Resumo de Geometira.
Fonte: Gerônimo, J. R. e Franco, V. S.

Daniel Koiti Oshiro

Congruência de triângulos

Uma pergunta natural a ser feita é: quando dois triângulos são “iguais”? Porém, o que é ser “igual”em geometria? Vejamos:

Definição 1. *dois triângulos ABC e CDE são ditos congruentes se existe uma função bijetora:*

$$f : \{A, B, C\} \longrightarrow \{D, E, F\}$$
$$X \longmapsto f(X)$$

Que deve satisfazer:

$$\begin{cases} f(A) = D \\ f(B) = E \\ f(C) = F \\ \overline{AB} = \overline{f(A)f(B)} \\ \overline{AC} = \overline{f(A)f(C)} \\ \overline{BC} = \overline{f(B)f(C)} \end{cases}$$

A notação será $\equiv$, por exemplo, no caso da definição $ABC \equiv DEF$.

Observação 1. uma consequência desta definição é que os ângulos serão iguais. Diremos que m(A$\hat{B}$C) = m(D$\hat{E}$F) e começaremos a representá-los apenas pelo vértice, neste exemplo: m($\hat{B}$) = m($\hat{E}$).

Agora, veremos alguns Teoremas de congruência:

Teorema 1. (LAL) Dado dois triângulos, ABC e DEF, se AB $\equiv$ DE, AC $\equiv$ DF e $\hat{A} = \hat{D}$, então os triângulos são congruentes.

Demonstração. É importante notar que pelo Axioma de Congruência[1] temos que os outros dois ângulos, $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$. Então para provar a congruência deste caso precisamos provar a existência da função definida, ou seja, precisamos provar que BC $\equiv$ EF. Se supormos por absurdo que BC $\not\equiv$ EF, então dada toda a hipótese, podemos dizer que existe um ponto P na mesma reta r_{EF} tal que BC $\equiv$ EP. Entretanto, esta consideração é uma contradição, pois pela hipótese $\hat{A} = \hat{D}$, e BC $\equiv$ EP $\Rightarrow$ existência de dois ângulos diferentes nas mesmas semirretas. Logo, BC $\equiv$ EF. Temos uma representação da construção utilizada na Figura 1. ■

Observação 2. Com este teorema podemos provar que em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

[1] i.e, dados dois triângulos ABC e DEF, se AB $\equiv$ DE, AC $\equiv$ DF e $\hat{A} \equiv \hat{D}$, então $\hat{B} \equiv \hat{E}$.

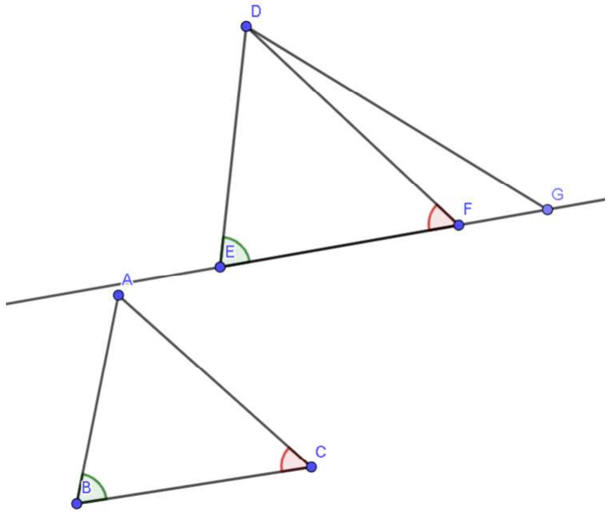

Figura 1: Representação gráfica da demonstração do Teorema LAL.

Considere uma função bijetora com domínio nos vértices do triângulo ABC. sem perda de generalidade, considere que AB $\equiv$ AC. Basta definirmos que f(A) = A, f(B) = C e f(C) = B. Assim, temos que o Axioma garante que AB $\equiv$ AC, AC $\equiv$ AB e f($\hat{A}$) $\equiv$ f($\hat{A}$), logo, pelo Teorema 1, os triângulos são congruentes. Perceba que foi apenas trocado os vértices da base do triângulo.

Corolário 1. todo ângulo externo de um triângulo tem medida maior que os ângulos internos dos outros dois vértices.

Demonstração. Vamos considerar um triângulo ABC. Seja o ângulo $\hat{C}$ formado pelas semirretas S_{AC} e S_{AB} e $\hat{C}'$ seu ângulo externo. Podemos escolher um ponto K, entre B e C tal que ele seja o ponto médio deste segmento, que é lado do triângulo. Agora por A, tracemos a semirreta que passa por K e escolhemos nela um ponto P tal que AK $\equiv$ KP. Repare que a construção, e dada a hipótese que temos um triângulo, B e P não podem ser iguais, então nenhuma semirreta será coincidente e, portanto, o ângulo $A\hat{K}B$ será congruente à $C\hat{K}P$. Pelo Teorema (LAL), temos que neste triângulo AKC $\equiv$ CKP, tal que f(A) = P e f(B) = C. Ou seja, $\hat{B} \equiv \hat{C}$. Ora, mas temos por definição que a semirreta S_{CP} divide $\hat{C}'$, assim demonstramos que a medida de um ângulo externo é maior que pelo menos um ângulo interno não adjacente.
Para provar o caso restante, a construção será similar, basta considerar N como ponto médio do segmento AC e novamente elaborar triângulos congruentes. ■

Teorema 2. (ALA) se dois triângulos tem um lado congruente a outro e seus ângulos adjacentes também são côngruos, então os triângulos são congruentes.

Demonstração. Sejam ABC e GEF os triângulos, AB $\equiv$ GE, $\hat{A} \equiv \hat{G}$ e $\hat{B} \equiv \hat{E}$. Considere agora um ponto K na semirreta S_{BC} tal que BK $\equiv$ EF. Pelo Teorema LAL teremos uma congruência entre os triângulos, mas por hipótese $B\hat{A}C \equiv E\hat{G}F$ e a nova construção diz que $B\hat{A}K \equiv E\hat{G}F$. Como congruência é uma relação de equivalência e K e C pertencem a mesma semirreta, $B\hat{A}K \equiv B\hat{A}C \Rightarrow$ K = C. Ou seja, os triângulos ABC e GEF já eram congruentes. Na Figura 2 é possível visualizar uma representação utilizada nesta demonstração.

■

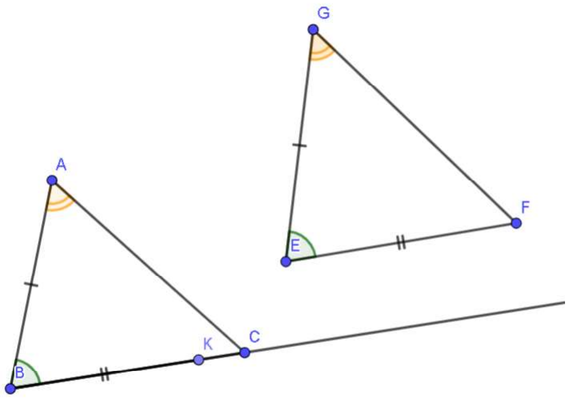

Figura 2: Representação gráfica da demonstração do Teorema ALA.

Observação 3. em um triângulo em que os ângulos adjacentes à algum lado são côngruos, o triângulo será isósceles. A demonstração é direta. Dado o teorema anterior, ao aplicar a congruência com ele mesmo verificaremos que existe uma função que "permuta"os vértices do lado em questão, logo, teremos um caso ângulo, lado e ângulo.

Teorema 3. (LLL) se dois triângulos possuem todos seus lados congruentes entre si, então os triângulos são congruentes.

Demonstração. Suponha que tenhamos os triângulos ABC e JKL. Sejam os lados AB $\equiv$ JK, AC $\equiv$ JL e BC $\equiv$ KL. Precisamos provar apenas que os ângulos são côngruos, para isso, vamos considerar que o ângulo relativo ao vértice A, mas no semiplano oposto ao vértice B. Seja M um ponto neste semiplano tal que o segmento AM tenha a mesma medida de que AB. Analogamente, o mesmo com o vértice C, chamemos que N o ponto tal que CN tenha a mesma medida de BC. Se conseguirmos provar que M e N são coincidentes e que seu ângulo relativo ao triângulo AM(N)C possui a mesma medida que $\hat{B}$, então teremos pelo Teorema LAL que eles são congruentes. Ora, repare que o triângulo AMB é isósceles, logo $m(A\hat{M}B) = m(A\hat{B}M)$. O mesmo se repete com o triângulo BCN. Isto significa que M e N dividem o ângulo $A\hat{B}C$ igualmente, portanto eles devem ser coincidentes. Repare então que o triângulo ABC é congruente ao triângulo AMC e pela construção, AB $\equiv$ AM, MC $\equiv$ BC e ambos possuem lado AC. Veja que acabamos por definir a função bijetora desejada, onde f(A) = J, onde f(B) = M = K e f(C) = L. Embora na construção utilizada A = J e C = L, a mesma construção garante que não há perda de generalidade para quaisquer outros pontos diferentes, ou seja, podemos considerar qualquer triângulo **desde que satisfaça a hipótese** para a congruência ser válida. Temos uma representação das construções feitas na Figura 3.

■

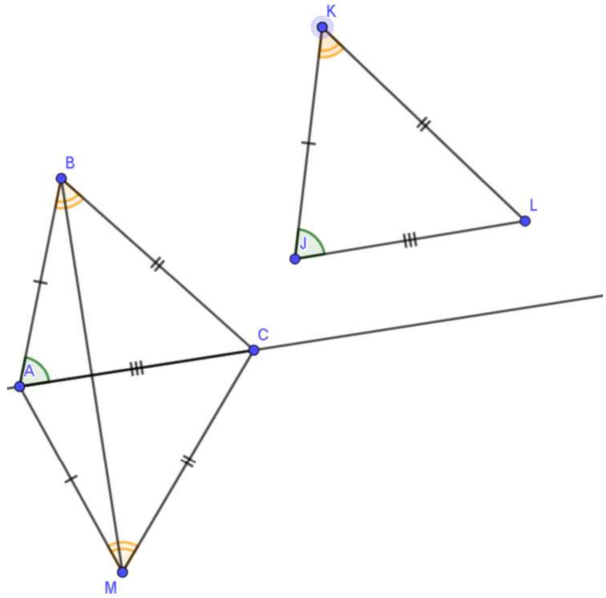

Figura 3: Representação gráfica da demonstração do Teorema LLL.

Observação 4. o Teorema 3 (LLL) possibilita a construção da bissetriz de ângulo construindo triângulos congruentes. Uma construção similar à utilizada da demonstração anterior, com o ângulo $\hat{A}$ sendo o vértice do ângulo que queremos construir a bissetriz.

Teorema 4. (LAA) dois triângulos ABC e JKL que possuem os lados AB $\equiv$ JK, $\hat{A} \equiv \hat{K}$ e $\hat{C} \equiv \hat{L}$.

Demonstração. Se supormos que os triângulos não são congruentes, podemos dizer que existe um ponto P na semirreta S_{AC} tal que AP $\equiv$ KL e, então, teríamos uma congruência LAL. Entretanto, também poderemos dizer que o ponto P estará entre A e C ou C está entre A e P. Em ambos os casos chegamos em um absurdo, pois os novos triângulos não podem existir. Portanto, o ponto P tal que a congruência seja válida é o próprio ponto C. Na Figura 4 é possível ver como realizamos a demonstração. ∎

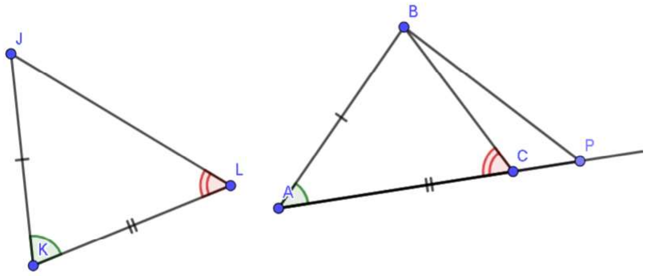

Figura 4: Representação gráfica da demonstração do Teorema LAA.

Observação 5. se tivermos três ângulos congruentes, os triângulos não são necessariamente congruentes. Para conceituar, basta lembrar a construção de um ângulo e que precisamos apenas de semirretas, uma partição do plano e um ponto nele, assim sendo, não de um segmento de tamanho específico. Veja que podemos fazer diversos triângulos com os ângulos congruentes, mas com os lados de tamanhos diferentes.

Observação 6. se tivermos quatro ou cinco elementos côngruos entre dois triângulos, eles serão congruentes. É fácil de observar isso fazendo arranjos dos possíveis elementos que são iguais.

Por fim, veremos o último caso, o LLA. Este é um dos casos mais interessantes, visto que esta congruência só ocorre com triângulos retângulos e que precisamos de ferramentas mais "refinadas".

Proposição 5. a soma das medidas de dois ângulos internos de um triângulo é menor que 180°.

Demonstração. direta pelo Teorema do ângulo externo, onde afirma-se que em um triângulo qualquer os ângulos internos são estritamente menores que o ângulo externo de um vértice oposto. Utilizando da mesma construção deste Teorema, é fácil de perceber que o ângulo externo em relação à algum vértice C é um α tal que $\alpha + \hat{C} = 180°$ e os outros dois ângulos internos, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são menores que α. Logo, $\hat{C} + \hat{B} < 180°$. ■

Observação 7. todo triângulo deve ter pelo menos dois ângulos internos agudos (menores que 90°). A demonstração é imediata decorrente da Proposição anterior.

Observação 8. todo triângulo deve ter pelo menos dois ângulos externos obtusos (maiores que 90°). A demonstração é imediata decorrente da observação anterior.

Observação 9. se duas retas distintas são perpendiculares à uma terceira, então elas nunca se cruzam. [2]

Teorema 6. (LLA) se dois triângulos retângulos tiverem a hipotenusa e um cateto côngruos, então os triângulos são congruentes.

Demonstração. sejam os triângulos ABC e JKL. Suponhamos que as hipotenusas sejam os segmentos BC e KL e os catetos congruentes os segmentos AB e JK. Supor por absurdo que os triângulos não são congruentes é dizer que AC não possui a mesma medida de JL, o que também implica que o ângulo $\hat{K}$ não é côngruo à $\hat{B}$. Podemos dizer que existe um ponto P na reta que contém JL tal que a semirreta S_{KP} e S_{JK} formem um ângulo de mesma medida que $\hat{B}$. Ora, então teríamos um o novo triângulo JKP $\equiv$ ABC e, portanto, as hipotenusas seriam congruentes. Encontramos aqui um absurdo, pois qualquer que seja o ponto P, diferente de L, teríamos um triângulo isósceles (pois por hipótese JK tem a mesma medida de AB e KP) que tem como propriedade a igualdade dos ângulos da base, ou seja, seus ângulos internos da base devem ser maiores que o ângulo reto do triângulo retângulo. Veja que se chamarmos de β o ângulo da base, temos que $\beta > 90° \Rightarrow 2\beta > 180°$, uma contradição da proposição anterior. Na Figura a seguir exemplifica-se essa demonstração.

■

[2]A ideia da demonstração é simples: supor que as retas se cruzam em algum ponto resulta em vários absurdos na geometria euclidiana, pois teríamos um triângulo em que a soma das medidas de dois ângulos internos é igual a 180°. Teríamos também que um ângulo externo seria igual à um ângulo interno.

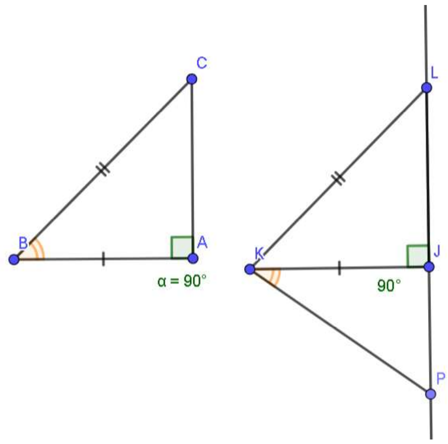

Figura 5: Representação gráficza da demonstração do Teorema LLA.

Semelhança de triângulos

Os conceitos de proporcionalidade estão definidos para sequências, em especial, veja que considera-se apenas comprimentos de segmentos. Podemos "estender"a proporcionalidade para figuras, por exemplo, é fácil de perceber que sequências dos segmentos de dois quadrados são sempre proporcionais. Sendo assim, com rigor define-se:

Definição 2. *se para todo* $i, j \in [1, n]$ *temos que* $\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j}$*, diremos que as sequências* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $(y_1, y_2, ..., y_n)$ *são proporcionais.*

Definição 3. *dois triângulos quaisquer são semelhantes se seus ângulos internos forem congruentes e se os comprimentos dos lados (respectivamente à cada ângulo) forem proporcionais. Caso dois triângulos ABC e DEF sejam semelhantes usaremos a notação "∼". Outra definição equivalente é garantir a existência de uma função bijetora tal que:*

$$\begin{aligned} f : \{A, B, C\} &\longrightarrow \{D, E, F\} \\ X &\longmapsto f(X) \end{aligned}$$

Que deve satisfazer:

$$\begin{cases} f(A) = D \\ f(B) = E \\ f(C) = F \\ m(\hat{A}) = m(\hat{D}) \ ; m(\hat{B}) = m(\hat{E}) \ ; m(\hat{C}) = m(\hat{F}) \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{DF}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \end{cases}$$

Um Teorema muito importante:

Teorema 7. (Bissetriz Interna) em qualquer triângulo a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto tal que há as sequências de lados são proporcionais.

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Considerando a bissetriz do ângulo em relação ao vértice A e X a interseção entre a bissetriz no lado BC, temos que provar que:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{XC}}{\overline{AC}}$$

Primeiro, podemos construir a reta r_{CK} tal que ela seja paralela a bissetriz e K esteja na reta que contém os pontos A e B. Ora, então pelo Teorema 1 temos que as sequências formadas pelos comprimentos dos lados são proporcionais em relação ao triângulo BCK com a reta da bissetriz. Ou seja:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{BA}}$$

Reescrevendo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{BC}}$$

Pelo Teorema 5.4 e 5.5 [3] sabemos que os ângulos alternos internos e correspondentes em relação as retas r_{CK} com a bissetriz e suas respectivas transversais serão congruentes,

[3] A numeração é referente a utilizada no livro, na continuação das próximas demonstrações ainda será mantida a mesma forma.

isto é o triângulo ACK é isósceles de base CK, o que implica que AK ≡ AC. Novamente reescrevendo a última igualdade:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{BA} + \overline{AK}}{\overline{BX} + \overline{XC}}$$

$$= \frac{\overline{BA} + \overline{AC}}{\overline{BX} + \overline{XC}}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} * \overline{XC} = \overline{BX} * \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BX}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{XC}}{\overline{AC}}$$

Na Figura 7 temos uma representação da construção utilizada. ■

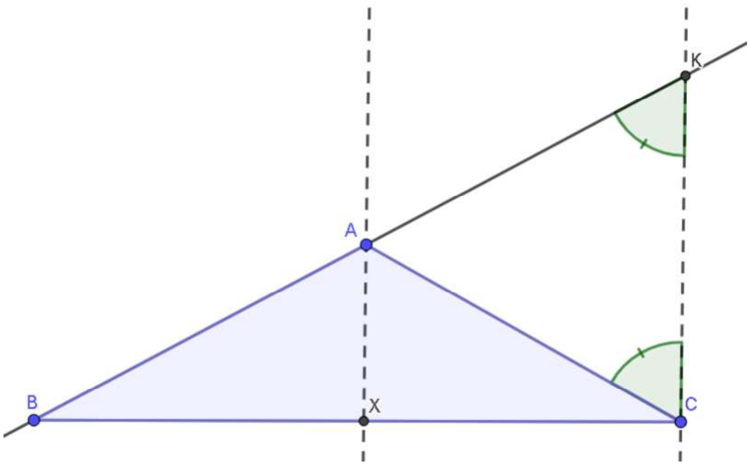

Figura 6: Representação gráfica da demonstração do Teorema da Bissetriz Interna.

Teorema 8. em um triângulo ABC, se uma reta paralela à BC intercepta os outros dois lados nos pontos X e Y, então os segmentos são congruentes tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AY}}$. A volta também é válida, isto é, se uma reta que intercepta dois lados de um triângulo determina segmentos proporcionais, então ela é paralela ao outro lado.

Demonstração.
(⇒)

Inicialmente em relação aos triângulos AXY e BXY é possível afirmar que todos possuem a mesma altura h. Analogamente considerando CXY com AXY. Calculando a razão entre as áreas encontramos:

$$\frac{A(AXY)}{A(BXY)}; \frac{A(AXY)}{A(CXY)}$$
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}; \frac{\overline{AY}}{\overline{CY}}$$

Aplicando o segundo Axioma de Medidas e o Axioma de Congruência entre áreas (entre dois triângulos congruentes), reescrevemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AY}}$$

($\Leftarrow$)

Ora, neste caso temos como hipótese que XY determina segmentos proporcionais, logo se considerarmos uma reta paralela a XY e que passa por B, temos que o novo ponto C' (pertencente a reta r_{AC})deverá manter a proporcionalidade afirmada na primeira parte da demonstração, mas por hipótese os segmentos já são proporcionais, isto é, temos que C' = C. ∎

Observação 10. semelhança de triângulos é uma relação de equivalência. [4]

Teorema 9. (AAA) se há uma função tal que define uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos e os ângulos sejam congruentes, então a função também garante a semelhança dos triângulos.

Demonstração. Considere o triângulo ABC e a bijeção f tal que $m(\hat{X}) = m(f(\hat{X}))$ para todo X pertencente à {A,B,C}. Defina a imagem da função como sendo os pontos {D,E,F}, logo, vértices de um triângulo. Sem perda de generalidade queremos provar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$. Temos dois casos possíveis, ou dois lados são congruentes ou não. Se dois lados forem congruentes, dada a hipótese que a aplicação garante que os triângulos tem o mesmo ângulo, teremos uma congruência LAL e portanto, ABC ≡ DEF e, obviamente, ABC ∼ DEF. Caso dois lados não sejam congruentes, podemos considerar dois pontos X e Y nas retas que contém AB e AC tal que DE ≡ AX e DF ≡ AC. Ora, estendendo as retas r_{XY} e r_{BC} teremos que os ângulos alternos internos em relação as retas que contém AB e AC são congruentes, então pelo Teorema das transversais r_{XY} // r_{BC}. Aplicando o Teorema 8 sabemos que os segmentos determinados por XY serão semelhantes, e como por construção eles determinam uma congruência com DEF, logo provamos que ABC ∼ DEF. Temos uma representação das construções utilizadas na Figura 3. ∎

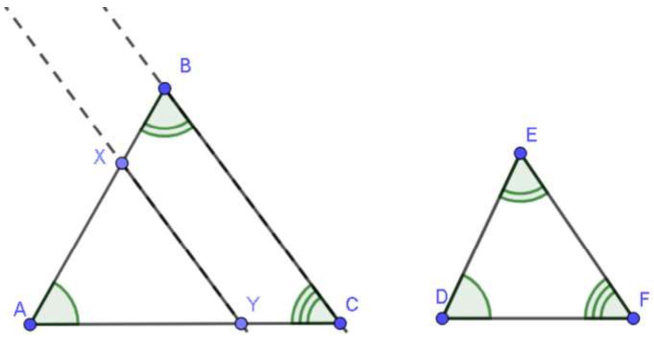

Figura 7: Representação gráfica da demonstração do Teorema 9.

Observação 11. se dois triângulos possuem dois ângulos em comum, então eles são semelhantes.

[4]Alguns exercícios usam deste conceito.

Teorema 10. (LAL) se existe uma correspondência entre dois triângulos tal que dois segmentos são proporcionais e o ângulo formados por eles sejam congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração. Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ e $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$. Considere X e Y nos segmentos AB e AC, respectivamente, tais que eles sejam congruentes à DE e DF. Ora, então pelo Teorema 1, dada a proporcionalidade entre os segmentos na hipótese, temos que XY é paralelo à BC, e portanto, o Teorema 5.4 e 5.5 garantem que os ângulos alternos internos e correspondentes são iguais, isto é, DEF e ABC terão todos os ângulos congruentes. Logo, considerando o Teorema 4 anterior, sabemos que os triângulos são congruentes. ■

Teorema 11. (LLL) se existe uma correspondência entre dois triângulos tal que os lados dos triângulos são proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração. Análoga a demonstração do Teorema 5. Perceba que o Teorema 1 garante que os segmentos são paralelos, dada a hipótese. Ou seja, considerar quaisquer dois lados, chegamos na conclusão que os ângulos também são congruentes e encerra-se o enunciado com a Observação 2. ■

Exemplo 1. Mostre que se um triângulo ABC é congruente a um triângulo DEF e o triângulo DEF é semelhante a um triângulo GHI, então os triângulos ABC e GHI são semelhantes.

Demonstração. Ora, nos relembrando da definição de congruência veremos que existe f uma aplicação bijetiva entre os vértices de ABC com DEF tal que todos os lados e ângulos são congruentes à suas respectivas correspondências. Novamente aplicando a definição, agora de semelhança, existirá uma outra aplicação g, garantindo que existe uma sequência de segmentos de DEF que são proporcionais com os segmentos de GHI e os ângulos congruentes. Portanto, $g \circ f$ está definida. Tal relação é obviamente a relação de semelhança uma vez que a congruência entre ABC com GHI ocorre somente se DEF também for congruente (por consequência também semelhante) à GHI. ■

Quadriláteros

Antes é interessante saber:

Definição 4. *Chamaremos de* ***caminho poligonal*** *uma figura formada por uma sequência finita de segmentos consecutivos e não colineares . Diremos que a poligonal é fechada se os vértices extremos são coincidentes.*

Definição 5. *Chamaremos de* ***polígono*** *uma poligonal fechada e seu interior. Isto é, ele é uma região.*

Definição 6. *Um polígono é* ***convexo*** *se para qualquer segmento de reta pertencente a ele, o segmento esta inteiramente contido em si.*

Definição 7. *Chamaremos de* ***quadrilátero*** *um polígono de quatro lados.*

Definição 8. Um polígono é chamado de **regular** se todos seus lados e ângulos internos são congruentes.

Observação 12. Nomeamos os polígonos regulares de acordo com a quantidade de lados/ângulos. Por exemplo, triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octógono, ..., quilágono (1000 lados), ...

Proposição 12. a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°.

Demonstração. Seja ABCD um quadrilátero, então podemos considerar os triângulos ABD e DCB. Como são dois triângulos, sabemos que a soma dos ângulos internos será igual a 2*180° = 360°. ∎

Definição 9. *dado um quadrilátero, chamaremos dois lados de opostos se eles não se interceptam. Dois ângulos de um quadrilátero são ditos opostos se eles não possuem nenhum lado em comum. Se o ângulo, ou lado, não é oposto, então ele é consecutivo. Chamaremos de diagonal um segmento de um quadrilátero que tem como dois extremos os extremos de lados opostos tais que a diagonal não seja um lado do quadrilátero. Caso dois lados sejam paralelos, então daremos o nome de trapézio.*

Definição 10. *a altura de um* ***trapézio*** *é definida como qualquer segmento com extremos na reta que contenha um dos lados paralelos e na outra reta que contenha o outro lado paralelo tal que este segmento seja perpendicular. Caso o trapézio possua os dois pares de lados opostos paralelos, então usaremos uma outra nomenclatura para a figura:* ***paralelogramo****.*

Proposição 13. se em um quadrilátero os pares de lados opostos são congruentes, então ele é um paralelogramo.

Demonstração. Seja ABCD um quadrilátero tal que AB≡CD e BC≡AD. Considerando os triângulos ABD e CDB, temos que eles são congruentes. Ora, se eles são congruentes e ao considerarmos os lados correspondentes como transversais o Teorema das Transversais[5] afirma que eles também são paralelos. Portanto, por definição o quadrilátero será um paralelogramo. ∎

[5] "dadas duas retas cortadas por uma transversal, um par de ângulos alternos internos é formado por ângulos congruentes se, e somente se, as retas são paralelas."

Proposição 14. todo paralelogramo tem as seguintes propriedades:

1. qualquer diagonal forma a figura de dois triângulos congruentes.
2. dois ângulos opostos são sempre suplementares.
3. as diagonais se dividem ao meio.

Proposição 15. o quadrilátero é um paralelogramo se qualquer uma das afirmações for verdadeira:

1. dois lados opostos paralelos e congruentes.
2. suas diagonais se dividirem no meio.[6]

Definição 11. *um paralelogramo que possui todos os lados congruentes é chamado de losango. Um quadrilátero que tem todos seus ângulos retos é nomeado como retângulo e caso um losango também seja um retângulo, ele será chamado de quadrado.*

Proposição 16. As diagonais de um losango são perpendiculares e estão nas bissetrizes dos ângulos internos.

Demonstração. Seja ABCD um losango, então pela definição $AB \equiv AD$. Ao considerarmos os triângulos ABD e BCD vemos que há uma congruência entre os triângulos e que ambos são isósceles. Pela Proposição 14, item 3, o ponto X, interseção das diagonais, divide os segmentos ao meio. Isto é, por definição o segmento AX também é mediana do triângulo ABD. Como o triângulo é isósceles, sabemos que a mediana relativa a uma base é também a altura e está sobre a bissetriz. Analogamente para a outra diagonal. ■

Observação 13. Todo retângulo é um paralelogramo.

Observação 14. Se um quadrilátero possui as diagonais congruentes **que se cortam em um ponto P, tal que P é ponto médio de ambas**, então o quadrilátero é um retângulo.

Quadriláteros notáveis

Nomearemos e dividiremos os quadriláteros importantes para o estudo:

1. Trapézios: um quadrilátero que possui (pelo menos) dois lados paralelos
   · Isósceles: trapézio que dois lados tem a mesma medida.
   · Escaleno: dois lados não tem a mesma medida.
   · Retângulo: possui dois ângulos retos
   · Paralelogramos: todos os lados opostos são paralelos.
   ↪ Losangos: as diagonais são perpendiculares e também são as bissetrizes dos ângulos internos.
   ↪ Retângulos: pelos menos dois lados opostos são congruentes.
   ↪ Quadrados: retângulo onde todos os lados são congruentes.

Observação 15. todo quadrado também é um losango. Logo, todo quadrado é um trapézio.

[6] Com a finalidade de poupar espaço, as duas proposições não foram demonstradas.

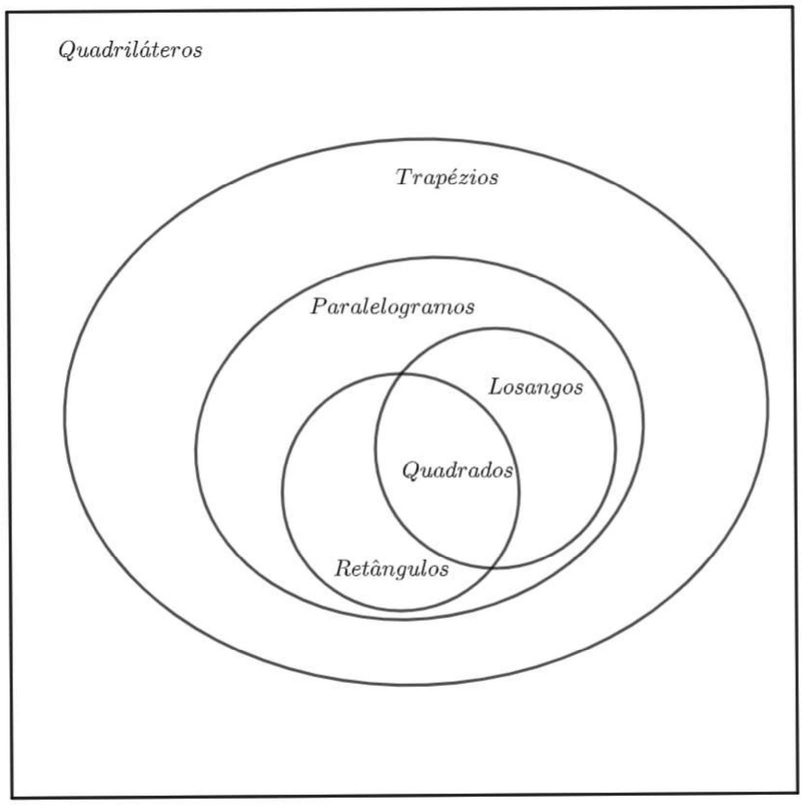

Figura 8: Diagrama de Venn para quadriláteros.