Relembrando

Já estudamos:

1. Definição de matrizes e sua forma algébrica
2. Soma de matrizes
3. Tipos de matrizes
4. Multiplicação por escalar
5. Multiplicação de matrizes

Agora, iremos relembrar o produto de matrizes e introduzir uma nova matriz.

Relembrando

Tomemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular $A \cdot B$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1 \cdot 6) + (0 \cdot 9) + (2 \cdot 4) \\ (7 \cdot 6) + (3 \cdot 9) + (5 \cdot 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 + 8 \\ 42 + 27 + 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 \\ 89 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matriz identidade

Vamos estudar um novo tipo de matriz: a **Matriz Identidade**.

Definicão

Chamaremos uma matriz quadrada onde todos os termos da diagonal principal são iguais a 1 *e todos os outros são iguais a* 0 *de* **matriz identidade**. *Representaremos por Id*

Exemplo:

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É uma matriz identidade 2×2.

Matriz identidade

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É uma matriz identidade 3×3.

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É uma matriz identidade 4×4.

Observações

Não iremos carregar a notação, principalmente da multiplicação. Ou seja, iremos nos referir ao produto $A \cdot B$ por AB, sempre que o produto estiver definido. De maneira similar, iremos definir Id para qualquer matriz identidade, para garantir o produto.

De maneira similar, iremos representar por $\mathbf{0}$ como sendo uma matriz nula qualquer, onde, obviamente, a soma está definida.

Propriedades

A soma satisfaz:

1. Comutatividade: $A + B = B + A$.
2. Associatividade: $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. Elemento neutro: $A + \mathbf{0} = A$.
4. Elemento simétrico: $A + (-A) = \mathbf{0}$.
5. Cancelamento: $A + B = C + B \iff A = C$.

A multiplicação satisfaz:

1. Associatividade: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
2. Elemento neutro: $A \cdot Id = A$.

Por fim, as operações são “compatíveis”:

1. Distributividade: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Matriz identidade

A segunda propriedade da multiplicação é muito interessante. Ela garante que para toda matriz A multiplicada por Id o resultado é a própria matriz A. Vamos ver?! Tomemos novamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} ; Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade

Então, calculando:

$$A \cdot Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade

Naturalmente surge a pergunta: a multiplicação por *Id* é comutativa?

$$Id \cdot A = \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade

Ora, então é fácil de perceber que a multiplicação pela matriz identidade **é comutativa**, *i.e.*:

$$Id \cdot A = A \cdot Id = Id$$

Porém é preciso tomar cuidado!!! Pois nem sempre a matriz identidade é a mesma dos dois lados da igualdade.

Pausa

Pausa

Ainda iremos estudar:

1. Aplicações
2. Matriz Inversa
3. Determinante
4. Sistemas lineares

É importante prosseguirmos somente se temos domínio no conteúdo anterior.

Aplicações

O objeto matemático “matriz” parece, em um primeiro momento, muito abstrato e distante de qualquer aplicação. Entretanto, a situação é totalmente oposta.

As aplicações deste conteúdo são inúmeras e todas exepcionais. Começemos.

Aplicação 1

Matriz é basicamente uma tabela de dados sem considerar o cabeçalho. Portanto, é de se esperar que as operações estudadas facilitem muitos cálculos. Consideremos as tabelas:

Tabela 1

	Fertilizante 1	Fertilizante 2	Fertilizante 3
Fábrica 1	6	3	5
Fábrica 2	1	2	4

Tabela 2

	Valor Mês 1	Valor Mês 2
Fertilizante 1	8	9
Fertilizante 2	4	3
Fertilizante 3	3	2

Aplicação 1

Considere que a tabela 1 apresenta a produção mensal dos fertilizantes em toneladas, e a tabela 2 o Valor de Mercado, em milhares de reais, da tonelada do produto nos meses 1 e 2.

Então podemos montar as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular o **faturamento mensal** das fábricas é simples, basta efetuar $A \cdot B$.

Aplicação 1

Fazendo a conta obtemos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 73 \\ 28 & 23 \end{pmatrix}$$

Ou seja, encontramos a tabela:

Tabela 3

	Faturamento mês 1	Faturamento mês 2
Fábrica 1	75	73
Fábrica 2	28	23

Aplicação 2

Agora, uma aplicação muito interessante é na **Regressão linear**. Não iremos entrar em detalhes e nossa abordagem será "pecaminosa".

Aplicação 2

Primeiramente...

Aplicação 2- Montgomery e Runger 2003.

Assuma que tenhamos o interesse em estimar uma variável y tal que ela dependa linearmente de outras variáveis $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$:

$$y = \beta_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + ..x_n\beta_n + \epsilon$$

onde ϵ é um erro aleatório normal.

Suponha que fazemos m observações e montamos uma matriz Y de resultados e outra matriz X dos valores das variáveis. É possível demonstrar que o valor que minimiza o erro é:

$$[\beta] = (X^T X)^{-1} X^T [y] \tag{1}$$

Exemplo 2- Montgomery e Runger 2003.

O motor de um foguete é fabricado juntando o propulsor de ignição e um sustentador juntos dentro de uma carcaça de metal. A tensão de cisalhamento é estima linearmente pela idade, em semanas, do sustentador. Isto é, acreditamos:

$$Res = \beta_0 + Idade \cdot \beta_1 + \epsilon$$

Com o objetivo encontrarmos como essa dependência linear é dada, observamos 20 amostras.

Exemplo 2- Montgomery e Runger 2003.

TABLE 2.1 Data for Example 2.1

Observation i	Shear Strength (psi) y_i	Age of Propellant (weeks) x_i
1	2158.70	15.50
2	1678.15	23.75
3	2316.00	8.00
4	2061.30	17.00
5	2207.50	5.50
6	1708.30	19.00
7	1784.70	24.00
8	2575.00	2.50
9	2357.90	7.50
10	2256.70	11.00
11	2165.20	13.00
12	2399.55	3.75
13	1779.80	25.00
14	2336.75	9.75
15	1765.30	22.00
16	2053.50	18.00
17	2414.40	6.00
18	2200.50	12.50
19	2654.20	2.00
20	1753.70	21.50

Figura: Fonte: Montomery

Exemplo 2- Montgomery e Runger 2003.

Chamemos a resistência (tensão de cisalhamento) de y e a idade do material de x. Então em matrizes:

$$\begin{pmatrix} 2158,70 \\ 1675,15 \\ \dots \\ 1753,70 \end{pmatrix}_{20\times 1} = \begin{pmatrix} 1 & 15,30 \\ 1 & 23,75 \\ \dots & \\ 1 & 21,50 \end{pmatrix}_{20\times 2} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}_{2\times 1} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \dots \\ \epsilon_{20} \end{pmatrix}_{20\times 1}$$

Aplicando a fórmula (1) obtemos:

$$\beta_0 = 2627,82; \beta_1 = -37,15$$

Aplicação 2- Montgomery e Runger 2003.

Então, com certa liberdade podemos usar a fórmula:

$$y = 2627,82 - 37,15x$$

para estimar a resistência!!!

Aplicação 2

Por último, um lembrete:

Figura: A lata de lixo. Fonte: Castelo Rá-Tim-Bum.

Aplicação 3

Vamos ao *geogebra*!

Aula- Matriz

Matriz inversa e determinante

Daniel Koiti Oshiro

Bento Quirino

??/??/23

Matriz inversa

Para qualquer matriz **quadrada** A, caso exista uma matriz que multiplicada por A seja igual a identidade, chamaremos esta matriz de inversa de A. Representaremos por A^{-1}.

Atenção: NÃO CONFUNDIR COM A EXPONENCIAÇÃO EM $\mathbb{R}$.

Exemplo

Tomemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Então temos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exemplo

Verificando:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ 2-2 & 1 & \frac{2}{4} - \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= Id$$

Exemplo

Agora vejamos:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ -1+1 & 1 & 1-\frac{4}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= Id$$

Exemplo

Isto é, A matriz A comuta com sua inversa. Pode-se provar esta afirmação. Logo:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = Id$$

Curiosidade: existem outros tipos de inversas (na verdade, outras definições). Em geral, a notação A^{-1} sempre implica na inversa "dos dois lados".

Introdução

Até agora vimos a multiplicação de matrizes, propriedades e a matriz inversa. Vimos, de uma maneira bem sintética uma relação de matrizes com sistemas lineares de equações. Porém algumas perguntas surgem naturalmente:

1. Quando uma matriz tem inversa?
2. Como a relação entre sistemas e matrizes ocorre? (*i.e.*, como resolver sistemas?)

Determinante

Um conceito muito útil para responder a primeira pergunta é o de **determinante**. Como sempre, podemos pensar no determinante como sendo uma função:

$$\begin{aligned} d : \mathbb{M}_{m\times m} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto k \end{aligned}$$

Depois iremos definir esta função de um jeito melhor.

Menor associado

Seja uma matriz A quadrada de ordem maior ou igual à 2. Chamamos de **menor associado** de um elemento a_{ij} o determinante da matriz A retirando a linha i e a coluna j. Representaremos por D_{ij}.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Então $D_{11} = 4$, $D_{12} = 3$, $D_{21} = 2$ e $D_{22} = 1$.

Cofator

Seja uma matriz A quadrada de ordem maior ou igual à 2. Chamamos de **cofator** associado à um elemento a_{ij} o produto:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Então $C_{11} = (-1)^2 \cdot 4 = 4$, etc.

Matriz dos cofatores

Seja A uma matriz quadrada de ordem maior que 2. Definiremos por $\overline{A}$ a matriz onde cada elemento $\overline{a}_{ij}$ é o cofator de a_{ij}. Chamremos de **matriz dos cofatores**. Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz adjunta

Definiremos por **matriz adjunta** a matriz $\overline{A}^T$. Representaremos por $adj(A)$. Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema

Com todas essas ferramentas é possível provar que uma matriz é invertível (possui inversa) se, e somente se, seu determinante é não nulo.

Determinante e sistema

Essencialmente, calcular o determinante é resolver um sistema linear. Vejamos um exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então dada uma matriz A, calcular A^{-1} é equivalente a resolver o seguinte sistema para b.

Determinante e sistema

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 0 \\ a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 1 \\ a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 0 \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 0 \\ a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 0 \\ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 1 \end{cases}$$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou melhor:

$$\begin{cases} 1b_{11} + 2b_{21} = 1 \\ 1b_{12} + 2b_{22} = 0 \\ 3b_{11} + 4b_{21} = 0 \\ 3b_{12} + 4b_{22} = 1 \end{cases}$$

Introdução

Na última aula contextualizamos a relação entre determinantes, matriz inversa e sistemas lineares (mesmo que de um modo bem artificial). Nesta aula vamos estudar:

1. Determinantes gerais (*Teorema de Laplace*);
2. Resultados importantes sobre a matriz inversa.

Determinante

Agora, vamos voltar e definir o determinante de matrizes para qualquer ordem; Seja A uma matriz quadrada de ordem n, para qualquer i fixado:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Também podemos definir como:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

para qualquer j fixado.

Exemplo

Considere a matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Fixando a linha 1 e aplicando a fórmula, temos que o determinante da matrix é:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \underbrace{[1 \cdot 4 \cdot (-1)^{1+1}]}_{a_{11} C_{11}} + \underbrace{[2 \cdot 3 \cdot (-1)^{1+2}]}_{a_{12} C_{12}} = -2$$

Exemplo

Se tivessemos fixado a coluna 2 teríamos:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \underbrace{[2 \cdot 3 \cdot (-1)^{1+2}]}_{a_{12}C_{12}} + \underbrace{[4 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2}]}_{a_{22}C_{22}} = -2$$

Perceba que fazendo genéricamente obteríamos a fórmula usual:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Exemplo

Considere a matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular o determinante de A poderíamos utilizar o método de *Sarrus*[a]. Porém, utilizando a fórmula genérica podemos facilitar as contas fixando a coluna 3. Ou seja:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = 2 \cdot (4 - 6) = -4$$

[a] Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861). Matemático francês que criou o método conhecido como "garfinho" para calcular o determinante de matrizes de ordem 3.

Propriedades- (Maximize 2022).

1) Multiplicar uma linha (coluna) por uma constante, o determinante também é multiplicado pela constante.
2) Trocar uma linha (coluna) por outra paralela inverte o sinal do determinante.
3) $det(A) = det(A^T)$.
4) Seja A uma matriz quadrada de ordem n e k um escalar. Temos:
$$det(kA) = k^n det(A)$$

Propriedades

Teorema

(Teorema de Binet)- (Maximize 2022). Sejam A e B duas matrizes **quadradas e de mesma ordem**, *então:*

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Teorema

(Teorema de Jacobi)- (Maximize 2022). O valor de um determinante não se altera se multiplicarmos uma linha (coluna) por um número real diferente de 0 e adicionarmos a outra linha (coluna) paralela a ela.

Comentário

Teorema

Uma matriz é invertível se, e somente se, seu determinante é não nulo.

Demonstração.

Seja A^{-1} *sua inversa, então:*

$$1 = det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1}) \Rightarrow det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$$

Por outro lado, assuma que $det(A) \neq 0$*, então:*

$$A \cdot adj(A) = det(A)Id \Rightarrow (det(A)^{-1} \cdot adj(A))A = Id$$

Então a matriz é invertível. □

Comentário

Corolário

Veja que a última parte do teorema nos garante que:

$$A^{-1} = det(A)^{-1} adj(A)$$

Logo, temos uma maneira "fácil" de determinar uma inversa.

Exemplo

Vamos determinar a inversa da matriz abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Primeiramente calculamos seu determinante. Já sabemos que ele é -2. Agora determinamos a matriz adjunta de A:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por fim:

$$A^{-1} = det(A)^{-1} \cdot adj(A) = (-2)^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Propriedades

1) $(A^{-1})^{-1} = A$.
2) $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4) $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$.

Aula- Matriz

Sistemas Lineares

Daniel Koiti Oshiro

Bento Quirino

??/??/23

Sistemas Lineares

Chamaremos de Sistemas Lineares um conjunto de equações onde as incógnitas são lineares. Um exemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \beta_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}$$

Curiosidade: é possível "linearizar" alguns sistemas.

Sistemas Lineares

Sendo mais práticos:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 99z - \pi w = 1 \\ \frac{2}{3}x + y - z - 5w = 0 \\ z + w = 2 \\ 4x + y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

É um sistema linear. Mas:

$$\begin{cases} 2xy = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Não é.

Sistemas Lineares

Lembrem-se de que já estudamos sistemas lineares no começo do curso. Entretanto, estudamos apenas sistemas simples, como, por exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

E ou:

$$\begin{cases} p + q = 0 \\ 3p + 4q = 1 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

É interessante lembrar que sistemas lineares e matrizes são conteúdos que se relacionam. Voltando para as aulas passadas, considere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Veja que sua matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} x & p \\ y & q \end{pmatrix}$$

pode ser encontrada resolvendo os sitemas do *slide* anterior.

Problema (introdução)

Sabemos resolver/classificar sistemas simples como os anteriores, porém como resolver sistemas do tipo:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 99z - \pi w = 1 \\ \frac{2}{3}x + y - z - 5w = 0 \\ z + w = 2 \\ 4x + y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

É fácil perceber que os métodos que conhecemos (soma e substituição) são inviáveis ou muito difíceis de serem aplicados. Hoje veremos:

1) Como resolver estes sistemas lineares?

Métodos

Felizmente existem vários métodos práticos e simples. Iremos focar no **escalonamento**. Antes, vamos introduzir alguns conceitos.

Matriz aumentada

Considere uma matriz qualquer. Chamaremos de matriz aumentada quando colocamos uma coluna extra à direita. Tome a matriz A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Inserindo a coluna $(2, 5, 0)$, teremos a matriz A aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Matriz aumentada

Tradicionalmente, sempre nos referimos a uma matriz aumentada quando estamos pensando em sistemas lineares e a nova coluna são os coeficientes lineares. Isto é, consideremos:

$$\begin{cases} 2x + 3y + \pi z = 1 \\ \frac{2}{3}x + y - z = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Então a matriz aumentada é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & \pi & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Operações elementares

Chamaremos de **operações elementares** a multiplicação de uma linha por um escalar e a soma desta linha com alguma linha da nossa matriz aumentada. Por exemplo, considere novamente a matriz A:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & \pi & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Multiplicando a segunda linhar por (-3) e somando a primeira linha nesta, temos que a segunda linha é:

$$\begin{array}{r} 2x + 3y + \pi z = 1 \\ -2x - 3y + 3z = 0 \\ \hline \Rightarrow (\pi + 3)z = 1 \end{array}$$

Operações elementares

Ou seja, feita esta operação elementar nossa nova matriz seria:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & (\pi+3) & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Para finalizar, reescrevemos por:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & \pi & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (\pi+3) & 1 \end{array}\right)$$

Operações elementares

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & \pi & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (\pi+3) & 1 \end{array}\right)$$

De onde fácil ver que a solução é:

$$\begin{cases} z = \frac{1}{(\pi+3)} \\ y = \frac{2\pi+5}{(\pi+3)} \\ x = \frac{-3\pi-6}{(\pi+3)} \end{cases}$$

Escalonamento

Concluindo, o método é muito prático e simples. Ele consiste:

1) escrever uma matriz aumentada onde cada linha são os coeficientes das incógnitas;
2) realizar operações elementares nas linhas com o objetivo sempre eliminar uma variável na expressão;
3) estudar o resultado;

Aula- Matriz

Sistemas Lineares

Daniel Koiti Oshiro

Bento Quirino

??/??/23

Problema (introdução)

Agora vamos resolver mais problemas:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

Primeiro, escrevemos a matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Problema (introdução)

Fazendo a operação $L_2 = -3L_1 + L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -7 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Agora fazendo a operação $L_3 = -2L_1 + L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -7 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Problema (introdução)

Agora fazendo a operação $L_3 = -\frac{3}{8}L_2 + L_3$ e $8L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 13 & 26 \end{array}\right)$$

Logo, concluímos:

$$\begin{cases} z = 2 \\ y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Discussão

Alguns sistemas podem possir uma **única** solução, outros podem conter infinitas e outros podem não conter nenhuma solução. Os sistemas lineares anteriores possuiam apenas uma solução. Agora veja este sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

É fácil verificar que ambas equação determinam as mesmas retas coincidentes e a matriz escalonada é:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Discussão

O significado algébrico é:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0y = 0 \end{cases}$$

Então existem infintas soluções. Analogamente, podemos concluir que toda matriz escalonada que segue a forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_n & \beta_1 \\ 0 \dots & \gamma_1 & \gamma_2 & \beta_2 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

possuia infinitas soluções.

Discussão

Agora tome o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

A matriz escalonada é:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Discussão

O significado algébrico é:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0y = -1 \end{cases}$$

Ora, então não existe solução. Analogamente, podemos concluir que toda matriz escalonada que segue a forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \beta_1 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \beta_2 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \beta_n \end{array}\right)$$

não possui solução.

Discussão- (Maximize 2022).

Tradicionalmente chamamos:

1) **S.P (Sistema Possível)**:

   S.P.D. (Sistema Possível Determinado): quando o sistema possui uma única solução.

   S.P.I. (Sistema Possível Indeterminado): quando o sistema possui infinitas solução.

2) **S.I (Sistema Impossível)**: quando o sistema não tem solução.

Discussão

Observação: todo sistema homogêno, *i.e.* da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

possui **pelo menos** uma solução. Sendo assim, ele é **S.P.**, com uma ou infinitas soluções.

Discussão

O método do escalonamento não auxilia somente na resolução de sistemas lineares, mas também no cálculo de determinantes. Usando as propriedades e teoremas apresentados, podemos escalonar a matriz e simplesmente aplicar o seguinte resultado:

Teorema

O determinante de qualquer matriz triangular é o produto da sua diagonal superior.

Discussão

Vejamos um exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Perceba que aplicar o método de *Laplace* não é fácil. Entretanto, com os teoremas anteriores escalonamos a matriz.

Discussão

Fazendo a operação: $L_2 = -4L_1 + L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Jacobi o determinante não se altera.

Discussão

Fazendo a operação: $L_3 = -3L_1 + L_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Jacobi o determinante não se altera.

Discussão

Fazendo a operação: $L_4 = 2L_1 + L_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Jacobi o determinante não se altera.

Discussão

Fazendo a operação: $L_3 = -L_2 + L_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Jacobi o determinante não se altera.

Discussão

Fazendo a operação: $L_4 = -4L_5 + L_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -18 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Jacobi o determinante não se altera.

Discussão

Fazendo a operação: $L_4 = -\frac{1}{4}L_3 + L_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -18 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Jacobi o determinante não se altera.

Discussão

Fazendo a operação: $L_5 = \frac{1}{6}L_2 + L_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{31}{6} \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Jacobi o determinante não se altera.

Discussão

Fazendo a operação: $L_5 = 6L_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 31 \end{pmatrix}$$

O determinante é multiplicado por 6.

Discussão

Fazendo a operação: $L_5 = -\frac{1}{2}L_3 + L_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 31 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Jacobi o determinante não se altera.

Discussão

Fazendo a operação: $L_5 = 3L_4 + L_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -23 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Jacobi o determinante não se altera.

Discussão

Agora, sabemos que o determinante desta matriz é:

$$1 \cdot (-6) \cdot 8 \cdot (-1) \cdot (-23) = -1104$$

Porém, veja que em uma das passagens multiplicamos o determinante da matriz original por 6, portanto, o determinante da matriz inicial é:

$$\frac{-1104}{6} = -184$$

Discussão

Além do mais, pela **regra de Cramer** (Maximize 2022) temos que qualquer sistema da forma:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = \alpha_1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 & = \alpha_2 \\ 3x_1 + 6x_3 + x_5 & = \alpha_3 \\ -2x_1 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 & = \alpha_4 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 & = \alpha_5 \end{cases}$$

É **S.P.D.**

Maximize (2022). *Ensino médio, caderno 4*. Sistema Maxi.

Montgomery, D. C. e G. C. Runger (2003). *Applied Statistics and Probability for Engineers*. John Wiley e Sons.