ID = 203389770$$

אנו שמים לב כי העומס הינו מתואם, ואנו מקבלים את מקדם ההחזרה להיות $\Gamma_L = \frac{Z_{c_2} - Z_{c_2}}{2Z_{c_2}}$, לכן, אין החסרה מהעומס. נחשב את מקדמי ההחזרה האחרים ברשת, לפי :

$$\Gamma_{2,1} = \frac{Z_{c_2} - Z_{c_1}}{Z_{c_2} + Z_{c_1}} = 0.1107 \qquad \Gamma_{1,2} = \frac{Z_{c_1} - Z_{c_2}}{Z_{c_2} + Z_{c_1}} = -0.1107$$
$$\Gamma_g = \frac{Z_{c_1} - R_g}{R_g + Z_{c_1}} = 0.3333$$



תחילה נבטא את V^+ ונראה שהוא תואם לדיאגרמה:

עבור $z=0$, מתוך המשוואה $V_1^+(t,z)=\frac{Z_{C_1}}{R_g+Z_{C_1}}V\left(t-\frac{z}{v_1}\right)$:

$$V_1^+=\frac{Z_{C_1}}{R_g+Z_{C_1}}V(t)$$

עבור $z=l_1$:

$$\mathrm{V}_1^-(t,z=l_1)=\Gamma_{1,2}\,V_1^+(t,z=l_1)=\Gamma_{1,2}\frac{Z_{C_1}}{R_g+Z_{C_1}}V(t-T)$$

$$\mathrm{V}_1^-(t,z)=\Gamma_{1,2}\frac{Z_{C_1}}{R_g+Z_{C_1}}V\left(t-2T+\frac{z}{v_1}\right)$$

$$\mathrm{V}_2^+(t)=V_1^++V_1^-=(1-\Gamma_{1,2})\frac{Z_{C_1}}{R_g+Z_{C_1}}V(t)$$

$$\mathrm{V}_2^+(t,z)=(1-\Gamma_{1,2})\ \frac{Z_{C_1}}{R_g+Z_{C_1}}V\left(t-\frac{z}{v_2}+\frac{l_1}{v_2}\ T\right)$$

כיוון שהעומס מתואם, קיבלנו כי $V_2^-=0$

עבור $t=2T$, $z=0$ נקבל כי :

$$V_1^+(2T)=\Gamma_gV_1^-(2T,0)=\Gamma_g\Gamma_{1,2}\frac{Z_{C_1}}{R_g+Z_{C_1}}V(0)=\Gamma_g\Gamma_{1,2}V_1^+(0)$$

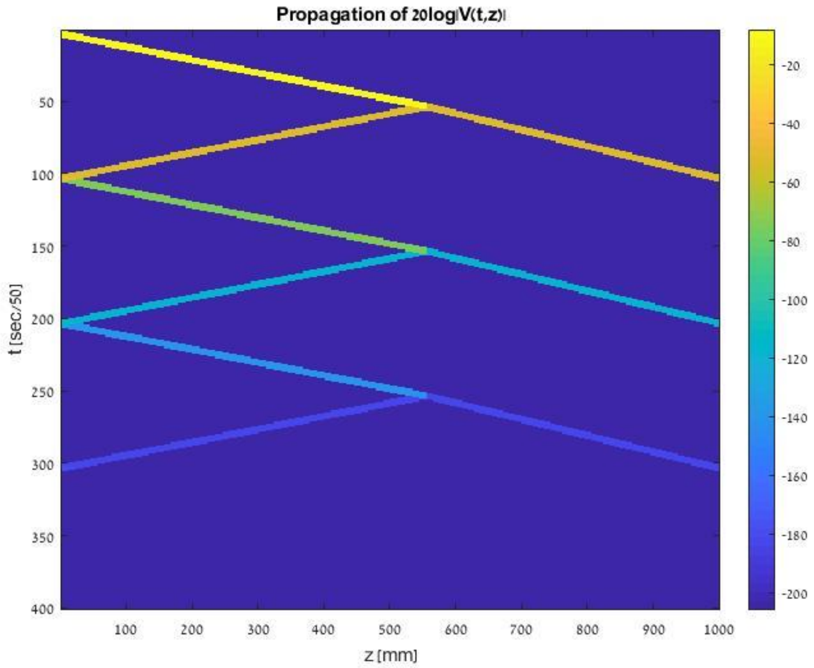
$$V_1^+(2T)=\Gamma_g\Gamma_{1,2}\frac{Z_{C_1}}{R_g+Z_{C_1}}V\left(t-\frac{z}{v_1}-2T\right)$$

נמשיך עד שנקבל בכל מקטע את הגולל הכולל ע"י הסכימה שלהם, וסף הכל נקבל עבור התחום $0<t<3t$ כי :

$$V_{Z_{C_1}}(t,z)=\frac{Z_{C_1}}{R_g+Z_{C_1}}V_g\left(1+\Gamma_g+\Gamma_g\Gamma_{1,2}\right)$$

$$V_{Z_{C_2}}(t,z)=\frac{Z_{C_1}}{R_g+Z_{C_1}}V_g(1-\Gamma_{1,2})$$

ג. לאחר כתיבת תוכנית מטלב להצגת ההתפשטות, עבור $T = 8\ [sec]$. לאחר ההרצה, קיבלנו את התמונה הבאה:



אנו רואים כי התוצאה דומה לדיאגרמת ההדים – העומס מתואם ואין החזרה של V_2^- , ניתן לראות כי לאחר 6 שניות הגל דעך לסדור גודל 10^{-160}, שנוכל לומר במילים אחרות כי ההדהודים הפסקים בקו התמסורת.

תוצאה זו מאששת את המשוואות מהסעיף הקודם, כיוון שאנו רואים כי הכפל בחזקה של $\Gamma_{1,2}$ מקטין את האמפליטודה של הגל, ובכל מעבר והחזרה הגל דועך עד למצב שהוא כבר "לא קיים".

הקוד המלא נמצא ב Repository הבא :

https://github.com/Daniel-CivDrone/EM_Waves_Ex1