# Regressão

## Matrizes e Sistemas Lineares

Daniel Koiti Oshiro

Bento Quirino

10/10/22

## Definição

Sejam $A$ e $B$ duas matrizes de ordem $m \times n$ e $n \times p$, então definiremos:

$$A \cdot B = C = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj})_{m \times p}, i = 1, ..., m \text{ e } j = 1, ..., p$$

## Exemplo

Tomemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular $A \cdot B$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1 \cdot 6) + (0 \cdot 9) + (2 \cdot 4) \\ (7 \cdot 6) + (3 \cdot 9) + (5 \cdot 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 + 8 \\ 42 + 27 + 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 \\ 89 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Propriedades

A soma satisfaz:

1. Comutatividade: $A + B = B + A$.
2. Associatividade: $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. Elemento neutro: $A + \mathbf{0} = A$.
4. Elemento simétrico: $A + (-A) = \mathbf{0}$.
5. Cancelamento: $A + B = C + B \iff A = C$.

A multiplicação satisfaz:

1. Associatividade: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
2. Elemento neutro: $A \cdot Id = A$.

Por fim, as operações são “compatíveis”:

1. Distributividade: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

## Observações

Veja que a multiplicação não é necessariamente comutativa, então temos que tomar cuidado com a distributividade.

Não iremos carregar a notação, principalmente da multiplicação. Ou seja, iremos nos referir ao produto $A \cdot B$ por $AB$, sempre que o produto estiver definido. De maneira similar, iremos definir $Id$ para qualquer matriz identidade, para garantir o produto.

## Matriz inversa

Para qualquer matriz **quadrada** $A$, caso exista uma matriz que multiplicada por $A$ seja igual a identidade, chamaremos esta matriz de inversa de $A$. Representaremos por $A^{-1}$.

Atenção: NÃO CONFUNDIR COM A EXPONENCIAÇÃO EM $\mathbb{R}$.

## Exemplo

Tomemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Então temos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

## Exemplo

Verificando:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ 2-2 & 1 & \frac{2}{4} - \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= Id$$

## Exemplo

Agora vejamos:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ -1+1 & 1 & 1-\frac{4}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= Id$$

## Exemplo

Isto é, A matriz $A$ comuta com sua inversa. Pode-se provar esta afirmação. Logo:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = Id$$

Curiosidade: existem outros tipos de inversas (na verdade, outras definições). Em geral, a notação $A^{-1}$ sempre implica na inversa "dos dois lados".

## Exemplo

Primeiramente...

## Aplicação

Assuma que tenhamos o interesse em estimar uma variável $y$ tal que ela dependa linearmente de outras variáveis $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$:

$$y = \beta_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + ..x_n\beta_n + \epsilon$$

onde $\epsilon$ é um erro aleatório normal.

Suponha que fazemos $m$ observações e montamos uma matriz $Y$ de resultados e outra matriz $X$ dos valores das variáveis. É possível demonstrar que o valor que minimiza o erro é:

$$[\beta] = (X^T X)^{-1} X^T [y] \tag{1}$$

## Exemplo

O motor de um foguete é fabricado juntando o propulsor de ignição e um sustentador juntos dentro de uma carcaça de metal. A tensão de cisalhamento é estima linearmente pela idade, em semanas, do sustentador. Isto é, acreditamos:

$$Res = \beta_0 + Idade \cdot \beta_1 + \epsilon$$

Com o objetivo encontrarmos como essa dependência linear é dada, observamos 20 amostras.

## Exemplo

**TABLE 2.1 Data for Example 2.1**

| Observation $i$ | Shear Strength (psi) $y_i$ | Age of Propellant (weeks) $x_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 2158.70 | 15.50 |
| 2 | 1678.15 | 23.75 |
| 3 | 2316.00 | 8.00 |
| 4 | 2061.30 | 17.00 |
| 5 | 2207.50 | 5.50 |
| 6 | 1708.30 | 19.00 |
| 7 | 1784.70 | 24.00 |
| 8 | 2575.00 | 2.50 |
| 9 | 2357.90 | 7.50 |
| 10 | 2256.70 | 11.00 |
| 11 | 2165.20 | 13.00 |
| 12 | 2399.55 | 3.75 |
| 13 | 1779.80 | 25.00 |
| 14 | 2336.75 | 9.75 |
| 15 | 1765.30 | 22.00 |
| 16 | 2053.50 | 18.00 |
| 17 | 2414.40 | 6.00 |
| 18 | 2200.50 | 12.50 |
| 19 | 2654.20 | 2.00 |
| 20 | 1753.70 | 21.50 |

Figura: Fonte: Montomery

## Exemplo

Chamemos a resistência (tensão de cisalhamento) de $y$ e a idade do material de $x$. Então em matrizes:

$$\begin{pmatrix} 2158,70 \\ 1675,15 \\ \dots \\ 1753,70 \end{pmatrix}_{20\times 1} = \begin{pmatrix} 1 & 15,30 \\ 1 & 23,75 \\ \dots & \\ 1 & 21,50 \end{pmatrix}_{20\times 2} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}_{2\times 1} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \dots \\ \epsilon_{20} \end{pmatrix}_{20\times 1}$$

Aplicando a fórmula (1) obtemos:

$$\beta_0 = 2627,82; \beta_1 = -37,15$$

## Aplicação

Então, com certa liberdade podemos usar a fórmula:

$$y = 2627,82 - 37,15x$$

para estimar a resistência!!!

## Aplicação

Por último, um lembrete:

Figura: A lata de lixo. Fonte: Castelo Rá-Tim-Bum.

## Introdução

Até agora vimos a multiplicação de matrizes, propriedades e a matriz inversa. Vimos, de uma maneira bem sintética uma relação de matrizes com sistemas lineares de equações. Porém algumas perguntas surgem naturalmente:

1. Quando uma matriz tem inversa?
2. Como a relação entre sistemas e matrizes ocorre? (*i.e.*, como resolver sistemas?)

## Determinante

Um conceito muito útil para responder a primeira pergunta é o de **determinante**. Como sempre, podemos pensar no determinante como sendo uma função:

$$\begin{aligned} d : \mathbb{M}_{m\times m} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto k \end{aligned}$$

Depois iremos definir esta função de um jeito melhor.

## Menor associado

Seja uma matriz $A$ quadrada de ordem maior ou igual à 2. Chamamos de **menor associado** de um elemento $a_{ij}$ o determinante da matriz $A$ retirando a linha $i$ e a coluna $j$. Representaremos por $D_{ij}$.
Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Então $D_{11} = 4$, $D_{12} = 3$, $D_{21} = 2$ e $D_{22} = 1$.

## Cofator

Seja uma matriz $A$ quadrada de ordem maior ou igual à 2. Chamamos de **cofator** associado à um elemento $a_{ij}$ o produto:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Então $C_{11} = (-1)^2 \cdot 4 = 4$, etc.

## Matriz dos cofatores

Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem maior que 2. Definiremos por $\overline{A}$ a matriz onde cada elemento $\overline{a}_{ij}$ é o cofator de $a_{ij}$. Chamremos de **matriz dos cofatores**. Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

## Matriz adjunta

Definiremos por **matriz adjunta** a matriz $\overline{A}^T$. Representaremos por $adj(A)$. Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Teorema**

Com todas essas ferramentas é possível provar que uma matriz é invertível (possui inversa) se, e somente se, seu determinante é não nulo.

## Determinante e sistema

Essencialmente, calcular o determinante é resolver um sistema linear. Vejamos um exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então dada uma matriz $A$, calcular $A^{-1}$ é equivalente a resolver o seguinte sistema para $b$.

## Determinante e sistema

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \end{cases}$$

## Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou melhor:

$$\begin{cases} 1b_{11} + 2b_{21} = 1 \\ 1b_{12} + 2b_{22} = 0 \\ 3b_{11} + 4b_{21} = 0 \\ 3b_{12} + 4b_{22} = 1 \end{cases}$$