



## Definição

Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes de ordem  $m \times n$  e  $n \times p$ , então definiremos:

$$A \cdot B = C = \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{m \times p}, i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, p$$

## Exemplo

Tomemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular  $A \cdot B$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1 \cdot 6) + (0 \cdot 9) + (2 \cdot 4) \\ (7 \cdot 6) + (3 \cdot 9) + (5 \cdot 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 + 8 \\ 42 + 27 + 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 \\ 89 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Propriedades

A soma satisfaz:

1. Comutatividade:  $A + B = B + A$ .
2. Associatividade:  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .
3. Elemento neutro:  $A + \mathbf{0} = A$ .
4. Elemento simétrico:  $A + (-A) = \mathbf{0}$ .
5. Cancelamento:  $A + B = C + B \iff A = C$ .

A multiplicação satisfaz:

1. Associatividade:  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ .
2. Elemento neutro:  $A \cdot Id = A$ .

Por fim, as operações são “compatíveis”:

1. Distributividade:  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ .

## Observações

Veja que a multiplicação não é necessariamente comutativa, então temos que tomar cuidado com a distributividade.

Não iremos carregar a notação, principalmente da multiplicação. Ou seja, iremos nos referir ao produto  $A \cdot B$  por  $AB$ , sempre que o produto estiver definido. De maneira similar, iremos definir  $Id$  para qualquer matriz identidade, para garantir o produto.

## Matriz inversa

Para qualquer matriz **quadrada**  $A$ , caso exista uma matriz que multiplicada por  $A$  seja igual a identidade, chamaremos esta matriz de inversa de  $A$ . Representaremos por  $A^{-1}$ .

Atenção: NÃO CONFUNDIR COM A EXPONENCIAÇÃO EM  $\mathbb{R}$ .

## Exemplo

Tomemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Então temos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

## Exemplo

Verificando:

$$\begin{aligned}
 AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ 2 - 2 & 1 & \frac{2}{4} - \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= Id
 \end{aligned}$$



## Exemplo

Agora vejamos:

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ -1 + 1 & 1 & 1 - \frac{4}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= Id \end{aligned}$$

## Exemplo

Isto é, A matriz  $A$  comuta com sua inversa. Pode-se provar esta afirmação. Logo:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = Id$$

Curiosidade: existem outros tipos de inversas (na verdade, outras definições). Em geral, a notação  $A^{-1}$  sempre implica na inversa “dos dois lados”.

## Exemplo

Primeiramente...



## Aplicação

Assuma que tenhamos o interesse em estimar uma variável  $y$  tal que ela dependa linearmente de outras variáveis  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ :

$$y = \beta_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots x_n\beta_n + \epsilon$$

onde  $\epsilon$  é um erro aleatório normal.

Suponha que fazemos  $m$  observações e montamos uma matriz  $Y$  de resultados e outra matriz  $X$  dos valores das variáveis. É possível demonstrar que o valor que minimiza o erro é:

$$[\beta] = (X^T X)^{-1} X^T [y] \quad (1)$$

## Exemplo

O motor de um foguete é fabricado juntando o propulsor de ignição e um sustentador juntos dentro de uma carcaça de metal. A tensão de cisalhamento é estimada linearmente pela idade, em semanas, do sustentador. Isto é, acreditamos:

$$Res = \beta_0 + Idade \cdot \beta_1 + \epsilon$$

Com o objetivo encontrarmos como essa dependência linear é dada, observamos 20 amostras.

## Exemplo

TABLE 2.1 Data for Example 2.1

Observation $i$	Shear Strength (psi) $y_i$	Age of Propellant (weeks) $x_i$
1	2158.70	15.50
2	1678.15	23.75
3	2316.00	8.00
4	2061.30	17.00
5	2207.50	5.50
6	1708.30	19.00
7	1784.70	24.00
8	2575.00	2.50
9	2357.90	7.50
10	2256.70	11.00
11	2165.20	13.00
12	2399.55	3.75
13	1779.80	25.00
14	2336.75	9.75
15	1765.30	22.00
16	2053.50	18.00
17	2414.40	6.00
18	2200.50	12.50
19	2654.20	2.00
20	1753.70	21.50

Figura: Fonte: Montgomery

## Exemplo

Chamemos a resistência (tensão de cisalhamento) de  $y$  e a idade do material de  $x$ . Então em matrizes:

$$\begin{pmatrix} 2158,70 \\ 1675,15 \\ \dots \\ 1753,70 \end{pmatrix}_{20 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 & 15,30 \\ 1 & 23,75 \\ \dots & \dots \\ 1 & 21,50 \end{pmatrix}_{20 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}_{2 \times 1} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \dots \\ \epsilon_{20} \end{pmatrix}_{20 \times 1}$$

Aplicando a fórmula (1) obtemos:

$$\beta_0 = 2627,82; \beta_1 = -37,15$$

## Aplicação

Então, com certa liberdade podemos usar a fórmula:

$$y = 2627,82 - 37,15x$$

para estimar a resistência!!!



## Aplicação

Por último, um lembrete:



**Figura:** A lata de lixo. Fonte: Castelo Rá-Tim-Bum.

## Introdução

Até agora vimos a multiplicação de matrizes, propriedades e a matriz inversa. Vimos, de uma maneira bem sintética uma relação de matrizes com sistemas lineares de equações. Porém algumas perguntas surgem naturalmente:

1. Quando uma matriz tem inversa?
2. Como a relação entre sistemas e matrizes ocorre? (*i.e.*, como resolver sistemas?)

## Determinante

Um conceito muito útil para responder a primeira pergunta é o de **determinante**. Como sempre, podemos pensar no determinante como sendo uma função:

$$\begin{aligned} d : \mathbb{M}_{m \times m} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto k \end{aligned}$$

Depois iremos definir esta função de um jeito melhor.

## Menor associado

Seja uma matriz  $A$  quadrada de ordem maior ou igual à 2. Chamamos de **menor associado** de um elemento  $a_{ij}$  o determinante da matriz  $A$  retirando a linha  $i$  e a coluna  $j$ . Representaremos por  $D_{ij}$ .  
Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Então  $D_{11} = 4$ ,  $D_{12} = 3$ ,  $D_{21} = 2$  e  $D_{22} = 1$ .

## Cofator

Seja uma matriz  $A$  quadrada de ordem maior ou igual à 2. Chamamos de **cofator** associado à um elemento  $a_{ij}$  o produto:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Então  $C_{11} = (-1)^2 \cdot 4 = 4$ , etc.

## Matriz dos cofatores

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem maior que 2. Definiremos por  $\bar{A}$  a matriz onde cada elemento  $\bar{a}_{ij}$  é o cofator de  $a_{ij}$ . Chamremos de **matriz dos cofatores**. Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

## Matriz adjunta

Definiremos por **matriz adjunta** a matriz  $\overline{A}^T$ . Representaremos por  $adj(A)$ . Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

## Teorema

Com todas essas ferramentas é possível provar que uma matriz é invertível (possui inversa) se, e somente se, seu determinante é não nulo.



## Determinante e sistema

Essencialmente, calcular o determinante é resolver um sistema linear. Vejamos um exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então dada uma matriz  $A$ , calcular  $A^{-1}$  é equivalente a resolver o seguinte sistema para  $b$ .

## Determinante e sistema

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 0 \\ a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 1 \\ a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 0 \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 0 \\ a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 0 \\ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 1 \end{cases}$$

## Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou melhor:

$$\begin{cases} 1b_{11} + 2b_{21} = 1 \\ 1b_{12} + 2b_{22} = 0 \\ 3b_{11} + 4b_{21} = 0 \\ 3b_{12} + 4b_{22} = 1 \end{cases}$$

# Aula 3

## Matrizes e Sistemas Lineares

Daniel Koiti Oshiro

Bento Quirino

27/10/22

## Introdução

Na última aula contextualizamos a relação entre determinantes, matriz inversa e sistemas lineares (mesmo que de um modo bem artificial). Nesta aula vamos estudar:

1. Determinantes gerais (*Teorema de Laplace*);
2. Resultados importantes sobre a matriz inversa.

## Determinante

Agora, vamos voltar e definir o determinante de matrizes para qualquer ordem; Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ , para qualquer  $i$  fixado:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

Também podemos definir como:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

para qualquer  $j$  fixado.

## Exemplo

Considere a matriz  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Fixando a linha 1 e aplicando a fórmula, temos que o determinante da matrix é:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} = \underbrace{[1 \cdot 4 \cdot (-1)^{1+1}]}_{a_{11} C_{11}} + \underbrace{[2 \cdot 3 \cdot (-1)^{1+2}]}_{a_{12} C_{12}} = -2$$

## Exemplo

Se tivéssemos fixado a coluna 2 teríamos:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} = \underbrace{[2 \cdot 3 \cdot (-1)^{1+2}]}_{a_{12} C_{12}} + \underbrace{[4 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2}]}_{a_{22} C_{22}} = -2$$

Perceba que fazendo genericamente obteríamos a fórmula usual:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$



## Exemplo

Considere a matriz  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular o determinante de  $A$  poderíamos utilizar o método de *Sarrus*<sup>a</sup>. Porém, utilizando a fórmula genérica podemos facilitar as contas fixando a coluna 3. Ou seja:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} = 2 \cdot (4 - 6) = -4$$

---

<sup>a</sup>Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861). Matemático francês que criou o método conhecido como “garfinho” para calcular o determinante de matrizes de ordem 3.

## Propriedades

- 1) Multiplicar uma linha (coluna) por uma constante, o determinante também é multiplicado pela constante.
- 2) Trocar uma linha (coluna) por outra paralela inverte o sinal do determinante.
- 3)  $\det(A) = \det(A^T)$ .
- 4) Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $k$  um escalar.

Temos:

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

## Propriedades

### Teorema

*(Teorema de Binet)* Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes **quadradas e de mesma ordem**, então:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

### Teorema

*(Teorema de Jacobi)* O valor de um determinante não se altera se multiplicarmos uma linha (coluna) por um número real diferente de 0 e adicionarmos a outra linha (coluna) paralela a ela.

## Comentário

### Teorema

*Uma matriz é invertível se, e somente se, seu determinante é não nulo.*

### Demonstração.

*Seja  $A^{-1}$  sua inversa, então:*

$$1 = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

*Por outro lado, assuma que  $\det(A) \neq 0$ , então:*

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A)Id \Rightarrow (\det(A)^{-1} \cdot \text{adj}(A))A = Id$$

*Então a matriz é invertível.*



## Comentário

## Corolário

*Veja que a última parte do teorema nos garante que:*

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \text{adj}(A)$$

Logo, temos uma maneira “fácil” de determinar uma inversa.

## Exemplo

Vamos determinar a inversa da matriz abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Primeiramente calculamos seu determinante. Já sabemos que ele é  $-2$ . Agora determinamos a matriz adjunta de  $A$ :

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por fim:

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \text{adj}(A) = (-2)^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

## Propriedades

- 1)  $(A^{-1})^{-1} = A.$
- 2)  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- 3)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$
- 4)  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$

