

Regressão

Matrizes e Sistemas Lineares

Daniel Koiti Oshiro

Bento Quirino

10/10/22

- 1 Multiplicação
- 2 Matriz Inversa
- 3 Regressão Linear
- 4 Sistemas lineares



Definição

Sejam A e B duas matrizes de ordem $m \times n$ e $n \times p$, então definiremos:

$$A \cdot B = C = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{m \times p}, i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, p$$

Exemplo

Tomemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular $A \cdot B$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1 \cdot 6) + (0 \cdot 9) + (2 \cdot 4) \\ (7 \cdot 6) + (3 \cdot 9) + (5 \cdot 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 + 8 \\ 42 + 27 + 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 \\ 89 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propriedades

A soma satisfaz:

1. Comutatividade: $A + B = B + A$.
2. Associatividade: $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. Elemento neutro: $A + \mathbf{0} = A$.
4. Elemento simétrico: $A + (-A) = \mathbf{0}$.
5. Cancelamento: $A + B = C + B \iff A = C$.

A multiplicação satisfaz:

1. Associatividade: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
2. Elemento neutro: $A \cdot Id = A$.

Por fim, as operações são “compatíveis”:

1. Distributividade: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Observações

Veja que a multiplicação não é necessariamente comutativa, então temos que tomar cuidado com a distributividade.

Não iremos carregar a notação, principalmente da multiplicação. Ou seja, iremos nos referir ao produto $A \cdot B$ por AB , sempre que o produto estiver definido. De maneira similar, iremos definir Id para qualquer matriz identidade, para garantir o produto.

Matriz inversa

Para qualquer matriz **quadrada** A , caso exista uma matriz que multiplicada por A seja igual a identidade, chamaremos esta matriz de inversa de A . Representaremos por A^{-1} .

Atenção: NÃO CONFUNDIR COM A EXPONENCIAÇÃO EM \mathbb{R} .

Exemplo

Tomemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Então temos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exemplo

Verificando:

$$\begin{aligned}
 AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ 2 - 2 & 1 & \frac{2}{4} - \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= Id
 \end{aligned}$$

Exemplo

Agora vejamos:

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ -1 + 1 & 1 & 1 - \frac{4}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= Id \end{aligned}$$

Exemplo

Isto é, A matriz A comuta com sua inversa. Pode-se provar esta afirmação. Logo:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = Id$$

Curiosidade: existem outros tipos de inversas (na verdade, outras definições). Em geral, a notação A^{-1} sempre implica na inversa “dos dois lados”.

Exemplo

Primeiramente...



Aplicação

Assuma que tenhamos o interesse em estimar uma variável y tal que ela dependa linearmente de outras variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$:

$$y = \beta_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots x_n\beta_n + \epsilon$$

onde ϵ é um erro aleatório normal.

Suponha que fazemos m observações e montamos uma matriz Y de resultados e outra matriz X dos valores das variáveis. É possível demonstrar que o valor que minimiza o erro é:

$$[\beta] = (X^T X)^{-1} X^T [y] \quad (1)$$

Exemplo

O motor de um foguete é fabricado juntando o propulsor de ignição e um sustentador juntos dentro de uma carcaça de metal. A tensão de cisalhamento é estimada linearmente pela idade, em semanas, do sustentador. Isto é, acreditamos:

$$Res = \beta_0 + Idade \cdot \beta_1 + \epsilon$$

Com o objetivo encontrarmos como essa dependência linear é dada, observamos 20 amostras.

Exemplo

TABLE 2.1 Data for Example 2.1

Observation i	Shear Strength (psi) y_i	Age of Propellant (weeks) x_i
1	2158.70	15.50
2	1678.15	23.75
3	2316.00	8.00
4	2061.30	17.00
5	2207.50	5.50
6	1708.30	19.00
7	1784.70	24.00
8	2575.00	2.50
9	2357.90	7.50
10	2256.70	11.00
11	2165.20	13.00
12	2399.55	3.75
13	1779.80	25.00
14	2336.75	9.75
15	1765.30	22.00
16	2053.50	18.00
17	2414.40	6.00
18	2200.50	12.50
19	2654.20	2.00
20	1753.70	21.50

Figura: Fonte: Montgomery

Exemplo

Chamemos a resistência (tensão de cisalhamento) de y e a idade do material de x . Então em matrizes:

$$\begin{pmatrix} 2158,70 \\ 1675,15 \\ \dots \\ 1753,70 \end{pmatrix}_{20 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 & 15,30 \\ 1 & 23,75 \\ \dots & \dots \\ 1 & 21,50 \end{pmatrix}_{20 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}_{2 \times 1} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \dots \\ \epsilon_{20} \end{pmatrix}_{20 \times 1}$$

Aplicando a fórmula (1) obtemos:

$$\beta_0 = 2627,82; \beta_1 = -37,15$$

Aplicação

Então, com certa liberdade podemos usar a fórmula:

$$y = 2627,82 - 37,15x$$

para estimar a resistência!!!

Aplicação

Por último, um lembrete:



Figura: A lata de lixo. Fonte: Castelo Rá-Tim-Bum.

Introdução

Até agora vimos a multiplicação de matrizes, propriedades e a matriz inversa. Vimos, de uma maneira bem sintética uma relação de matrizes com sistemas lineares de equações. Porém algumas perguntas surgem naturalmente:

1. Quando uma matriz tem inversa?
2. Como a relação entre sistemas e matrizes ocorre? (*i.e.*, como resolver sistemas?)

Determinante

Um conceito muito útil para responder a primeira pergunta é o de **determinante**. Como sempre, podemos pensar no determinante como sendo uma função:

$$\begin{aligned} d : \mathbb{M}_{m \times m} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto k \end{aligned}$$

Depois iremos definir esta função de um jeito melhor.

Menor associado

Seja uma matriz A quadrada de ordem maior ou igual à 2. Chamamos de **menor associado** de um elemento a_{ij} o determinante da matriz A retirando a linha i e a coluna j . Representaremos por D_{ij} .
Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Então $D_{11} = 4$, $D_{12} = 3$, $D_{21} = 2$ e $D_{22} = 1$.

Cofator

Seja uma matriz A quadrada de ordem maior ou igual à 2. Chamamos de **cofator** associado à um elemento a_{ij} o produto:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Então $C_{11} = (-1)^2 \cdot 4 = 4$, etc.

Matriz dos cofatores

Seja A uma matriz quadrada de ordem maior que 2. Definiremos por \bar{A} a matriz onde cada elemento \bar{a}_{ij} é o cofator de a_{ij} . Chamremos de **matriz dos cofatores**. Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz adjunta

Definiremos por **matriz adjunta** a matriz \overline{A}^T . Representaremos por $adj(A)$. Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema

Com todas essas ferramentas é possível provar que uma matriz é invertível (possui inversa) se, e somente se, seu determinante é não nulo.

Determinante e sistema

Essencialmente, calcular o determinante é resolver um sistema linear. Vejamos um exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então dada uma matriz A , calcular A^{-1} é equivalente a resolver o seguinte sistema para b .

Determinante e sistema

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \end{cases}$$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou melhor:

$$\begin{cases} 1b_{11} + 2b_{21} = 1 \\ 1b_{12} + 2b_{22} = 0 \\ 3b_{11} + 4b_{21} = 0 \\ 3b_{12} + 4b_{22} = 1 \end{cases}$$

