Projeto de extensão
UNICAMP

PRIMEIRA FASE PROVA BETA

Daniel Koiti Oshiro

Solução da OMU

Campinas
2024

Sumário

Parte I
Introdução

Este texto foi montado com puro amadorismo e nunca foi corrigido, muito menos compartilhado. Logo, a possibilidade de que hajam sérios erros conceituais é bem grande.

Espero a compreensão e desejo a todos leitores deste texto que sempre usem um lápis, para corrgir todas as minhas ínumeras falhas.

Parte II
Exercício 1:

a) Trivial. Basta aplicar a operação B repetidas vezes até chegar no desejado.

b) Vamos partir da suposição errônea de que é possível. Chegaremos em um absurdo. Para isso vamos precisar de alguns lemas:

   Lema 0.1. A operação A muda a paridade da entrada.

   Lema 0.2. A operação B não muda a paridade da entrada.

   Lema 0.3. As operações A e B comutam em questão de paridade.

   Lema 0.4. As operações A e B são crescentes e são fechdas em $\mathbb{N}$ quando o valor de entrada é natural.

   Dado a trivialidade das observações, deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

   Agora, suponha que seja possível, então existe uma sequência finta de operações que geram 2024^{99}.

   Suponha que operação final é A. Então teríamos que:

$$(k+1)^4 = 2024^{99}$$

   Veja que 2024^{99} é par, então, considerando os lemas, temos que k deve ser impar. Implicando que $k+1$ é par. Considerando a **fatoração em primos** e sua unicidade temos que:

$$\begin{aligned}(2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot ... \cdot p_i^{c_i})^4 &= 2024^{99}\\ (2^{4c_1} \cdot 3^{4c_2} \cdot ... \cdot p_i^{4c_i}) &= (2^3 \cdot 11^1 \cdot 23^1)^{99}\\ (2^{4c_1} \cdot 3^{4c_2} \cdot ... \cdot p_i^{4c_i}) &= (2^{297} \cdot 11^{99} \cdot 23^{99})\end{aligned}$$

   Ora, então deve existir $c_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$4c_1 = 297 \tag{1}$$

Impossível!. Então a última operação não pode ser A.

A última operação deve ser B. O que pode ser possível. Se a última operação é B, então:

$$3k + 8 = 2024^{99}$$

Agora, veja que:

$$2024 \equiv 2 \ (mod\ 3) \ e \ 2 \equiv -1 \ (mod\ 3)$$

Logo:

$$2024 \equiv -1 \ (mod\ 3) \Rightarrow 2024^{99} \equiv -1 \ (mod\ 3)$$

Por outro lado:

$$8 \equiv 2 \ (mod\ 3)$$

Implicando que:

$$2024^{99} - 8 \equiv -1 - 2 \ (mod\ 3) \Rightarrow 2024^{99} - 8 \equiv 0 \ (mod\ 3)$$

Ou seja, k de fato pertence aos naturais!!!

Portanto, **se é possível**, então a última operação deve ser B.

Agora, vamos decorrer com a mesma análise já feita. Se a última operação é B, podemos supor que existe um n natural que gera o número k. Novamente, este número pode vir de qualquer uma das duas operações. Isto é, pelo menos uma das igualdades devem ser válidas para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 3n + 8 &= k \\ (n+1)^4 &= k \end{aligned}$$

Partindo da primeira:

$$\begin{aligned} 3n &= k - 8 \\ 3n &= \frac{2024^{99} - 8}{3} - 8 \\ 3n &= \frac{2024^{99} - 32}{3} \\ 9n &= 2024^{99} - 32 \end{aligned}$$

Outra vez por congruência modular:

$$2024 \equiv 8 \ (mod\ 9) \ e \ 8 \equiv -1 \ (mod\ 9)$$

Logo:

$$2024 \equiv -1 \ (mod\ 9) \Rightarrow 2024^{99} \equiv -1 \ (mod\ 9)$$

Por outro lado:

$$32 \equiv 5 \ (mod \ 9)$$

Implicando que:

$$2024^{99} - 32 \equiv -1 - 5 \ (mod \ 9) \Rightarrow 2024^{99} - 32 \equiv -6 \ (mod \ 9)$$

Ou seja, B não pode ser a penúltima operação, pois para isto acontecer n deveria ser fracionário!

Ora, então a penúltima operação só pode ser A. Usando a segunda igualdade queremos verificar se é possível:

$$(n+1)^4 = k$$

Agora, relembre os lemas. Se temos necessáriamente que a última operação é B e sabemos que ela não troca a paridade, então k era par. Se vamos supor que a penúltima operação deve ser A, então n deve ser impar. Usando novamente a decomposição em primos:

$$\begin{aligned}
(2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot ... \cdot p_i^{c_i})^4 &= k \\
(2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot ... \cdot p_i^{c_i})^4 &= k \\
(2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot ... \cdot p_i^{c_i})^4 &= \frac{2024^{99} - 8}{3} \\
(2^{4c_1} \cdot 3^{4c_2} \cdot ... \cdot p_i^{4c_i}) \cdot 3 &= 2^3(2^{294} \cdot 11^{99} \cdot 23^{99} - 1) \\
(2^{4c_1} \cdot 3^{4c_2+1} \cdot ... \cdot p_i^{4c_i}) &= 2^3 \cdot 3^{d_2} \cdot ... \cdot p_j^{d_j}
\end{aligned}$$

Então temos que:

$$4c_1 = 3 \tag{2}$$

Outra vez impossível para $c_1 \in \mathbb{N}$!!. Ora, então a penúltima operação não pode ser A ou B.

Concluímos que **dada a possibilidade**, então o valor de entrada não pode ser natural. Logo, como a entrada é 1, **não é possível efetuar o desejado**.

Observação 1. Com rigor provamos que se existe uma sequência finita que gera o o número desejado, então ela não pode ser composta por duas ou mais operações. Sabendo que com o número 1 de entrada, então a primeira aplicação não gera (obviamente) 2024^{99} podemos afirmar o desejado.

Parte III

Exercício 2

O uso de geometria análica é altamente recomendado para validar formalmente os resultados, porém entendo que o exercício não tem como finalidade cobrar esses conhecimentos. Um outro argumento que fortalece este meu ponto é a análise qualitativa exigida.

a) Os pontos são sempre da forma (x, y, z). No caso em que temos (x, y, y^2) temos uma superfície similar a uma parábola. Considerando a superfície $y = -1$ temos $(x, -1, z)$. Ora, então obviamente a interseção das duas superfícies gera uma reta no plano xz. Podemos pensar, parametricamente, por $z = 1$, **neste plano**.

b) De maneira similar aos passos tomados no item anterior, temos que gera uma parábola.

c) Na curva $z = 1$ gera duas retas paralelas; na curva $z = 0$ gera uma reta; A interseção é vazia na curva $z = -1$.

d) podemos pensar em coordendas polares; o que se limita a falar:

$$x = x; y = rcos(\theta); z = rsen(\theta) \tag{3}$$

Onde obviamente a reparametrização é feita conforme o desejado. Entretanto, podemos tentar "construir"a equação. Perceba que ela é gera uma circunferência no plano xz. lodo podemos pensar em algo como $x^2 + z^2 = r^2$.

e) Veja que as curvas geram interseções simétricas nos planos $x = 1$ e $x = -1$ e ambas no eixo yz. Veja também que as superfícies geram circunferências nos planos $z = 1$ e $z = 2$. Podemos pensar em:

$$z = x^2 + y^2 \tag{4}$$

Ora, estão é exatamente a expressão desejada. Veja que a equação da circunferência é sempre da forma:

$$a^2 + b^2 = r^2 \tag{5}$$

Ora, então temos que:

$$1 = x^2 + y^2 \tag{6}$$

Determina a circunferência da interseção de $z = 1$ com a superfície. E:

$$2 = x^2 + y^2 \tag{7}$$

De fato determina uma circunferência de raio $\sqrt{2}$.

Parte IV
Exercício 3

a) Basta substituir:

$$\begin{aligned} 8(1)^3 - (1) \cdot (-1) - (1) - 5 \cdot (-1) - 13 &= 0 \\ 8(1) + 1 - 1 + 5 - 13 &= 0 \\ 8 + 5 - 13 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

b) Podemos tentar reescrever a equação:

$$
\begin{aligned}
8x^3 - xy - x - 5y - 13 = 0 \\
8x^3 - xy - 5y - x - 13 = 0 \\
8x^3 - y(x+5) - x - 13 = 0 \\
-y(x+5) = -8x^3 + x + 13 \\
y = \frac{8x^3 - x - 13}{(x+5)}
\end{aligned}
$$

Agora podemos reformular a pergunta para:

Quais são os valores inteiroes de x que deixam y inteiros? Podemos pensar como:

$$8x^3 - x - 13 \equiv 0 \mod (x+5) \tag{8}$$

Apelando para fatorações fracionárias:

$$8x^2 - 40x + 199 - \frac{1008}{x+5}$$

Ora, então todas as soluções são todos os valores de x:

$$|x+5| \in A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, 112, 126, 144, 168, 252, 336, 504, 1008\}$$

Por exemplo, tome $x + 5 = 126 \Rightarrow x = 121$. Neste caso temos:

$$y = 112.479 \tag{9}$$

Verificando:

$$8(121)^3 - (121)(112.479) - (121) - 5(112.479) - 13 = 0$$

Para finalizar, basta fazer a contagem.

c) Podemos tabelar os resultados somente para os possíveis valores positivos[1] de x Contando os dados temos 17 resultados primos.

d) Tabelando e contando novamente os resultados temos um total de 4 soluções:

$$
\begin{aligned}
(-4, -521) \\
(-3, -113) \\
(-2, -25) \\
(-1, -5)
\end{aligned}
$$

[1]No comunicado da organização feito no sábado, é considerado a definição usual de primos: naturais positivos dividos por um e eles mesmos.

É primo?	x	positivo	negativo	-x	y	-y	x por y	-x por -y
NÃO	-4	1	-1	-6	-521	1735	ok	Não
NÃO	-3	2	-2	-7	-113	1375	ok	Não
NÃO	-2	3	-3	-8	-25	1367	ok	Não
NÃO	-1	4	-4	-9	-5	1459	ok	Não
NÃO	1	6	-6	-11	-1	1775	Não	Não
OK	2	7	-7	-12	7	1975	Não	Não
OK	3	8	-8	-13	25	2197	Não	Não
NÃO	4	9	-9	-14	55	2439	Não	Não
OK	7	12	-12	-17	227	3275	Não	Não
NÃO	9	14	-14	-19	415	3919	Não	Não
OK	11	16	-16	-21	664	4630	Não	Não
OK	13	18	-18	-23	975	5407	Não	Não
NÃO	16	21	-21	-26	1559	6695	Não	Não
OK	19	24	-24	-29	2285	8129	Não	Não
OK	23	28	-28	-33	3475	10267	Não	Não
OK	31	36	-36	-41	6619	15315	Não	Não
OK	37	42	-42	-47	9647	19775	Não	Não
OK	43	48	-48	-53	13250	24812	Não	Não
NÃO	51	56	-56	-61	18949	32425	Não	Não
NÃO	58	63	-63	-68	24775	39927	Não	Não
OK	67	72	-72	-77	33417	50725	Não	Não
OK	79	84	-84	-89	46955	67139	Não	Não
OK	107	112	-112	-117	87502	114400	Não	Não
NÃO	121	126	-126	-131	112479	142735	Não	Não
OK	139	144	-144	-149	149200	183774	Não	Não
OK	163	168	-168	-173	206225	246557	Não	Não
NÃO	247	252	-252	-257	478387	538875	Não	Não
OK	331	336	-336	-341	863444	944090	Não	Não
OK	499	504	-504	-509	1972245	2093209	Não	Não
NÃO	1003	1008	-1008	-1013	8008150	8250072	Não	Não

Parte V

Exercício 4

a) Para $b = 2$ temos determinar os intervalos:

$$[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]$$
$$[1, 5/4], [5/4, 3/2], [3/2, 7/4], [7/4, 2]$$

Veja que para calcular $s(8)$ tomamos sempre o valor de $f(x) = x^2$ no começo do intervalo, então estamos calculando:

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_i^-)}{4},\ x_i = 0, 1/4, ..., 7/4$$

Podemos calcular como:

$$\frac{0+0,0625+0,25+0,5625+1+1,5625+2,25+3,0625}{4}=2,1875$$

Graficamente temos: Analogamente, para calcular $S(8)$:

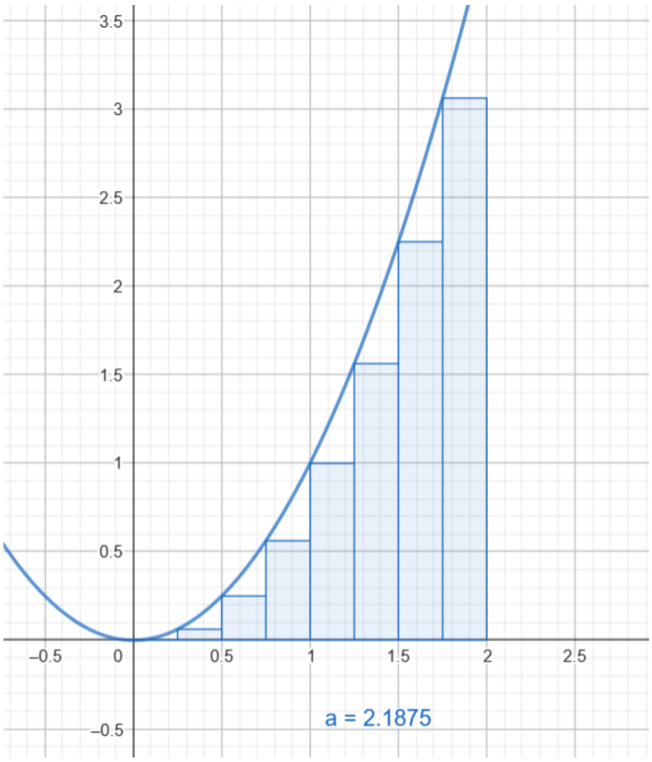

Figura 1: $s(8)$

$$\sum_{i=1}^{8}\frac{f(x_i^+)}{4},\ x_i=1/4,1/2,...,2$$

Podemos calcular como:

$$\frac{0,0625+0,25+0,5625+1+1,5625+2,25+3,0625+4}{4}=3,1875$$

Graficamente temos:

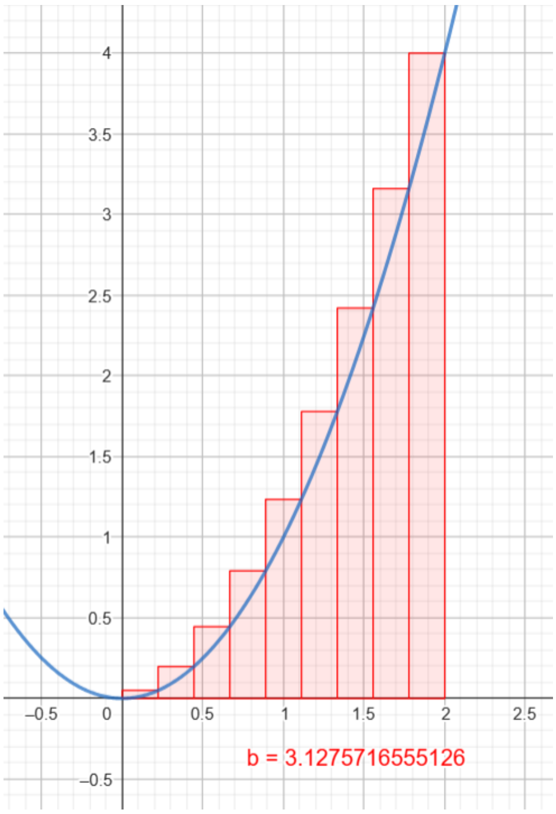

Figura 2: $S(8)$

b) Vamos utilizar a expressão descrita anteriormente:

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_i^-)}{4}$$

Manipulando:

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8}(x_i^-)^2$$

Outra vez:

$$\frac{1}{4}\left(0^2 + \frac{1}{4}^2 + ... + \frac{7}{4}^2\right)$$

Generalizando:

$$s(n) = \frac{b^3}{6n^3}[n(n-1)(2n-1)]$$

Vamos tirar uma prova real, considerando $b = 2$ e $n = 8$:

$$s(8) = \frac{2^3}{6 \cdot 8^3}[8 \cdot (7) \cdot (15)] = \frac{35}{16} = 2,1875$$

Exatamente o resultado esperado.

Da mesma forma temos que:

$$S(n) = \frac{b^3}{6n^3}[n(n+1)(2n+1)]$$

Fazendo o teste:

$$S(8) = \frac{2^3}{6 \cdot 8^3}[8 \cdot (9) \cdot (17)] = \frac{51}{16} = 3,1875$$

Para determinar a diferença basta:

$$S(n) - s(n) = \frac{b^3}{6n^3}[n(n+1)(2n+1)] - \frac{b^3}{6n^3}[n(n-1)(2n-1)] = \frac{b^3}{n}$$

Verificando outra vez:

$$S(8) - s(8) = \frac{2^3}{8} = 1$$

De fato, bate com o desejado.[2]

c) Ora, queremos resolver:

$$S(N_1) - s(N_1) = \frac{1^3}{N_1} < 0,01$$

Logo:

$$\frac{1^3}{0,01} < N_1 \Rightarrow N_1 > 100$$

Tome $N_1 = 101$, por exemplo.

Analogamente:

$$\frac{1^3}{0,0001} < N_2 \Rightarrow N_2 > 10.000$$

Tome $N_2 = 10.001$, por exemplo.

d) As duas áreas se aproximam para grandes valores de n, então podemos escolher qualquer uma delas e tentar simplificar a expressão. Vamos considerar $S(n)$:

$$\begin{aligned} S(n) = \frac{b^3}{6n^3}[n(n+1)(2n+1)] &= \frac{b^3\,(n+1)\,(2n+1)}{6n^2} \\ &= \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2} \end{aligned}$$

Ou seja, para grandes valores de n temos:

$$S(n) \approx \frac{b^3}{3}$$

De fato:

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

[2] Fiz a verificação no geogebra e a aproximação **numérica** é de 0,00001 casas decimais.

Parte VI

Exercício 5

Observação 2. O enunciado está mal escrito[3]. É direto que precisamos considerar as probabilidades $P(N)$ onde N é um nome qualquer da lista dos 344 aceitos. Sinceramente não entendi o que exatamente o enunciado esperava. Há rifas em que escolhemos o nome de pessoas, porém neste caso não há repetição. Há rifas que escolhemos nomes e números, similar ao jogo do bixo. Há rifas puramente numéricas. Outro problema evidente é que a equiprobabilidade citada não permite uma solução muito calculável a primeira vista.

Entenderemos que na situação (A) nós e mais 9 participantes vamos comparar números de uma rifa e **necessariamente** um dos participantes irá ganhar. Também entendemos em uma $rifa$ não existe a possibildiade de comprar números repetidos.

Sendo assim, podemos calcular a probabilidade de vitória:

$$\frac{1}{10} = 0,1 \equiv 10\%$$

Entendendo que no jogo (B) a aposta é sobre sobre os nomes dos participantes podemos calcular a probabilidade complementar.

Consideração 1: a ordem não importa. Ou seja, se em grupo há Nelson, Douglas, Lucas e Daniel, ..., isto é igual a sair Douglas, Daniel, Lucas, Nelson, ...

Consideração 2: todos os nomes e resultados possíveis são equiprováveis.
Sob estas suposições, a quantidade de casos totais é encontrada por combinação com repetição:

$$C_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Substituindo os valores:

$$C_n^k = \frac{(344+9-1)!}{9!(344-1)!} = \frac{(352)!}{9!\,(343)!}$$

A quantidade de casos onde não temos nomes com repetição:

$$344 \cdot 343 \cdot ... \cdot 336$$

Logo, a probabilidade de casos sem repetição (ou seja, casos em que perdemos):

$$\frac{344 \cdot 343 \cdot ... \cdot 336}{\frac{(352)!}{9!(343)!}}$$

Em que podemos aproximar por:

$$\frac{343 \cdot\ ...\ \cdot 336 \cdot 9!}{352 \cdot 351 \cdot 350 \cdot 349 \cdot 348 \cdot 347 \cdot 346 \cdot 345} \approx 0$$

Então a chance de ganharmos é aproximadamente 1.

A escolha deve ser a (B).

[3] $i.e$, na minha opnião.