

Entwicklung einer hardwarebeschleunigten Berechnung der Mandelbrotmenge auf einem FPGA

Daniel Kirchner

betreut durch: Prof. Oliver Engel
Hochschule Coburg

21.05.2019

Übersicht

Die Mandelbrotmenge

Umsetzung in Hardware

Optimierungen

Die Mandelbrotmenge

- ▶ nach Benoît Mandelbrot, Begründer des Begriffs "Fraktal"
- ▶ lat. *fractus*: gebrochen
- ▶ selbstähnliche Strukturen in Natur und Mathematik

Fraktale in der Natur



Blumenkohl, Rainer Zenz



Romanesco, Wolfgang Beyer

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻ 5/23

Definition

Definiert durch iterative Formel:

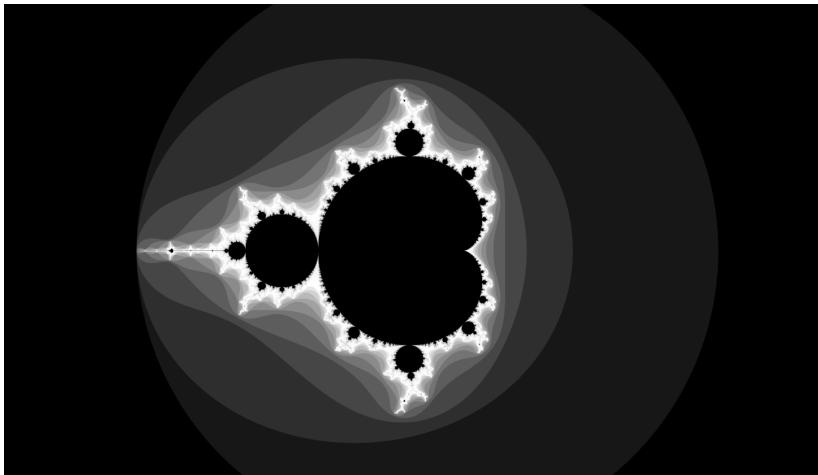
$$z_0 = 0$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Zur Menge gehören diejenigen c , für die die Folge beschränkt ist.

Demonstration: Konvergenz/Divergenz verschiedener c

Darstellung



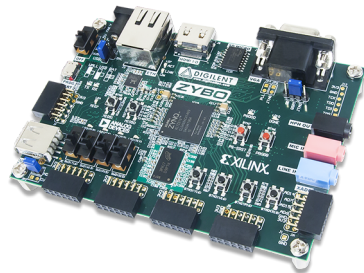
Umsetzung in Hardware

- ▶ Problem: Visualisierung der Mandelbrotmenge enorm rechenintensiv
- ▶ Lösung: Jedoch leicht parallelisierbar, ideal für Hardwareeinsatz

Gegebene Hardware

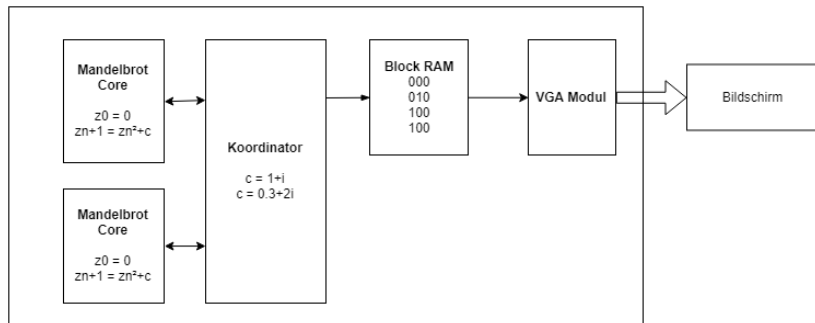
Zybo FPGA Trainer Board

- ▶ 28.000 Logikzellen
- ▶ 240 KB Block RAM
- ▶ 80 DSPs
- ▶ Dual-Core ARM processor
- ▶ VGA Output



Zybo Board, Digilent

Komponenten



Mandelbrot Core

- ▶ Berechnet für gegebenes c die Anzahl an benötigten Iterationen
- ▶ Ziel: eine Iteration pro Takt

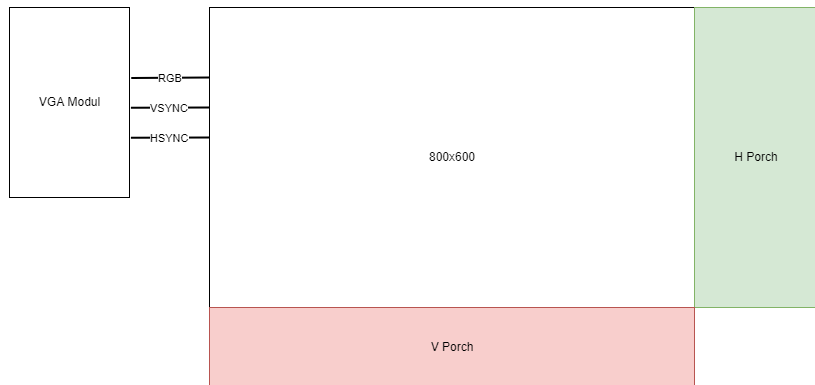
Koordinator

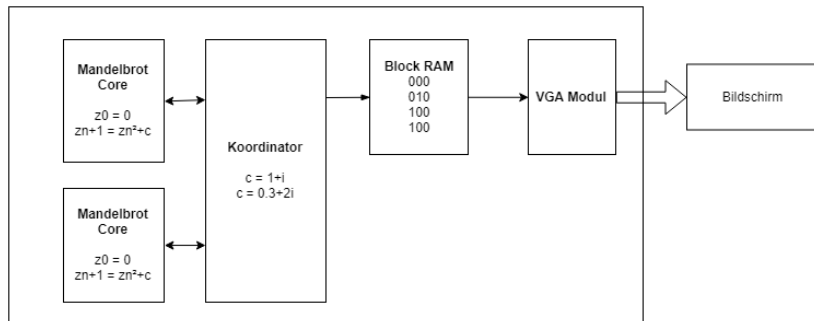
- ▶ Übersetzt Pixelkoordinaten in einzelne c Werte
- ▶ Koordiniert die Inputs der einzelnen Kerne
- ▶ Schreibt Ergebniswerte (Iterationen) in den BRAM

VGA Modul / Block RAM

- ▶ Werte im RAM Stellen Iterationsbereich da
- ▶ 240 KB Block RAM verfügbar
- ▶ 800x600 Signal mit 3 Bit pro Pixel
- ▶ 8 Farben pro Pixel
- ▶ Funktionsweise: Pixel für Pixel auslesen und darstellen

VGA Modul





Algebraische Optimierungen

In jedem Schritt:

$$z = z^2 + c$$

und dann Abfrage:

$$\text{abs}(z) \leq 2$$

Ziel: Minimale Zahl von Multiplikationen

$$\text{abs}(z) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{z_r^2 + z_i^2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow z_r^2 + z_i^2 \leq 4$$

$$z = z^2 + c$$

$$\Leftrightarrow z = z_r^2 - z_i^2 + 2z_r z_i + c$$

$$z_r = z_r^2 - z_i^2 + c_r$$

$$z_i = 2z_r z_i + c_i$$

$$\Leftrightarrow z_i = z_r z_i + z_r z_i + c_i$$

$$z_r^2 + z_i^2 \leq 4$$

$$z_r = z_r^2 - z_i^2 + c_r$$

$$z_i = 2z_r z_i + c_i$$

Designtechnische Optimierungen

- ▶ VGA-Modul und Mandelbrotcores müssen beide auf BRAM zugreifen → Dual Port RAM
- ▶ Mandelbrotmenge ist geschlossen: y zwischen -1.25 und 1.25 , x zwischen -2 und $0,5$ → Punkte außerhalb nicht in Menge
- ▶ Eigener *signed*-Datenformat

Zahlenformat

