

天文与天体物理奥林匹克笔记 (理论与数据分析)

由香港 IOAA 前队员编写的综合笔记

团队：

李耀升（皮卡）



（理论与数据分析）

陈傲宏（观测）

December 26, 2025

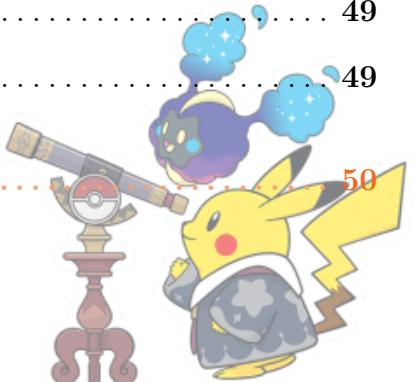
目录

理论

1 数学物理	14
1.1 基础集合论	14
1.2 函数	15
1.3 三角学	15
1.4 对数	17
1.5 求和	17
1.6 圆锥曲线	18
1.7 量纲分析	19
1.7.1 引言	19
1.7.2 白金汉 II 定理（选修）	19
1.7.3 自然单位制	20
1.7.4 练习	21
1.8 张量	21
1.8.1 向量与向量空间	21
1.8.2 矩阵	24
1.8.3 张量	26
1.8.4 标量场与矢量场	28
1.9 微分与偏微分	30
1.9.1 简介	30
1.9.2 性质与公式	30
1.9.3 偏微分	31
1.9.4 数值分析	31
1.9.5 线性近似	32
1.9.6 泰勒级数	33
1.9.7 一阶导数判别法	33



1.10 积分	35
1.10.1 原函数与不定积分	35
1.10.2 定积分	37
1.10.3 换元积分法	39
1.10.4 分部积分法	40
1.10.5 多重积分、线积分与面积分	41
1.10.6 梯形法则与辛普森法则	42
1.10.7 微分方程	42
1.11 坐标系	44
2 球面三角学与天球坐标系	45
2.1 球面三角学	45
2.2 天球坐标系	46
2.2.1 地平坐标系 (Alt-Az System)	46
2.2.2 赤道坐标系 (Equatorial System)	46
2.2.3 黄道坐标系 (Ecliptic System)	47
2.2.4 银道坐标系 (Galactic System)	47
2.2.5 拱极星 (Circumpolar Stars)	47
3 天文时间	47
3.1 太阳时 (Solar Time)	47
3.1.1 真太阳时 (Apparent Solar Time)	48
3.1.2 平太阳时 (Mean Solar Time)	48
3.2 恒星时 (Sidereal Time)	48
3.2.1 恒星日 (Sidereal Day)	48
3.3 日心儒略日 (Heliocentric Julian Date, HJD)	48
3.4 时区与世界时	49
3.5 年的不同定义	49
3.6 时差 (Equation of Time)	49
4 天体物理中的测量单位	50



5 基础力学	50
5.1 运动学	50
5.1.1 直线运动	50
5.1.2 相对运动	52
5.2 牛顿定律	54
5.3 线动量	54
5.3.1 简介	54
5.3.2 动量守恒定律	55
5.3.3 冲量	55
5.3.4 火箭方程	55
5.4 力、转矩与物体的平衡	56
5.5 能量	57
5.6 圆周运动	58
5.6.1 运动学	58
5.6.2 向心力	59
5.6.3 离心力	60
5.6.4 科里奥利力	60
5.6.5 角动量	60
5.7 案例研究	62
6 轨道力学	64
6.1 牛顿万有引力定律	64
6.1.1 简介	64
6.1.2 质心 (Barycentre)	65
6.1.3 二体问题	65
6.1.4 n 体问题	67
6.2 开普勒定律	67
6.2.1 开普勒三大定律	67
6.2.2 开普勒方程	73
6.2.3 泊松括号	74



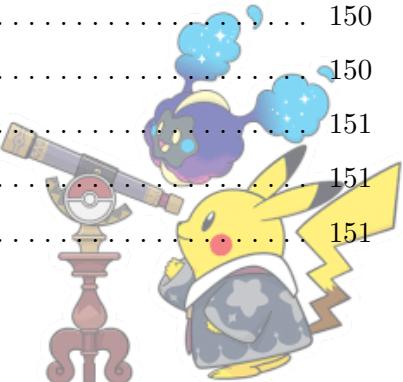
6.3 壳层定理 (Shell Theorem)	75
6.4 引力势能	77
6.4.1 活力公式 (Vis-viva Equation)	78
6.4.2 第一、第二及第三宇宙速度	79
6.4.3 霍曼转移轨道	80
6.4.4 黑洞	82
6.4.5 维里定理	82
6.4.6 塔利-费舍尔关系	83
6.5 拉格朗日点	84
6.6 洛希极限	87
 7 相对论	88
7.1 狹义相对论的基本假设	88
7.2 伽利略变换	88
7.3 洛伦兹变换	88
7.4 时空图	90
7.5 相对论运动学与力学	90
7.5.1 时间膨胀	90
7.5.2 长度收缩	91
7.5.3 相对论动量	91
7.5.4 相对论能量	91
7.5.5 相对论动量与能量的关系	92
7.6 时空与四维矢量	92
7.6.1 狹义相对论中的时空	92
7.6.2 四维矢量	93
7.6.3 度规张量	94
7.6.4 不变量间隔	95
7.6.5 物理学中的重要四维矢量	95
7.6.6 广义相对论导论	97
 8 热力学	108
8.1 压强与流体静力学平衡	108



8.2	理想气体定律	109
8.3	热力学第一定律	110
8.4	热力学第二定律	111
8.5	热容	112
8.6	黑洞热力学	114
8.7	分子动理论	115
8.7.1	平均自由程	115
8.7.2	玻尔兹曼分布与麦克斯韦-玻尔兹曼分布	116
8.8	边界条件	119
8.9	案例研究	119
9	光谱学	123
9.1	基本概念	123
9.2	光谱辐亮度	124
9.3	斯特藩-玻尔兹曼定律	125
9.4	多普勒效应	126
10	电磁学	128
10.1	洛伦兹力	128
10.2	麦克斯韦方程组	128
10.3	坡印廷矢量	129
10.4	光学	129
10.4.1	波函数	129
10.4.2	透镜	130
10.5	衍射与干涉	135
10.5.1	叠加原理	135
10.5.2	复数	135
10.5.3	杨氏双缝干涉实验	136
10.5.4	单缝衍射	136
10.5.5	瑞利判据	137

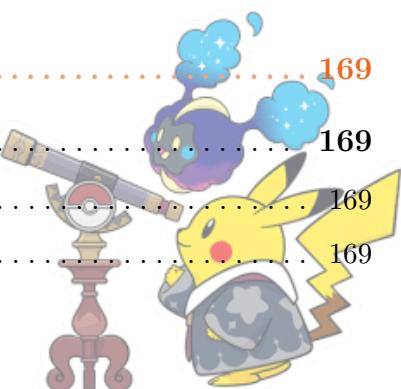


10.6 偏振	137
10.6.1 引言	137
10.6.2 法拉第旋转	138
11 量子力学	140
11.1 原子结构	140
11.1.1 历史发展	140
11.1.2 引言	140
11.1.3 核衰变	141
11.1.4 中微子	142
11.2 波粒二象性	142
11.3 普朗克方程	143
11.4 氢原子的玻尔模型	143
11.4.1 玻尔假设	143
11.4.2 公式推导	143
11.4.3 波函数	144
11.4.4 定态薛定谔方程	144
11.5 不确定性原理	145
12 恒星天体物理学	146
12.1 恒星分类	146
12.2 赫罗图 (HR Diagram)	147
12.2.1 简介	147
12.2.2 光谱型与温度	148
12.2.3 转折点 (Turn-Off Point)	149
12.3 恒星演化	150
12.3.1 恒星形成	150
12.3.2 前主序星	150
12.3.3 主序星	150
12.3.4 后主序演化	151
12.3.5 超新星	151
12.3.6 行星状星云	151

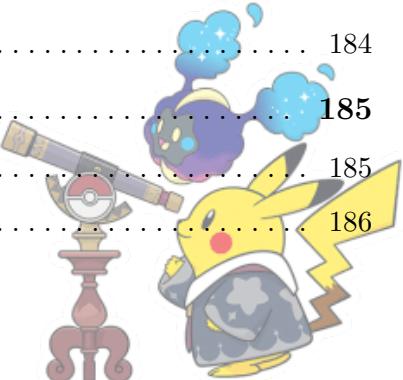


12.3.7	恒星的终态	151
12.4	星等系统	152
12.5	反照率	156
12.6	几何反照率	157
12.7	色指数	158
12.8	大气消光	159
12.9	光深度	159
12.10	太阳研究	160
12.10.1	成分	160
12.10.2	内部结构	160
12.10.3	大气层	161
12.10.4	太阳表面活动	161
12.10.5	太阳风	161
12.11	双星	161
12.11.1	双星的不同类型	162
12.11.2	修正的开普勒第三定律	162
12.11.3	质量函数 (Mass Function)	163
12.11.4	光变曲线 (Light Curves)	164
12.11.5	视向速度曲线 (Radial Velocity Curves)	165
12.11.6	罗氏瓣 (Roche Lobe)	167
12.12	系外行星 (Exoplanet)	168
12.12.1	简介	168
12.12.2	系外行星分类	168
12.12.3	可能的生命光谱特征	168
12.12.4	视向速度法 (Radial Velocity Method)	168
12.12.5	凌星法 (Transit Method)	168
12.12.6	宜居带 (Habitable Zone)	168

13	宇宙学	169
13.1	宇宙的结构	169
13.1.1	星团	169
13.1.2	星系	169



13.2 大尺度结构	170
13.3 宇宙学原理	171
13.4 旋转曲线	171
13.5 哈勃定律	172
13.6 宇宙学距离测量	172
13.6.1 固有距离	172
13.6.2 共动距离	173
13.6.3 光度距离	173
13.6.4 角直径距离	173
13.7 弗里德曼方程	174
13.8 状态方程	175
13.9 大爆炸	176
13.9.1 奇点	176
13.9.2 宇宙暴胀	176
13.9.3 空间膨胀	176
13.9.4 大爆炸的阶段	176
13.10 宇宙微波背景	177
13.11 引力透镜	178
13.11.1 引言	178
13.11.2 利用牛顿力学推导	179
13.11.3 利用广义相对论推导	180
13.12 引力波	182
13.12.1 引言	182
13.12.2 嘴啾质量	183
13.12.3 双星系统	183
13.13 吸积过程	183
13.13.1 引言	183
13.13.2 爱丁顿光度	184
13.14 宇宙距离阶梯	185
13.14.1 引言	185
13.14.2 雷达测距	186



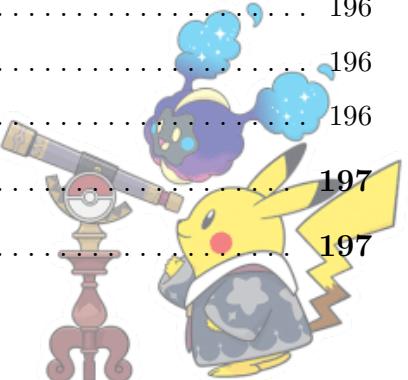
13.14.3	恒星视差	186
13.14.4	标准烛光：造父变星	186
13.14.5	费伯-杰克逊关系	187
13.14.6	Ia 型超新星	188

14 星际介质 189

14.1	简介	189
14.2	流体动力学	189
14.2.1	应力张量	189
14.2.2	张量积	190
14.2.3	散度定理	190
14.2.4	连续性方程与动量方程	191
14.2.5	欧拉方程（纳维-斯托克斯方程的特例）	192
14.3	案例研究	193
14.3.1	背景	193
14.3.2	推导	193

15 地球研究 195

15.1	潮汐	195
15.2	季节	195
15.3	影响气候的因素	195
15.4	食现象	196
15.4.1	日食	196
15.4.2	月食	196
15.5	空间天气	196
15.5.1	简介	196
15.5.2	太阳风	196
15.5.3	太阳耀斑	196
15.5.4	日冕物质抛射 (CMEs)	196
15.5.5	极光	196
15.6	流星雨	197
15.7	分点 (Equinoxes)	197

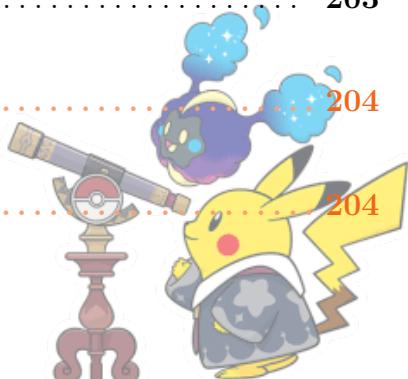


15.8	至点 (Solstices)	197
15.9	太阳赤纬	197
16	宇宙研究	197
16.1	人类对太阳系的探索	197
16.2	行星探测任务	198
17	月球研究	198
17.1	岁差 (Precession)	198
17.2	章动 (Nutation)	200
17.3	天平动 (Libration)	200
18	太阳系研究	200
18.1	形成	200
18.1.1	星云假说	200
18.1.2	分异与演化	201
18.2	太阳系的结构与组成	201
18.2.1	太阳	201
18.2.2	行星	201
18.2.3	矮行星与小天体	202
18.2.4	柯伊伯带与奥尔特云	202

II

数据分析

19	概率	203
19.1	简介	203
19.2	随机变量	203
20	线性刻度与对数刻度	204
21	集中趋势的度量	204

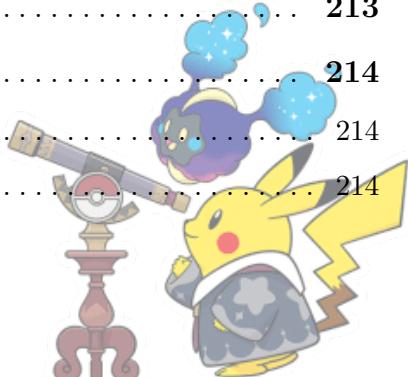


22 离散程度的度量	205
22.1 基本概念	205
22.2 箱线图 (Box-and-Whisker)	206
23 半高全宽 (FWHM)	206
24 误差分析	207
25 回归分析	207
25.1 线性回归	207
25.1.1 最小二乘法	208
25.2 非线性回归	208

III

观测天文学

26 仪器与太空技术	210
26.1 望远镜	210
26.1.1 望远镜类型	210
26.1.2 架台类型	211
26.1.3 核心组件	211
26.1.4 线性放大倍率	211
26.1.5 角放大倍率	211
26.1.6 色差 (Chromatic Aberration)	212
26.1.7 焦比 (f -number)	212
26.1.8 光收集能力	212
26.1.9 自适应光学	213
26.1.10 人工光	213
26.2 干涉仪	213
26.3 探测器	214
26.3.1 光度计	214
26.3.2 电荷耦合器件 (CCDs)	214



26.4 底片比例尺	214
26.4.1 简介	214
26.4.2 视场 (Field of View)	215
26.5 空间探测仪器	215
26.6 信噪比 (Signal-to-Noise Ratio)	215
26.6.1 定义	215
26.6.2 纯泊松噪声	216
26.6.3 背景噪声	217
26.6.4 读出噪声	217
26.6.5 完整方程	217



第 I 部分：理论

1 数学物理

1.1 基础集合论

集合是任何不同对象的总体，集合本身被视为一个对象。集合中的对象可以是任何东西，例如实数 \mathbb{R} 。我们用花括号表示集合：

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

其中 a_1, a_2, a_3, \dots 是集合 A 的元素。我们定义了几种常见的集合运算：

- **并集 (Union)**: 两个集合 A 和 B 的并集是属于 A 或属于 B (或同时属于两者) 的所有元素组成的集合。记作：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

- **交集 (Intersection)**: 两个集合 A 和 B 的交集是同时属于 A 和 B 的所有元素组成的集合。记作：

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

- **差集 (Difference)**: 两个集合 A 和 B 的差集，记为 $A \setminus B$ ，是属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合：

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

- **补集 (Complement)**: 集合 A 的补集，记为 A^c ，是不属于 A 的所有元素组成的集合。

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，我们称 A 是 B 的子集，记为 $A \subseteq B$ ：

$$A \subseteq B \quad \text{当且仅当} \quad \forall x (x \in A \implies x \in B)$$

其中 \forall 表示“对于所有”。反之，如果 A 的所有元素都在 B 中，则称 B 是 A 的超集，记作 $B \supseteq A$ 。



1.2 函数

函数是两个集合之间的一种关系，其中第一个集合（称为定义域）的每个元素都恰好对应第二个集合（称为陪域）中的一个元素。函数为定义域中的每个输入分配一个唯一的输出。形式上，从集合 A 到集合 B 的函数 f 记为

$$f : A \rightarrow B$$

其中 A 是函数的定义域， B 是函数的陪域。对于每个 $a \in A$ ，都存在唯一的 $b \in B$ 使得 $f(a) = b$ 。数学中常用的几种重要函数类型如下：

- 如果定义域 A 中的不同元素映射到陪域 B 中的不同元素，则函数 $f : A \rightarrow B$ 被称为一**一映射**或**单射** (Injective)。换句话说：

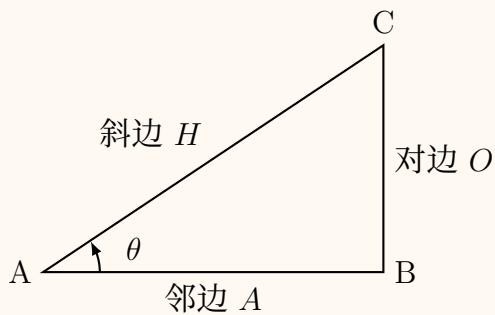
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \quad \text{对于所有 } x_1, x_2 \in A$$

- 如果对于陪域 B 中的每个元素 b ，都至少存在一个定义域 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$ ，则函数 $f : A \rightarrow B$ 被称为**满射** (Surjective)。换句话说， f 的值域等于整个陪域 B 。
- 如果一个函数既是单射又是满射，则称其为**双射** (Bijective)。这意味着定义域的每个元素都映射到陪域中唯一的元素，且陪域中的每个元素在定义域中都有对应的元素。

1.3 三角学

定义. 1.1: 三角函数

考虑一个带有角度 θ 、对边 O 、邻边 A 和斜边 H 的直角三角形。回顾：



对于直角三角形中的角度 θ ：

$$\sin \theta = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{O}{H}, \quad \csc \theta = \frac{H}{O}$$

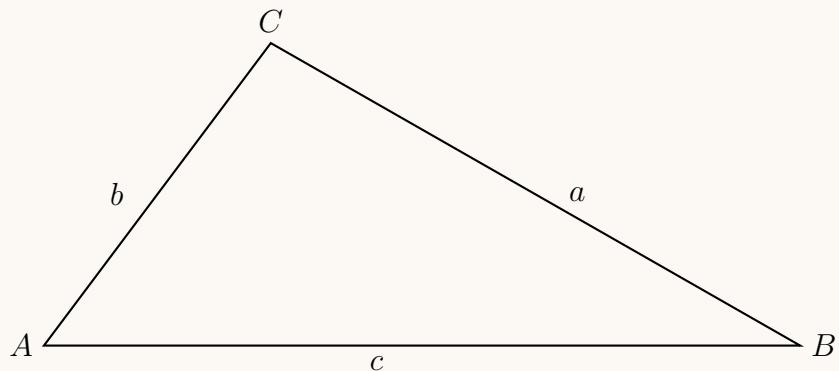


$$\cos \theta = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{A}{H}, \quad \sec \theta = \frac{H}{A}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{O}{A}, \quad \cot \theta = \frac{A}{O}$$

定理. 1.1: 正弦定理与余弦定理

考虑任意三角形 ABC , 其角 A, B, C 对应的对边分别为 a, b, c :



正弦定理指出:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

余弦定理指出:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

定义. 1.2: 角度

度 (Degree) 通常被划分为更小的单位以进行更精确的测量。最常见的更小单位是分和秒:

- 1 度 ($^\circ$) = 60 分 ($'$)
- 1 分 ($'$) = 60 秒 ($''$)

定义. 1.3: 弧度

弧度定义为圆心角所对的弧长等于半径时该圆心角的大小:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

其中



- θ 是以弧度为单位的角度,
- s 是弧长,
- r 是圆的半径。

弧度与角度密切相关，但在数学计算中更为自然。弧度与角度之间的换算公式如下：

$$\theta_{\text{角度}} = \theta_{\text{弧度}} \times \frac{180}{\pi}$$

$$\theta_{\text{弧度}} = \theta_{\text{角度}} \times \frac{\pi}{180}$$

1.4 对数

回顾：

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

定义. 1.4: 自然常数 e

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

即当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的极限。

定义自然对数 $\log_e x$ 为 \ln 。注意：

$$1. \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$2. \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

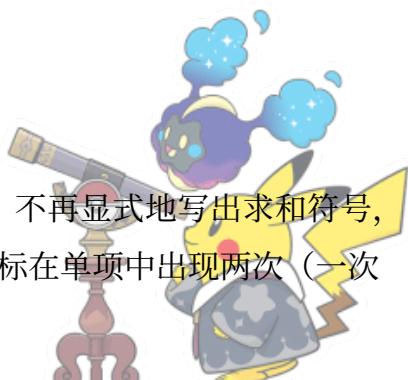
$$3. \ln(x^n) = n \ln x$$

1.5 求和

求和符号 \sum 用于表示数列的和：

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

爱因斯坦求和约定是张量分析中一种编写指标项求和的简洁且强大的方式。不再显式地写出求和符号，而是在项中重复出现的指标隐含了对该指标所有可能值的求和。如果一个指标在单项中出现两次（一次



作为上标，一次作为下标，或在欧几里得空间中处于相同位置），则默认对该指标求和：

$$A_i B_i \equiv \sum_{i=1}^n A_i B_i$$

示例：对于两个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ，点积可以用爱因斯坦约定写为：

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$$

1.6 圆锥曲线

圆锥曲线是平面与双头圆锥相截得到的曲线。笛卡尔坐标系下圆锥曲线方程的一般形式为：

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

其中 A, B, C, D, E, F 是定义圆锥曲线形状和方向的常数。

圆锥曲线 方程与性质	
圆	方程： $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ 圆心： (h, k) , 半径： r
椭圆	方程： $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ 中心： (h, k) , 半长轴： a , 半短轴： b 方向： 若 $a > b$, 主轴沿 x 轴；若 $b > a$, 主轴沿 y 轴
抛物线	方程： $y - k = a(x - h)^2$ 顶点： (h, k) , 轴线： 垂直
双曲线	方程： $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ 中心： (h, k) , 实轴沿 x 轴, 虚轴沿 y 轴

Table 1: 不同圆锥曲线及其性质



1.7 量纲分析

1.7.1 引言

量纲分析用于：

- 检查方程的一致性，以及
- 预测不同物理量之间的关系。

本质上，它的基础是任何物理量都可以用几个基本量纲来表示，例如：

$$[M](\text{质量}) , [L](\text{长度}) , [T](\text{时间}) , [I](\text{电流}) , [\Theta](\text{温度})$$

每一个有效的物理方程必须是**量纲齐次的**，这意味着所有相加的项必须具有相同的量纲。

考虑牛顿第二定律：

$$F = ma$$

其量纲为：

$$[F] = [MLT^{-2}], [m] = [M], [a] = [LT^{-2}]$$

由于 $[F] = [m][a]$ ，该方程在量纲上是一致的。

1.7.2 白金汉 Π 定理（选修）

给定一个由下式描述的物理关系：

$$f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0$$

其中 Q_i 是 n 个物理变量，且这些变量涉及 k 个独立的基本量纲，则该方程可以改写为关于 $(n - k)$ 个独立的无量纲 Π 组的函数：

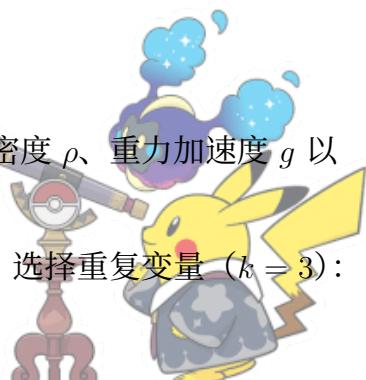
$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = 0$$

每个 Π 组是原始变量幂次的无量纲乘积：

$$\Pi = Q_1^a Q_2^b Q_3^c \dots$$

示例：求流体中球体所受阻力 F_D 的无量纲关系，考虑直径 D 、流速 V 、流体密度 ρ 、重力加速度 g 以及量纲为 $[ML^{-1}T^{-1}]$ 的流体动力粘度 μ 。

解：注意到 $n = 6, k = 3$ ，因此 π 项的数量 $p = 3$ ，我们预期有 3 个无量纲组。选择重复变量 ($k = 3$)：



D, V 和 ρ (它们量纲独立且涵盖了 M, L, T)。则:

$$\Pi_1 = F_D \cdot D^a V^b \rho^c \implies \Pi_1 = \frac{F_D}{\rho V^2 D^2}$$

这与阻力系数 C_D 相关。

$$\Pi_2 = \mu \cdot D^a V^b \rho^c \implies \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{1}{\text{Re}}$$

其中 Re 是雷诺数。

$$\Pi_3 = g \cdot D^a V^b \rho^c \implies \Pi_3 = \frac{g D}{V^2}$$

这是弗劳德数 (Fr) 平方的倒数。

$$F(C_D, \text{Re}, \text{Fr}) = 0 \implies C_D = f(\text{Re}, \text{Fr})$$

1.7.3 自然单位制

在物理学中，自然单位制是将某些基本物理常数设为 1 的单位制。最常用的一种设置如下常数为 1:

- \hbar (约化普朗克常数)
- c (真空中的光速)
- G (引力常数)
- k_B (玻尔兹曼常数)
- ϵ_0 (真空介电常数)

在不同单位制之间转换时，量纲分析用于恢复物理量的正确量纲。

示例：在自然单位制中，著名的质能等价方程给出为

$$E = m$$

其中 E 是能量， m 是质量。然而，在标准单位制中，能量和质量具有不同的量纲。能量单位为焦耳 (J)，量纲为 $[ML^2T^{-2}]$ ，而质量单位为千克 (kg)，量纲为 $[M]$ 。

使用量纲分析，我们通过引入光速 c 来恢复正确的量纲。能量和质量通过下式相关联:

$$E = mc^2$$



这里 c (光速) 的量纲为 $[LT^{-1}]$ 。现在两边的量纲匹配了，因为：

$$[E] = [ML^2T^{-2}], \quad [mc^2] = [M][L^2T^{-2}]$$

因此，在标准单位制中恢复后的方程为

$$E = mc^2$$

1.7.4 练习

普朗克单位制包括以下基本量：普朗克长度 (l_P)、普朗克时间 (t_P)、普朗克质量 (m_P)、普朗克电荷 (q_P)、普朗克温度 (T_P)、普朗克能量 (E_P)、普朗克力 (F_P) 和普朗克功率 (P_P)。每个单位都由基本常数的组合导出：

- 光速 (c)
- 引力常数 (G , 量纲为 $[M^{-1}L^3T^{-2}]$)
- 普朗克常数 ($\hbar = h/2\pi$, 量纲为 $[ML^2T^{-1}]$)
- 库仑常数关联项 (ϵ_0 , 此处 $[\epsilon] = [ML^3T^{-4}I^{-2}]$ 似指其相关量)
- 玻尔兹曼常数 (k_B , 量纲为 $[ML^2T^{-2}\Theta^{-1}]$)

推导上述各物理量。

1.8 张量

1.8.1 向量与向量空间

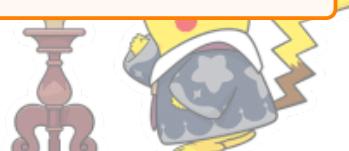
定义. 1.5: 向量

向量（记为字母上带箭头 (\mathbf{A}) 或加粗字母 (\mathbf{A})）是一个既有大小（记为 $|\mathbf{A}|$ 或 A ）又有方向的数学对象。这与标量不同，标量只有大小（例如温度、质量）。

定义. 1.6: 单位向量

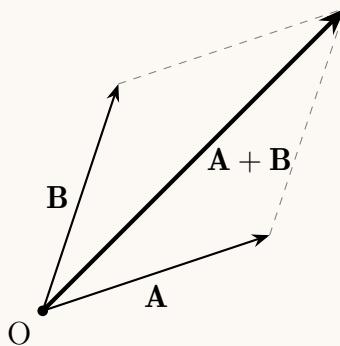
单位向量 ($\hat{\mathbf{u}}$) 的大小为 1，用于定义方向。标准笛卡尔单位向量是沿 x, y, z 轴的 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 。3D 空间中的向量 \mathbf{A} 可以用其笛卡尔分量 (A_x, A_y, A_z) 表示：

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}.$$



定理. 1.2: 平行四边形定则

两个向量的和可以形象化为以这两个向量为邻边（尾对尾放置）构成的平行四边形的对角线：

**定义. 1.7: 点积**

设两个向量之间的夹角为 θ 。如果 $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ 且 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, 则：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

定理. 1.3: 投影

\mathbf{a} 在 \mathbf{b} 上的投影由以下公式给出：

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$$

示例： 表面的有效面积 A_{eff} 可以定义为表面积在特定向量方向上的投影。如果 \mathbf{A} 是代表表面积的向量，而 \hat{v} 是感兴趣方向的单位向量，则有效面积由点积给出：

$$A_{\text{eff}} = \mathbf{A} \cdot \hat{v}$$

其中

- \mathbf{A} 是面积向量（大小代表面积，方向垂直于表面），
- \hat{v} 是方向单位向量，
- A_{eff} 是面积在 \hat{v} 方向上的投影。



定义. 1.8: 叉积

设两个向量之间的夹角为 θ 。如果 $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ 且 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, 则叉积的分量形式为:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

叉积的向量形式为:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin(\theta) \hat{n}$$

其中 \hat{n} 是垂直于 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 构成的平面的单位向量, 其方向遵循右手定则。

示例: 给定两个向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 构成三角形的两条边, 则三角形的面积 A 等于 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 叉积大小的一半。
数学表达式为:

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

定义. 1.9: 向量空间

域 \mathbb{F} (如 \mathbb{R} 或 \mathbb{C}) 上的向量空间 V 是配备有两种运算的集合:

- **向量加法:** $+ : V \times V \rightarrow V$
- **标量乘法:** $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$

且对于所有 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ 及标量 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ 满足以下公理:

- **加法结合律:** $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- **加法交换律:** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- **零向量存在性:** 存在 $\mathbf{0} \in V$ 使得 $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
- **加法逆元存在性:** 每个 $\mathbf{v} \in V$ 存在 $-\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
- **标量乘法兼容性:** $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$
- **标量乘法单位元:** $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
- **对向量加法的分配律:** $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$
- **对标量加法的分配律:** $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$



1.8.2 矩阵

定义 矩阵是由 m 行 n 列数字组成的矩形阵列。矩阵通常记为 A , 其元素写为 a_{ij} , 其中 i 是行索引, j 是列索引。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这里 A 是一个 $m \times n$ 矩阵。

矩阵乘法 矩阵乘法定义为第一个矩阵的行与第二个矩阵的列的点积。如果 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, 则它们的乘积 $C = AB$ 是一个 $m \times p$ 矩阵, 其元素为:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

标量乘法 矩阵 A 可以乘以一个标量 λ , 这会缩放矩阵的所有元素:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵行列式 对于 2×2 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

其行列式计算为

$$\det(A) = ad - bc$$



对于更大的矩阵，行列式可以使用代数余子式展开。 $n \times n$ 矩阵 A 的行列式为：

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

其中 A_{ij} 是通过删除 A 的第 i 行和第 j 列得到的矩阵。

逆矩阵

定义. 1.10: 余子式、代数余子式与伴随矩阵

设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 矩阵。元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 是通过删除 A 的第 i 行和第 j 列得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵的行列式。

a_{ij} 的代数余子式 C_{ij} 定义为：

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

A 的伴随矩阵，记为 $\text{adj}(A)$ ，由下式给出：

$$\text{adj}(A) = (C_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$$

定义. 1.11: 逆矩阵

设 A 是 $n \times n$ 矩阵。如果存在矩阵 B 使得

$$AB = BA = I_n$$

则称 B 为 A 的逆。其中 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵。如果此类矩阵存在，则称 A 是可逆的，逆矩阵记为 A^{-1} 。

定理. 1.4: 逆的存在性

一个 $n \times n$ 矩阵 A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$ 。

定理. 1.5: 通过伴随矩阵求逆

如果 A 是 $\det A \neq 0$ 的 $n \times n$ 矩阵，则：

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$$



1.8.3 张量

基 对于向量空间 V , 一组向量 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ 是 V 的一组基, 如果:

- **线性无关:** 集合中没有任何向量可以写成其他向量的线性组合。
- **张成:** V 中的每个向量都可以表示为基向量的线性组合。

示例:

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

是 \mathbb{R}^2 的一组基, 因为这些向量线性无关, 且任何向量 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 都可以写成:

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

基变换 设 V 是一个向量空间, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ 是其一组基。向量 $\mathbf{v} \in V$ 可以写为基向量的线性组合:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_n 是 \mathbf{v} 关于基 \mathcal{B} 的坐标。这些坐标组成坐标向量 $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ 。

考虑两组基:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \quad \text{和} \quad \mathcal{B}' = \{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n\}$$

目标是求出 $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ 在新基 \mathcal{B}' 下的表达。假设新基向量 \mathbf{b}'_i 表示为旧基向量的线性组合:

$$\mathbf{b}'_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} \mathbf{b}_j$$

其中 $P = [P_{ij}]$ 是将旧基 \mathcal{B} 变换为新基 \mathcal{B}' 的变换矩阵。

那么, 如果 \mathbf{v} 在基 \mathcal{B} 下的坐标为 $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, 其在新基 \mathcal{B}' 下的坐标 $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$ 为:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

其中 P^{-1} 是基变换矩阵的逆。



张量 张量是标量、向量和矩阵的推广。它可以看作是一个多维数字数组，在坐标变换下遵循特定的变换规则。

张量的阶（或秩）是指描述它所需的指标数量：

- 标量是 0 阶张量。
- 向量是 1 阶张量。
- 矩阵是 2 阶张量。
- 一般张量可能有 3 阶、4 阶或更高，取决于指标数量。

张量的分量通常用指标表示。例如，分量为 T_{ij} 的二阶张量 T 可以写为：

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

反变张量 (Contravariant Tensor) 当我们改变坐标时，反变张量的分量以特定方式变换。具体来说，反变张量的分量根据变换矩阵的逆矩阵进行变换。设 T 为反变向量。坐标变换时，分量 T^i 变换为：

$$T'^i = \sum_j A_j^i T^j$$

其中 A_j^i 是新坐标的变换矩阵。在指标符号中，上标表示该张量是反变的。

例如，考虑一个反变向量 $\mathbf{v} = (v^1, v^2)$ 。在坐标变换下，其分量变换为：

$$v'^1 = A_1^1 v^1 + A_2^1 v^2, \quad v'^2 = A_1^2 v^1 + A_2^2 v^2$$

协变张量 (Covariant Tensor) 相比之下，协变张量的分量变换方式不同。协变张量的分量根据变换矩阵本身进行变换。设 S 为协变向量。坐标变换下，其分量 S_i 变换为：

$$S'_i = \sum_j A_i^j S_j$$

其中 A_i^j 是新坐标的变换矩阵。在指标符号中，下标表示该张量是协变的。例如，考虑一个协变向量 $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ 。在坐标变换下，其分量变换为：

$$w'_1 = A_1^1 w_1 + A_2^1 w_2, \quad w'_2 = A_1^2 w_1 + A_2^2 w_2$$



1.8.4 标量场与矢量场

定义. 1.12: 标量场

标量场是一个数学函数，它将一个标量值分配给空间中的每一个点。其表示形式为：

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x})$$

其中 \mathbb{R}^n 是定义该场的空间， $\phi(\mathbf{x})$ 是点 \mathbf{x} 处的标量值。

示例：房间内各处的温度就是一个标量场。如果 $T(\mathbf{x})$ 表示点 \mathbf{x} 处的温度，那么 T 就是一个标量场。

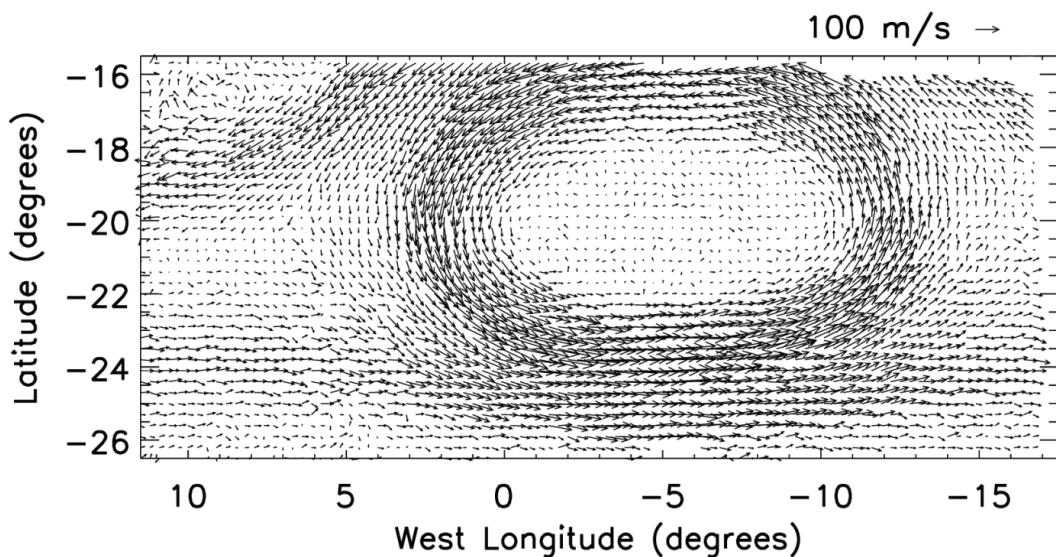
定义. 1.13: 矢量场

矢量场是一个将向量分配给空间中每一个点的函数。其表示形式为：

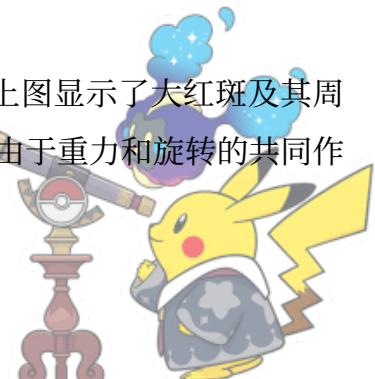
$$\mathbf{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{V}(\mathbf{x})$$

其中 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 是点 \mathbf{x} 处的矢量场， \mathbb{R}^n 是定义该矢量场的空间。

练习 (2020 GeCAA)



在以下问题中，我们将根据速度场数据研究木星大红斑 (GRS) 的流体力学。上图显示了大红斑及其周围区域的相对速度图。箭头根据不同点的风向和风速大小进行了定向和缩放。由于重力和旋转的共同作



用，木星在其两极略微扁平。近似木星形状的类球面方程可以表示为：

$$\frac{x^2}{R_e^2} + \frac{y^2}{R_p^2} = 1$$

其中 $R_e = 7.15 \times 10^7 \text{ m}$ 是木星的赤道半径， $R_p = 6.69 \times 10^7 \text{ m}$ 是极半径。该类球面在任何方向上的曲率半径可以通过以下方程计算 ($\epsilon = \frac{R_e}{R_p}$)：

$$r(\phi) = R_e(1 + \epsilon^2 \tan^2 \phi)^{1/2}$$

$$R(\phi) = R_e \epsilon^2 \left(\frac{r(\phi)}{R_e \cos \phi} \right)^3$$

其中 $r(\phi)$ 和 $R(\phi)$ 分别是作为行星纬度 ϕ 函数的纬向（即特定纬度的区域）和经向（即纵向）曲率半径。木星的恒星自转周期为 $P = 3.57 \times 10^4 \text{ s}$ 。

(a) 分别计算大红斑中心处的纬向和经向半径值 (\bar{r} 和 \bar{R})。

(b) 估计大红斑的离心率。

(c) 任何一点的“涡度”是处于流体参考系中的观察者所测量的流体局部旋转的量度。在数学上，它计算为速度场的“旋度”（矢量导数积）。在这种情况下，平均相对涡度可以用以下方程估算：

$$\zeta = \frac{V_v}{L_{GRS} A_{GRS}}$$

其中 V_v 是速度场显示的风速最大值， L_{GRS} 是大红斑的周长， A_{GRS} 是大红斑的面积。估算大红斑的平均相对涡度。

提示：椭圆的周长可以用对应的辅助圆和短轴圆周长的平均值很好地近似。

(d) 通过加上科里奥利参数求绝对涡度 $\zeta_a = (\zeta + f)$ ：

$$f = 2\Omega \sin \phi$$

其中 Ω 是木星自转的角速度， ϕ 是相应的纬度。

(e) 如果绝对涡度的符号与纬度相同，我们称该风暴为“气旋风暴”。如果符号相反，则称为“反气旋风暴”。大红斑是气旋性的还是反气旋性的？

(f) 假设大红斑移动到另一个纬度 ϕ_1 ，在那里绝对涡度改变了符号（从反气旋变为气旋，反之亦然）。假设大红斑发生最小位移，我们期望在什么 ϕ_1 值时发生这种变化？



在你的分析中，假设新位置的大红斑具有相同的纬度跨度，并且具有与原始位置相同的风速和离心率。

1.9 微分与偏微分

1.9.1 简介

微分用于单一自变量的函数 $y = f(x)$ 。它测量 y 相对于 x 的瞬时变化率。函数 $f(x)$ 相对于 x 的导数使用极限定义，记为 $\frac{df}{dx}$ 或 $f'(x)$ 。

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ (第一性原理)}$$

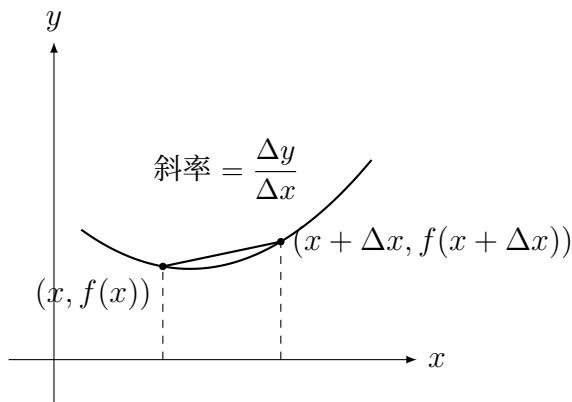


Figure 1: 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，微分即为斜率

1.9.2 性质与公式

定义. 1.14: 基本性质

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是可导函数（导数存在）， c 和 n 是任意实数：

$$(cf)' = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \text{ (幂法则)}$$

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ (乘法法则)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x) \text{ (链式法则)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ (除法法则)}$$



定义. 1.15: 常用公式

$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$	$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln(a), a > 0$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}, x > 0$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{x \ln a}, x > 0$

1.9.3 偏微分

偏微分用于包含两个或多个自变量的函数，例如 $z = f(x, y)$ 。偏导数测量函数相对于一个变量的变化率，同时保持所有其他变量不变。例如， $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是在保持 y 不变的情况下对 x 的导数。

示例：考虑函数

$$f(x, y) = x^2y + e^{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2y + e^{xy}) = 2xy + ye^{xy}$$

1.9.4 数值分析**定义. 1.16: 二分法**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 符号相反，即：

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

根 r 位于 a 和 b 之间。我们可以通过不断将区间减半来逼近根。区间中点 m 由下式给出：

$$m = \frac{a+b}{2}$$

然后检查 $f(m)$ 的符号：

- 如果 $f(m) = 0$ ，则 m 就是根。
- 如果 $f(a) \cdot f(m) < 0$ ，根位于 a 和 m 之间，于是设置 $b = m$ 。



- 如果 $f(m) \cdot f(b) < 0$, 根位于 m 和 b 之间, 于是设置 $a = m$ 。

重复此过程直到区间足够小。

示例: 在区间 $[1, 2]$ 上寻找 $f(x) = x^2 - 2$ 的根:

- $f(1) = 1^2 - 2 = -1$
- $f(2) = 2^2 - 2 = 2$
- 由于 $f(1) \cdot f(2) < 0$, 根位于 $[1, 2]$ 。
- 第一次逼近: $m_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$ 。
- $f(1.5) = 1.5^2 - 2 = 0.25$ 。由于 $f(1) \cdot f(1.5) < 0$, 新区间为 $[1, 1.5]$ 。

定义. 1.17: 牛顿-拉弗森法

设 $f(x)$ 为可导函数, 且 x_0 为根的初始猜测值。下一次逼近 x_1 由下式给出:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

该方法迭代继续:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

示例: 为了求解 $f(x) = x^2 - 2 = 0$, 我们求导得 $f'(x) = 2x$ 。使用初始猜测值 $x_0 = 1.5$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} \\ x_1 &= 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2(1.5)} \approx 1.4167 \end{aligned}$$

1.9.5 线性近似

为了寻找线性近似, 我们首先回顾曲线在某一点的切线定义。在 $x = a$ 处的切线方程为:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



这提供了函数在 $x = a$ 附近最佳线性近似：

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

示例：当弧度值 x 很小时， $\sin x \approx x$ 。

1.9.6 泰勒级数

函数 $f(x)$ 关于点 a 的泰勒级数给出如下：

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

其中 $f^{(n)}(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 阶导数。

示例：考虑函数 $f(x) = e^x$ 。 e^x 的导数为：

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f^{(3)}(x) = e^x, \quad \dots$$

在 $x = 0$ 处求值，得到：

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, \quad f^{(n)}(0) = 1 (\text{对于所有 } n)$$

因此， e^x 在 $x = 0$ 附近的泰勒级数（也称为麦克劳林级数）为：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

1.9.7 一阶导数判别法

定义. 1.18: 临界点

设 $f(x)$ 是在一个包含 c 的区间上可导的函数（可能在 c 处不可导）。 f 的临界点是满足 $f'(c) = 0$ 或 $f'(c)$ 不存在的点 c 。



定理. 1.6: 一阶导数判别法

假设 c 是函数 f 的一个临界点。

- 如果当 $x < c$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x > c$ 时 $f'(x) < 0$, 则 f 在 c 处有局部极大值。
- 如果当 $x < c$ 时 $f'(x) < 0$, 当 $x > c$ 时 $f'(x) > 0$, 则 f 在 c 处有局部极小值。
- 如果 $f'(x)$ 在 c 的两侧符号相同, 则 f 在 c 处没有局部极值。

示例 (2025 IOAA) 事件视界望远镜 (EHT) 发布了 M87 星系中心的超大质量黑洞图像, 如 Fig. 2 左侧面板所示。为了理解该图像的一些简单特征, 我们考虑一个质量为

$$M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$$

的非旋转、静态、球对称黑洞的简化模型, 其周围环绕着一个无质量的薄平面吸积盘, 内半径和外半径分别为:

$$a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}, \quad a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}},$$

其中 R_{SC} 是史瓦西半径。该系统的俯视图草图显示在 Fig. 2 的右侧面板中 (图未按比例绘制)。

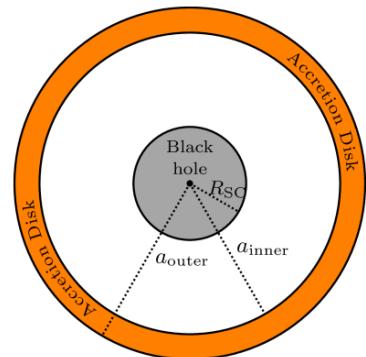
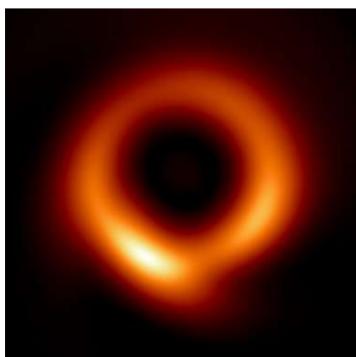


Figure 2: 左图: M87 中心黑洞的 EHT 图像。右图: 被薄吸积盘包围的黑洞俯视示意图。

我们假设吸积盘是唯一需要考虑的光源。盘上的每一个点都向各个方向发射光线。这些光线在黑洞引力场的影响下传播。光线的路径由以下两个方程控制 (这两个方程类似于描述物体围绕太阳运动的方程):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) = E \tag{1}$$

$$v_\phi = r\omega = \frac{L}{r} \tag{2}$$

其中 $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ 是径向坐标, $\phi \in [0, 2\pi]$ 是方位角, E 和 L 分别是与能量守恒和角动量守恒相关的



常数。这里: $v_r = \frac{dr}{dt}$ 是径向速度的大小, v_ϕ 是切向速度的大小, $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ 是角速度。我们定义轨迹的撞击参数 b 为:

$$b = \frac{L}{\sqrt{2E}}.$$

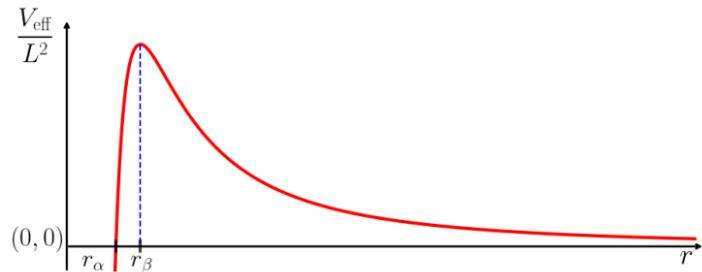
在此问题中忽略时间膨胀效应。通过对第一个方程关于时间求导, 可以得到另一个有用的方程:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2r^4} = 0. \quad (3)$$

- (a) 黑洞周围可以存在圆形光轨迹。用 M 及相关常数表示此类光子轨迹的半径 r_{ph} 和撞击参数 b_{ph} 。
- (b) 计算完成圆形光轨迹一整圈所需的时间 T_{ph} (以秒为单位)。
- (c) 光轨迹的径向速度方程可以与以下形式的方程进行比较:

$$\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E. \quad (4)$$

下图显示了 V_{eff}/L^2 随 r 变化的示意图。图中指出了两个特殊半径 r_α 和 r_β 。求出 r_α 和 r_β 用 M 及相关常数表示的表达式。



1.10 积分

1.10.1 原函数与不定积分

给定函数 $f(x)$ 的原函数是一个函数 $F(x)$, 满足:

$$F'(x) = f(x)$$

示例: 设 $f(x) = 2x$ 。对应的原函数 $F(x)$ 为:

$$F(x) = x^2 + C$$



其中 C 是一个常数，称为积分常数。出现这个常数是因为任何常数的导数都是零，因此存在无数个仅相差一个常数的函数。

不定积分是寻找函数原函数的操作。记作：

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

不定积分的一些重要性质包括：

定理. 1.7: 性质

- 线性：

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

- 常数因子：

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

其中 c 是常数。

定理. 1.8: 基本原函数

- 幂法则：

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{当 } n \neq -1$$

- 指数函数：

$$\int e^x dx = e^x + C$$

- 三角函数：

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$



1.10.2 定积分

定义. 1.19: 黎曼和

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数, 将该区间划分为 n 个子区间:

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

其中 $x_0 = a$, $x_n = b$, 划分点的选择满足 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 。黎曼和定义为:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

其中:

- x_i^* 是从第 i 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中选取的样本点,
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 是第 i 个子区间的宽度。

在每个子区间中选择样本点 x_i^* 有几种方法, 这会导致不同类型的黎曼和:

- **左黎曼和:** $x_i^* = x_{i-1}$, 即每个子区间的左端点。
- **右黎曼和:** $x_i^* = x_i$, 即每个子区间的右端点。
- **中点黎曼和:** $x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, 即每个子区间的中点。

定义. 1.20: 定积分

定积分定义为当子区间数量 $n \rightarrow \infty$ 且最大子区间宽度 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 时黎曼和的极限:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

定积分可以解释为曲线 $y = f(x)$ 从 $x = a$ 到 $x = b$ 之间所围成的有符号面积。如果 $f(x)$ 位于 x 轴上方, 则面积为正; 如果 $f(x)$ 位于 x 轴下方, 则面积为负。



定理. 1.9: 微积分基本定理

或者, 可以使用微积分基本定理来计算定积分:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任何一个反导数 (原函数)。

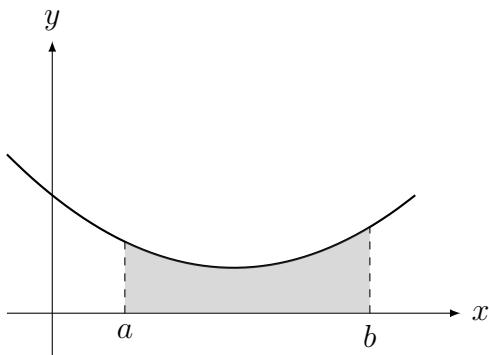


Figure 3: 从 $x = a$ 到 $x = b$ 曲线 $y = f(x)$ 下方的有符号面积由 $\int_a^b f(x) dx$ 给出。

定积分的一些重要性质包括:

定义. 1.21: 性质

- 线性:

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx$$

其中 c_1 和 c_2 为常数。

- 可加性:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

对于 a 和 b 之间的任何一点 c 均成立。

- 积分限反转:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

反转积分限会改变积分值的符号。



- 零宽积分:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

在单点上的积分始终为零。

1.10.3 换元积分法

定理. 1.10: 不定积分的换元法

假设我们要计算以下不定积分:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

我们可以使用换元法, 令 $u = g(x)$, 则 $du = g'(x) dx$ 。这会将积分转化为:

$$\int f(u) du$$

现在, 我们可以相对于 u 进行积分, 然后再替换回 x 的形式。

示例: 考虑积分

$$\int xe^{x^2} dx$$

令

$$u = x^2, \quad du = 2x dx$$

因此, 积分变为:

$$\frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

定理. 1.11: 定积分的换元法

对于定积分, 积分限根据换元进行相应的改变。假设我们有:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

令 $u = g(x)$, 则积分限转换如下:

$$u(a) = g(a) \quad \text{且} \quad u(b) = g(b)$$



积分变为：

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

我们现在可以计算关于 u 的定积分。

1.10.4 分部积分法

定理. 1.12: 定积分的分部积分法

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

其中选择 $u(x)$ 是为了简化 $u'(x)$, 而 $v'(x)$ 应是易于积分的。

证明：分部积分法基于导数的乘法法则：

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

改写并对两边积分即得到分部积分公式：

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

示例：计算积分

$$\int xe^x dx$$

令 $u = x$, 则 $du = dx$; 令 $dv = e^x dx$, 则 $v = e^x$ 。使用分部积分公式：

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

定理. 1.13: 不定积分的分部积分法

要使用分部积分法求解积分, 我们从被积函数中选择 u 和 dv 。对 u 微分得到 du , 对 dv 积分得到 v 。代入公式可得：

$$\int u dv = uv - \int v du$$



1.10.5 多重积分、线积分与面积分

定义. 1.22: n 维积分

在 n 维空间中, 函数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的积分给出如下:

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{b_2} \cdots \int_{x_n=a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1$$

示例: 函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ 上的二维积分为:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx$$

定义. 1.23: 线积分

线积分是函数沿曲线或路径的积分。设 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 是曲线 C 的参数化表示, t 的范围从 a 到 b 。那么, 标量函数 f 沿 C 的线积分给出如下:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

如果被积函数涉及矢量场 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, 则线积分为:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left(F_1(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_2(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + F_3(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt$$

定义. 1.24: 面积分

面积分涉及对表面 S 进行积分。标量函数 $f(x, y, z)$ 在表面 S 上的面积分为:

$$\int_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

其中 $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 是表面的参数化表示, 行列式项是从 (u, v) 参数空间到 (x, y, z) 空间转换的雅可比行列式。

对于矢量场 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, 面积分为:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

其中 $\mathbf{n}(u, v)$ 是表面上每个点的单位法矢量。



1.10.6 梯形法则与辛普森法则

对于难以进行解析积分的复杂函数，可以使用梯形法则等数值方法。

定理. 1.14: 梯形法则

设 f 为区间 $[a, b]$ 上的连续函数。将该区间划分为 n 个宽度为

$$h = \frac{b - a}{n}$$

的等宽子区间，定义划分点为 $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$)。

梯形法则通过下式近似定积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$

该方法对应于在每个子区间上用直线近似 f 的图形，并对所得梯形的面积求和。

另一种更精确的数值近似方法是辛普森法则，它通过用抛物线拟合曲线段来估算曲线下方的面积。

定理. 1.15: 辛普森法则

设 f 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数，并假设 n 是一个偶正整数。令 $h = \frac{b - a}{n}$ 且划分点为 $x_i = a + ih$ ，辛普森法则近似计算

$$\int_a^b f(x) dx$$

为：

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ 奇数}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ 偶数}}}^{n-2} f(x_i) + f(b) \right]$$

该方法通过在每对子区间上用抛物线近似 f 来推导，对于足够光滑的函数，其精度显著提高。

1.10.7 微分方程

简介 常微分方程 (ODE) 是涉及函数及其导数的方程。一般的一阶常微分方程形式为：

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$



可分离变量的常微分方程 如果一阶常微分方程可以写成：

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

则称其为可分离变量的。我们可以通过分离变量来求解：

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

并对两边积分。

积分因子 一阶线性常微分方程的形式为：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

可以通过引入以下积分因子来求解：

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

$$y\mu(x) = \int Q(x)\mu(x) dx$$

初始条件 初始条件是对解（及其可能的导数）在特定点（通常记为 t_0 或 x_0 ）的值的规定。对于 n 阶常微分方程，通常需要 n 个初始条件来确定唯一解。



1.11 坐标系

坐标系	定义与转换
极坐标 (2D)	<p>将平面上的点表示为 (r, θ), 其中:</p> <p>r: 距原点的距离</p> <p>θ: 与正 x 轴的夹角</p> <p>转换为直角坐标: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$</p>
柱坐标 (3D)	<p>极坐标的扩展: (r, θ, z)</p> <p>r: 距 z 轴的径向距离</p> <p>θ: xy 平面内相对于正 x 轴的方位角</p> <p>z: 垂直坐标 (与直角坐标相同)</p> <p>转换为直角坐标: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$</p>
球坐标 (3D)	<p>将 3D 空间中的点表示为 (ρ, θ, ϕ), 其中:</p> <p>ρ: 距原点的距离</p> <p>θ: 从正 z 轴测量的极角 ($0 \leq \theta \leq \pi$)</p> <p>ϕ: 在 xy 平面内从正 x 轴测量的方位角 ($0 \leq \phi < 2\pi$)</p> <p>转换为直角坐标:</p> $x = \rho \sin \theta \cos \phi,$ $y = \rho \sin \theta \sin \phi,$ $z = \rho \cos \theta$

Table 2: 坐标系及其性质



2 球面三角学与天球坐标系

2.1 球面三角学

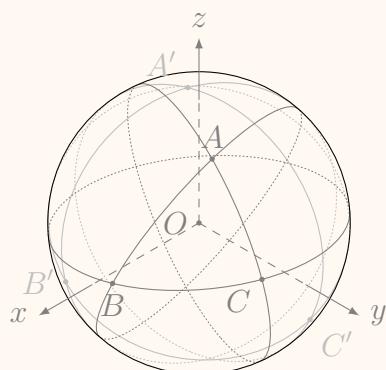
定义. 2.1: 基本术语

在半径为 R 的球面上, 我们定义:

- **大圆 (Great Circle)**: 圆心与球心重合的球面圆。
- **球面三角形 (Spherical Triangle)**: 由三段大圆弧组成的三角形。
- **边 (Sides)**: 球面三角形的边即为大圆弧的长。
- **角 (Angles)**: 球面三角形的角是顶点处两条大圆切线之间的夹角。

考虑单位球 (半径 = 1) 上的球面三角形, 其顶点为 A, B, C 。我们记:

- 边长: $a = BC, b = AC, c = AB$ (均为弧长)
- 角度: $A = \angle BAC, B = \angle ABC, C = \angle ACB$



定义. 2.2: 球面角盈

球面三角形的内角之和大于 π 弧度 (180°)。其差值称为**球面角盈 (Spherical Excess)** E :

$$E = A + B + C - \pi$$



定理. 2.1: 球面三角形面积

在半径为 R 的球面上, 球面三角形的面积为:

$$\text{面积} = R^2 \cdot E$$

定理. 2.2: 球面余弦定理

对于边长为 a, b, c 且对角为 A, B, C 的球面三角形:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

同样地, 对于角度有:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

2.2 天球坐标系

2.2.1 地平坐标系 (Alt-Az System)

地平坐标系基于观测者在地球上的位置。它以局部地平线为基准, 是一个动态坐标系, 随观测者位置和时间的变化而变化。

- **高度 (Altitude, Alt):** 物体距离地平线的垂直角度。范围从 0° (地平线) 到 90° (天顶, 即观测者正上方)。
- **方位角 (Azimuth, Az):** 从正北方向沿顺时针测量。 0° 为北, 90° 为东, 180° 为南, 270° 为西。

2.2.2 赤道坐标系 (Equatorial System)

该坐标系相对于恒星固定, 不随观测者位置改变。它基于天球, 是将地球的赤道和本初子午线延伸到太空的结果。



- **赤经 (Right Ascension, RA)**: 类似于经度。从春分点开始沿天赤道向东测量。通常以时、分、秒表示，24 小时对应 360° 。
- **赤纬 (Declination, Dec)**: 类似于纬度。测量天球赤道以北或以南的夹角。范围从 -90° (天南极) 到 $+90^\circ$ (天北极)。

2.2.3 黄道坐标系 (Ecliptic System)

黄道坐标系基于地球绕太阳公转的轨道平面。它在描述行星位置以及太阳、月球运动时非常有用。

- **黄经 (λ)**: 沿黄道从春分点开始测量。范围为 0° 到 360° 。
- **黄纬 (β)**: 垂直于黄道平面测量。范围为 -90° 到 $+90^\circ$ 。

2.2.4 银道坐标系 (Galactic System)

银道坐标系用于描述天体相对于银河系平面的位置。

- **银经 (l)**: 在银道面内从银心方向开始测量。范围为 0° 到 360° 。
- **银纬 (b)**: 垂直于银道面测量。范围为 -90° 到 $+90^\circ$ 。

2.2.5 拱极星 (Circumpolar Stars)

拱极星是指在给定纬度下永不落入地平线以下的恒星。它们位置靠近天极，全天都在围绕天极作圆周运动。在靠近极地的地区，这些恒星全年可见。数学上，恒星的赤纬 δ 必须满足：

$$\delta \geq 90^\circ - \phi$$

其中 ϕ 是观测者的地理纬度。

3 天文时间

3.1 太阳时 (Solar Time)

太阳时基于太阳在天空中的位置。它与日常生活中使用的时间（基于地球相对于遥远恒星的自转）有所不同。



3.1.1 真太阳时 (Apparent Solar Time)

真太阳时基于观测到的太阳实际位置。它由地方子午线和太阳的瞬时位置决定，因地球轨道为椭圆而产生变化。

$$\text{真太阳时} = \text{地方平太阳时} + \text{时差}$$

时差 (*Equation of Time*) 修正了地球轨道离心率和黄赤交角带来的影响。

3.1.2 平太阳时 (Mean Solar Time)

平太阳时基于地球自转的平均速度，忽略了地球运动的不均匀性。一个平太阳日的长度恒定为 86,400 秒。

$$\text{平太阳时} = \text{世界时 (UT)} + \text{经度修正}$$

3.2 恒星时 (Sidereal Time)

恒星时基于地球相对于遥远恒星（而非太阳）的自转，这对定位天体至关重要。

3.2.1 恒星日 (Sidereal Day)

恒星日是地球相对于固定恒星自转一周所需的时间。约为 23 小时 56 分 4.1 秒，比太阳日稍短。

$$\text{地方恒星时 (LST)} = \text{GMST} + \text{经度修正}$$

其中 GMST 是格林尼治平恒星时。

3.3 日心儒略日 (Heliocentric Julian Date, HJD)

日心儒略日是对儒略日 (JD) 进行修正后的时间，修正了地球与太阳之间的光行差。这在变星定时或系外行星凌日等高精度观测中至关重要。

$$\text{HJD} = \text{JD} + \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{s}}}{c}$$

其中 \mathbf{r} 是太阳到地球的矢量， $\hat{\mathbf{s}}$ 是指向观测天体的单位矢量， c 是光速。



3.4 时区与世界时

世界时 (Universal Time) 是基于地球自转的时间标准。**地方平太阳时 (LMT)** 是特定经度下的平均太阳时：

$$LMT = UT + \frac{\lambda}{15^\circ} \text{ 小时}$$

(东经 λ 为正，西经为负)。

3.5 年的不同定义

- **恒星年 (Sidereal Year)**: 地球相对于固定恒星公转一周的时间。 ≈ 365.25636 天。
- **回归年 (Tropical Year)**: 两次春分点之间的时间间隔。 ≈ 365.24219 天。用于历法以保持季节对齐。
- **近点年 (Anomalistic Year)**: 地球连续两次经过近日点的时间间隔。 ≈ 365.25964 天。
- **儒略年 (Julian Year)**: 精确定义为 365.25 天。常用于天文学计算。

3.6 时差 (Equation of Time)

时差量化了真太阳时与平太阳时之间的差异：

$$\text{时差} = \text{真太阳时} - \text{平太阳时}$$

这种差异源于：

- 地球轨道的椭圆性 (开普勒第二定律)。
- 地球自转轴的倾斜 (黄赤交角)。



4 天体物理中的测量单位

物理量	数值 / 定义
距离单位	
天文单位 (AU)	$1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$ (地球与太阳之间的平均距离)
秒差距 (pc)	$1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m} \approx 3.26 \text{ ly}$ (1 AU 所对应的周年视差为 1 角秒时的距离)
光年 (ly)	$1 \text{ ly} = 9.461 \times 10^{15} \text{ m}$
千秒差距 (kpc)	$1 \text{ kpc} = 10^3 \text{ pc}$
百万秒差距 (Mpc)	$1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc}$
能量单位	
电子伏特	$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$
尔格	$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$
光度与通量	
太阳光度	$1 L_\odot = 3.828 \times 10^{26} \text{ W}$
通量	W m^{-2} 或 $\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$
光谱单位	
波长	$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$
温度	
开尔文	$K = {}^\circ C + 273.15$ (黑体辐射和恒星温度的标准单位)

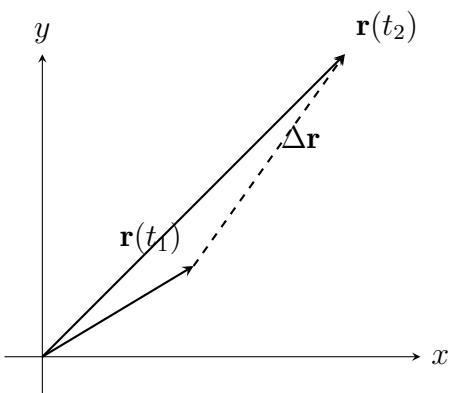
5 基础力学

5.1 运动学

5.1.1 直线运动

我们可以使用位置矢量 $\mathbf{r}(t)$ 来确定质点在时间 t 时在平面内的位置。





上图展示了质点在两个不同时刻 t_1 和 t_2 的位置。位移矢量由下式给出：

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$$

在时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内的平均速度为：

$$\mathbf{v}_{\text{av}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

时刻 t_0 的瞬时速度通过取 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限获得：

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

瞬时速率是速度矢量的模：

$$v = |\mathbf{v}|$$

平均加速度是速度的变化率：

$$\mathbf{a}_{\text{av}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

而瞬时加速度为：

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

假设一个质点以恒定加速度 \mathbf{a} 运动。设在时刻 t_0 时，其速度和位置分别为 \mathbf{v}_0 和 \mathbf{x}_0 。那么，其运动方程可以描述为：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0)$$

$$|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{v}_0|^2 = 2 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$



矢量的时间导数提供了关于矢量大小和方向变化率的信息。

5.1.2 相对运动

简介 让我们考虑在直线或平面上运动的两个物体 A 和 B 。物体 A 相对于物体 B 的速度由下式给出：

$$\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$$

其中：

- \mathbf{v}_A 是物体 A 相对于固定参考系的速度。
- \mathbf{v}_B 是物体 B 相对于同一参考系的速度。
- $\mathbf{v}_{A/B}$ 是物体 A 相对于物体 B 的速度。

当两个物体相互绕转时，需要结合它们的角速度来确定相对角速度。如果物体 A 的角速度为 ω_A ，物体 B 的角速度为 ω_B ，则 A 相对于 B 的相对角速度 $\omega_{A/B}$ 为：

$$\boldsymbol{\omega}_{A/B} = \boldsymbol{\omega}_A - \boldsymbol{\omega}_B$$

这里假设两个物体都绕同一轴旋转。

逆行运动 逆行运动是行星相对于背景恒星表现出的表观向后运动，这是由地球和该行星的相对轨道运动引起的。地球在其内侧轨道上运行得更快。

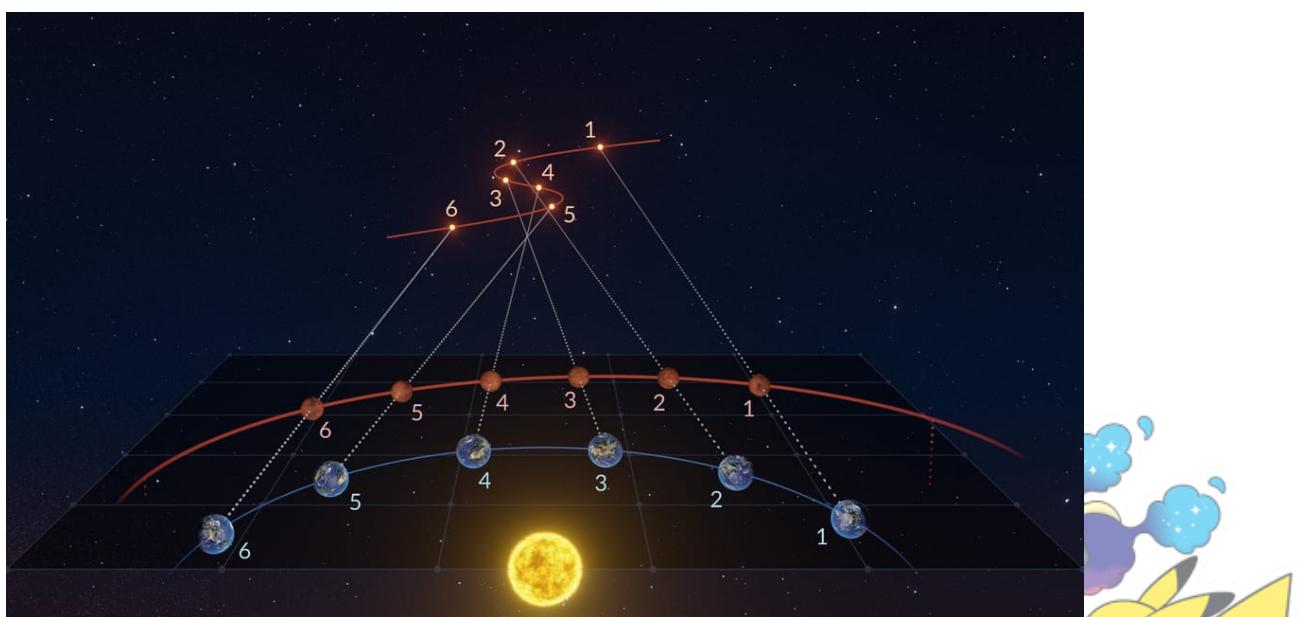


Figure 4: 来源: <https://starwalk.space/en/news/what-is-retrograde-motion>

示例：已知：

$$T_E = 365.25 \text{ 天}$$

$$T_{Mars} = 686.98 \text{ 天}$$

角速率：

$$\omega_E = \frac{360^\circ}{365.25} = 0.9856^\circ/\text{天}$$

$$\omega_{Mars} = \frac{360^\circ}{686.98} = 0.524^\circ/\text{天}$$

相对角速率：

$$\omega_{rel} = \omega_E - \omega_{Mars} = 0.4616^\circ/\text{天}$$

这种相对角运动导致火星在冲日期间相对于恒星表现出向后移动。行星相邻两次逆行运动之间的时间间隔等于其会合周期。

会合周期与恒星周期 会合周期 (T_{syn}) 是从地球观测到的行星连续两次处于相同构型（例如从冲到下一次冲，或从合到下一次合）的时间间隔。

天体的恒星周期 (T_s) 是指其相对于固定的背景恒星绕太阳公转一周所需的时间。

示例：设

- T_E = 地球的恒星周期
- T_P = 行星的恒星周期

对于**地内行星**（水星、金星）：

$$\frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{T_P} - \frac{1}{T_E}$$

对于**地外行星**（火星、木星、土星）：

$$\frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_P}$$

引力弹弓效应 引力弹弓效应（也称为引力助推）是指航天器利用行星或卫星的引力来改变其轨道并增加速度。这是通过飞越行星或卫星实现的，航天器在受到行星引力场吸引时会加速。该效应常用于节省



燃料并将航天器导向目的地。在数学上，飞越期间的速度变化可以描述为：

$$\Delta v = v_{\text{航天器}} + v_{\text{行星}}$$

其中：

1. $v_{\text{航天器}}$ 是航天器的速度，且
2. $v_{\text{行星}}$ 是从航天器参考系看到的行星速度。

5.2 牛顿定律

第一定律（惯性定律） 除非受到外力作用，否则物体将保持静止状态，或保持匀速直线运动。

$$\sum \mathbf{F} = 0 \implies \mathbf{a} = 0$$

第二定律 质点受到的合外力等于其动量随时间的变化率：

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

对于质量恒定的情况：

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

这是牛顿第二定律最常用的形式。

第三定律 每一个作用力都有一个大小相等、方向相反的反作用力：

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

5.3 线动量

5.3.1 简介

线动量是力学中的一个基本概念，它通过物体的质量和速度来描述其运动。它定义为物体的质量与速度的乘积：

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

其中：



- \mathbf{p} 是物体的线动量,
- m 是物体的质量,
- \mathbf{v} 是物体的速度。

5.3.2 动量守恒定律

在一个孤立系统中（无外力作用），系统的总线动量保持不变。这就是所谓的动量守恒定律。在数学上，对于一个质点系：

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \text{常数}$$

其中 \mathbf{p}_i 是第 i 个质点的线动量。

5.3.3 冲量

作用在物体上的力 \vec{F} 的冲量定义为物体动量的变化。数学表达为：

$$\mathbf{J} = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t$$

其中 \mathbf{J} 是冲量， $\Delta \mathbf{p}$ 是动量变化， \mathbf{F} 是平均力， Δt 是力作用的时间间隔。

5.3.4 火箭方程

设火箭在极短时间间隔 dt 内排出微小质量燃料 dm 。根据动量守恒定律：

$$\text{初始动量} = \text{最终动量}$$

初始时，火箭的动量为

$$p_{\text{初始}} = m(t)v(t)$$

排出 dm 燃料后，火箭的质量变为 $m(t) - dm$ ，其速度变为 $v(t) + dv$ 。由于排出的燃料在惯性参考系中的速度为 $v - u$ ，其动量为 $dm \cdot (v - u)$ 。因此，最终动量为：

$$p_{\text{最终}} = (m(t) - dm)(v + dv) + dm(v - u)$$



利用微分近似（忽略高阶项 $dm dv$ ）并令动量相等，可得：

$$m dv = u dm$$

从初始质量 m_0 到最终质量 m_f ，以及从初始速度 v_0 到最终速度 v_f 进行积分：

$$\int_{v_0}^{v_f} dv = u \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m}$$

$$\boxed{v_f - v_0 = u \ln \frac{m_0}{m_f}}$$

若有外力（如重力 g 或空气阻力 $F_{\text{阻力}}$ ）作用于火箭，则广义形式为：

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} + F_{\text{外力}}(t)$$

其中 $F_{\text{外力}}(t)$ 代表任何附加的作用力。

5.4 力、转矩与物体的平衡

力是任何导致物体运动状态发生改变的相互作用。它是一个矢量，既有大小又有方向。用矢量表示为：

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

SI 单位：牛顿 (N)，其定义为：

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$$

力的示例：

- 重力： $\mathbf{F}_g = mg$
- 支持力：来自表面的垂直反作用力
- 摩擦力： $\mathbf{f} = \mu N$ (阻碍运动)
- 张力：通过绳索传递的力

由作用在距离支点 \mathbf{r} 处的力 \mathbf{F} 产生的转矩（力矩） τ 是两者的叉积：

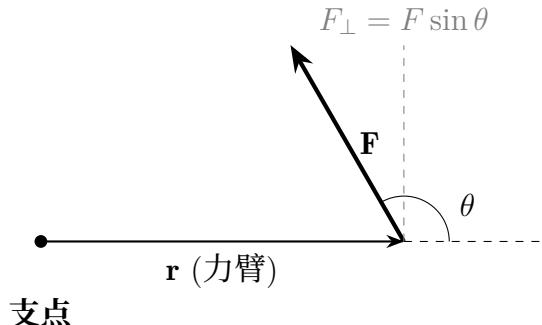
$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



其大小由下式给出：

$$\tau = rF \sin(\theta)$$

SI 单位：牛顿·米 (N · m)



当物体受到的合外力为零，且合外力矩也为零时，称该物体处于平衡状态。平衡分为两种类型：

- 平动平衡：作用在物体上的所有力之和为零：

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

- 转动平衡：作用在物体上的所有力矩（关于任意点）之和为零：

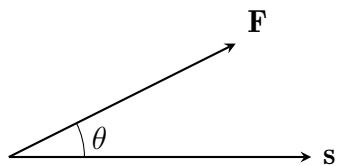
$$\sum \tau = 0$$

5.5 能量

当一个恒力 \mathbf{F} 作用于物体并产生位移 \mathbf{s} 时，该力所做的功定义为点积：

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos \theta$$

其中 θ 是力与位移之间的夹角。



如果力不是恒定的，则：

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

其中 C 是路径，注意：



- 功是一个标量。
- 若力和位移方向相同, $W > 0$ 。
- 若力阻碍运动 (如摩擦力), $W < 0$ 。
- 若 $\mathbf{F} \perp \mathbf{s}$, 则 $W = 0$ (力不做功)。

对于质量为 m 的物体在垂直高度 h 内移动:

$$W_g = -mgh \quad (\text{若物体被向上提升})$$

以及

$$W_g = +mgh \quad (\text{若物体向下移动})$$

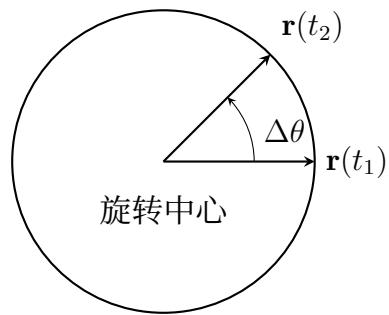
以速度 v 运动、质量为 m 的物体的动能为:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

5.6 圆周运动

5.6.1 运动学

考虑一个物体 (例如系在绳子上的狗) 绕固定点以半径 r 旋转。



- 角位移: $\Delta\theta$ (单位: 弧度)

- 角速度: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

- 角加速度: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

转动运动学方程 (类似于直线运动) 为:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$



$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

对于半径为 r 的圆周运动物体,

$$v = r\omega$$

是其切向（线）速率。

切向加速度为:

$$a_{\tan} = r\alpha$$

向心（径向）加速度为:

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

5.6.2 向心力

向心力是作用在圆周运动物体上的力。它指向圆心或旋转轴。向心力的大小由下式给出:

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

其中:

- m 是物体的质量,
- v 是物体的速度,
- r 是圆周路径的半径。

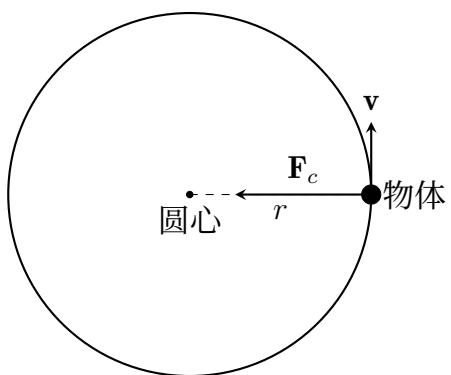


Figure 5: 向心力始终指向圆心。



5.6.3 离心力

离心力是一种惯性力（假想力），当在旋转参考系中观察时，它似乎作用在物体上。它表现为将物体推离旋转中心。在旋转参考系中，它的值与向心力大小相等、方向相反。离心力的大小为：

$$F_{\text{cf}} = \frac{mv^2}{r}$$

5.6.4 科里奥利力

科里奥利力（地转偏向力）是一种表观力，作用在旋转系统（如地球）中运动的质量上。它由参考系的旋转产生。科里奥利力由下式给出：

$$F_{\text{Coriolis}} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

其中：

- m 是物体的质量，
- \mathbf{v} 是物体相对于旋转参考系的速度，
- $\boldsymbol{\omega}$ 是旋转参考系的角速度矢量。

5.6.5 角动量

对于位于位置 \mathbf{r} （相对于原点）、线动量为 \mathbf{p} 的质点：

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

对于绕定轴旋转、转动惯量为 I 、角速度为 ω 的刚体：

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

正如力会改变线动量一样，力矩（转矩）(τ) 会改变角动量：

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$



定理. 5.1: 角动量守恒

如果系统受到的合外力矩为零 ($\tau_{ext} = 0$), 则总角动量守恒:

$$L_i = L_f$$



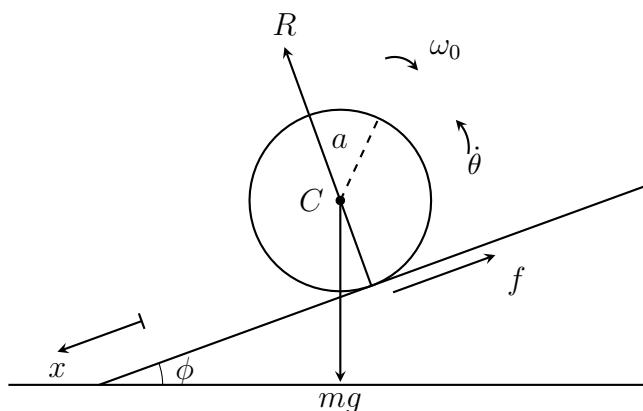
5.7 案例研究

一个以角速率 ω_0 绕其轴旋转的圆盘，被轻轻地放置在一个粗糙的倾斜平面上，使其轴线水平，且摩擦力向上。已知摩擦系数为 μ ，平面与水平面的倾角为 ϕ 。

(a) 证明若 $\mu > \tan \phi$ ，圆盘将向上运动。

(b) 求在发生纯滚动之前经过的时间。

解答：(a)



运动方程：利用牛顿第二定律进行沿平面的平动运动分析和绕质心的转动运动分析：

$$m\ddot{x} = mg \sin \phi - f \quad (\text{向下为正}) \quad (5)$$

$$R - mg \cos \phi = 0 \implies R = mg \cos \phi \quad (6)$$

$$I\ddot{\theta} = \tau \quad (\text{逆时针方向为正}) \quad (7)$$

由于圆盘在滑动，适用动摩擦力：

$$f = \mu R = \mu mg \cos \phi \quad (8)$$

将 (8) 代入 (5)：

$$m\ddot{x} = mg \sin \phi - \mu mg \cos \phi \implies \ddot{x} = g(\sin \phi - \mu \cos \phi) < 0$$

由于 $\ddot{x} < 0$ ，意味着加速度方向沿平面向上：

$$g(\sin \phi - \mu \cos \phi) < 0$$

$$\sin \phi < \mu \cos \phi$$

$$\tan \phi < \mu$$



因此, 若 $\boxed{\mu > \tan \phi}$, 圆盘将向上运动。

(b) 对于纯滚动, 条件为:

$$v_{\text{接触}} = v + a\omega = 0$$

其中 $v = \dot{x}$ 是线速度, $\omega = \dot{\theta}$ 是角速度。注意:

$$v(t) = v_0 + \ddot{x}t = 0 + g(\sin \phi - \mu \cos \phi)t.$$

同时, 力矩为:

$$\tau = -f \cdot a = -(\mu mg \cos \phi)a$$

圆盘的转动惯量 $I = \frac{1}{2}ma^2$, 则:

$$\frac{1}{2}ma^2\ddot{\theta} = -\mu mg a \cos \phi \implies \ddot{\theta} = -\frac{2\mu g \cos \phi}{a}$$

角速度方程为:

$$\omega(t) = \omega_0 + \ddot{\theta}t = \omega_0 - \frac{2\mu g \cos \phi}{a}t$$

将 (5.7) 和 (5.7) 代入滚动条件 (5.7):

$$\begin{aligned} v(t) + a\omega(t) &= 0 \\ [g(\sin \phi - \mu \cos \phi)t] + a \left[\omega_0 - \frac{2\mu g \cos \phi}{a}t \right] &= 0 \\ gt(\sin \phi - 3\mu \cos \phi) &= -a\omega_0 \\ t &= \boxed{\frac{-a\omega_0}{g(\sin \phi - 3\mu \cos \phi)}} \end{aligned}$$



6 轨道力学

6.1 牛顿万有引力定律

6.1.1 简介

定理. 6.1: 牛顿万有引力定律

万有引力定律指出，宇宙中每一个质点都以一种力吸引其他每一个质点，该力的大小与它们的质量乘积成正比，与它们中心之间距离的平方成反比。数学表达式为：

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

其中：

- F 是两个质量之间的引力大小，
- G 是万有引力常数，
- m_1 和 m_2 是两个物体的质量，
- r 是两个物体中心之间的距离。

定理. 6.2: 万有引力定律（矢量形式）

两个质点 m_1 和 m_2 之间的引力可以写成矢量形式：

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

其中：

- \mathbf{F} 是 m_2 作用在 m_1 上的引力矢量，
- \hat{r} 是从 m_1 指向 m_2 的单位矢量。

负号表示力是吸引的，即力的方向指向另一个质量。



定理. 6.3: 引力高斯定律

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$$

其中:

- $\nabla \cdot \mathbf{g}$ 是引力场 \mathbf{g} 的散度,
- ρ 是物体的质量密度。

该定律可以在封闭曲面上积分, 得到引力高斯定律的积分形式:

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi GM_{\text{enc}}$$

其中 M_{enc} 是该曲面所包围的总质量。

6.1.2 质心 (Barycentre)

质心 (或重心) 是系统中所有质量的加权平均位置。如果所有质量都集中在该点, 系统将保持平衡。对于位置分别为 $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ 、质量分别为 m_1, \dots, m_n 的质点系, 质心位置 \mathbf{R} 由下式给出:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$

其中 $M = \sum m_i$ 是系统的总质量。

对于连续质量分布, 质心是通过对质量分布进行积分来计算的。如果质量密度为 $\rho(\mathbf{r})$, 则质心位置由下式给出:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV$$

其中 $M = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$ 是系统的总质量, 积分是在质量分布的体积 V 上进行的。

6.1.3 二体问题

考虑两个质点, 质量分别为 m_1 和 m_2 , 位置矢量分别为 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 。它们通过有心力相互作用:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$



质心 (Barycenter) 位于:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

由于根据牛顿第三定律, 内力相互抵消, 质心的加速度为:

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0$$

因此, 质心做匀速直线运动。定义相对位置矢量:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

对时间求两次导数可得:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m_1} + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

定义折合质量 (又称约化质量):

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

则有:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

这变成了一个等效的单体问题, 即一个质量为 μ 的粒子在力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 下运动。对于质量为 μ 的有效单体问题, 相对于质心的角动量为:

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

对于有心力:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \hat{\mathbf{r}}$$

力矩由下式给出:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times f(r) \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$$

因此,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \text{常数}$$

系统的总能量为:

$$E = \frac{1}{2} \mu r^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 + U(r)$$



其中 $U(r)$ 是有心力的势能。注意：

$$L = |\mathbf{L}| = \mu r^2 \dot{\theta}$$

利用

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$$

我们得到：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 &= \frac{L^2}{2\mu r^2} \\ E &= \frac{1}{2} \mu r^2 + \underbrace{\left[U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}_{V_{\text{eff}}(r)} \end{aligned}$$

6.1.4 n 体问题

考虑一个由 N 个天体组成的系统，每个天体的质量为 m_i ，位置矢量为 $\mathbf{r}_i(t)$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, N$ 。每个天体的运动都遵循牛顿万有引力定律：

$$\mathbf{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \mathbf{r}_{ij}$$

其中 \mathbf{F}_{ij} 是天体 j 对天体 i 施加的引力， \mathbf{r}_i 和 \mathbf{r}_j 是它们的位置。

6.2 开普勒定律

6.2.1 开普勒三大定律

定理. 6.4: 开普勒第一定律

每个行星的轨道都是一个椭圆，太阳位于其中的一个焦点上。以焦点为原点的椭圆极坐标方程 (r, θ) 为：

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

其中 a 是半长轴， e 是离心率 ($0 \leq e < 1$)。轨道的离心率描述了它的扁平程度。对于完美的圆，离心率为 0；对于椭圆轨道，离心率在 0 到 1 之间。离心率越接近 1，轨道越扁。

1. 内太阳系：四颗类地行星位于此处，它们的轨道离太阳较近，离心率相对较小。
2. 外太阳系：类木行星（气态巨行星）和彗星等冰冷天体的轨道更扁，离太阳更远。



证明：设质量为 m 的行星绕质量为 M 的恒星运行（假设恒星固定在原点）。引力为：

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} = m\mathbf{a}$$

其中 $\mu = GM$ 是引力参数（标准引力参数）， $\mathbf{r} = r\hat{r}$ 。加速度为 $\mathbf{a} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}$ 。

- **角动量 \mathbf{L} (对应开普勒第二定律)：**由于 \mathbf{r} 与 \mathbf{F} 平行，力矩 $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ 。因此，角动量是守恒的：

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \text{常数}$$

轨道被限制在垂直于 \mathbf{L} 的平面内。

- **拉普拉斯-龙格-楞次 (LRL) 矢量 \mathbf{A} ：** LRL 矢量仅在平方反比力下是运动常量。定义为：

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\mu\hat{r}$$

为了证明它是守恒的，我们证明 $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$ 。利用乘积法则：

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} - m\mu \frac{d\hat{r}}{dt}$$

由于 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ 且 $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = 0$ ：

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{F} \times \mathbf{L} - m\mu \frac{d\hat{r}}{dt}$$

根据 $\mathbf{F} = -\frac{m\mu}{r^2}\hat{r}$ 和 $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ ：

$$\mathbf{F} \times \mathbf{L} = -\frac{m\mu}{r^2}\hat{r} \times m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = -\frac{m^2\mu}{r^2} [(\hat{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} - (\hat{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v}]$$

利用矢量三重积公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ ，且 $\hat{r} \cdot \mathbf{r} = r$, $\hat{r} \cdot \mathbf{v} = \dot{r}$ ：

$$\mathbf{F} \times \mathbf{L} = -\frac{m^2\mu}{r^2} [(\dot{r})\mathbf{r} - (r)\mathbf{v}] = m\mu \left[\frac{r\mathbf{v}}{r^2} - \frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r^2} \right]$$

注意到：

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\dot{\mathbf{r}}r - \mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = \frac{\mathbf{v}r - \mathbf{r}\dot{r}}{r^2}$$



因此, $\mathbf{F} \times \mathbf{L} = m\mu \frac{d\hat{r}}{dt}$ 。从而得到:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = m\mu \frac{d\hat{r}}{dt} - m\mu \frac{d\hat{r}}{dt} = 0$$

LRL 矢量 \mathbf{A} 位于轨道平面内。我们通过将 \mathbf{A} 与位置矢量 \mathbf{r} 作点积来求轨道方程:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\mu \hat{r}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - m\mu(\mathbf{r} \cdot \hat{r})$$

利用标量三重积恒等式 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

由于 $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}$, 该等式简化为:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = L^2$$

因此,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = L^2 - m\mu r$$

LRL 矢量 \mathbf{A} 是常数。设 $A = |\mathbf{A}|$ 。定义 \mathbf{r} 与 \mathbf{A} 之间的夹角为 θ 。则 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = rA \cos \theta$:

$$rA \cos \theta = L^2 - m\mu r$$

$$r = \frac{L^2}{m\mu} \frac{1}{1 + \frac{A}{m\mu} \cos \theta}$$

取 $m = 1$ 进行归一化可得:

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}$$

这是极坐标下的圆锥曲线方程, 其中:

- 半正焦弦为 $\ell = \frac{L^2}{m\mu}$ 。
- 离心率为 $e = \frac{A}{m\mu}$ 。

由于 A, m, μ 均为正数, 离心率 e 是一个非负常数。

- 如果总能量 $E < 0$, 则 $0 \leq e < 1$, 定义为一个椭圆。
- 如果 $E = 0$, 则 $e = 1$, 定义为一个抛物线。



- 如果 $E > 0$, 则 $e > 1$, 定义为一个双曲线。

行星轨道是束缚轨道, 意味着总机械能 E 为负 ($E < 0$)。这保证了 $0 \leq e < 1$, 证明了轨道是一个以太阳 (中心质量) 为一个焦点的椭圆。



定理. 6.5: 开普勒第二定律

连接行星和太阳的线段在相等的时间间隔内扫过相等的面积。

证明:

- 引力 \mathbf{F} 始终指向行星与太阳的连线 (它是一个有心力)。

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

- 行星相对于太阳 (原点) 受到的力矩 (τ) 为:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \left(-G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \right)$$

由于 \mathbf{r} 与 \hat{r} 方向相同, $\mathbf{r} \times \hat{r} = 0$ 。因此力矩为零: $\tau = 0$ 。

- 根据转动定律, 力矩等于角动量 (\mathbf{L}) 的变化率:

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

由于 $\tau = 0$, 角动量 \mathbf{L} 是守恒的:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = \text{常数}$$

其中 \mathbf{p} 是线动量。

- 角动量可以用单位时间内扫过的面积来表示。考虑极小时间 dt 。矢径 \mathbf{r} 扫过的面积 dA 近似为三角形的面积:

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|$$

由于 $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, 我们有:

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}dt| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| dt$$

- 扫过面积的速率为 $\frac{dA}{dt}$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2m} |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} = \text{常数}$$



定理. 6.6: 开普勒第三定律

开普勒第三定律指出，行星绕太阳公转周期的平方 T^2 与其轨道半长轴的立方 a^3 成正比。数学表达式为：

$$T^2 \propto a^3$$

在椭圆轨道的情况下 (a 为半长轴)，该定律仍然成立，可以表示为：

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

其中：

- T 是行星的公转周期。
- a 是椭圆的半长轴。
- G 是引力常数。
- M 是中心天体（如太阳）的质量。

证明：根据开普勒第二定律，

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m}$$

(因为椭圆面积为 πab)。根据开普勒第一定律， $r = a(1 - e)$ 且

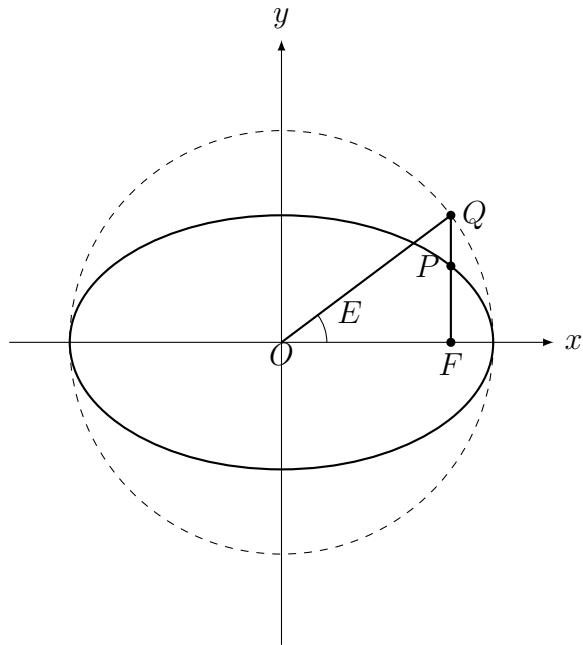
$$r(\theta) = \frac{L^2}{GMm^2(1 + e \cos \theta)}.$$

则 $\frac{L^2}{m^2} = a(1 - e^2)GM$ 。代入涉及面积的公式，得到 $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$ 。

在太阳系的某些区域，天体由于引力相互作用而具有同步的轨道周期。这种现象被称为轨道共振，在小行星带和巨行星的一些卫星中尤为重要。



6.2.2 开普勒方程



偏近点角 (Eccentric anomaly) E 利用辅助圆定义:

- 以原点为中心画一个半径为 a 的圆 (辅助圆)。
- 对于椭圆上的点 P , 画一条垂直线交辅助圆于点 Q 。
- 偏近点角 E 即为角度 $\angle X O Q$ 。

其中 O 是椭圆中心, X 是正 x 轴方向。虽然 E 不是从焦点测量的物理角度, 但它提供了椭圆的一个方便的参数化。利用偏近点角 E , 轨道天体的位置为:

$$\boxed{\begin{aligned}x &= a(\cos E - e) \\y &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E\end{aligned}}$$

真近点角 (True anomaly) ν 是轨道天体从近拱点测量的物理极角。 ν 与 E 之间的关系为:

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

从近拱点到椭圆上点 P 扫过的面积为:

$$A = \frac{a^2}{2}(E - e \sin E)$$



椭圆的总面积为 $\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$, 根据开普勒第二定律, 扫过的面积比例等于流逝的时间比例:

$$\frac{A}{\pi a^2} = \frac{t - \tau}{T}$$

其中 T 是轨道周期。使用平近点角 (Mean anomaly):

$$M \equiv n(t - \tau)$$

(其中平均运动 $n = 2\pi/T$, τ 是经过近拱点的时刻), 我们得到:

$$M = E - e \sin E$$

这就是著名的开普勒方程。

6.2.3 泊松括号

定义. 6.1: 泊松括号

两个函数 $f(q, p)$ 和 $g(q, p)$ 的泊松括号定义为:

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

其中 q_i 和 p_i 代表第 i 个自由度的广义坐标和共轭动量。

定义. 6.2: 列维-奇维塔符号 (Levi-Civita Symbol)

列维-奇维塔符号定义为:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{如果 } (i, j, k) \text{ 是 } (1, 2, 3) \text{ 的偶置换,} \\ -1 & \text{如果 } (i, j, k) \text{ 是 } (1, 2, 3) \text{ 的奇置换,} \\ 0 & \text{如果任何两个下标相等.} \end{cases}$$

对于角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, 其分量为:

$$L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$$



(对重复指标求和)。利用位置 r_k 和动量 p_l 是共轭变量, 有:

$$\{p_i, r_k\} = -\delta_{ik}, \quad \{p_i, p_l\} = 0$$

可以推导出:

$$\{p_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} p_k$$

定义 $\mathbf{W} = \left\{ \frac{\mathbf{p}}{m}, \mathbf{L} \right\} - \frac{GMm}{r}\mathbf{r}$, 这是广义的 LRL 矢量。可以证明:

$$\{W_i, W_j\} = \epsilon_{ijk} \left(\frac{-2E}{m} L_k \right)$$

并证明其构成了李代数。

定义. 6.3: 李代数 (Lie Algebra)

李代数是域 (通常为 \mathbb{R} 或 \mathbb{C}) 上的矢量空间 \mathfrak{g} , 配备有称为**李括号**的二元运算 $[., .]$, 满足:

- 双线性: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
- 反对称性: $[X, Y] = -[Y, X]$
- 雅可比恒等式: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

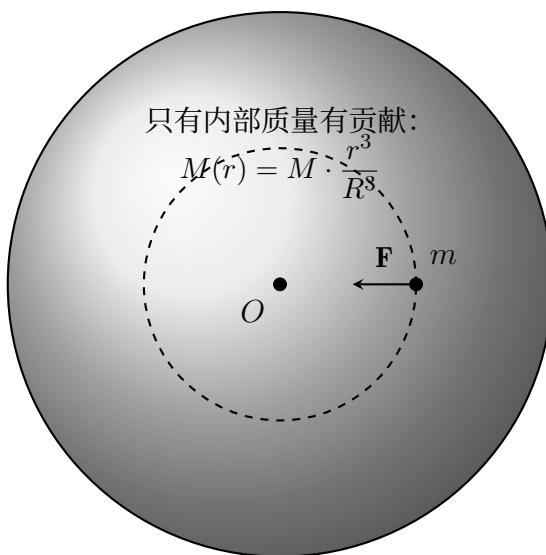
6.3 壳层定理 (Shell Theorem)

定理. 6.7: 壳层定理

对于位于距离 $r < R$ 的点质量, 在均匀固体球体内 (例如行星), 壳层定理表明:

- 只有半径 r 内的质量对引力有贡献。
- 半径大于 r 的质量通过第一壳层定理, 视为无限小的壳, 不会产生净力。





假设密度均匀，半径 r 内的质量为

$$M(r) = M \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

然后，位于距离 r 处的测试质量 m 所受的引力为

$$F = \frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{GMm}{R^3} \cdot r$$

由第二壳层定理得出。

例子. (简单引力列车) 位于半径 r 外的质量产生零净力。封闭的质量为

$$M(r) = M \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

因此，引力的大小为

$$F = -G \frac{M(r)m}{r^2} = -\frac{GMm}{R^3}r = m\ddot{r}$$

这就是简单谐振动 (SHM) 形式 $a = -\omega^2x_0$ 。因此， $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ ，并且行程时间为 $t = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{GM}{R^3}}} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ 。

备注。 引力列车（也称为高斯枪、引力电梯或真空列车）是经典力学中的一个有趣思想实验。最早由罗伯特·胡克在 17 世纪提出，后来由艾萨克·牛顿分析，探讨的是如果在地球上挖一条隧道并让物体通过它会发生什么。

例子. (广义引力列车) 考虑一条连接地球表面两个任意点 A 和 B 的直线隧道，这两个点不一定是对跖点。该隧道形成了地球圆形横截面的弦。



令 s 为沿隧道的坐标, $s = 0$ 处为隧道的中点 M , 端点为 $s = \pm L/2$ 。

对于地球内部某点 均匀地球上的物体, 距离中心位置为 \mathbf{r} , 其引力是径向的:

$$\mathbf{F} = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \quad \text{其中 } M(r) = \frac{r^3}{R^3}M$$

因此,

$$\mathbf{F} = -\frac{GM}{R^3}r\hat{\mathbf{r}}$$

设隧道与地球中心的垂直距离为常数 y_0 。对于隧道上某点的坐标 s , 其与地球中心的径向距离为:

$$r(s) = \sqrt{s^2 + y_0^2}$$

沿隧道的引力分量 (在 $\hat{\mathbf{s}}$ 方向) 为

$$F_s = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \left(-\frac{GM}{R^3}r\hat{\mathbf{r}}\right) \cdot \hat{\mathbf{s}}$$

由于 $\hat{\mathbf{r}} = \frac{s\hat{\mathbf{s}} + y\hat{\mathbf{y}}}{r}$, 我们有:

$$F_s = -\frac{GM}{R^3}r\left(\frac{s}{r}\right) = -\frac{GM}{R^3}s = m\ddot{s}$$

这也是简单谐振动 (SHM) 形式。

6.4 引力势能

定理. 6.8: 引力势能

一个物体在引力场中的引力势能 (U) 定义为将物体从无限远移到距离引力源 r 处所做的功。对于两个点质量, 引力势能由下式给出:

$$U = -G\frac{m_1m_2}{r}$$

- m_1 和 m_2 是两个质量,
- r 是两质量中心之间的距离。

证明。引力是:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$



然后,

$$\begin{aligned} U &= \int_{\infty}^r F dr \\ &= \int_{\infty}^r G \frac{Mm}{r^2} dr \\ &= GMm \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr \\ &= GMm \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \\ &= -G \frac{Mm}{r} \end{aligned}$$

6.4.1 活力公式 (Vis-viva Equation)

定理. 6.9: 活力公式

活力公式, 也称为轨道能量守恒方程, 将轨道天体的速度与其位置及轨道几何形状联系起来:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

其中

- v 是轨道物体的速度,
- r 是两个物体之间的距离,
- a 是轨道的半长轴,
- μ 是标准引力参数 (GM)。

证明。设 v_1 为物体与行星的最远距离, v_2 为物体与行星的最短距离。

根据角动量守恒, $m_1 r_1 v_1 = m r_2 v_2 \implies v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$ 。根据机械能守恒, $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{常数}$ 。

$$v_1^2 = \frac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}$$

根据 $m_1 r_1 v_1 = m r_2 v_2 \implies v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$ 和 $r_1 + r_2 = 2a$,

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$



6.4.2 第一、第二及第三宇宙速度

定义. 6.4: 第一宇宙速度

第一宇宙速度是物体在最低可能高度（离地面几乎为零）以圆形轨迹绕地球运行所需的最小速度。

对于卫星保持圆形轨道，引力必须提供所需的向心力。

$$F_{grav} = F_{centripetal}$$

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{v_1^2}{R}$$

其中

- M : 地球质量 (约 5.97×10^{24} kg)
- m : 卫星质量
- R : 地球半径 (约 6.37×10^6 m)

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

定义. 6.5: 第二宇宙速度

第二宇宙速度是物体克服地球引力，成功逃逸到无限远所需的最小速度，通常称为逃逸速度。

地球表面的总能量必须等于无限远处的总能量（在几乎逃逸的情形下，潜在能量和动能均为零）。

$$K_{surface} + U_{surface} = K_{\infty} + U_{\infty}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

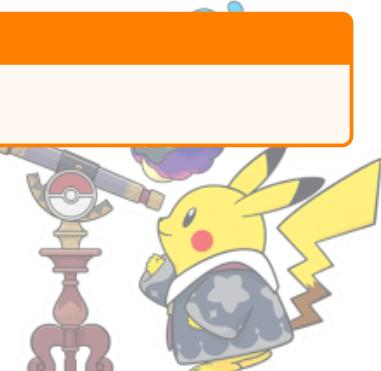
$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

注意 $v_2 = \sqrt{2}v_1$ 。

定义. 6.6: 第三宇宙速度

第三宇宙速度是物体从地球发射所需的速度，以逃离太阳系。

这需要克服地球的引力，并且必须有足够的剩余速度逃离太阳的引力。



- **双曲余速 (v_∞)**: 利用地球的轨道速度 ($v_E \approx 29.8 \text{ km/s}$), 航天器需要相对于地球的超额速度为

$$v_\infty = v_{esc,\odot} - v_E$$

- **发射计算**: 从地球表面应用能量守恒:

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

$$v_3 = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM}{R}}$$

由于 $\frac{2GM}{R} = v_2^2$:

$$v_3 = \sqrt{v_\infty^2 + v_2^2}$$

6.4.3 霍曼转移轨道

霍曼转移轨道是同一中心天体下，在两个共面圆轨道之间转移航天器时，最节省燃料的双脉冲机动方案。

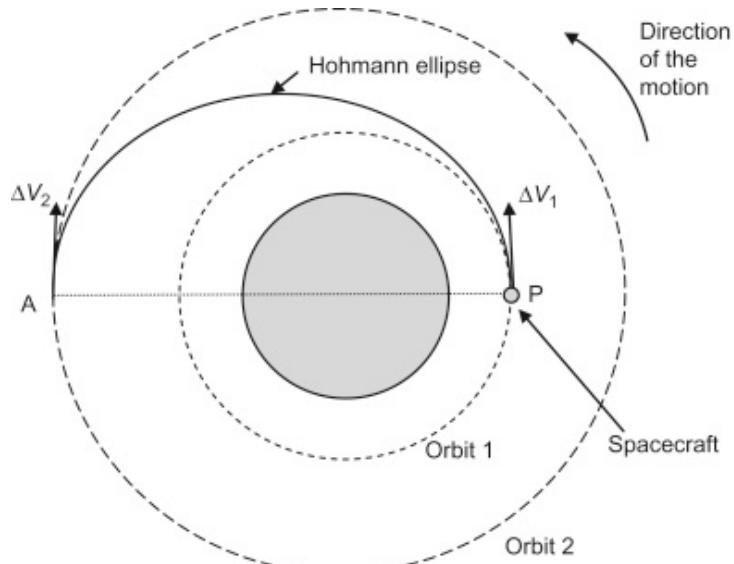


Figure 6: 来源: <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/hohmann-transfer>

对于在一个质量为 M 的中心天体周围半径为 r 的圆轨道上运行的航天器，其轨道速度为：

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$



对于任何开普勒轨道，距离 r 处的速度由活力公式 (vis-viva equation) 给出：

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

其中 a 是轨道的半长轴。考虑两个半径分别为 r_1 (初始轨道) 和 r_2 (目标轨道) 的圆轨道，其中 $r_2 > r_1$ 。霍曼转移轨道是一个具有以下特征的椭圆轨道：

1. 近拱点位于 r_1 ,
2. 远拱点位于 r_2 。

该转移椭圆的半长轴为：

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

航天器最初以圆周速度运动：

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

在转移椭圆的近拱点，所需速度由活力公式得出：

$$v_p = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)}$$

因此，第一次速度增量为：

$$\Delta v_1 = v_p - v_1$$

这次点火将航天器送入椭圆转移轨道。

在转移椭圆的远拱点 ($r = r_2$)，航天器的速度为：

$$v_a = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a} \right)}$$

目标圆轨道的速度为：

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}$$

第二次速度增量为：

$$\Delta v_2 = v_2 - v_a$$

点火后，航天器进入最终的圆轨道。



该机动的总燃料消耗由总速度增量衡量：

$$\Delta v_{\text{total}} = \Delta v_1 + \Delta v_2$$

在所有共面圆轨道之间的双脉冲转移方案中，霍曼转移使 Δv_{total} 最小。

转移过程中，航天器运行了半个椭圆轨道。椭圆轨道的周期为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

因此，霍曼转移时间为：

$$t_{\text{transfer}} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

这种相对较长的转移时间是其燃料效率的主要权衡代价。

6.4.4 黑洞

事件视界是时空中的一种边界，其内部发生的事件无法影响外部的观测者。它通常与黑洞相关联，标志着逃逸速度超过光速的临界点。这意味着即使是光也无法从事件视界内部逃脱，这正是它呈现黑色的原因。对于不旋转、球对称的黑洞，事件视界由史瓦西半径 r_s 给出，即逃逸速度等于光速时的半径。史瓦西半径定义为：

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

其中：

- G 是万有引力常数，
- M 是黑洞的质量，
- c 是光速。

一旦跨越事件视界，所有粒子和光的路径都会弯曲并指向黑洞内部，任何信号都无法逃逸到外部宇宙。

6.4.5 维里定理

对于处于动力学平衡状态的引力束缚系统（如孤立星系），维里定理指出，时间平均总动能 $\langle T \rangle$ 与时间平均总引力势能 $\langle U \rangle$ 满足以下关系：

$$2\langle T \rangle + \langle U \rangle = 0$$



对于一个处于维里平衡状态、总质量为 M 的粒子系统，维里定理给出：

$$2\langle T \rangle + \langle U \rangle = 0$$

总动能可以用速度弥散（velocity dispersion）表示为：

$$\langle T \rangle \sim \frac{1}{2}M\langle v^2 \rangle \sim \frac{3}{2}M\sigma^2$$

其中 σ 是单向速度弥散。

对于特征尺度为 R 的自引力系统，其引力势能的数量级为：

$$\langle U \rangle \sim -\frac{GM^2}{R}$$

此处略去了一个取决于质量分布的单位级无量纲因子。

代入维里定理得：

$$3M\sigma^2 \sim \frac{GM^2}{R}$$

解得 M ：

$$M \sim \frac{R\sigma^2}{G}$$

这就是星系的维里质量估计公式。

6.4.6 塔利-费舍尔关系

1977 年，R·布伦特·塔利和 J·理查德·费舍尔发现，螺旋星系的光度 L 与其最大旋转速度 v_{\max} 之间存在一种经验关系：

$$L \propto v_{\max}^\alpha$$

观测表明，红外波段下的 $\alpha \approx 3.5 - 4$ ，蓝波段下的 $\alpha \approx 2.5 - 3$ 。



6.5 拉格朗日点

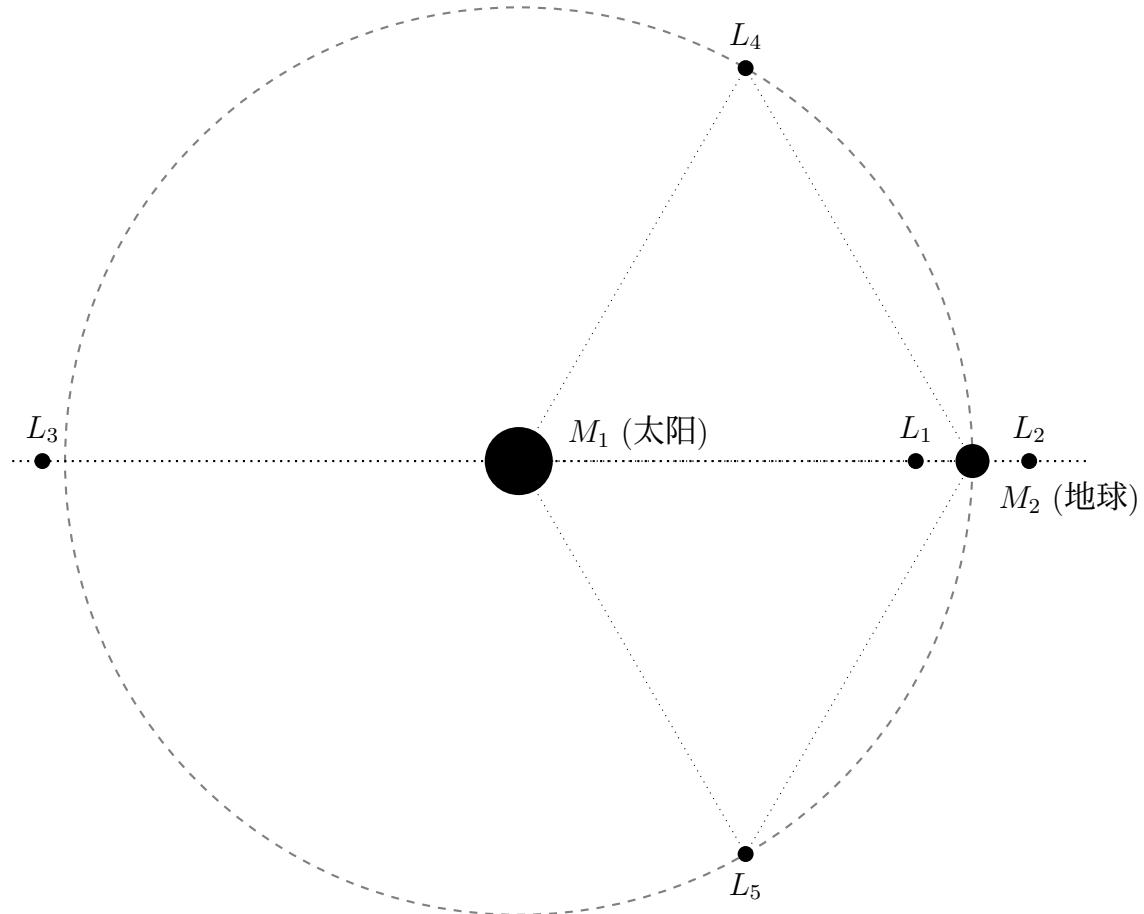


Figure 7: 日地系统旋转坐标系下的五个拉格朗日点 (L_1 至 L_5)

两个主天体 M_1 和 M_2 绕其共同质心做圆周运动。设 $M_1 > M_2$, 定义折合质量:

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

归一化设定 $M_1 + M_2 = 1$, 且万有引力常数 $G = 1$ 。在以质心为原点的旋转坐标系中, M_1 位于 $(-\mu, 0)$, M_2 位于 $(1 - \mu, 0)$ 。旋转坐标系的角速度 ω 满足 (根据开普勒第三定律):

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} = 1$$

由于 $a = 1, G = 1, M_1 + M_2 = 1$, 故 $\omega = 1$ 。在旋转坐标系中, 测试粒子在 $\mathbf{r} = (x, y)$ 处的运动方程为:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}$$



其中

$$U(x, y) = \underbrace{\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)}_{\text{离心势}} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

变量定义为：

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}$$

拉格朗日点是 U 在旋转坐标系中的驻点（即 $\dot{x} = \dot{y} = 0$ 的平衡点）：

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

展开得：

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y \left[1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] = 0$$

当 $y = 0$ 时，有 $r_1 = |x + \mu|, r_2 = |x - 1 + \mu|$ 。 x 方向的方程变为：

$$x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} \operatorname{sgn}(x+\mu) - \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} \operatorname{sgn}(x-1+\mu) = 0$$

- $x > 1 - \mu$ (在 M_2 之外)：

$$x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0$$

- $\mu < x < 1 - \mu$ (在 M_1 和 M_2 之间)：

$$x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(1-\mu-x)^2} = 0$$

- $x < -\mu$ (在 M_1 相对于 M_2 的另一侧)：

$$x + \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0$$

它们的级数解为：

$$L_1 : \quad x \approx 1 - \mu - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \dots$$

$$L_2 : \quad x \approx 1 - \mu + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \dots$$



$$L_3 : \quad x \approx -1 - \frac{5}{12}\mu + \dots$$

由 $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$ 可知:

$$y \left[1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] = 0$$

若 $y \neq 0$, 则有:

$$\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} = 1 \quad (*)$$

由 $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$:

$$x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} = 0$$

将 (*) 式乘以 x 并从上式中减去, 可得:

$$-\frac{(1-\mu)\mu}{r_1^3} + \frac{\mu(1-\mu)}{r_2^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-\mu}{r_1^3} = \frac{1-\mu}{r_2^3}$$

因此, 对于 $\mu \neq 1$, 我们得到 $r_1 = r_2$ 。根据 $r_1 = r_2$, (*) 式给出:

$$\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_1^3} = \frac{1}{r_1^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1$$

即 $r_1 = r_2 = 1$ 。现在根据 $(x+\mu)^2 + y^2 = 1$ 和 $(x-1+\mu)^2 + y^2 = 1$, 解得:

$$x = \frac{1}{2} - \mu, y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

因此:

$$L_4 : \quad \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$L_5 : \quad \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



6.6 洛希极限

洛希极限是指行星与其卫星（或小行星）之间的最小距离。在此距离内，卫星受到的行星潮汐力将强于其自身的引力束缚，从而导致其破碎。洛希极限公式如下：

$$d_{\text{Roche}} = 2.44 R \left(\frac{\rho_{\text{planet}}}{\rho_{\text{moon}}} \right)^{1/3}$$

简化模型的推导：潮汐力是由于大质量天体的引力在物体不同位置上的差异引起的。

考虑一个半径为 R 的小物体，距离质量为 M 的庞大天体中心距离为 d 。

$$a_{\text{near}} = \frac{GM}{(d - R)^2}, \quad a_{\text{far}} = \frac{GM}{(d + R)^2}$$

潮汐加速度是近端和远端加速度的差值：

$$a_{\text{tidal}} = a_{\text{near}} - a_{\text{far}} = \frac{GM}{(d - R)^2} - \frac{GM}{(d + R)^2}$$

假设 $R \ll d$ ，则有：

$$\frac{1}{(d \pm R)^2} \approx \frac{1}{d^2} \mp \frac{2R}{d^3}$$

因此：

$$a_{\text{tidal}} \approx GM \left(\left(\frac{1}{d^2} + \frac{2R}{d^3} \right) - \left(\frac{1}{d^2} - \frac{2R}{d^3} \right) \right) = GM \cdot \frac{4R}{d^3}$$

$$a_{\text{tidal (单侧)}} \approx \frac{2GMR}{d^3}$$

注意到：

$$a_{\text{tidal}} \approx \frac{2GM_p R_s}{d^3}, \quad a_{\text{self}} = \frac{Gm_s}{R_s^2}$$

代入 $m_s = \frac{4}{3}\pi R_s^3 \rho_s$ 和 $M_p = \frac{4}{3}\pi R_p^3 \rho_p$ ：

$$\frac{2GM_p R_s}{d^3} = \frac{Gm_s}{R_s^2}$$

可以简化为：

$$d = R_p \cdot \left(2 \cdot \frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3}$$

关于非简化模型的推导，可参考：<https://dxwl.bnu.edu.cn/CN/abstract/abstract7639.shtml>



7 相对论

17 世纪创立的牛顿力学在处理日常速度 ($v \ll c$) 时表现得极其出色。然而，随着 19 世纪末实验精度的提高（例如迈克尔逊-莫雷实验），理论与实验之间出现了不一致之处，这便需要一个新的理论框架。

7.1 狹義相对论的基本假设

- **相对性原理：**物理定律在所有惯性参考系中都是相同的。
- **光速不变原理：**真空中的光速 c 在所有惯性系中都相同，与光源或观察者的运动状态无关。

7.2 伽利略变换

在经典力学中，伽利略变换联系了两个以恒定相对速度运动的惯性参考系中观察到的事件坐标。假设我们有两个惯性系：

- S 系：坐标为 (x, y, z, t) 的静止参考系。
- S' 系：相对于 S 系沿 x 轴以恒定速度 v 运动，坐标为 (x', y', z', t') 。

伽利略变换方程为：

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

7.3 洛伦兹变换

定义. 7.1: 洛伦兹因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

其中 v 是物体的速度，定义 $\beta := \frac{v}{c}$ 。



在狭义相对论中，洛伦兹变换联系了两个相对匀速运动的惯性系中的事件坐标。与伽利略变换不同，它考虑了光速不变性。

定理. 7.1: 洛伦兹变换

对于两个惯性系 S 和 S' ，若 S' 相对于 S 以速度 v 沿 x 轴运动，则洛伦兹变换为：

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

定理. 7.2: 逆洛伦兹变换

对于上述惯性系 S 和 S' ，逆洛伦兹变换为：

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

定理. 7.3: 洛伦兹速度变换

对于两个惯性系 S 和 S' ，若 S' 相对于 S 以速度 v 沿 x 轴运动，则速度变换公式为：

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{vv_x}{c^2}}$$

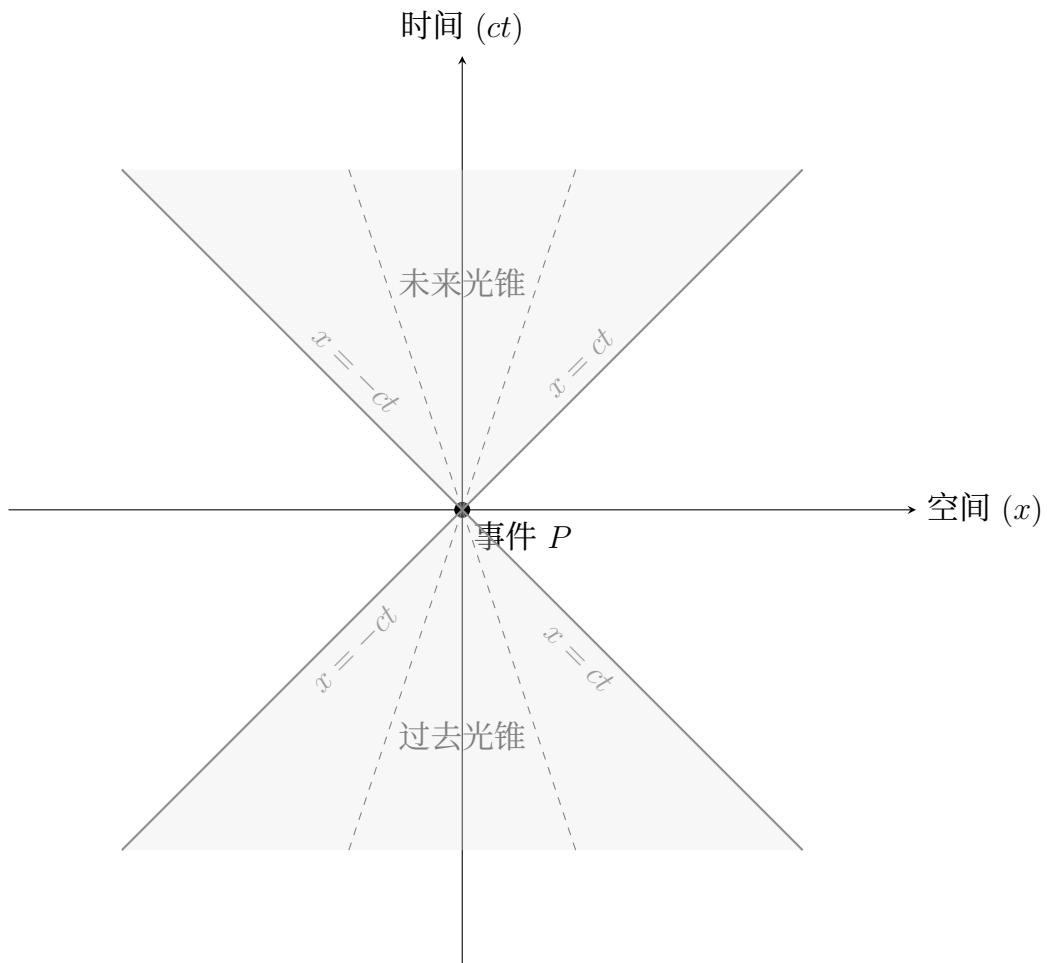
$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{vv_x}{c^2} \right)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{vv_x}{c^2} \right)}$$



7.4 时空图

时空图是时空中事件的图形化表示。



7.5 相对论运动学与力学

7.5.1 时间膨胀

时间膨胀是狭义相对论最引人入胜的结论之一。它指出，在运动参考系中测量的时间（原时 τ ）相比于静止参考系测量的时间（坐标时间 t ）显得流逝得更慢。原时 (τ) 与坐标时间 (t) 的关系为：

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau$$

例题：一艘宇宙飞船相对于地球以 $v = 0.8c$ 的速度飞行。如果在飞船上过去了 5 年（原时），那么地球上过去了多少年？

解：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} \approx 1.667$$



$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = 1.667 \times 5 \approx 8.33 \text{ 年}$$

7.5.2 长度收缩

长度被定义为物体两端点同时测量得到的距离。设一根原长为 L_0 的棒在 S' 系中静止，而 S' 相对于 S 以速度 v 运动。在 S 系中同时测量端点 ($\Delta t = 0$)：

$$\Delta x = L \quad (\text{在 } S \text{ 系中测得的长度})$$

$$\Delta x' = L_0 \quad (\text{在 } S' \text{ 系中的原长})$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma L$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

因此，运动物体在其运动方向上看起来会变短。

7.5.3 相对论动量

考虑一个静止质量为 m_0 的粒子：

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$$

7.5.4 相对论能量

动能的正统相对论表达式为：

$$K = (\gamma - 1)m_0 c^2$$

证明：从动能定理和相对论动量出发：

$$\begin{aligned} K &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \int \left(\gamma m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + m_0 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{d\gamma}{dv^2} \frac{dv^2}{dt} \right) dt \\ &= m_0 c^2 \int d\gamma = \gamma m_0 c^2 + C \end{aligned}$$

当 $\gamma = 1$ (即 $v = 0$) 时, $K = 0$ 。因此, $K = (\gamma - 1)m_0 c^2$ 。

粒子的总能量为：

$$E = \gamma m_0 c^2 = K + m_0 c^2$$

这包含两部分：



- 静止能量: $E_0 = m_0 c^2$
- 动能: $K = (\gamma - 1)m_0 c^2$

7.5.5 相对论动量与能量的关系

根据定义:

$$E = \gamma m_0 c^2$$

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$$

计算 $E^2 - (pc)^2$:

$$\begin{aligned} E^2 - (pc)^2 &= (\gamma m_0 c^2)^2 - (\gamma m_0 v c)^2 \\ &= \gamma^2 m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= m_0^2 c^4 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{因为 } \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}) \\ &= m_0^2 c^4 \end{aligned}$$

由此我们得到基本关系式:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

7.6 时空与四维矢量

7.6.1 狭义相对论中的时空

在狭义相对论中, 空间和时间被统一为一个称为**时空**的四维连续体。事件由四个坐标描述:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

其中

- $x^0 = ct$ 是时间坐标 (c 为光速)
- x^1, x^2, x^3 是空间坐标



示例：一个 S' 系相对于另一个 S 系沿 y 轴以速度 v 运动。以 $x^0 \equiv ct, x^1 \equiv x, x^2 \equiv y, x^3 \equiv z, x'^0 \equiv ct'$ 表示的洛伦兹变换为：

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^2)$$

$$x'^2 = \gamma(x^2 - \beta x^0)$$

$$x'^1 = x^1$$

$$x'^3 = x^3$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$ 且 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ 。

7.6.2 四维矢量

四维矢量 A^μ 是一个数学对象，它在洛伦兹变换下的变换方式与时空坐标相同：

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

洛伦兹变换 Λ_ν^μ 的变换规则为：

$$A'^\mu = \Lambda_\nu^\mu A^\nu$$

其中

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

示例（续）：一个二阶张量在 S 系中只有一个非零分量 $T^{00} \equiv \rho$ 。在 S' 系中的分量通过洛伦兹变换获得：

$$T'^{00} = \gamma^2 T^{00}, \quad T'^{01} = \gamma\beta T^{00}, \quad T'^{10} = \gamma\beta T^{00}, \quad T'^{11} = T^{00}$$

$$T'^{22} = T^{22}, \quad T'^{33} = T^{33}.$$

因此， $T^{\mu\nu}$ 在 S' 系中的分量为：

$$T'^{00} = \gamma^2 \rho, \quad T'^{01} = T'^{10} = \gamma\beta \rho, \quad T'^{11} = \rho.$$



7.6.3 度规张量

度规张量 $g_{\mu\nu}$ 定义了时空的几何结构。在直角坐标系的狭义相对论中，它具有简单的形式，称为闵可夫斯基度规：

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

分量形式为：

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad \text{当 } \mu \neq \nu \text{ 时 } g_{\mu\nu} = 0$$

度规张量允许在逆变（上指标）和协变（下指标）矢量之间进行转换。

指标下降

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

具体为：

$$A_0 = g_{00} A^0 = A^0$$

$$A_1 = g_{11} A^1 = -A^1$$

$$A_2 = g_{22} A^2 = -A^2$$

$$A_3 = g_{33} A^3 = -A^3$$

指标上升

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$$

其中 $g^{\mu\nu}$ 是逆度规，对于闵氏时空，它与 $g_{\mu\nu}$ 相同：

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



度规张量及其逆满足：

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \text{若 } \mu = \nu \\ 0 & \text{若 } \mu \neq \nu \end{cases}$$

其中 δ^μ_ν 是克罗内克符号 (Kronecker delta)。

7.6.4 不变量间隔

时空中两个无穷接近事件之间的**不变量间隔**定义为：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

在闵氏时空中展开分量为：

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

对于事件间的有限间隔：

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

ds^2 最重要的性质是它在洛伦兹变换下是**不变的**。如果我们变换到新坐标系 x'^μ ：

$$ds'^2 = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma dx^\rho dx^\sigma = g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma = ds^2$$

这种不变性源于洛伦兹变换的定义性质：

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

7.6.5 物理学中的重要四维矢量

位置四维矢量

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}) = (ct, x, y, z)$$

速度四维矢量 四维速度定义为位置四维矢量对原时 τ 的导数：

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$$



分量为：

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{cdt}{d\tau} = \gamma c \\ u^i &= \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma v^i \end{aligned}$$

四维速度的大小由下式给出：

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2(c^2 - v^2) = \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2/c^2} = c^2$$

动量四维矢量

$$p^\mu = mu^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right)$$

其中 $E = \gamma mc^2$ 是相对论能量， $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ 是相对论动量。

显式表达为：

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$

此外：

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

例题：考虑二维空间加一维时间的情况。一个粒子发射一个光子，该光子在 S' 系中与 x' 轴成 θ' 角。因此，光子的轨迹可以写为 $x' = ct' \cos \theta'$ 且 $y' = ct' \sin \theta'$ 。

- (a) 如果 S' 系相对于另一个 S 系以速度 v 运动，光子在 S 系中的轨迹是什么？
- (b) 如果在该系中测得的频率为 f ，光子在 S' 系中的能量-动量四维矢量是什么？（当然， z 分量 p'_z 为零。）
- (c) 用 θ' 表示光子在 S 系中的能量。
- (d) 光子在 S 系中哪个方向具有最大能量？

为了找到 S 系中的轨迹，我们应用逆洛伦兹变换。假设 S' 系沿 S 系的 x 轴以速度 v 运动，坐标变换为：

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)$$

将 S' 系的轨迹 $x' = ct' \cos \theta'$ 和 $y' = ct' \sin \theta'$ 代入：



$$(1) \quad x = \gamma(ct' \cos \theta' + vt') = \gamma t'(c \cos \theta' + v)$$

$$(2) \quad y = ct' \sin \theta'$$

$$(3) \quad t = \gamma \left(t' + \frac{v(ct' \cos \theta')}{c^2} \right) = \gamma t'(1 + \beta \cos \theta')$$

为了找到 $x(t)$ 和 $y(t)$, 我们从 (3) 中解出用 t 表示的 t' : $t' = \frac{t}{\gamma(1 + \beta \cos \theta')}$ 。代入 (1) 和 (2):

$$x(t) = \frac{c \cos \theta' + v}{1 + \beta \cos \theta'} t, \quad y(t) = \frac{c \sin \theta'}{\gamma(1 + \beta \cos \theta')} t$$

对于光子, $E' = hf$ 且 $p' = \frac{E'}{c} = \frac{hf}{c}$ 。在 S' 系中动量矢量的分量为 $p'_x = p' \cos \theta'$ 和 $p'_y = p' \sin \theta'$ 。四维矢量 P'^μ 为:

$$P'^\mu = \left(\frac{E'}{c}, p'_x, p'_y, p'_z \right) = \left(\frac{hf}{c}, \frac{hf}{c} \cos \theta', \frac{hf}{c} \sin \theta', 0 \right)$$

S 系中的能量 E 由变换 $E = \gamma(E' + vp'_x)$ 得到:

$$E = \gamma \left(hf + v \frac{hf}{c} \cos \theta' \right) = \gamma hf(1 + \beta \cos \theta')$$

能量 $E(\theta') = \gamma hf(1 + \beta \cos \theta')$ 在 $\cos \theta'$ 取最大值时达到最大。这发生在 $\cos \theta' = 1$, 即 $\theta' = 0$ 时。因此, 光子在向前方向 (与速度 v 相同的方向) 发射时具有最大能量。

7.6.6 广义相对论导论

动机 经典牛顿引力将引力描述为一种即时的超距作用。然

而, 这一框架与狭义相对论不相容, 因为狭义相对论断言:

- 光速是有限且不变的。
- 空间和时间形成一个统一的结构: 时空。

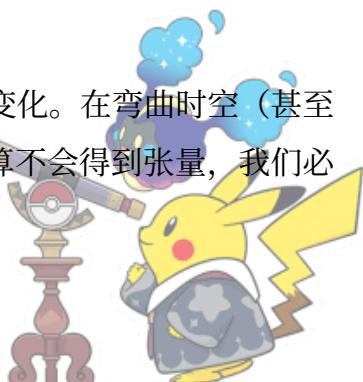
阿尔伯特·爱因斯坦于 1915 年提出的广义相对论通过用时空几何取代引力概念, 解决了这种不相容性。

广义相对论中的算符 广义相对论中有不同的算符。克里斯

托费尔符号 (Christoffel symbols) 就是其中之一, 它描述了坐标轴如何随点而变化。在弯曲时空 (甚至是用曲线坐标表示的平直空间) 中, 基矢不是恒定的, 对矢量进行普通导数运算不会得到张量, 我们必须对坐标的“弯曲”进行修正。

相关问题

2014 年罗马尼亚物理大师赛第 3 题
(黑洞物理), 2012 年罗马尼亚物理大师赛第 3 题 (广义相对论基础)



定义. 7.2: 克里斯托费尔符号

克里斯托费尔符号定义为:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\mu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu})$$

其中 $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ 被称为四维梯度。

另一个例子是达朗贝尔算符 (d'Alembertian operator)。

定义. 7.3: 达朗贝尔算符

$$\square = \partial_{\mu}\partial^{\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

标量场 $\phi(x^{\mu})$ 满足相对论波动方程:

$$\square\phi = 0$$

该方程可以描述:

- 电磁波
- 引力波
- 无质量标量场

对于质量为 m 的标量场, 方程变为:

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0$$

这是薛定谔方程的相对论推广。

在广义相对论中, 时空是弯曲的, 偏导数必须替换为协变导数。达朗贝尔算符变为**拉普拉斯-贝尔特拉米算符**:

$$\square\phi = \nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\phi$$

在坐标系中, 这可以写为:

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu}\phi)$$

其中 $g = \det(g_{\mu\nu})$ 。

时空与可微流形简介 在经典物理学中, 空间和时间被视为独立的实体:

- 空间: 一个三维欧几里得舞台。



- 时间：一个对所有观察者都流逝相同的通用参数。

然而，涉及高速度和电磁波的实验表明：

- 光速是不变量。
- 时间和长度的测量取决于观察者。

这些事实迫使人们得出一个彻底的结论：

空间和时间不是独立的；它们形成一个统一的结构，称为时空。

在弯曲时空中，我们将时空建模为一个可微流形 M ：

- 流形是一个在局部类似于 \mathbb{R}^n 的点集，允许我们在每个点的邻域定义坐标。
- 对于时空， $n = 4$ ，每个点代表一个事件。事件是发生在特定地点和特定时间的事情。
- 光滑函数和张量可以定义在流形上，从而在弯曲时空上进行微积分。

示例： \mathbb{R}^n 中的球面是一个流形。

证明： 我们首先介绍一些数学概念：

定义. 7.4: 球极射影

球极射影 (Stereographic Projection) 是一种将球面投影到平面上的映射。具体而言，设 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为 n 维单位球面，令 $N = (0, \dots, 0, 1)$ 为北极点。球极射影 $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 定义为：将 S^n 上的一点 P (除 N 外) 映射到过 N 和 P 的直线与超平面 $x_{n+1} = 0$ 的交点：

$$\pi(P) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

其中 $P = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ 。

定义. 7.5: 拓扑空间

一个**拓扑空间**是一个二元组 (X, \mathcal{T}) ，其中 X 是一个集合， \mathcal{T} 是 X 的子集族（称为开集），并满足以下条件：

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
2. \mathcal{T} 中任意元素的并集仍在 \mathcal{T} 中，
3. \mathcal{T} 中有限个元素的交集仍在 \mathcal{T} 中。



集合族 \mathcal{T} 称为 X 上的一个拓扑。

定义. 7.6: 同胚

设 X 和 Y 为拓扑空间。如果函数

$$f : X \rightarrow Y$$

满足以下条件，则称其为同胚 (Homeomorphism)：

1. f 是双射 (一一对应且满射)，
2. f 是连续的，
3. 逆函数 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 也是连续的。

如果存在这样的映射，我们称 X 和 Y 是同胚的，这意味着它们在拓扑上是等价的。

定理. 7.4: 光滑流形的准则

光滑流形是一个局部与 \mathbb{R}^n 同胚的空间，并且在重叠的坐标卡之间允许光滑转换。证明球极射影是一个同胚映射，可以确保 S^n 上的每个点都拥有一个在拓扑上类似于 \mathbb{R}^n 的邻域，这对于确立 S^n 是一个光滑流形至关重要。

令

$$N = (0, \dots, 0, 1), \quad S = (0, \dots, 0, -1)$$

分别为 S^n 的北极和南极。定义从北极出发的球极射影：

$$\pi_N : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

为

$$\pi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right)$$

由于逆映射给出为

$$\pi_N^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right)$$

且 π_N 与 π_N^{-1} 均为连续函数，因此 π_N 是一个同胚。同理，定义

$$\pi_S : S^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$



为

$$\pi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right)$$

这两个坐标卡

$$(S^n \setminus \{N\}, \pi_N), \quad (S^n \setminus \{S\}, \pi_S)$$

覆盖了 S^n 。每个分量都是关于 y_1, \dots, y_n 的有理函数，其分母 $\|y\|^2$ 在定义域内非零。因此，转移映射 $\pi_S \circ \pi_N^{-1}$ 是光滑的。球极射影坐标卡提供了一个覆盖 S^n 的光滑图册 (atlas)，且转换函数是光滑的。因此， S^n 满足光滑流形的所有要求。

度规张量 在这个 4 维流形 M 上，几何特性由度规张量 $g_{\mu\nu}(x)$ 描述，它是一个光滑、对称、非退化的张量场：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

其中爱因斯坦求和约定使用的洛伦兹特征标为 $(-, +, +, +)$ 。在任意点 $p \in M$ 局部，总存在一个坐标系使度规还原为闵可夫斯基形式 $\eta_{\mu\nu}$ 且其一阶导数消失，这反映了等效原理。

等效原理 其表述为：

在局部范围内，引力的效果与加速度的效果是不可区分的。

测地线 在广义相对论中，自由下落的粒子在弯曲时空中沿着尽可能最直的路径运动，称为测地线：

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

在平直空间（欧几里得几何）中，两点之间的最短路径是直线。在弯曲空间（如地球表面）中，最短路径则是测地线。

对于类时测地线，原时（proper time） τ 即为仿射参数 λ 。对于零型（类光）测地线，虽然不存在原时，但仍存在仿射参数来描述测地线。

黎曼曲率张量 曲率由黎曼张量衡量：

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

通过指标收缩可得：

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$$



Ricci 标量为：

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

爱因斯坦场方程 场方程可以写为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

其中

- $T_{\mu\nu}$ 是应力-能量张量，描述能量和动量的密度及通量。

在弱场、低速极限下：

$$g_{00} \approx -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

爱因斯坦方程还原为泊松方程：

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

因此，牛顿引力作为广义相对论的一种近似而出现。

爱因斯坦场方程的解 史瓦西解 (Schwarzschild solution) 描述了球对称质量外部的时空：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃尔克 (FLRW) 度规 模拟了膨胀的宇宙：

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2d\Omega^2 \right]$$

其中 $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ 。

定义 χ 使得

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

积分可得如下关系：

$$r = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}\chi) & , k > 1 \\ \chi & , k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\chi) & , k < -1 \end{cases} = \begin{cases} \sin(\chi) & , k = 1 \\ \chi & , k = 0 \\ \sinh(\chi) & , k = -1 \end{cases}$$



因 k 仅取 $-1, 0, 1$ 。度规随后变为：

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2]$$

在自然单位制 $c = 1$ 下，

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

非零 Christoffel 符号为：

$$\Gamma_{ij}^0 = a \dot{a} \tilde{g}_{ij} = \frac{\dot{a}}{a} g_{ij}$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1-kr^2), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{ij} = \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} \right] g_{ij}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]$$



对于共动坐标系下的理想流体,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}$$

其中 $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, 故:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pg_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pg_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pg_{33} \end{pmatrix}$$

由 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, 可得:

$$\begin{aligned} -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}(-1) \cdot 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] - \Lambda &= 8\pi G\rho \\ -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] - \Lambda &= 8\pi G\rho \\ 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3k}{a^2} - \Lambda &= 8\pi G\rho \\ \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \end{aligned}$$

此即弗里德曼第一方程。

$$\begin{aligned} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} \right] g_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii} \cdot 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] + \Lambda g_{ii} &= 8\pi G p g_{ii} \\ \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} - 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] + \Lambda &= 8\pi G p \\ -2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{k}{a^2} + \Lambda &= 8\pi G p \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \end{aligned}$$

此即弗里德曼第二方程。

切空间 设 M 为一个光滑流形, p 为 M 上的一点。切空间 (在 p 点处) 记作 $T_p M$, 是一个由该点处所有切矢量组成的矢量空间。如果 $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ 是一条满足 $\gamma(0) = p$ 的光滑曲线, 那么在 $t = 0$ 处的



导数 $\gamma'(0)$ 就是一个切矢量。切空间给出为：

$$T_p M = \{ \gamma'(t) \mid \gamma(0) = p, \gamma \text{ 光滑} \}$$

张量空间 张量空间是指从流形的切空间构造出的所有张量的集合。

协变导数 协变导数 ∇_μ 将偏导数 ∂_μ 推广到弯曲流形。偏导数在坐标变换下不能保持张量特性。协变导数引入了修正项，即 Christoffel 符号 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ ，以确保张量行为。对于反变矢量场 V^ν ：

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda.$$

李导数 李导数 (Lie derivative) \mathcal{L}_X 衡量张量场沿矢量场 X 的流 (flow) 的变化。对于沿 X 流动的矢量场 Y ：

$$(\mathcal{L}_X Y)^\mu = X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu$$

在无坐标表示法下：

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

其中 $[X, Y]$ 是李括号。

Killing 矢量场 如果一个矢量场 K^μ 的流生成了一个等距变换 (isometry，即保持时空度规不变的对称性)，则称其为 Killing 矢量场。通过令度规沿 K^μ 的李导数为零，可得到如下条件：

$$\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = 0.$$

利用度规的李导数公式，这演变为 Killing 方程：

$$\boxed{\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0}$$

定理. 7.5: 沿测地线的守恒律

对于切矢量为 $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ 的测地线，如果 K^μ 是一个 Killing 矢量，那么量 $K_\mu u^\mu$ 沿测地线是常数。

证明：

$$\frac{d}{d\lambda}(K_\mu u^\mu) = u^\nu \nabla_\nu(K_\mu u^\mu) = u^\nu u^\mu \nabla_\nu K_\mu + K_\mu u^\nu \nabla_\nu u^\mu$$



第二项由于测地线方程 $u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$ 而消失。第一项对 ν 和 μ 是对称的，所以我们可以写成：

$$u^\nu u^\mu \nabla_\nu K_\mu = \frac{1}{2} u^\nu u^\mu (\nabla_\nu K_\mu + \nabla_\mu K_\nu) = 0$$

根据 Killing 方程可知该项为零。因此：

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda}(K_\mu u^\mu) = 0}$$

局部逃逸速度 考虑一个静态球对称时空，其度规为：

$$ds^2 = -g_{tt}(r) dt^2 + g_{rr}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

其中 $g_{tt}(r) > 0$ 。由于度规与时间无关，它允许一个类时 Killing 矢量：

$$K^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

设一个粒子沿切矢量为 $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ 的测地线运动。如果 K^μ 是 Killing 矢量，那么量 $K_\mu u^\mu$ 沿测地线守恒。我们将单位质量的守恒能定义为：

$$E \equiv -K_\mu u^\mu$$

由于 $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ，我们有

$$K_\mu = g_{\mu\nu} K^\nu = (g_{tt}, 0, 0, 0)$$

因此

$$E = -g_{tt} u^t$$

对于有质量粒子，四维速度满足：

$$u^\mu u_\mu = -1$$

对于纯径向运动 ($u^\theta = u^\phi = 0$)，有：

$$-g_{tt}(u^t)^2 + g_{rr}(u^r)^2 = -1$$

代入 $u^t = E/g_{tt}$ ，得到：

$$-g_{tt} \left(\frac{E}{g_{tt}} \right)^2 + g_{rr}(u^r)^2 = -1$$



化简为：

$$g_{rr}(u^r)^2 = \frac{E^2}{g_{tt}} - 1$$

位于半径 r 处的静态观测者的四维速度为：

$$U^\mu = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}}(1, 0, 0, 0)$$

粒子被局部测量的速度 v 定义为：

$$v^2 = \frac{(\text{固有空间距离})^2}{(\text{固有时间})^2} = \frac{g_{rr}(u^r)^2}{g_{tt}(u^t)^2}$$

利用上述结果，这变为：

$$v^2 = \frac{\frac{E^2}{g_{tt}} - 1}{\frac{E^2}{g_{tt}}} = 1 - \frac{g_{tt}}{E^2}$$

对于在渐近平直时空中刚好逃逸到无穷远的粒子：

$$g_{tt}(\infty) = 1 \quad u^r(\infty) = 0$$

归一化条件意味着：

$$E = 1$$

代入 v^2 的表达式，我们得到局部逃逸速度：

$$v_{\text{esc}}^2 = 1 - g_{tt}(r)$$

对于史瓦西度规：

$$g_{tt}(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$$

因此：

$$v_{\text{esc}}^2 = \frac{2GM}{r}$$

这就是静态观测者局部测量到的逃逸速度。



8 热力学

8.1 压强与流体静力学平衡

引言 压强是一个标量，定义为单位面积上所受的力。数学表达式为：

$$P = \frac{F}{A}$$

流体静力学平衡：平面平行情形 考虑一个横截面积为 A 、高度为 dz 的微小圆柱形流体元。

- **重力（向下）**：流体元的质量为 $m = \rho A dz$ 。因此，

$$F_g = mg = \rho g A dz$$

- **压力（向上）**：底部的压强为 $P(z)$ ，而顶部的压强为 $P(z + dz) = P + dP$ 。因此，净压力为

$$F_{P,\text{net}} = P(z)A - P(z + dz)A = -AdP$$

对于流体静力学平衡，合力必须为零：

$$\sum F = 0 \implies F_{P,\text{net}} - F_g = 0.$$

由此可得：

$$-AdP - \rho g A dz = 0 \implies \boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g}$$

流体静力学平衡：球对称情形（恒星） 现在考虑恒星内部半径为 r 、厚度为 dr 的薄球壳。

- **万有引力（向内）**：球壳的质量为

$$dm = \rho(r) dV = \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

半径 r 处的重力加速度为

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$$



其中 $M(r)$ 是半径 r 范围内包含的质量。因此，向内的引力为

$$F_g = dm g(r) = 4\pi G \rho(r) M(r) dr$$

- **压力（向外）：**球壳的表面积为 $A = 4\pi r^2$ 。净压力是 r 处的向外压强与 $r + dr$ 处压强的差值：

$$F_{P,\text{net}} = P(r)A - P(r+dr)A = -\frac{dP}{dr} \cdot 4\pi r^2 dr$$

流体静力学平衡要求

$$\sum F = 0 \implies F_{P,\text{net}} - F_g = 0$$

因此，

$$-\frac{dP}{dr} 4\pi r^2 dr - 4\pi G \rho(r) M(r) dr = 0$$

这就得出了恒星流体静力学平衡方程：

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

注记 除了流体静力学平衡外，恒星还满足热平衡，这意味着核心产生的能量等于从表面辐射出去的能量：

$$L_{\text{core}} = L_{\text{surface}}$$

其中 L 表示光度。恒星平衡是指引力、压力和能量传输过程的综合平衡，使恒星能够在长时标内保持稳定的结构。

8.2 理想气体定律

理想气体定律是热力学中的一个基本方程，描述了理想气体的行为。它建立了压强 P 、体积 V 、温度 T 和气体摩尔数 n 之间的关系。方程表示为：

$$PV = nRT$$

其中

- P 是气体的压强，
- V 是气体的体积，



- n 是气体的摩尔数,
- R 是普适气体常数 ($R = 8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$),
- T 是气体的温度 (单位: 开尔文)。

对于在恒定压强下发生体积变化的气体, 气体所做的功为

$$W = P\Delta V$$

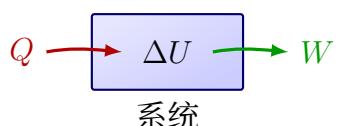
8.3 热力学第一定律

该定律指出能量既不能被创造也不能被消灭, 只能发生转化。其数学表达式为:

$$dU = \delta Q - \delta W$$

其中

- dU 是系统内能的变化,
- δQ 是传递给系统的热量,
- δW 是系统对外做的功。



过程	条件	描述
绝热过程 (Adiabatic)	$\delta Q = 0$	与外界无热交换；温度变化源于做功
等温过程 (Isothermal)	$T = \text{常数}$	温度保持不变；吸收的热量等于做的功
等压过程 (Isobaric)	$P = \text{常数}$	压强保持不变；体积随温度变化
等容过程 (Isochoric)	$V = \text{常数}$	体积恒定故不做功；热量改变内能
多方过程 (Polytropic)	$PV^n = \text{常数}$	涵盖等温、绝热和等压情况的广义过程
循环过程 (Cyclic)	终态 = 初态	一个循环内内能的净变化为零
可逆过程 (Reversible)	准静态且无损耗	能够输出最大功的理想化过程
不可逆过程 (Irreversible)	有限梯度和摩擦	真实过程；熵产生为正

Table 3: 热力学过程、条件及其描述

8.4 热力学第二定律

定义. 8.1: 熵

熵是衡量系统无序度或随机性的量。对于可逆过程，熵变 dS 等于传递的热量 dQ 除以温度 T ：

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}$$

定理. 8.1: 萨库-泰特罗德 (Sackur–Tetrode) 方程

$$S = Nk_B \left(\ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m E}{3h^2} \right)^{3/2} \right) + \frac{5}{2} \right)$$

其中

- S 是熵,
- N 是粒子数,
- V 是体积,



- m 是气体粒子的质量,
- E 是内能。

定理. 8.2: 热力学第二定律

热力学第二定律指出，孤立系统的熵随时间推移趋于增加。

$$dS \geq 0$$

定理. 8.3: 吉布斯自由能

吉布斯自由能 G 与熵的关系如下方程所示：

$$G = H - TS = U + PV - TS$$

其中 H 是焓， T 是温度（保持恒定）， P 是压强（保持恒定）， S 是熵。

8.5 热容

定义. 8.2: 热容

定容热容 C_V 定义为在保持体积恒定的情况下，使系统温度升高 1 摄氏度（或 1 开尔文）所需的热量。数学表达式为：

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V$$

其中 Q 是添加到系统的热量， T 是温度。下标 V 表示体积保持恒定。

由于系统不被允许做功（因为体积固定），添加到系统的热量仅改变内能：

$$dQ = dU$$

其中 dU 是内能的变化。

对于理想气体，定容热容与摩尔定容热容 C_V 的关系为：

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

对于理想气体，内能 U 仅是温度的函数，比热容可由状态方程推导得出。



定义. 8.3: 热容

定压热容 C_P 定义为在保持压强恒定的情况下，使系统温度升高 1 摄氏度（或 1 开尔文）所需的热量。数学表达式为：

$$C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P$$

其中 Q 是添加到系统的热量， T 是温度。下标 P 表示压强保持恒定。

与定容情况相反，当在恒压下加热时，系统膨胀可能会做功。因此，添加的总热量是内能变化与系统所做功之和：

$$dQ = dU + PdV$$

对于理想气体，定压热容与摩尔定压热容 C_P 的关系为：

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

定理. 8.4: 迈耶 (Mayer) 关系式

$$c_P - c_V = nR$$

其中 n 是气体的摩尔数， R 是普适气体常数。

证明：根据热力学第一定律，

$$dU = \delta Q - pdV = nC_VdT$$

其中 C_V 是定容热容， n 是摩尔数。对于恒压下添加的热量，我们使用：

$$\delta Q = nC_PdT$$

其中 C_P 是定压热容。

根据理想气体状态方程，

$$pV = nRT$$

在恒压下对该方程关于温度微分：

$$pdV + Vdp = nRdT$$



在恒压下, $dp = 0$, 因此我们有:

$$pdV = nRdT$$

将 $pdV = nRdT$ 代入方程:

$$nC_VdT = nC_PdT - nRdT$$

$$C_V = C_P - R \implies \boxed{C_P - C_V = nR}$$

定义. 8.4: 热容比

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

在绝热过程中, 与外界没有热交换 ($dQ = 0$)。热力学第一定律给出:

$$dU = -PdV$$

对于理想气体, 绝热过程中压强与体积的关系由以下方程控制:

$$PV^\gamma = \text{常数}$$

8.6 黑洞热力学

黑洞熵是对隐藏在黑洞内部信息量的一种度量。著名的贝肯斯坦-霍金 (Bekenstein-Hawking) 熵公式将黑洞的熵与其视界面积 (而非体积) 联系起来。这一结果最初由雅各布·贝肯斯坦推导出来, 后来由斯蒂芬·霍金证实:

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}$$

证明: 黑洞热力学第一定律为

$$dM = TdS + \Phi dQ + \Omega dJ$$

其中

- M 是质量,
- T 是温度,
- S 是熵,
- Φ 是静电势,



- Q 是电荷,
- J 是角动量。

对于不旋转、不带电的施瓦西 (Schwarzschild) 黑洞, 第一定律简化为

$$dM = TdS$$

这与热力学第一定律相似, 意味着黑洞质量通过温度与其熵相关。视界面积为

$$A = 16\pi \left(\frac{GM}{c^2} \right)^2$$

利用施瓦西黑洞的温度 T (即霍金温度):

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \text{ (推导超出了本讲义的范围)}$$

第一定律 $dM = TdS$ 意味着

$$dS = \frac{dM}{T} = \frac{dM}{\frac{\hbar c^3}{8\pi GM}} = \frac{8\pi GM}{\hbar c^3} dM$$

对 M 积分,

$$S = \frac{8\pi GM^2}{\hbar c^3}$$

利用面积表达式 $A = 16\pi \left(\frac{GM}{c^2} \right)^2$, 可得

$$M = \frac{c^2 \sqrt{A}}{4\pi G}$$

将其代入熵的表达式, 我们得到

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}$$

8.7 分子动理论

8.7.1 平均自由程

设气体的数密度 (单位体积内的粒子数) 为 n , 两个粒子碰撞的截面积为 σ 。截面积 σ 取决于碰撞类型和相关粒子的物理性质。如果我们假设粒子是半径为 r 的球体, 则碰撞截面为

$$\sigma = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2$$



其次，气体中两个粒子之间的相对速度大约为粒子平均速率 v_{avg} 的量级。每个粒子单位时间内的总碰撞率为

$$\text{碰撞率} = n\sigma v_{\text{avg}}$$

平均自由程 λ 定义为粒子在发生碰撞前平均行进的距离。平均自由程与碰撞率的关系为

$$\lambda = \frac{1}{\text{碰撞率}} = \frac{1}{n\sigma v_{\text{avg}}} = \frac{1}{n \cdot 4\pi r^2 \cdot v_{\text{avg}}}$$

8.7.2 玻尔兹曼分布与麦克斯韦-玻尔兹曼分布

玻尔兹曼分布，也称为吉布斯分布，是统计力学中的一个基本概率分布，描述了在固定温度下处于热平衡的系统的统计性质。它给出了当系统与温度为 T 的热库接触时，处于能量为 E_i 的特定微观状态的概率。

公式与推导 考虑一个与恒温 T 的大热库处于热平衡的系统。发现系统处于能量为 E_i 的特定微观状态 i 的概率 P_i 为

$$P_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$$

其中

- $\beta = \frac{1}{k_B T}$ 是热力学 β
- $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$ 是配分函数

配分函数 Z 作为一个归一化常数，确保 $\sum_i P_i = 1$ 。它包含了关于系统的所有热力学信息。

证明：统计力学通常使用最大熵原理。离散概率集 $\{P_i\}$ 的熵为

$$S = -k_B \sum_i P_i \ln P_i$$

即 $S = k_B \ln \Omega$ （其中 Ω 是统计力学中的微观状态数）。我们要最大化 S ，同时满足约束条件：

$$\begin{aligned} \sum_i P_i &= 1 \quad (\text{归一化}) \\ \sum_i P_i E_i &= \langle E \rangle \quad (\text{平均能量固定}) \end{aligned}$$



使用拉格朗日乘数 α 和 β , 定义

$$\mathcal{L} = -k_B \sum_i P_i \ln P_i - \alpha \left(\sum_i P_i - 1 \right) - \beta \left(\sum_i P_i E_i - \langle E \rangle \right)$$

令其对 P_i 的导数为零:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = -k_B (\ln P_i + 1) - \alpha - \beta E_i = 0$$

由此得出

$$P_i = e^{-1-\alpha/k_B} e^{-\beta E_i/k_B}$$

定义 $Z = e^{1+\alpha/k_B} = \sum_i e^{-\beta E_i/k_B}$, 我们得到熟悉的形式:

$$P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$$

麦克斯韦-玻尔兹曼分布 麦克斯韦-玻尔兹曼分布描述了处于热平衡的理想气体中粒子速率（或速度）的统计分布。它是玻尔兹曼分布应用于无相互作用粒子的平动动能时的特例。

对于温度为 T 、由 N 个质量为 m 的全同粒子组成的理想气体，发现具有速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 的粒子的概率密度函数为

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m|\mathbf{v}|^2}{2k_B T} \right)$$

这个三维分布可以分解为 $f(\mathbf{v}) = f(v_x)f(v_y)f(v_z)$, 其中每个分量分布都是高斯分布:

$$f(v_\alpha) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp \left(-\frac{mv_\alpha^2}{2k_B T} \right), \quad \alpha = x, y, z$$

更常用的是速率 $v = |\mathbf{v}|$ 的分布, 通过对速度空间中所有方向积分获得:

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right)$$

因子 $4\pi v^2$ 来源于速度空间中的球壳体积元。

证明: 考虑温度为 T 、处于热平衡且包含 N 个粒子的理想气体。每个粒子质量为 m , 速度矢量为 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 。粒子的总能量纯粹是动能:

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$



根据玻尔兹曼分布，粒子具有能量 E 的概率为

$$P(E) \propto e^{-E/k_B T}$$

注意到

$$P(v_x, v_y, v_z) = f(v_x)f(v_y)f(v_z)$$

$$f(v_i) = A e^{-\frac{1}{2}mv_i^2/k_B T}, \quad i = x, y, z$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x = 1$$

且由

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

我们有

$$A \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}} = 1 \implies A = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}.$$

因此，

$$f(v_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{mv_i^2}{2k_B T}}$$

粒子的速率为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

速率的概率密度函数 $F(v)$ 可以通过变换到速度空间的球坐标系获得：

$$F(v)dv = 4\pi v^2 f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv.$$

因此，

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

该分布导出了三个重要的特征速率：

1. **最概然速率 (众数):**

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$



2. 平均速率:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

3. 方均根速率:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

其中 $R = N_A k_B$ 是气体常数, $M = N_A m$ 是摩尔质量。

8.8 边界条件

求解恒星结构方程需要适当的边界条件:

- 在中心 ($r = 0$):

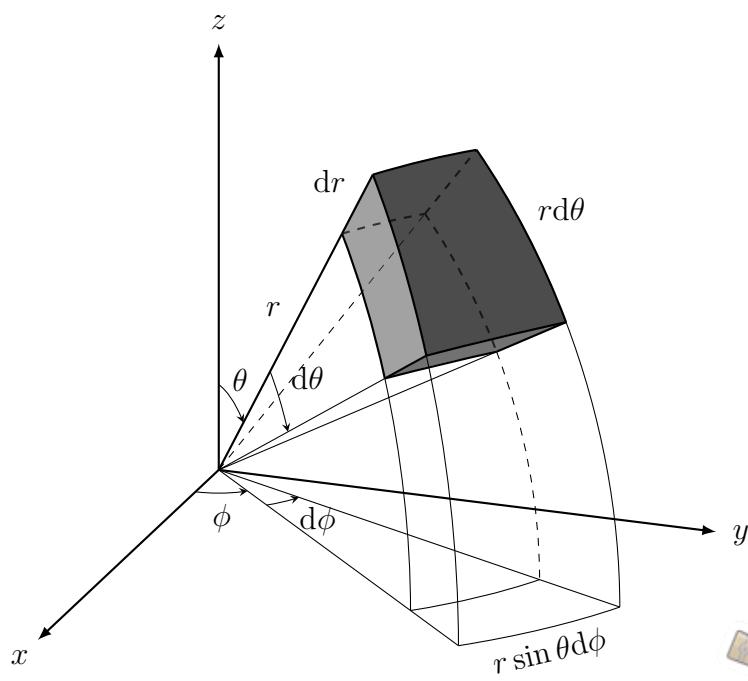
$$M(0) = 0, \quad L(0) = 0$$

- 在表面 ($r = R$):

$$P(R) = P_{\text{surface}} \approx 0, \quad T(R) = T_{\text{eff}}$$

这些条件确保解符合物理现实: 中心的质量为零, 表面的温度和压强为有限值。

8.9 案例研究



假设一颗半径为 R 的静态球形恒星包含 N 个中性粒子，其中 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, 并满足以下状态方程：

$$PV = Nk \frac{T_R - T_0}{\ln(T_R/T_0)} \quad (1)$$

其中 P 和 V 分别是恒星内部的压强和体积， k 是玻尔兹曼常数， T_R 和 T_0 分别是表面 $r = R$ 处的温度和中心 $r = 0$ 处的温度。假设 $T_R \leq T_0$ 。

- (a) 如果 $\Delta T = T_R - T_0 \rightarrow 0$ (这被称为理想恒星)，简化恒星状态方程 (1) (提示：对于小量 x ，使用近似 $\ln(1 + x) \approx x$)。

假设恒星经历一个准静态过程，其中它可能会轻微收缩或膨胀，使得上述恒星状态方程 (1) 仍然成立。

该恒星满足热力学第一定律：

$$Q = \Delta Mc^2 + W \quad (2)$$

其中 Q 、 M 和 W 分别是热量、恒星质量和功，而 c 是真空中的光速，且 $\Delta M = M_{\text{final}} - M_{\text{initial}}$ 。

在下文中，我们假设 T_0 为常数，而 $T_R \equiv T$ 是变化的。

- (b) 找出恒星的定容热容 C_V 和定压热容 C_P ，并用 C_P 和 C_V 表达 (提示：对于小量 x ，使用近似 $(1 + x)^n \approx 1 + nx$)。

假设 C_P 是常数，且气体经历等压过程，因此恒星产生热量并将其辐射到外部空间。

- (c) 如果初始温度和最终温度分别为 T_i 和 T_f ，求等压过程产生的热量。

- (d) 对于接下来的部分，假设这颗恒星是太阳。

- (e) 如果太阳光是频率为 5×10^{14} Hz 的单色光，估算太阳每秒辐射的光子数。

- (f) 假设太阳表面温度在一秒钟内从 5500 K 变化到 6000 K，计算太阳的热容 C_P 。

解答：

- (a) 定义 $\Delta T = T_f - T_0$ 且 $\Delta T \approx 0$ ，我们有

$$\frac{P\Delta V}{Nk} = \frac{\Delta T}{\ln(1 + \Delta T/T_0)}$$



利用 $\ln(1 + \Delta T/T_0) \approx \Delta T/T_0$, 我们得到

$$\frac{P\Delta V}{Nk} = T_0$$

(b) 恒星的内能为 $U = Mc^2$ (对于理想恒星, $U(T) = M(T)c^2$)。因此, 恒星的定容热容形式为:

$$C_V = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_V = \left(\frac{\Delta M}{\Delta T}\right)_V c^2$$

对于微小的 ΔT 。然后, 利用热力学第一定律, 恒星的定压热容为

$$C_P = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_P = \left(\frac{\Delta M}{\Delta T}\right)_V c^2 + P \frac{\Delta V}{\Delta T} = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T}$$

对于微小的 ΔT 。定义 $\Delta T = T_2 - T_1$, 则

$$\frac{P\Delta V}{Nk} = \frac{T_1 - T_0 + \Delta T}{\ln((T_1 + \Delta T)/T_0)} - \frac{T_1 - T_0}{\ln(T_1/T_0)}$$

利用近似

$$\ln((T_1 + \Delta T)/T_0) \approx \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + \frac{\Delta T}{T_1}$$

$$\frac{1}{\ln((T_1 + \Delta T)/T_0)} \approx \frac{1}{\ln(T_1/T_0)} - \frac{1}{T_1 \ln(T_1/T_0)^2} \frac{\Delta T}{T_1}$$

我们有

$$\frac{P\Delta V}{\Delta T} \approx Nk \left(1 - \frac{1}{\ln(T/T_0)}\right) \frac{(T - T_0)/T}{\ln(T/T_0)}$$

其中 $T_1 = T_0$ 。最后, 我们得到

$$C_P = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_P = \left(\frac{\Delta M}{\Delta T}\right)_V c^2 + P \frac{\Delta V}{\Delta T} = C_V + \frac{Nk}{\ln(T/T_0)} \left(1 - \frac{(T - T_0)/T}{\ln(T/T_0)}\right)$$

(c) 由于 C_V 是常数, 恒星产生的热量由下式给出

$$Q_H = C_V(T_f - T_i) + P\Delta V$$

$$Q_H = C_V(T_f - T_i) + Nk \left[\frac{T_f - T_0}{\ln(T_f/T_0)} - \frac{T_i - T_0}{\ln(T_i/T_0)} \right]$$



(d) 太阳每秒辐射的能量 $\dot{E} = L_{\odot} = N h \nu$, 其中 N 是光子数。因此

$$N = \frac{L_{\odot}}{h\nu} = \frac{3.90 \times 10^{26}}{6.626 \times 10^{-34} \times 5 \times 10^{14}} = 1.195 \times 10^{45} \text{ 个光子}$$

(e) 太阳每秒辐射的能量与太阳的质量亏损成正比

$$L_{\odot} = \frac{\Delta M c^2}{\Delta t}$$

因此,

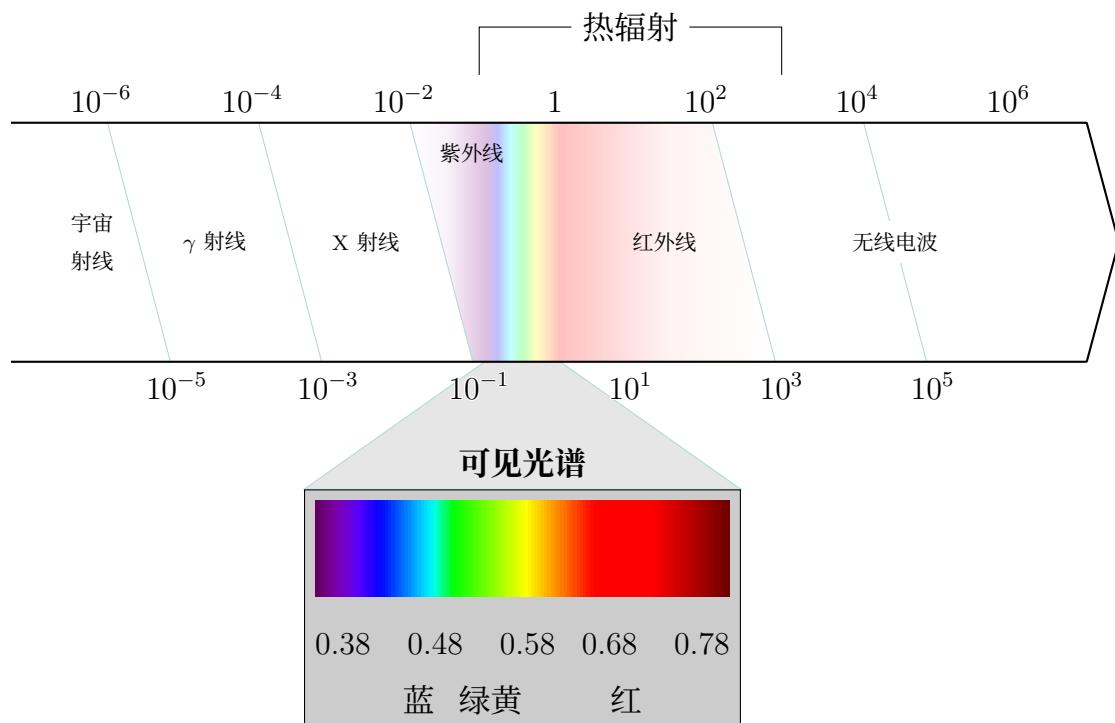
$$C_V = \frac{\Delta M c^2}{L_{\odot}} = \frac{3.96 \times 10^{26}}{\Delta T} \frac{1}{\frac{L_{\odot}}{\Delta t}} \approx \frac{3.96 \times 10^{26}}{6000 - 5500} \text{ J/K} = 7.92 \times 10^{23} \text{ J/K}$$



9 光谱学

9.1 基本概念

- (光谱) 光的衍射产生光谱，可以观察为一系列明暗条纹。



- (吸收) 当天体中的原子或分子吸收特定能量的光子，使电子跃迁到更高能级时，就会发生吸收。
- (发射) 当受激电子跃迁到较低能级时，会释放特定能量的光子，形成发射线。

$$E_{\text{photon}} = E_{\text{upper}} - E_{\text{lower}}$$

这导致光谱中出现吸收线。

(4) 光谱线揭示了化学成分、温度、压强和速度场（通过多普勒频移）。

(5) (散射) 当光子与粒子相互作用，改变方向且有时改变能量时，就会发生散射：

- 瑞利散射 (Rayleigh scattering): 粒子尺寸远小于波长时的弹性散射。
- 汤姆孙散射 (Thomson scattering): 自由电子的弹性散射。



- 康普顿散射 (Compton scattering): 非弹性散射，光子损失能量。康普顿推导出的关系式为：

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

其中

- (i) λ 是光子的初始波长,
- (ii) λ' 是散射光子的波长,
- (iii) h 是普朗克常数,
- (iv) m_e 是电子的质量,
- (v) c 是光速,
- (vi) θ 是散射角，即入射光子方向与散射光子方向之间的夹角。

- (6) (分裂) 当一条光谱线由于外部或内部相互作用分为多个分量时，就会发生分裂。塞曼效应 (Zeeman effect) 是光谱线在磁场 \mathbf{B} 存在下的分裂。对于没有自旋的跃迁，一条光谱线分裂成三个分量：

$$\Delta E = m_l \mu_B B, \quad m_l = 0, \pm 1$$

其中 μ_B 是玻尔磁子， B 是磁场强度， m_l 是磁量子数。

斯塔克效应 (Stark effect) 是光谱线由于外部电场 \mathbf{E} 引起的分裂：

$$\Delta E \propto E$$

- (7) (展宽) 展宽是指光谱线的宽度超过其自然线宽的现象。

- 由于激发态的有限寿命 τ ，光谱线具有由测不准原理决定的固有宽度。
- 恒星自转会导致谱线展宽，这是由于恒星盘面上不同位置的多普勒频移不同所致。

9.2 光谱辐亮度

光谱辐亮度（单位面积、单位立体角、单位波长发射的功率）由普朗克定律给出：

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1}$$

其中 λ 是波长。



天文学已经从可见光观测发展到涵盖整个电磁(EM)谱。正如普朗克定律所表达的那样，每个波段都揭示了独特的天体物理现象。

波段	波长范围	能量范围	温度 (K)	主要来源
无线电	$> 10 \text{ cm}$	$< 1.24 \times 10^{-5} \text{ eV}$	< 0.1	冷气体、脉冲星
微波	$1 \text{ mm} - 10 \text{ cm}$	$1.24 \times 10^{-5} \text{ eV} - 1.24 \times 10^{-3} \text{ eV}$	$0.1 - 10$	CMB、分子云
红外	$700 \text{ nm} - 1 \text{ mm}$	$1.24 \times 10^{-3} \text{ eV} - 1.77 \text{ eV}$	$10 - 10^4$	尘埃、行星、冷恒星
可见光	$400 \text{ nm} - 700 \text{ nm}$	$1.77 \text{ eV} - 3.1 \text{ eV}$	10^4	恒星、星系、星云
紫外	$10 \text{ nm} - 400 \text{ nm}$	$3.1 \text{ eV} - 124 \text{ eV}$	$10^4 - 10^5$	热恒星、类星体
X 射线	$0.01 \text{ nm} - 10 \text{ nm}$	$124 \text{ eV} - 124 \text{ keV}$	$10^5 - 10^8$	黑洞、超新星
γ 射线	$< 0.01 \text{ nm}$	$> 124 \text{ keV}$	$> 10^8$	GRB、核过程

Figure 8: 天文学中的电磁波段

极限情况：

- 瑞利-金斯定律 (长波, $hc \ll \lambda k_B T$):

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2ck_B T}{\lambda^4}$$

- 维恩定律 (短波, $hc \gg \lambda k_B T$):

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/(\lambda k_B T)}$$

辐射达到最大值时的波长:

$$\lambda_{\max} T \approx 2.898 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K} \text{(维恩位移定律)}$$

9.3 斯特藩-玻尔兹曼定律

$$j^* = \sigma T^4$$

其中

- j^* 是总辐射通量 (单位面积的功率, (W/m^2)),
- T 是黑体的绝对温度, 单位为开尔文 (K),



- σ 是斯特藩-玻尔兹曼常数：

$$\sigma = 5.670374419 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$$

对于发射率 (ϵ) ($0 \leq \epsilon \leq 1$) 的真实物体，该定律推广为：

$$j = \epsilon\sigma T^4$$

证明：单位面积的总辐射功率通过对普朗克定律在所有频率和立体角上积分获得：

$$\begin{aligned} j^* &= \int_0^\infty \int_{\Omega} B(\nu, T) \cos \theta d\Omega d\nu \\ &= \pi \int_0^\infty B(\nu, T) d\nu \end{aligned}$$

$$\text{令 } x = \frac{h\nu}{k_B T} \circ$$

$$\begin{aligned} j^* &= \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu \\ &= \frac{2\pi (k_B T)^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

积分值为 $\frac{\pi^4}{15}$, 得到

$$j^* = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}$$

9.4 多普勒效应

多普勒效应是波动物理学中的一个基本现象，其中波的观测频率由于波源和观察者之间的相对运动而发生变化。对于非相对论速度 ($v \ll c$), 其中 c 是光速：

$$f_{\text{obs}} = \frac{f_{\text{src}}}{1 \pm \frac{v_s}{c}} \quad (\text{波源移动, 观察者静止})$$

其中 + 表示波源远离，- 表示波源接近。

$$f_{\text{obs}} = f_{\text{src}} \left(1 \pm \frac{v_o}{c}\right) \quad (\text{观察者移动, 波源静止})$$



在天体物理学中，我们通常通过波长偏移来测量视向速度 v_r ：

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$$

其中

- λ_0 表示静止波长，
- λ_{obs} 表示观测波长，
- v_r 表示视向速度¹（远离为正）。

对于以接近光速运动的天体，我们必须使用相对论公式：

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad \text{或} \quad \frac{f_{\text{obs}}}{f_0} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

红移 z 定义为

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

对于相对论速度，

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

¹它指恒星沿视线方向的运动，通常使用恒星光谱中的多普勒频移来测量。恒星的总速度由下式给出：

$$v = \sqrt{v_{\text{radial}}^2 + v_{\text{tangential}}^2}$$

其中 v_{radial} 是视向速度， $v_{\text{tangential}}$ 是切向速度，切向速度可由自行和距离推导得出。
自行 (Proper motion) 指恒星在天空中角位置的移动，通常以角秒/年为单位测量。



10 电磁学

10.1 洛伦兹力

洛伦兹力定律描述了运动中的带电粒子在电磁场中所受到的力。其表达式为：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- \mathbf{F} 是带电粒子受到的力,
- q 是粒子的电荷量,
- \mathbf{E} 是电场强度,
- \mathbf{v} 是粒子的速度,
- \mathbf{B} 是磁感应强度 (磁场)。

10.2 麦克斯韦方程组

定义. 10.1: Del 算子

对于连续可微的矢量场 $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$, 定义 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ 。则有：

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \text{ 以及 } \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

其中 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 衡量的是场从某点周围无穷小体积向外流出的净流量 (散度)。

定理. 10.1: 麦克斯韦方程组 (微分形式)

设自由电荷密度为 ρ (国际单位: C/m³), 自由电流密度为 \mathbf{J} (国际单位: A/m²), 则有:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{高斯电场定律})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{高斯磁场定律})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{法拉第电磁感应定律})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{安培-麦克斯韦定律})$$



定理. 10.2: 麦克斯韦方程组 (积分形式)

对于自由电荷密度 ρ 和自由电流密度 \mathbf{J} , 麦克斯韦方程组的积分形式如下:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (\text{高斯电场定律})$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (\text{高斯磁场定律})$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{法拉第电磁感应定律})$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{安培-麦克斯韦定律})$$

10.3 坡印廷矢量

坡印廷矢量描述了电磁场的能流密度（单位时间内通过单位面积的能量传输）或功率流。其公式为:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

其中

- \mathbf{S} 是坡印廷矢量,
- \mathbf{E} 是电场,
- \mathbf{B} 是磁场。

10.4 光学

10.4.1 波函数

弦上某点在做简谐运动时的位移可以用正弦函数来建模。受张力弦的波动方程的解为:

$$\phi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \delta)$$

其中

- A 是波的振幅,
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 是波数 (λ 为波长),



- $\omega = 2\pi f$ 是角频率 (f 为频率),
- δ 是相位常数。

10.4.2 透镜

定理. 10.3: 折射率

介质的折射率定义为光在真空中的速度与光在该介质中的相速度之比:

$$n \equiv \frac{c}{v}.$$

在没有自由电荷的情况下, 安培定律表明

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

对法拉第定律取旋度:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B})$$

代入 $\nabla \times \mathbf{B}$ 的表达式, 得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

利用矢量恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

结合高斯定律, 我们得到

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

以速度 v 传播的场 \mathbf{E} 的标准波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

与上式比较, 可得

$$\frac{1}{v^2} = \mu\varepsilon$$



因此，电磁波在介质中的速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

对于光速， $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ 。则 $n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ ，其中 $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ 是介质的相对介电常数， $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ 是介质的相对磁导率。当 $\mu_r \approx 1$ 时， $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$ 。

定理. 10.4: 斯涅尔定律

考虑两个均匀各向同性介质之间的界面，其折射率分别为 n_1 和 n_2 。设 θ_1 和 θ_2 分别为入射光线和折射光线与界面法线的夹角。斯涅尔定律指出：

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

定理. 10.5: 透镜公式

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{u}$$

其中

- f 是透镜的焦距，即从光学元件（透镜或面镜）到光线汇聚成图像点的距离，它决定了望远镜的放大倍率和视场，
- u 是物距（物体到透镜的距离），
- v 是像距（透镜到图像的距离）。

最广泛使用的符号规定是笛卡尔符号规定：



参数	符号规定
物距 (u)	负值 (对于实物)
像距 (v)	正值 (对于实像) 负值 (对于虚像)
焦距 (f)	正值 (对于凸透镜/会聚透镜) 负值 (对于凹透镜/发散透镜)
物体高度 (h_o)	正值 (主光轴上方)
像高度 (h_i)	正值 (主光轴上方) 负值 (主光轴下方)

Table 4: 透镜公式的符号规定

定义. 10.2: 光焦度

对于焦距为 f 的透镜，其光焦度为

$$P = \frac{1}{f}$$

定理. 10.6: 薄透镜组合

对于两个或多个紧密贴合的薄透镜，其有效光焦度为 $\sum P$ 。

定理. 10.7: 制镜公式

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n - 1)d}{nR_1R_2} \right]$$

其中

- f 是透镜的焦距，
- n 是透镜材料的折射率，
- R_1 是透镜第一个表面的曲率半径，
- R_2 是透镜第二个表面的曲率半径，
- d 是透镜的厚度。



证明：我们将推导 $d \rightarrow 0$ 的薄透镜情形。

考虑一个曲率半径为 R 的球形折射面，它分隔了折射率分别为 n_1 和 n_2 的两种介质。设 C 为球面的曲率中心， V 为顶点。我们使用如下符号规定：

- 距离从 V 点开始测量
- 若 C 在 V 的右侧（对物体凸起），则 $R > 0$
- 物距 $u = -s_o$ （若物体在 V 左侧则为负）
- 像距 $v = s_i$ （若图像在 V 右侧则为正）

利用傍轴（小角度）近似：

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \tan \theta \approx \theta$$

适用于与光轴夹角很小的光线。

考虑光轴上的点物体 O ，它发出的一条光线射向球面上的 A 点，高度为 h 。由三角形 OAC 可知，

$$\text{入射角: } \theta_1 = \alpha + \phi$$

由三角形 IAC 可知，

$$\text{折射角: } \theta_2 = \phi - \beta$$

其中

$$\alpha \approx \frac{h}{-u}, \quad \beta \approx \frac{h}{v}, \quad \phi \approx \frac{h}{R}$$

这里 $u = -s_o < 0, v > 0, R$ 如前所述。

傍轴形式的斯涅尔定律为：

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$$

代入可得：

$$\begin{aligned} n_1(\alpha + \phi) &= n_2(\phi - \beta) \\ n_1 \left(\frac{h}{-u} + \frac{h}{R} \right) &= n_2 \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{v} \right) \\ n_1 \left(\frac{1}{-u} + \frac{1}{R} \right) &= n_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{v} \right) \end{aligned}$$



用笛卡尔符号规定 ($u = -s_o$, $v = s_i$, R 带符号) 重写:

$$\boxed{\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{R}}$$

考虑一个折射率为 n_l 、周围介质折射率为 n_m 的薄透镜。该透镜具有:

- 第一球面: 半径 R_1 (中心 C_1)
- 第二球面: 半径 R_2 (中心 C_2)
- 厚度相对于物/像距可忽略不计 (薄透镜近似)

符号规定:

- 光线从左向右传播
- 若曲率中心在表面右侧, 则 $R > 0$
- 物距 $s_o > 0$ (实物在透镜左侧)
- 像距 $s_i > 0$ (实像在透镜右侧)

从介质 1 $n_m \Rightarrow$ 到介质 2 n_l ,

$$\frac{n_l}{v_1} - \frac{n_m}{(-s_o)} = \frac{n_l - n_m}{R_1}$$

由于 $u_1 = -s_o$,

$$\frac{n_l}{v_1} + \frac{n_m}{s_o} = \frac{n_l - n_m}{R_1}$$

从介质 1 (n_l) 到介质 2 (n_m), 第二表面的物体是第一表面形成的像。对于薄透镜, 物距为 $-v_1$ 。

$$\frac{n_m}{s_i} - \frac{n_l}{(-v_1)} = \frac{n_m - n_l}{R_2}$$

$$\frac{n_m}{s_i} + \frac{n_l}{v_1} = \frac{n_m - n_l}{R_2} \quad (*)$$

由上式可知, $\frac{n_l}{v_1} = \frac{n_l - n_m}{R_1} - \frac{n_m}{s_o}$ 。由 (*), $\frac{n_l}{v_1} = \frac{n_m - n_l}{R_2} - \frac{n_m}{s_i}$ 令 $\frac{n_l}{v_1}$ 的两个表达式相等并化简, 得

$$\frac{n_m}{s_o} - \frac{n_m}{s_i} = (n_l - n_m) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

当 $s_i = f$ (像位于焦点) 时,

$$\frac{1}{f} = \frac{n_l - n_m}{n_m} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



设 $n_m = 1$ 且 $n_l = n_o$

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

10.5 衍射与干涉

10.5.1 叠加原理

叠加原理指出，当两个或多个波在空间重叠时，任意点的合成位移等于各分位移在该点的代数和。设两个谐波分别为：

$$y_1(x, t) = A_1 \sin(kx - \omega t + \phi_1)$$

$$y_2(x, t) = A_2 \sin(kx - \omega t + \phi_2)$$

根据叠加原理，合成波为：

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= A_1 \sin(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \sin(kx - \omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

利用三角恒等式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

我们得到

$$y(x, t) = 2A \cos \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) \sin \left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right)$$

其中 A 为有效振幅。

- 当 $\phi_2 - \phi_1 = 2n\pi$ 时，发生相长干涉（建设性干涉）。
- 当 $\phi_2 - \phi_1 = (2n + 1)\pi$ 时，发生相消干涉（破坏性干涉）。

10.5.2 复数

回顾复数 z 写为：

$$z = x + iy$$

其中 x 是实部， y 是虚部， $i = \sqrt{-1}$ 。



定理. 10.8: 欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

这在波动物理中非常有用，因为像 $A \cos(\omega t + \phi)$ 这样的振荡量可以表示为复指数的实部：

$$A \cos(\omega t + \phi) = \Re(A e^{i(\omega t + \phi)})$$

10.5.3 杨氏双缝干涉实验

考虑被波长为 λ 的相干光照射的、间距为 d 的两个狭缝。在距离为 L 的屏幕上某一点，光程差（定义为两列波从各自波源传播到公共点距离的差值）为：

$$\delta = d \sin \theta$$

其中 θ 是相对于中央亮纹的角度。

相长干涉（亮纹）的条件是

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

相消干涉（暗纹）的条件是

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

对于小角度， $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{L}$ ，其中 x 是条纹位移。则条纹宽度为

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d}$$

10.5.4 单缝衍射

衍射是指波绕过障碍物和孔径发生弯曲的现象。考虑宽度为 a 的狭缝。衍射图样极小值的条件是

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

中央极大值的宽度是次级极大值的两倍。角度 θ 处的强度由下式给出：

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2, \quad \beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$



10.5.5 瑞利判据

如果一个衍射图样的中央极大值与另一个衍射图样的第一极小值重合，则称这两个点光源恰好能被分辨。瑞利判据给出了分辨两个点光源的极限：

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

推导：考虑直径为 D 的圆孔。对于波长为 λ 的单色光，点光源的远场（夫琅禾费）衍射图样是艾里斑，其强度为

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2$$

其中 $a = D/2$, $k = 2\pi/\lambda$, J_1 是第一类 1 阶贝塞尔函数², θ 是距光轴的角距离。

$J_1(x)$ 的第一个零点出现在 $x \approx 3.8317$ 。令 $x = ka \sin \theta$ 。则

$$ka \sin \theta_{\min} = 3.8317 \implies \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta_{\min} = 3.8317$$

因此，

$$\sin \theta_{\min} \approx \frac{3.8317 \lambda}{2\pi(D/2)} \approx \frac{1.22\lambda}{D}$$

对于小角度 (θ 以弧度为单位)，

$$\theta_{\min} \approx \frac{1.22\lambda}{D}$$

这个 θ_{\min} 是艾里斑的角半径 (到第一个暗环)。

10.6 偏振

10.6.1 引言

偏振描述了光波电场矢量的振荡方向。光可以是：

²贝塞尔函数是贝塞尔微分方程的解：

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

其中 ν 是常数，通常称为贝塞尔函数的阶数。

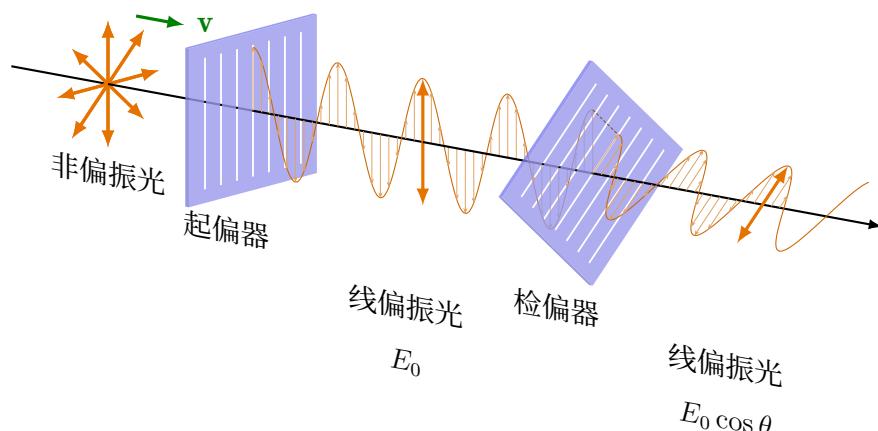
第一类贝塞尔函数 $J_\nu(x)$ 定义为以下级数展开：

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

其中 $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ (当 $\Re(z) > 0$ 时)



- **非偏振的:** 电场指向随机方向 (如阳光)。
- **线偏振的:** 电场沿单一方向振荡。
- **圆偏振的:** 电场随光传播旋转成圆形。
- **椭圆偏振的:** 电场描绘出椭圆的一般情况。



有几种获得偏振光的方法:

- **反射偏振:** 当光线以特定角度 (布鲁斯特角, θ_B) 反射时, 反射光会变成完全偏振光:

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

其中 n_1 和 n_2 是两种介质的折射率。

- **吸收偏振:** 偏振片 (起偏器) 只允许特定方向的电场分量通过。当线偏振光穿过偏振片时, 透射光强 I 由下式给出:

$$I = I_0 \cos^2 \theta \text{ (马吕斯定律)}$$

其中

- I_0 是光的初始强度。
- θ 是光偏振方向与偏振片轴之间的夹角。

10.6.2 法拉第旋转

法拉第效应 (或法拉第旋转) 是一种磁光现象, 即当线偏振光穿过置于传播方向上的强静磁场中的材料时, 其偏振面会发生旋转。这是历史上第一个将光与电磁学联系起来的证据。



当线偏振光穿过长度为 L 、置于磁场 \mathbf{B} （平行于传播方向）中的透明材料时，偏振面的旋转角 β 为：

$$\beta = VBL$$



11 量子力学

11.1 原子结构

11.1.1 历史发展

- **汤姆孙模型 (1897)**: “枣糕模型”，电子嵌入在均匀的正电荷球体中。
- **卢瑟福模型 (1911)**: 基于 α 粒子散射实验提出的“核式结构模型”。
- **玻尔模型 (1913)**: 引入了量子化轨道的概念。
- **量子力学模型**: 描述电子在空间中出现的概率，即“电子云/轨道”模型。

11.1.2 引言

原子由以下部分组成：

- **原子核**: 包含质子 (p^+) 和中子 (n)。
- **电子**: 在轨道上运动的带负电粒子。

粒子	符号	电荷	质量 (u)
质子	p 或 ${}_1^1H$	+1	1.007276
中子	n	0	1.008665
电子	e^-	-1	0.000549

Table 5: 基本原子粒子及其性质

对于元素 X，其表示符号为：

$${}_{Z}^{A}X$$

其中：

- A 是质量数 (质子数 + 中子数)，
- Z 是原子序数 (质子数)，
- 我们定义 N 为中子数 ($N = A - Z$)。



示例： $^{12}_6C_6$ 拥有 6 个质子和 6 个中子。

原子核的实际质量总是小于其组成粒子的质量之和，这一差值称为质量亏损：

$$\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - m_{\text{原子核}}$$

其中：

- Δm 表示质量亏损，
- m_p 表示质子质量，
- m_n 表示中子质量，
- $m_{\text{原子核}}$ 表示实测的核质量。

根据爱因斯坦的质能方程：

$$E = mc^2$$

其结合能 (Binding Energy) 为：

$$BE = \Delta m \cdot c^2$$

在计算中，使用原子质量单位 (u) 更加方便，其中 $1 u = 931.5 \text{ MeV}/c^2$ ：

$$BE (\text{MeV}) = \Delta m (u) \times 931.5$$

11.1.3 核衰变

类型	释放粒子	核电荷/质量变化	穿透力
阿尔法 (α)	$^{4}_2He$ 原子核	$Z \rightarrow Z - 2, A \rightarrow A - 4$	低
贝塔 (β^-)	电子 (e^-)	$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$	中
贝塔 (β^+)	正电子 (e^+)	$p \rightarrow n + e^+ + \nu$	中
伽马 (γ)	光子 (γ)	Z 和 A 均不改变	高

Table 6: 放射性衰变的类型



放射性衰变遵循一级动力学规律：

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

其中：

- $N(t)$ 是时刻 t 的原子核数量，
- N_0 是初始原子核数量，
- $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$ 是衰变常数， $t_{1/2}$ 为半衰期（原子核数量减少到一半所需的时间）。

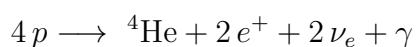
11.1.4 中微子

中微子是轻子家族的一员。它们呈电中性且质量极其微小，因此极难被探测。中微子仅通过弱相互作用和引力与其他物质发生作用，这使它们能够几乎不受阻碍地穿透物体。中微子共有三种类型（味），分别对应其关联的带电轻子：

- 电子中微子 (ν_e)
- μ 中微子 (ν_μ)
- τ 中微子 (ν_τ)

这些粒子产生于各种高能物理过程，如恒星内部的核反应、宇宙射线相互作用以及超新星爆发。

太阳中微子 太阳是中微子的主要来源，尤其是电子中微子 (ν_e)。这些中微子是在太阳核心的核聚变过程中产生的。太阳中占主导地位的聚变反应是“质子-质子链反应”(p-p 链)，它是太阳能量产生的主要途径。在此过程中，四个质子聚变成一个氦核，同时释放出伽马射线、中微子和正电子。其总反应式可表示为：



11.2 波粒二象性

德布罗意 (Louis de Broglie) 提出，所有物质都具有波动性质。德布罗意波长公式为：

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

其中：



- λ 是德布罗意波长,
- $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 是普朗克常数,
- p 是粒子的动量。

11.3 普朗克方程

对于频率为 ν 的电磁波, 光子的能量由下式给出:

$$E = h\nu$$

11.4 氢原子的玻尔模型

11.4.1 玻尔假设

1. 电子在库仑引力的作用下围绕质子做圆周运动。
2. 电子只能在特定的离散轨道上运动。
3. 电子的角动量是量子化的。
4. 只有当电子在不同轨道间跃迁时, 才会发射或吸收辐射。

11.4.2 公式推导

质子与电子之间的静电引力为:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

对于圆周运动, 向心力为:

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

联立两式:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \implies v^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{mr}$$

玻尔假设角动量量子化:

$$L = mvr = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \implies v = \frac{n\hbar}{mr}$$

代入 v 的表达式:

$$\left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{mr}$$



解得轨道半径 r_n :

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}n^2$$

定义玻尔半径 a_0 :

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \implies r_n = a_0 n^2$$

总能量为动能与势能之和:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

由于 $K = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$, 总能量可简化为:

$$E = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

代入 r_n , 得到能级公式:

$$E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = \frac{-13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

11.4.3 波函数

在量子力学中, 粒子的状态由一个复值函数完全描述, 称为波函数, 记作 $\psi(x, t)$ 。波函数包含了关于系统的所有可测量信息。波函数的物理意义由玻恩定则 (Born rule) 给出: 在时刻 t 、位置 x 找到粒子的概率密度为

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2.$$

由于粒子必须存在于空间中的某个位置, 因此在全空间找到粒子的总概率必须等于 1。这引出了归一化条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1.$$

11.4.4 定态薛定谔方程

定态薛定谔方程表示为:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi = E\psi$$

其中库仑势为:

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

使用分离变量法:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$



径向方程变为：

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R = 0$$

通过求解该方程并要求波函数在无穷远处趋于零且归一化，我们再次得出能量的量子化结果：

$$E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

11.5 不确定性原理

海森堡 (Werner Heisenberg) 证明，某些物理量对（如位置与动量）无法同时被精确测量。最著名的关
系式是：

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

其中：

- Δx 是位置的不确定度
- Δp 是动量的不确定度
- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 是约化普朗克常数

此外，能量与时间也存在类似的关系：

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

不确定性原理并非源于实验仪器的局限，而是量子系统固有的基本属性。粒子在同一时刻并不具备精确定义的位置和动量。**示例：**考虑一个粒子（如电子）通过宽度为 a 的狭缝。由于位置在 x 方向受到限制，其不确定度 $\Delta x \sim a$ 。通过狭缝后，粒子会发生衍射，导致其在 x 方向上的动量产生散布。根据单缝衍射的第一极小值条件 $a \sin \theta \sim \lambda$ ，结合德布罗意关系 $\lambda = h/p$ ，可以推导出：

$$\Delta x \Delta p_x \sim a \cdot \frac{h}{a} \sim h \sim \hbar$$

这完美契合了海森堡不确定性原理。



12 恒星天体物理学

12.1 恒星分类

恒星可以根据其内部结构进行分类：

- **主序星 (Main Sequence Stars)**: 核心进行氢核聚变，能量通过辐射或对流传输。遵循质量-光度关系：

$$\frac{L}{L_\odot} \approx \begin{cases} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{4.0} & \text{对于 } M > 10M_\odot \\ \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5} & \text{对于 } 0.5 < M < 10M_\odot \\ \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{2.3} & \text{对于 } M < 0.5M_\odot \end{cases}$$

- **巨星 (Giant Stars)**: 包层膨胀，在惰性氦核外围进行氢壳层聚变。
- **超巨星 (Supergiants)**: 大质量恒星，具有复杂的层状燃烧结构（氢、氦、碳、氧、硅壳层）。
- **白矮星 (White Dwarfs)**: 电子简并核心，由电子简并压力支撑。
- **中子星 (Neutron Stars)**: 中子简并物质，密度极高 ($\sim 10^{17} \text{ kg/m}^3$)。
- **黑洞 (Black Holes)**: 引力坍缩超过了中子简并压力的支撑极限。

恒星也可以根据其成分（星族）进行分类：

星族 (Population)	金属丰度 [Fe/H]	特征
星族 I (Population I)	≥ -0.5	富金属，银盘恒星，年轻
星族 II (Population II)	-1.0 至 -0.5	贫金属，银晕恒星，年老
星族 III (Population III)	$\ll -1.0$	无金属，第一代恒星

Table 7: 恒星星族

金属丰度会影响恒星演化：

- 不透明度随金属含量变化
- 在给定质量下，低金属丰度恒星通常更热、更蓝
- 金属丰度影响质量流失率



恒星还可以根据其活动性进行分类：

- **耀星 (Flare Stars)** (UV Ceti 型)：具有磁重联事件的 M 型矮星。磁重联是一种基础等离子体物理过程，其中磁场线的拓扑结构发生重组，将磁能转化为动能、热能和粒子加速。

- **自转类别：**

- 慢速自转星： $v_{\text{eq}} < 10 \text{ km/s}$ (太阳约为 2 km/s)
- 快速自转星： $v_{\text{eq}} > 50 \text{ km/s}$ (年轻恒星)

- **磁活动性：**

$$R'_{HK} = \frac{L_{HK}}{L_{\text{bol}}}$$

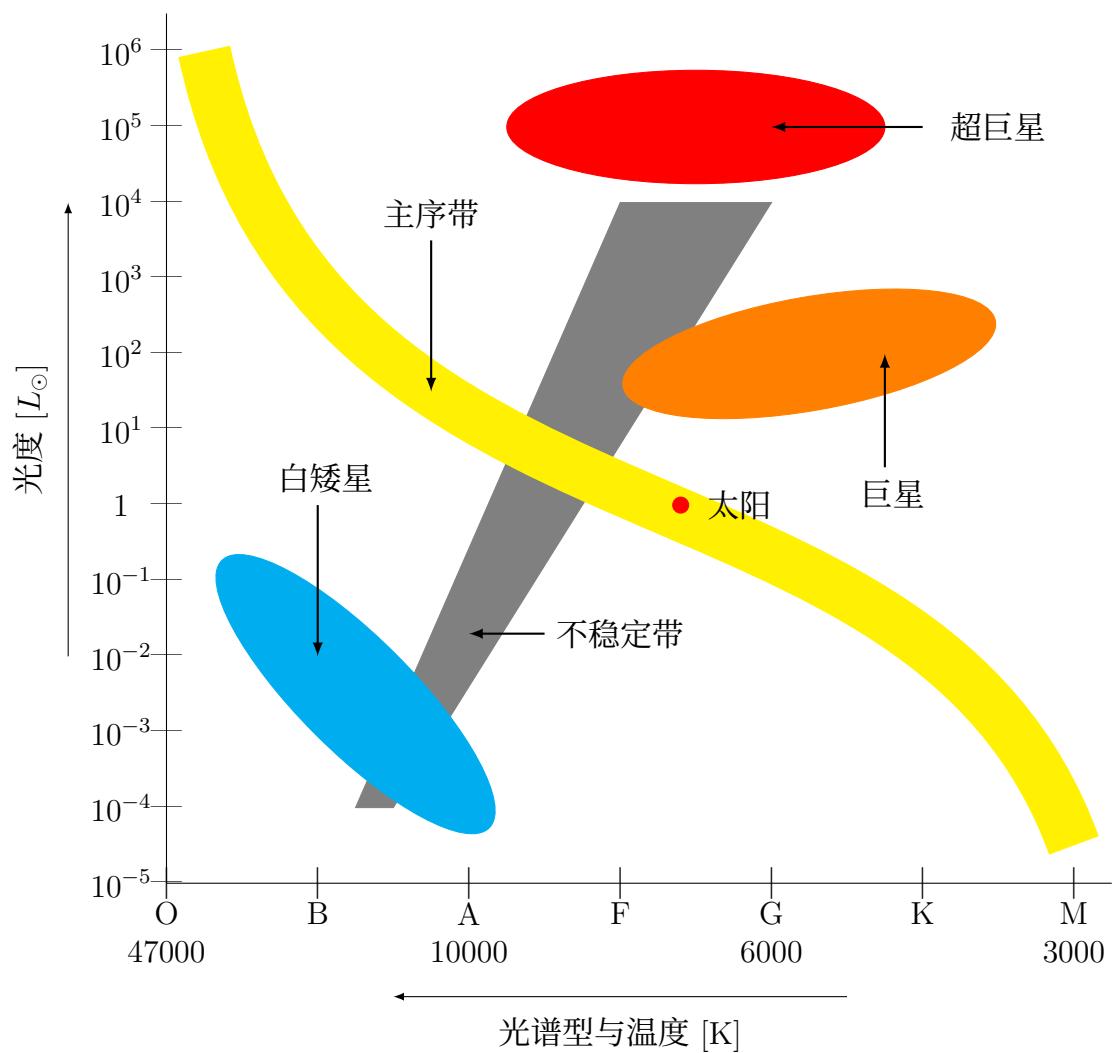
其中 L_{HK} 是钙 II (Calcium II) H 和 K 谱线的辐亮度，而 L_{bol} 是玻里耳光度 (Bolometric luminosity)：跨越所有波段 (从无线电到 X 射线) 的总功率输出)。该比例显示了恒星总能量输出中有多少部分是通过这些钙线从受磁加热的色球层发射的 (钙 II 是单电离钙)。

12.2 赫罗图 (HR Diagram)

12.2.1 简介

赫罗图 (Hertzsprung-Russell diagram) 是天文学中最重要的工具之一，由 Ejnar Hertzsprung (1905-1911) 和 Henry Norris Russell (1913) 独立开发。它通过揭示恒星属性的规律，彻底改变了我们对恒星演化的理解。





12.2.2 光谱型与温度

每种光谱型对应特定的温度范围和特征。从最热到最冷的恒星顺序如下：



光谱型	温度 (K)	颜色	质量 (M_{\odot})	例子
O	30,000-50,000	蓝色	15-90	弧矢增二十二 (ζ Puppis)
B	10,000-30,000	蓝白色	2-15	参宿七, 角宿一
A	7,500-10,000	白色	1.4-2	天狼星, 织女星
F	6,000-7,500	黄白色	1.04-1.4	南河三
G	5,200-6,000	黄色	0.8-1.04	太阳, 半人马座 α A
K	3,700-5,200	橙色	0.45-0.8	大角星, 毕宿五
M	2,400-3,700	红色	0.08-0.45	参宿四, 比邻星

Table 8: MK 光谱分类系统

序列“O, B, A, F, G, K, M”可能较难记忆。为了辅助记忆，天文学家常用助记句，其中一个经典的英文助记句是：

“Oh Be A Fine Girl/Guy, Kiss Me!”

除了光谱型，恒星还根据其光度（与其大小和亮度相关）进行分类，使用罗马数字 I 到 V 表示：

- I: 超巨星（如参宿四）
- II: 亮巨星
- III: 巨星（如半人马座 α ）
- IV: 亚巨星
- V: 主序星（如太阳）

恒星的完整分类由光谱型和光度级组合而成。例如，太阳被分类为 G2V 型星，意味着它是一颗 G 型主序星。

12.2.3 转折点 (Turn-Off Point)

转折点是赫罗图中一个重要特征，能帮助天文学家确定星团的年龄。它代表了恒星在耗尽核心氢气后，开始离开主序带并演化为红巨星的点。转折点在图中的位置取决于星团中恒星的质量。

注意：

$$\text{星团年龄} = \frac{M}{L} \propto \frac{M}{M^{3.5}} = \frac{1}{M^{2.5}}$$



其中 M 是转折点处恒星的质量。

12.3 恒星演化

12.3.1 恒星形成

恒星形成于被称为分子云或星云的巨型气体和尘埃云。过程包括：

- **引力坍缩**：密度较高的区域在引力作用下坍缩。
- **原恒星形成**：随着云团坍缩，形成一个致密的核心，并由于引力势能转化而升温。
- **吸积**：周围物质落在原恒星上，增加其质量和温度。

12.3.2 前主序星

在到达主序带之前，恒星经历前主序 (PMS) 阶段：

- 原恒星收缩并升温。
- 能量主要由引力收缩产生，而非核聚变。
- 前主序星在赫罗图上遵循**林忠四郎径迹** (Hayashi tracks) (针对低质量恒星) 或**亨耶迹** (Henyey tracks) (针对高质量恒星)。

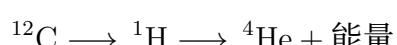
12.3.3 主序星

当核心开始氢聚变时，恒星进入**主序带**。

- 核心氢聚变通过**质子-质子链** (pp chain) (低质量星) 或**碳氮氧循环** (CNO cycle) (高质量星) 将氢转化为氦。
 - **质子-质子链**：



- **碳氮氧循环**：



- **恒星达到流体静力学平衡**：引力与聚变产生的辐射压力相互平衡。
- **主序寿命**取决于恒星质量；质量越大的恒星消耗燃料越快，寿命越短。

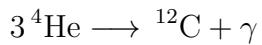


12.3.4 后主序演化

核心氢耗尽后，恒星根据质量不同而发生不同的演化。

低中等质量恒星 ($< 8M_{\odot}$)

- 膨胀为红巨星。
- 核心开始氦聚变 (3 α 过程)：



- 在抛射外层之前，可能会经历渐近巨星支 (AGB) 阶段。

高质量恒星 ($> 8M_{\odot}$)

- 膨胀为超巨星。
- 在连续的壳层中聚变更重的元素 (碳、氧、硅等)。
- 形成铁核，铁无法通过聚变产生能量。

12.3.5 超新星

- 大质量恒星以核心坍缩超新星 (II 型) 结束生命。
- 核心坍缩，外层物质被剧烈抛射。
- 超新星爆发使星际介质富含重元素。

12.3.6 行星状星云

- 由低中等质量恒星抛射外层形成。
- 裸露的核心发射紫外辐射，使喷射的气体电离。
- 最终逐渐暗淡，留下一个白矮星。

12.3.7 恒星的终态

- 白矮星：低/中等质量恒星的残骸。由电子简并压力支撑。
- 中子星： $8 - 20M_{\odot}$ 恒星经核心坍缩超新星爆发后的残骸。由中子简并压力支撑。
- 黑洞：极高质量恒星 ($> 20M_{\odot}$) 的残骸。引力压倒了所有形式的简并压力。



12.4 星等系统

定义. 12.1: 光度 (Luminosity)

光度是光源在单位时间内发射的总能量。

定义. 12.2: 亮度 (Luminance)

亮度是单位面积、单位立体角内朝给定方向发射或反射的可见光量。它描述了表面在人眼看来有多亮。

属性	光度	亮度
物理含义	发射的总功率	单位面积单位方向的明亮程度
取决于距离	否	否 (但取决于方向)
取决于面积	间接相关	直接相关
SI 单位	瓦特 (W)	cd/m ²
常用领域	天体物理学	光学

定义. 12.3: 通量 (Flux)

通量 (F 或 Φ) 是每单位时间和每单位面积从天体物体接收到的总能量。它表示通过垂直于传播方向的单位面积的功率 (单位时间内的能量)。

对于一个各向同性发射总光度 L 的源，距离 r 处的通量为

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

定义. 12.4: 立体角 (Solid Angle)

立体角是从某点观察到物体的三维角度大小。它定义为

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2}$$

其中

- dA 是半径 r 的球面上的面积元素，
- $d\Omega$ 是相应的立体角。



定义. 12.5: 强度 (Intensity)

单位立体角的通量称为强度：

$$I = \frac{dF}{d\Omega}$$

定义. 12.6: 光谱通量密度 (Spectral Flux Density)

谱通量密度 (F_λ 或 F_ν) 是每单位波长或频率区间的通量。它描述了通量在电磁谱中的分布。

太阳常数是地球距离太阳处接收到的通量：

$$F_\odot = 1361 \text{ W m}^{-2} = 1.361 \times 10^6 \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$$

这表示在 1 天文单位处，1 平方米接收到的所有波长的太阳总功率。

定义. 12.7: 视星等 (Apparent Magnitude)

它是指从地球观察到物体的亮度，表示为

$$m = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F}{F_0} \right)$$

其中 F_0 是零星等的参考通量。零点 F_0 是使用标准恒星进行标定的。最初，天琴座 α (维加星) 被定义为在所有滤光器中亮度为 0.0 的星星。现代系统使用更精确的光谱光度标准。

古代天文学家（尤其是公元前 150 年的希帕恰斯）通过肉眼对星星进行排名：

1. 1 等星意味着最亮的（例如天狼星和维加）
2. 6 等星意味着最暗的肉眼可见星星

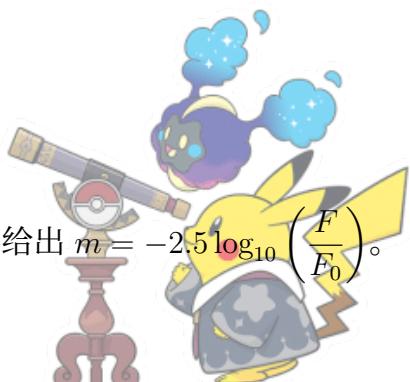
直到很久之后（1856 年），诺曼·波戈森为此提供了数学基础。他定义了一个比例，使得 5 个星等的差异对应于亮度比的 100 倍。

$$\frac{F_1}{F_2} = 100 \iff m_2 - m_1 = 5$$

假设星等差异与通量比的对数成正比：

$$m_2 - m_1 = k \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right)$$

根据波戈森条件， $5 = 2k \implies k = 2.5$ 。取星星 1 为参考星： $m_1 = 0, F_1 = F_0$ 给出 $m = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F}{F_0} \right)$ 。



后来，发现对数尺度符合韦伯-费希纳定律，该定律在心理物理学中指出感知的感觉与刺激强度的对数成正比。

定义. 12.8: 绝对星等 (Absolute Magnitude)

物体位于标准距离 10 秒差距 (32.6 光年) 处的亮度称为绝对星等：

$$M = m - 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)$$

其中 d 是物体与观测者的距离，单位是秒差距。

定义. 12.9: 距离模数 (Distance Modulus)

视星等和绝对星等之间的差值直接与距离相关：

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} d - 5$$

定义. 12.10: 极限星等 (Limiting Magnitude)

极限星等是指给定仪器在特定观测条件下能够探测到的天体的最暗视星等。它表示了可观测和不可观测之间的阈值。其表达式为

$$m_{\text{lim}} = m_{\text{eye}} + 5 \log \left(\frac{D}{d_{\text{eye}}} \right) + 2.5 \log_{10} \left(\frac{\text{Transmission}}{0.95} \right)$$

其中

1. m_{eye} 是肉眼的极限星等 (在理想条件下通常为 6.0),
2. D 是望远镜口径,
3. d_{eye} 是暗适应眼睛瞳孔直径 (通常为 7 毫米),
4. Transmission 是光学传输系数。

定义. 12.11: 玻里耳星等 (Bolometric Magnitude)

全波段星等 (m_{bol} 或 M_{bol}) 是衡量天文物体在所有波长 (从伽马射线到无线电波) 上的总电磁光度的量度。与特定滤光器的星等不同，它考虑了所有发射的辐射。



全波段星等通过全波段通量 F_{bol} 来定义，后者是对所有波长的谱通量密度的积分：

$$F_{\text{bol}} = \int_0^{\infty} F_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} F_{\nu} d\nu$$

然后，视全波段星等为

$$m_{\text{bol}} = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_{\text{bol}}}{F_{\text{bol},0}} \right)$$

其中 $F_{\text{bol},0}$ 是零星等的参考全波段通量。

定义. 12.12: 玻里耳改正 (Bolometric Correction)

它是全波段星等和可见光星等之间的差值：

$$BC = M_{\text{bol}} - M_V$$

或者对于视星等：

$$BC = m_{\text{bol}} - m_V$$

太阳的星等通常被认为是全波段星等。因此，通常使用

$$M_{\text{bol}} - M_{\odot} = -2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)$$

例子. (2013 年 IOAA) 一颗恒星的可见光视星等为 $m_V = 12.2$ 等，视差 $\pi = 0.001''$ ，有效温度 $T_{\text{eff}} = 4000 \text{ K}$ 。它的全波段修正 B.C. = -0.6 等。

(a) 以太阳光度为函数求该恒星的光度。

(b) 它属于哪种类型的恒星？

(i) 红巨星

(ii) 蓝巨星

(iii) 红矮星

请在答题纸上写出 (i)、(ii) 或 (iii)。

解.



(a) 首先, 从

$$M_V - m_V = 5 - 5 \log r$$

或者等效地,

$$M_V - m_V = 5 + 5 \log \pi$$

得到

$$M_V = 12.2 + 5 + 5 \log(0.001) = 12.2 + 5 - 15 = 2.2 \text{ mag}$$

全波段修正定义为

$$\text{B.C.} = M_{\text{bol}} - M_V$$

因此,

$$M_{\text{bol}} = \text{B.C.} + M_V = -0.6 + 2.2 = 1.6 \text{ mag}$$

使用

$$M_{\odot} - M_{\text{bol}} = 2.5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)$$

其中 $M_{\odot} = 4.72$ 等, 得到

$$4.72 - 1.6 = 2.5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)$$

$$\log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) = 1.25$$

因此

$$L = 17.7 L_{\odot}$$

(b) 一颗恒星, $M_{\text{bol}} = 1.6$ 等, 光度 $L = 17.7 L_{\odot}$, 有效温度 $T_{\text{eff}} = 4000 \text{ K}$, 比太阳亮且温度较低。因此, 它是 (i) 红巨星。

12.5 反照率

反照率 (Albedo) 是一个衡量表面反射能力的无量纲物理量。它被定义为表面反射的入射电磁辐射（通常为阳光）的比例。

如果一个表面接收到的入射辐射功率为 P_{in} , 反射功率为 P_{ref} , 则其反照率 α 定义为

$$\alpha = \frac{P_{\text{ref}}}{P_{\text{in}}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$



假设行星作为黑体辐射并处于热平衡状态，则吸收的功率等于发射的功率：

$$(1 - \alpha)\pi R^2 S = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

其中 σ 是斯特藩-玻尔兹曼常数。

解出平衡温度 T ：

$$T = \left(\frac{(1 - \alpha)S}{4\sigma} \right)^{1/4}$$

12.6 几何反照率

几何反照率 (Geometric albedo) 是一个无量纲量，用于衡量天体在满相（即相位角为零）时，与理想参考表面相比的亮度。令

- α 为相位角 (phase angle)，定义为从天体观察时，来自光源（如太阳）的入射辐射与指向观测者的方向之间的夹角，
- $\alpha = 0$ 对应全照明（观测者直接位于光源后方）。

我们引入一个参考表面：

一个具有与该物体相同截面积的理想散射（朗伯）平面圆盘，在法向入射下进行照明和观察。

朗伯表面各向同性地反射辐射，遵循朗伯余弦定律：

定理. 12.1: 朗伯余弦定律

如果一个表面的辐射亮度与方向无关，则该表面遵循朗伯余弦定律：

$$I(\theta, \phi) = I_0 = \text{常数}$$

对于朗伯表面，发射到立体角 $d\Omega$ 内的功率为

$$dP = I_0 \cos \theta dA d\Omega$$

如果入射太阳通量为 F_{inc} ，一个完全反射的圆盘截取的功率为 $P = F_{inc}A$ 。将朗伯发射在半球上进行积分：

$$P_{reflected} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{ref} \cos \theta \sin \theta A d\theta d\phi = \pi A I_{ref}$$



令入射功率等于反射功率 ($P_{reflected} = F_{inc}A$), 我们得到:

$$I_{ref} = \frac{F_{inc}}{\pi}$$

几何反照率 p 定义为

$$p = \frac{I_{object}(\alpha = 0)}{I_{ref}} = \frac{\pi I_{object}(\alpha = 0)}{F_{inc}}$$

向所有方向反射的总能量由邦德反照率 (Bond Albedo) (A_B) 表征, 它通过相位积分 (phase integral) q 与 p 相关联:

$$A_B = p \cdot q, \quad q = 2 \int_0^\pi \Phi(\alpha) \sin \alpha d\alpha$$

其中 $\Phi(\alpha)$ 是相位函数, 它是天体相对亮度随相位角变化的函数, 归一化满足 $\Phi(0) = 1$ 。

12.7 色指数

色指数通过测量两个不同波段之间的星等差异来量化天体的颜色:

$$C = m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2}$$

其中 m_{λ_1} 和 m_{λ_2} 是通过不同滤光片测得的视星等。

滤光片	中心波长 (λ_c , nm)	半高全宽 (FWHM, nm)	典型用途
U	365	66	紫外连续谱
B	445	94	蓝光, 巴耳末断裂
V	551	88	视觉 (明视觉)
R	658	138	红光连续谱
I	806	149	近红外

Table 9: Johnson-Cousins 光度系统滤光片



以下是常用的色指数：

$$U - B = m_U - m_B$$

$$B - V = m_B - m_V$$

$$V - R = m_V - m_R$$

$$V - I = m_V - m_I$$

观测到的色指数受星际消光的影响：

$$(B - V)_{\text{obs}} = (B - V)_0 + E(B - V)$$

其中 $E(B - V)$ 为色余 (color excess)：

$$E(B - V) = A_B - A_V$$

其中 A_B 是 B 波段的消光 (单位: mag), A_V 是 V 波段的消光 (单位: mag)。

12.8 大气消光

大气消光会降低观测到的通量：

$$m_{\lambda, \text{obs}} = m_{\lambda, \text{true}} + k'_{\lambda} \cdot X$$

其中

- k'_{λ} 是消光系数 (mag/airmass),
- X 是大气质量 (airmass, 无量纲), 用于量化光路径上的大气厚度。

对于平行平面大气模型,

$$X = \sec z$$

其中 z 是天顶距 ($z = 90^\circ - \text{高度角}$)。

12.9 光深度

光深度 τ_{ν} 通过比较初始强度 $I_{\nu}(0)$ 和透射强度 $I_{\nu}(s)$ 来描述衰减：

$$\tau_{\nu}(s) \equiv -\ln \left(\frac{I_{\nu}(s)}{I_{\nu}(0)} \right).$$



星等单位的消光 A_λ 与光深度的关系为

$$A_\lambda = 2.5 \log_{10}(e\tau_\lambda) = 1.086 \tau_\lambda.$$

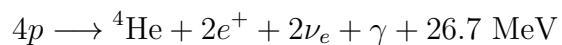
因为

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\tau_\lambda} = 10^{-0.4A_\lambda}.$$

12.10 太阳研究

12.10.1 成分

太阳主要由氢和氦组成，含有极少量的重元素。氢原子核（质子）在太阳核心进行核聚变：



通过质子-质子链反应为太阳提供能量。

12.10.2 内部结构

1. 核心 (Core):

- 半径: $\sim 0.2 R_\odot$
- 核聚变场所: $4p \longrightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + 26.7 \text{ MeV}$
- 温度: $\sim 1.5 \times 10^7 \text{ K}$

2. 辐射区 (Radiative Zone):

- 能量通过辐射传输
- 温度梯度向外减小

3. 对流区 (Convective Zone):

- 能量通过对流传输
- 占据太阳半径的外围 $\sim 30\%$
- 对流单元在光球层形成米粒组织 (granulation)



12.10.3 大气层

- 光球层 (Photosphere): 可见表面; $T \sim 5800$ K
- 色球层 (Chromosphere): 光球层上方; 比光球层更热; $T \sim 10^4$ K
- 日冕层 (Corona): 最外层; $T \sim 10^6$ K; 太阳风的源头

12.10.4 太阳表面活动

太阳黑子 太阳黑子是太阳光球层（太阳的可见表面）上因强磁场引起的临时黑暗区域。

12.10.5 太阳风

太阳风是从日冕层持续流出的等离子体。太阳风主要包含:

- 质子 (p^+)
- 电子 (e^-)
- 阿尔法粒子 ($\alpha = {}^4\text{He}^{2+}$)

日冕具有极高的温度 ($T \sim 1 \times 10^6$ K)。声速为

$$c_s \sim \sqrt{\frac{k_B T}{m_p}}$$

由于日冕在如此高的热压下无法保持静止，等离子体向外扩张，形成太阳风。（备注：等离子体常被称为物质的第四态。它是一种完全或部分电离的气体，意味着其中很大一部分原子或分子带有电荷（离子和电子）。）

日球层 (Heliosphere) 是受太阳风和太阳磁场支配的太空区域，延伸至远超冥王星轨道的地方。

磁层 (Magnetosphere) 是行星周围由行星磁场主导带电粒子运动的区域，保护行星免受太阳风的侵袭。

12.11 双星

双星系统由两颗绕其共同质心运行的恒星组成。



12.11.1 双星的不同类型

目视双星 (Visual Binaries) 指可以通过望远镜分辨出单个恒星的双星。它们的轨道可以随时间直接观测。

分光双星 (Spectroscopic Binaries) 指通过谱线中周期性的多普勒频移检测到的双星。它们可进一步分为

- **单线分光双星 (SB1):** 仅能观测到一组谱线
- **双线分光双星 (SB2):** 能观测到两组谱线

食双星 (Eclipsing Binaries) 轨道的平面几乎与我们的视线平行的系统，导致周期性的交食。这些系统提供了最完整的恒星参数信息。

天体测量双星 (Astrometric Binaries) 通过一颗恒星因看不见的伴星而产生的自行摆动来检测。

相互作用双星 (Interacting Binaries)

- 当一颗恒星充满其洛希瓣 (Roche lobe) 时会发生质量转移。
- 例子：激变变星、X 射线双星。

特殊双星系统 (Peculiar Binary Systems)

- 具有异常特性的系统，如极短的轨道周期或高度离心的轨道。
- 例子：密接双星、大陵五型 (Algol-type) 双星。

12.11.2 修正的开普勒第三定律

对于双星系统，开普勒第三定律联系了轨道周期 P 、半长轴 a 和总质量 M :

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)} \quad (9)$$

其中

- P 是轨道周期，
- a 是相对轨道的半长轴，
- M_1, M_2 是两颗恒星的质量



12.11.3 质量函数 (Mass Function)

对于分光双星，我们可以测量其质量函数。对于单谱分光双星 (SB1)：

$$f(M) = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{P}{2\pi G} v_{1,r}^3$$

对于双谱分光双星 (SB2)，我们可以确定两者的质量比：

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_{2,r}}{v_{1,r}}$$

证明：我们从绕共同质心运行的两体系统开普勒第三定律开始：

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)}$$

其中 $a = a_1 + a_2$ 是两恒星之间的总距离， a_1 和 a_2 分别是它们到质心的距离。

根据质心定义：

$$a_1 M_1 = a_2 M_2$$

由此得到质量比：

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1} \quad (10)$$

总距离 a 也可以用 a_1 表示：

$$a = a_1 + a_2 \quad (11)$$

$$= a_1 + a_1 \frac{M_1}{M_2} \quad (\text{由公式 10 得出}) \quad (12)$$

$$= a_1 \left(\frac{M_1 + M_2}{M_2} \right) \quad (13)$$

对于可见星（主星，恒星 1），我们测量其视向速度振幅 $v_{1,r}$ 。真实的轨道速度 v_1 与观测到的视向速度通过轨道倾角 i 相关联：

$$v_{1,r} = v_1 \sin i \quad (14)$$

对于圆轨道 ($e = 0$)，轨道速度为常数，表示为：

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P}$$



结合公式 14 和 15:

$$v_{1,r} = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P} \quad (16)$$

从公式 16 中解出 a_1 :

$$a_1 = \frac{P v_{1,r}}{2\pi \sin i}$$

现在将公式 13 代入开普勒定律 (公式 12.11.3):

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} \left[a_1 \left(\frac{M_1 + M_2}{M_2} \right) \right]^3 \quad (17)$$

$$= \frac{4\pi^2 a_1^3}{G(M_1 + M_2)} \cdot \frac{(M_1 + M_2)^3}{M_2^3} \quad (18)$$

$$= \frac{4\pi^2 a_1^3}{G} \cdot \frac{(M_1 + M_2)^2}{M_2^3} \quad (19)$$

将公式 12.11.3 中的 a_1 代入公式 19:

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{(M_1 + M_2)^2}{M_2^3} \cdot \left(\frac{P v_{1,r}}{2\pi \sin i} \right)^3 \\ &= \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{(M_1 + M_2)^2}{M_2^3} \cdot \frac{P^3 v_{1,r}^3}{8\pi^3 \sin^3 i} \\ &= \frac{P^3 v_{1,r}^3}{2\pi G \sin^3 i} \cdot \frac{(M_1 + M_2)^2}{M_2^3} \end{aligned}$$

等式两边同时除以 P^2 :

$$1 = \frac{P v_{1,r}^3}{2\pi G \sin^3 i} \cdot \frac{(M_1 + M_2)^2}{M_2^3}$$

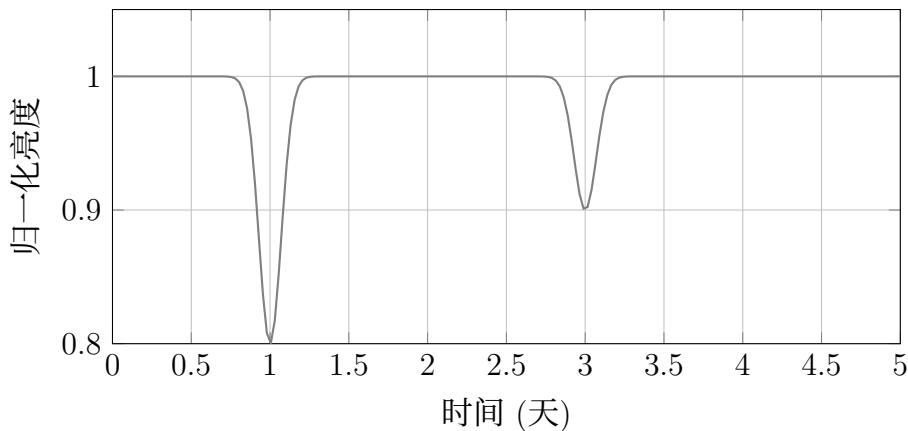
整理等式，将质量项移至左侧:

$$\frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{P}{2\pi G} v_{1,r}^3$$

12.11.4 光变曲线 (Light Curves)

食双星表现出特征性的光变曲线，其亮度会发生周期性的下降:





1. 设 F_1 和 F_2 为两颗恒星的流量。当两颗星都可见时，观测到的总流量为

$$F_{\text{total}} = F_1 + F_2$$

2. 主食 (Primary eclipse) 发生在较亮的星被较暗的星部分或全部遮挡时，导致亮度大幅下降。设主星被遮挡的比例为 $f_1(t)$ ，则观测到的流量为

$$F_{\text{primary}}(t) = F_1 [1 - f_1(t)] + F_2$$

3. 次食 (Secondary eclipse) 发生在较暗的星被较亮的星遮挡时，导致亮度下降幅度较小。此时观测流量为：

$$F_{\text{secondary}}(t) = F_1 + F_2 [1 - f_2(t)]$$

4. 如果发生全食，流量的减少量正好等于被遮挡恒星的光度。

在此图中：

- $t = 1$ 天时的深波谷对应主食。
- $t = 3$ 天时的浅波谷对应次食。

12.11.5 视向速度曲线 (Radial Velocity Curves)

双星系统由两颗绕共同质心运行的恒星组成。如果轨道平面相对于视线存在倾斜，恒星将交替向着和背离观测者运动。这种运动会导致光谱线产生周期性的多普勒频移：

- 向着观测者运动产生蓝移



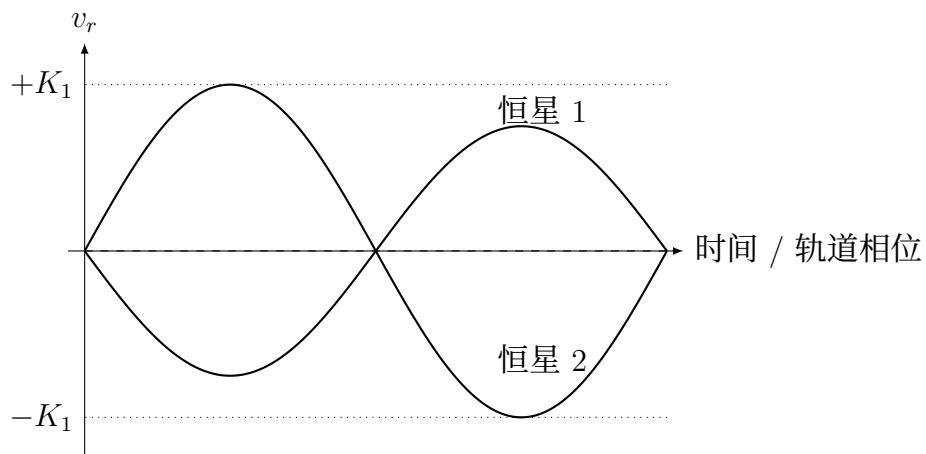
- 背离观测者运动产生红移

轨道速度在视线方向的分量称为**视向速度**。**视向速度曲线**是视向速度 v_r 随时间 t (或轨道相位) 变化的图表。它提供了关于双星系统轨道特性的直接信息。

对于圆轨道双星，视向速度呈正弦变化：

$$v_r(t) = K \sin\left(\frac{2\pi t}{P} + \phi\right)$$

其中 K 是视向速度振幅， P 是轨道周期， ϕ 是相位常数。



- 圆轨道的曲线是正弦曲线。
- 由于动量守恒，两颗恒星的相位相反。
- 质量较大的恒星速度振幅较小。
- 曲线的周期等于轨道周期。

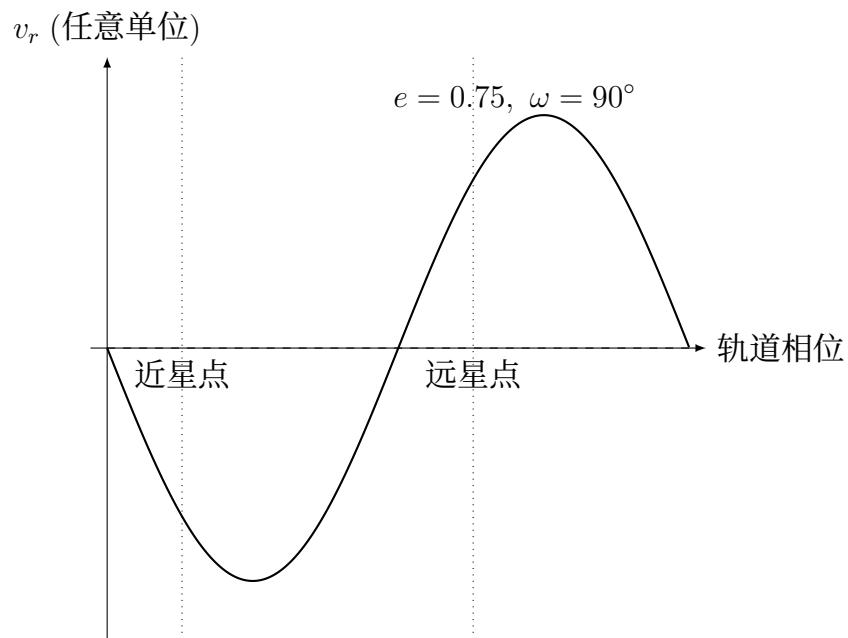
对于**椭圆轨道**，视向速度变化规律如下：

$$v_r(t) = \gamma + K [\cos(\theta(t) + \omega) + e \cos \omega]$$

其中 γ 是系统 (质心) 速度， e 是轨道离心率， ω 是近星点幅角， $\theta(t)$ 是真近点角。半振幅 K 为：

$$K = \frac{2\pi a \sin i}{P \sqrt{1 - e^2}}$$





12.11.6 罗氏瓣 (Roche Lobe)

在近距双星系统中，测试粒子感受到的引力场由两颗恒星的引力及旋转坐标系下的离心效应共同决定。罗氏瓣是指恒星周围物质受引力束缚的区域。如果一颗恒星填满或超过其罗氏瓣，物质就会转移到其伴星上，这是相互作用双星（如 X 射线双星、激变变星）的核心机制。

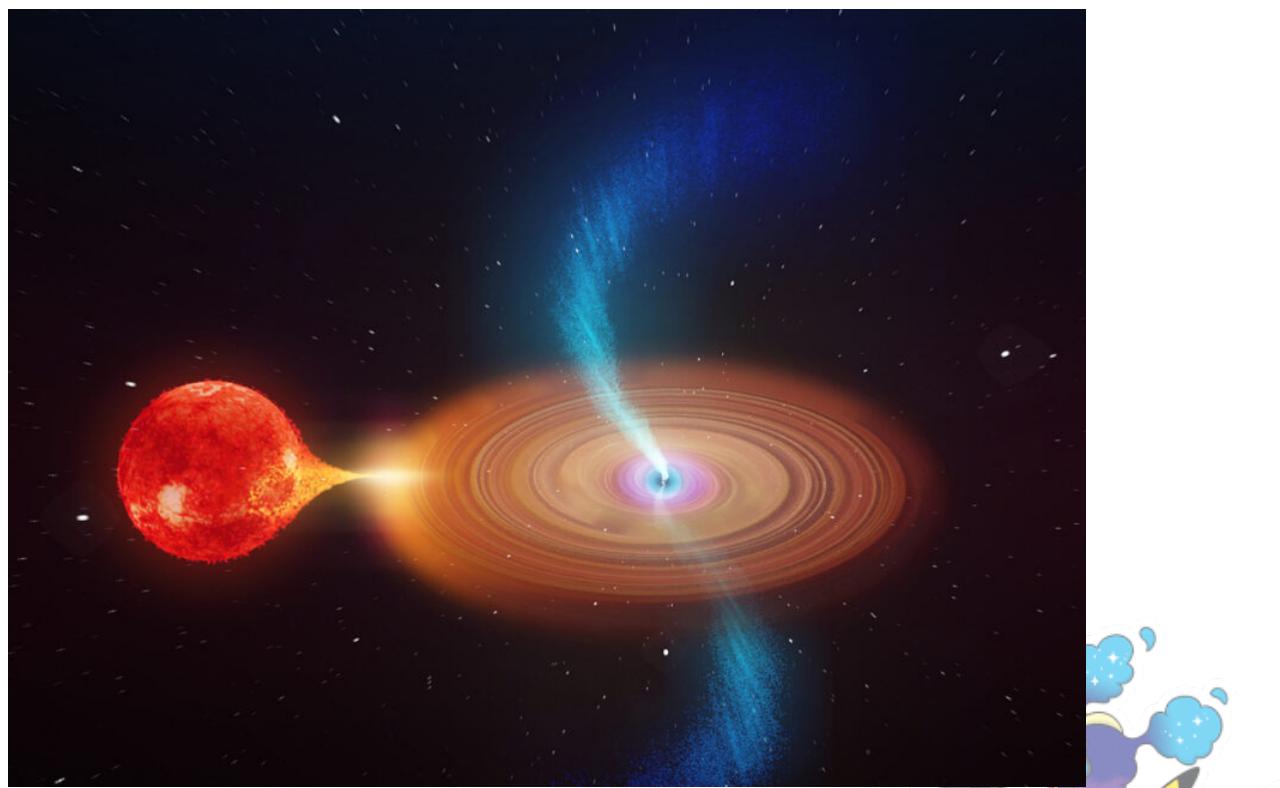


Figure 9: 图示：V404 Cygni。来源：root-nation.com



12.12 系外行星 (Exoplanet)

12.12.1 简介

系外行星（或太阳系外行星）是绕太阳系以外的恒星运行的行星。

12.12.2 系外行星分类

- **热木星 (Hot Jupiters):** 距离主星非常近的气态巨行星。
- **超地球 (Super-Earths):** 质量大于地球但小于海王星的行星。
- **类地行星 (Terrestrial planets):** 与地球或火星类似的岩石行星。
- **冰巨星 (Ice giants):** 类似于天王星和海王星。

12.12.3 可能的生命光谱特征

- 在系外行星大气中探测到生物特征气体，如 O₂、O₃、CH₄ 和水蒸气。
- 通常在行星凌星期间通过透射光谱法进行观测。

12.12.4 视向速度法 (Radial Velocity Method)

也称为多普勒法。该技术测量由行星引力牵引引起的恒星“晃动”。

$$\Delta v = K \left[\frac{P}{2\pi G} \right]^{1/3} \frac{m_p \sin i}{m_s^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

12.12.5 凌星法 (Transit Method)

测量行星经过恒星前方时引起的恒星亮度周期性微减。

$$\Delta F = \left(\frac{R_p}{R_s} \right)^2$$

其中 ΔF 是流量减少的分数。

12.12.6 宜居带 (Habitable Zone)

宜居带是指恒星周围行星表面可能存在液态水的区域。



13 宇宙学

13.1 宇宙的结构

13.1.1 星团

引言 星团是由同一分子云形成，且在引力上相互束缚的一群恒星。它们为恒星演化和银河系结构提供了重要的见解。星团大致分为两类：

- **疏散星团（银河星团）：**这些星团包含几十到几千颗恒星。它们的结合较为松散，通常存在于银河系盘面。疏散星团相对年轻（几百万到几亿年），通常包含高温、大质量的恒星。
- **球状星团：**这些是数万到数百万颗恒星构成的致密球形集合。它们绕银河系晕运行，通常非常古老（100-130亿年）。球状星团富含低质量恒星，几乎没有气体或尘埃。

在结构上，星团拥有一个核心（最密集的区域）、一个晕（较弥散的恒星区），在某些情况下还拥有一个潮汐半径，恒星可能会由于银河系的引力作用而在此处逃逸。

光度 星团的光度 L 可以通过累加星团中所有恒星的光度来计算：

$$L_{\text{cluster}} = \sum L_{\text{stars}}$$

其中 L_{stars} 是星团中每颗恒星的光度。

13.1.2 星系

星系是由恒星、气体、尘埃和暗物质构成的庞大系统，由引力束缚在一起。它们是宇宙的基本组成单元。星系可以根据其结构、组成和活动进行分类：

- **椭圆星系：**光度分布平滑、无特征，由年老恒星主导，几乎没有气体或尘埃。
- **螺旋星系：**具有螺旋臂的扁平旋转盘，含有气体、尘埃和年轻恒星。
- **棒旋星系：**中心具有棒状恒星结构的螺旋星系。
- **不规则星系：**没有固定形状，通常富含气体和尘埃。
- **活动星系：**拥有高能核心（AGN），通常由于物质吸积到超大质量黑洞而发出强烈的辐射。

我们的银河系是一个棒旋星系，具有几个明显的组成部分：



- **核球**: 中心区域，恒星密度高，大多为年老恒星。
- **银盘**: 包含螺旋臂、气体、尘埃和年轻恒星。
- **银晕**: 包含球状星团和暗物质的球形区域。

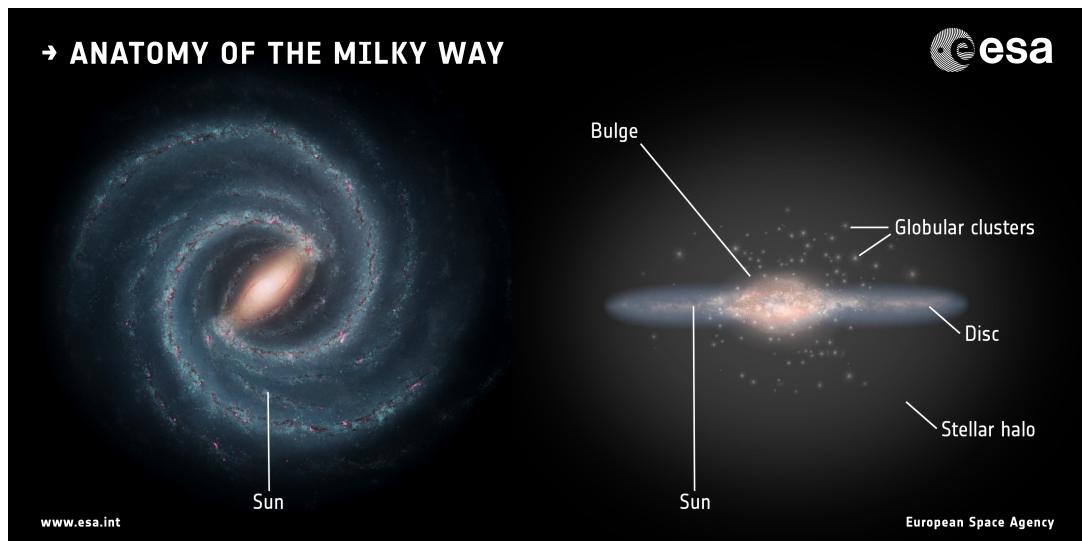


Figure 10: 取自 <https://sci.esa.int/web/gaia/-/58206-anatomy-of-the-milky-way>

银河系的卫星星系包括像大、小麦哲伦星云这样的矮星系，以及几个超微弱矮星系。这些卫星星系为银河系的形成和暗物质分布提供了线索。

13.2 大尺度结构

宇宙的大尺度结构 (LSS) 指的是在比单个星系更大的尺度上（通常 $\gtrsim 1 \text{ Mpc}$ ）物质的分布。在这些尺度上，物质并不是均匀分布的，而是形成了一个复杂的网络，被称为宇宙网：

- **星系团**: 由数百到数千个星系构成的致密、受引力束缚的系统。
- **星系群**: 较小的星系组合，通常包含几个到几十个成员。
- **纤维状结构**: 连接星系团和星系群的拉长结构，包含星系和暗物质。
- **空洞**: 星系极少的巨大低密度区域。
- **长城 / 片状结构**: 分隔空洞的扁平星系结构。

大尺度结构形成于早期宇宙中微小的密度涨落：

- 量子涨落在宇宙暴胀期间被拉伸。



- 过密度区域通过引力不稳定性增长。
- 暗物质首先坍缩，形成引力势阱。
- 重子物质随后落入这些势阱，形成星系。

在足够大的尺度上 ($\gtrsim 100$ Mpc)，宇宙近似是均匀且各向同性的，这与宇宙学原理一致。

13.3 宇宙学原理

宇宙学原理指出，在足够大的尺度上 ($\gtrsim 100$ Mpc)，宇宙是

- **均匀的：**物质和能量分布均匀
- **各向同性的：**空间中没有择优方向

13.4 旋转曲线

在一个星系中，恒星或气团由于星系内部质量的引力吸引而绕星系中心运行。根据牛顿力学，在距中心距离为 r 处的物体轨道速度应表现为

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM_{\text{enc}}(r)}{r}}$$

其中

- $v(r)$ 是距中心距离 r 处的轨道速度，
- $M_{\text{enc}}(r)$ 是半径 r 内包含的质量。

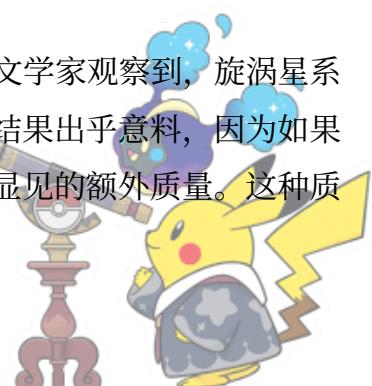
包含的质量 $M_{\text{enc}}(r)$ 取决于星系内可见物质（如恒星和气体）和暗物质的分布。

对于一个由可见物质（恒星、气体等）主导的星系，包含的质量随半径增加，但在远离中心的距离处，质量分布变得稀疏。那么

$$v(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

这被称为开普勒衰减，在太阳系行星的运动中可以观察到。然而，对星系的观测表明，旋转曲线并非如此。

在 20 世纪 70 年代，维拉·鲁宾 (Vera Rubin) 和肯特·福特 (Kent Ford) 等天文学家观察到，旋涡星系的旋转曲线在远离中心、甚至远超可见物质存在的区域仍保持平坦。这一观测结果出乎意料，因为如果质量分布仅遵循可见物质，旋转速度本应下降。旋转曲线的平坦性表明存在不显见的额外质量。这种质量就是我们所说的暗物质。



在大半径处观察到的平坦旋转曲线意味着即使在外部区域，星系内的质量仍继续增加。轨道速度 $v(r)$ 保持恒定：

$$v(r) = v_{\text{flat}} \quad \text{对于大} r$$

这表明暗物质的引力影响在远离星系中心（可见物质稀疏处）是非常显著的。

13.5 哈勃定律

$$v = H_0 d$$

其中 v 是退行速度， d 是到星系的固有距离， H_0 是当今的哈勃常数。可以注意到 $t_H = \frac{1}{H_0}$ 即为宇宙的年龄。

宇宙膨胀由标度因子 $a(t)$ 描述，它衡量宇宙中的距离如何随时间变化。哈勃参数使用标度因子定义为：

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

在膨胀宇宙中传播的光也会随着膨胀而拉伸。如果一个光子在 t_{em} 时刻以波长 λ_{em} 发射，并在今天 t_0 时刻以波长 λ_{obs} 被观测到，则宇宙学红移定义为

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}}$$

红移与标度因子直接相关：

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_{\text{em}})}$$

13.6 宇宙学距离测量

13.6.1 固有距离

固有距离与宇宙的标度因子 $a(t)$ 相关，后者描述了由于宇宙膨胀，物体之间的距离如何随时间变化。对于红移为 z 的物体，给定时间的固有距离 D_p 与共动距离 D_c 的关系为

$$D_p(t) = a(t)D_c$$

其中

- D_p 是固有距离，
- D_c 是共动距离，



- $a(t)$ 是观测时刻的标度因子。

13.6.2 共动距离

共动距离是考虑了宇宙膨胀的坐标系中测得的两个物体之间的距离。与固有距离不同，对于在膨胀宇宙中相对静止的两个物体，共动距离随时间保持不变。

红移 z 处的共动距离 D_c 与标度因子 $a(t)$ 的关系为

$$D_c = \int_0^z \frac{c dz'}{H(z')}$$

其中

- c 是光速，
- $H(z')$ 是作为红移 z' 函数的哈勃参数，
- z 是物体所在的红移。

13.6.3 光度距离

光度距离是基于物体的观测亮度及其固有光度得出的距离。它常用于超新星等已知固有光度的物体。

光度距离 D_L 与观测流量 f_{obs} 和物体的固有光度 L 通过平方反比定律相关联：

$$f_{\text{obs}} = \frac{L}{4\pi D_L^2}$$

由此关系，我们可以解出光度距离：

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f_{\text{obs}}}}$$

在平坦宇宙中，光度距离与共动距离的关系为

$$D_L(z) = (1+z)D_c(z)$$

13.6.4 角直径距离

角直径距离与物体的物理尺寸 r 及其角大小 θ （以弧度为单位）的关系为

$$\theta = \frac{r}{D_A}$$



13.7 弗里德曼方程

定理. 13.1: 第一弗里德曼方程

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a(t)^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

其中

- 宇宙学常数 Λ 代表空空间固有的均匀能量密度（暗能量）：对于平坦且静态的宇宙（闵可夫斯基宇宙）， $\Lambda = 0$ ；对于膨胀宇宙， $\Lambda > 0$ ；对于收缩宇宙， $\Lambda < 0$ 。
- 曲率参数 $k = +1$ 代表正曲率， $k = -1$ 代表负曲率， $k = 0$ 代表零曲率。

定理. 13.2: 第二弗里德曼方程

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho - \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

- 当 $\Lambda = 0$ 且 $k = 0$ 时， $\rho = \frac{3H^2}{8\pi G}$ ，这被称为临界密度。我们通常记作 ρ_c 。
- 密度参数 $\Omega_i := \frac{\rho_i}{\rho_c}$ 。注意 $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$ 。此外，根据第二弗里德曼方程和定义：

$$\Omega_m = \frac{8\pi G \rho_m}{3H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{a^2 H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

- 由第一和第二弗里德曼方程可得：

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \quad (\text{流体方程})$$

- Λ CDM 模型，也称为 Lambda 冷暗物质模型，是目前的标准宇宙学模型。它描述了从早期的炽热致密状态到当前大尺度结构的演化。该模型基于以下组件：

– 宇宙学常数 (Λ)：它负责宇宙的加速膨胀。

暗能量具有与引力相反的作用：暗能量不是吸引物质（像引力那样），而是产生一种排斥力。这种排斥力负责导致宇宙的加速膨胀，以不断增加的速度将星系推开。

– 冷暗物质 (CDM)：它被称为“冷”是因为其运动速度远低于光速。这与“热”暗物质形成对比，后者由快速运动的粒子组成。



冷暗物质在宇宙学模型中更受青睐，因为它允许在宇宙历史早期形成小型结构（如星系），这与观测数据一致。

定义. 13.1: 哈勃参数

哈勃参数 $H(t)$ 定义为标度因子 $a(t)$ 的变化率，由下式给出：

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

13.8 状态方程

对于不同的宇宙组分：

$$\begin{aligned} \text{非相对论性物质 (尘埃): } \quad p = 0 &\implies \rho_m \propto a^{-3} \\ \text{辐射: } \quad p = \rho c^2 / 3 &\implies \rho_r \propto a^{-4} \\ \text{宇宙学常数: } \quad p = -\rho c^2 &\implies \rho_\Lambda = \text{常数} \end{aligned}$$

证明：重写流体方程：

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$$

根据链式法则 $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{da}\dot{a}$:

$$\dot{a}\frac{d\rho}{da} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$$

假设 $\dot{a} \neq 0$:

$$\frac{d\rho}{da} + \frac{3}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$$

由状态方程：

$$p = w\rho c^2$$

其中 w 是每个宇宙组分的常数。

$$\frac{d\rho}{da} + \frac{3}{a}(1+w)\rho = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{da}{a}$$

$$\int_{\rho_i}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'} = -3(1+w) \int_{a_i}^a \frac{da'}{a'}$$



$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_i}\right) = -3(1+w)\ln\left(\frac{a}{a_i}\right)$$

$$\frac{\rho}{\rho_i} = \left(\frac{a}{a_i}\right)^{-3(1+w)}$$

选择当前纪元为 $a_i = 1$ (此时 $\rho_i = \rho_0$):

$$\boxed{\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}}$$

13.9 大爆炸

13.9.1 奇点

在宇宙的最早期，所有的物质和能量都集中在一个奇点上，这是一个密度和温度无限大的点。这个奇点被认为包含了后来膨胀形成我们所知宇宙的所有空间、时间和能量。

13.9.2 宇宙暴胀

宇宙暴胀理论解释了在大爆炸后最初的一刹那间，宇宙发生的极速膨胀。在暴胀期间，宇宙以指数级扩张，在不到一秒的时间内体积增加了至少 10^{26} 倍。这一理论有助于解释观测到的宇宙特征，例如大尺度上的均匀性和各向同性，以及星系的分布。

13.9.3 空间膨胀

大爆炸理论提出空间本身正在膨胀。这种膨胀并不是向预先存在的空间中扩张，而是空间本身的拉伸。随着空间的膨胀，遥远星系之间的距离增加，导致观测到这些星系发出的光发生红移。宇宙的这种膨胀可以通过 弗里德曼方程进行数学描述。

13.9.4 大爆炸的阶段

普朗克时期（0 到 10^{-43} 秒） 普朗克时期代表了宇宙最早的阶段，从时间 $t = 0$ 到大爆炸后约 10^{-43} 秒。在此期间，宇宙极度炽热且致密，基本力（引力、电磁力、弱核力和强核力）可能统一为单一的作用力。由于量子引力尚未被完全理解，这一时期的物理本质仍然未知。

大统一时期（从 10^{-43} 到 10^{-36} 秒） 在大统一时期，基本力开始分离。在极高能量下，强力、弱力和电磁力统一为一种力。随着宇宙冷却，这些力发生分离，负责束缚原子核的强力显现出来。



暴胀时期（从 10^{-36} 到 10^{-32} 秒） 宇宙在暴胀时期经历了一段短暂的指数级膨胀。在此期间，宇宙在不到一秒的时间内膨胀了至少 10^{26} 倍。这种极速暴胀抹平了宇宙，导致了今天观测到的大尺度均匀性和各向同性。它还为第一批粒子的形成设定了初始条件。

夸克时期（从 10^{-12} 到 10^{-6} 秒） 随着宇宙继续冷却，夸克、电子和其他基本粒子开始形成。在夸克时期，夸克结合形成质子和中子。当时的温度和能量仍然很高，足以让这些粒子频繁地相互作用和衰变。

强子时期（从 10^{-6} 秒到 1 秒） 在大爆炸后约 10^{-6} 秒，温度下降到足以让夸克结合成强子（如质子和中子）。这一时期标志着第一批稳定原子核的形成。

轻子时期（从 1 秒到 10 秒） 在轻子时期，宇宙由轻子（如电子和中微子）主导。这些粒子大量产生并湮灭。大量产生的中微子在大约 10 秒时与物质退耦。

光子时期（从 10 秒到 380,000 年） 随着宇宙进一步冷却，光子主导了宇宙。此时，物质和辐射紧密耦合。由于自由电子散射光子，阻碍了光的自由传播，宇宙是不透明的。然而，宇宙继续膨胀并冷却，在大爆炸后约 380,000 年，宇宙冷却到足以形成原子，光子得以自由传播，导致物质和辐射退耦。这一事件被称为复合时期，并与我们今天观测到的宇宙微波背景（CMB）辐射相关联。

复合与原子形成（380,000 年） 在复合期间，宇宙冷却到足以让质子和电子结合形成中性氢原子。这使得光子能够在空间中自由传播，标志着退耦时代的开始。这些释放的光子被称为 CMB 辐射。

黑暗时代（380,000 年到 10 亿年） 原子形成后，宇宙进入了“黑暗时代”，这是一个没有恒星或星系的时期。在此期间，宇宙继续冷却，物质开始因引力吸引而聚集。然而，直到第一批恒星和星系形成，宇宙才变得更加活跃。

再电离（10 亿年到 20 亿年） 当第一批恒星和星系形成并发出紫外线，重新电离氢气时，便发生了再电离。这一过程结束了黑暗时代，使宇宙对紫外线变得透明。

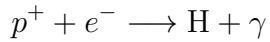
现代宇宙（现今） 自再电离时代以来，宇宙一直在继续膨胀和演化。星系、星系团和大尺度结构在数十亿年间形成。目前可观测宇宙的直径约为 930 亿光年。

13.10 宇宙微波背景

宇宙微波背景（CMB）是宇宙中最古老的光，起源于大爆炸后约 380,000 年。它提供了婴儿宇宙从不透明等离子体转变为透明气体时的快照。



CMB 起源于复合时期，当时宇宙冷却到足以让电子和质子结合成中性氢原子：



宇宙微波背景是一种充斥在宇宙中的微弱辐射，是宇宙早期炽热致密阶段的遗迹。它由彭齐亚斯和威尔逊于 1965 年首次探测到，通常被认为是大爆炸理论最强有力的证据。

13.11 引力透镜

13.11.1 引言

引力透镜是根据广义相对论，质量导致光线弯曲的现象。位于遥远光源和观测者之间的质量分布会偏转光线，产生诸如多重成像、放大以及光源形状畸变等现象。

对于点质量 M （在史瓦西度规下），在弱场中，受碰撞参数 b 影响的光线偏转一个角度。偏转角为

$$\hat{\alpha}(b) = \frac{4GM}{bc^2}$$

其中 G 是引力常数， c 是光速。

我们使用薄透镜近似：偏转实际上发生在一个单一的透镜平面上，该平面距离观测者的角直径距离为 D_L 。类似地，光源距离为 D_S ，透镜与光源之间的距离为 D_{LS} 。设 β 为光源在天空中的真实角位置（未透镜化）， θ 为观测到的图像角位置。则

$$\beta = \theta - \alpha(\theta)$$

其中缩放后的偏转角为

$$\alpha(\theta) = \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\alpha}(D_L \theta)$$

对于位于视轴上的点质量 M ，透镜方程的标量形式（假设沿单一轴对齐）变为

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_S} \frac{4GM}{c^2 D_L \theta}$$

当光源、透镜和观测者完全对齐 ($\beta = 0$) 时，图像形成一个环（爱因斯坦环），其角半径 θ_E 为：

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}$$



13.11.2 利用牛顿力学推导

在牛顿引力中，距离 M 为 r 处的质量为 m 的粒子受到的力为

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

只有垂直于初始运动方向的分量对偏转有贡献。如果光子沿 x 轴运动并在距离 b 处经过该质量，则

$$r = \sqrt{x^2 + b^2}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

因此，横向力为

$$F_{\perp} = F \sin \theta = \frac{GMm}{r^2} \frac{b}{r} = \frac{GMmb}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

横向加速度为

$$a_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{m} = \frac{GMb}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

光子近似以恒定速度 c 运动，因此

$$x = ct, \quad dt = \frac{dx}{c}$$

总横向速度变化为

$$\Delta v_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} a_{\perp} dt = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{GMb}{(x^2 + b^2)^{3/2}} dx$$

利用标准积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{2}{b}$$

我们得到

$$\Delta v_{\perp} = \frac{2GM}{bc}$$

对于小偏转，偏转角 α 近似等于横向速度变化与光速之比：

$$\alpha \approx \frac{\Delta v_{\perp}}{c}$$

因此，

$$\alpha_{\text{Newton}} = \frac{2GM}{bc^2}$$

广义相对论预测的偏转角为

$$\alpha_{\text{GR}} = \frac{4GM}{bc^2}$$



这正好是牛顿力学结果的两倍。额外的因子源于空间的弯曲，这在牛顿引力中是不存在的。

13.11.3 利用广义相对论推导

定义. 13.2: 拉格朗日量

拉格朗日量 \mathcal{L} 定义为

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q)$$

其中 T 是动能， V 是势能。

定理. 13.3: 欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

定理. 13.4: 费马原理

对于在折射率为 $n(\mathbf{r})$ 的介质中传播的光，从 A 点到 B 点沿路径 \mathcal{C} 所需的时间为

$$T = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_A^B n(\mathbf{r}) ds$$

其中

- $v = c/n$ 是介质中的光速
- $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ 是无穷小路径长度
- c 是真空中的光速

费马原理指出，实际路径 \mathcal{C} 使光程最小化（或更一般地说，使其取平稳值）：

$$\mathcal{S} = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds$$



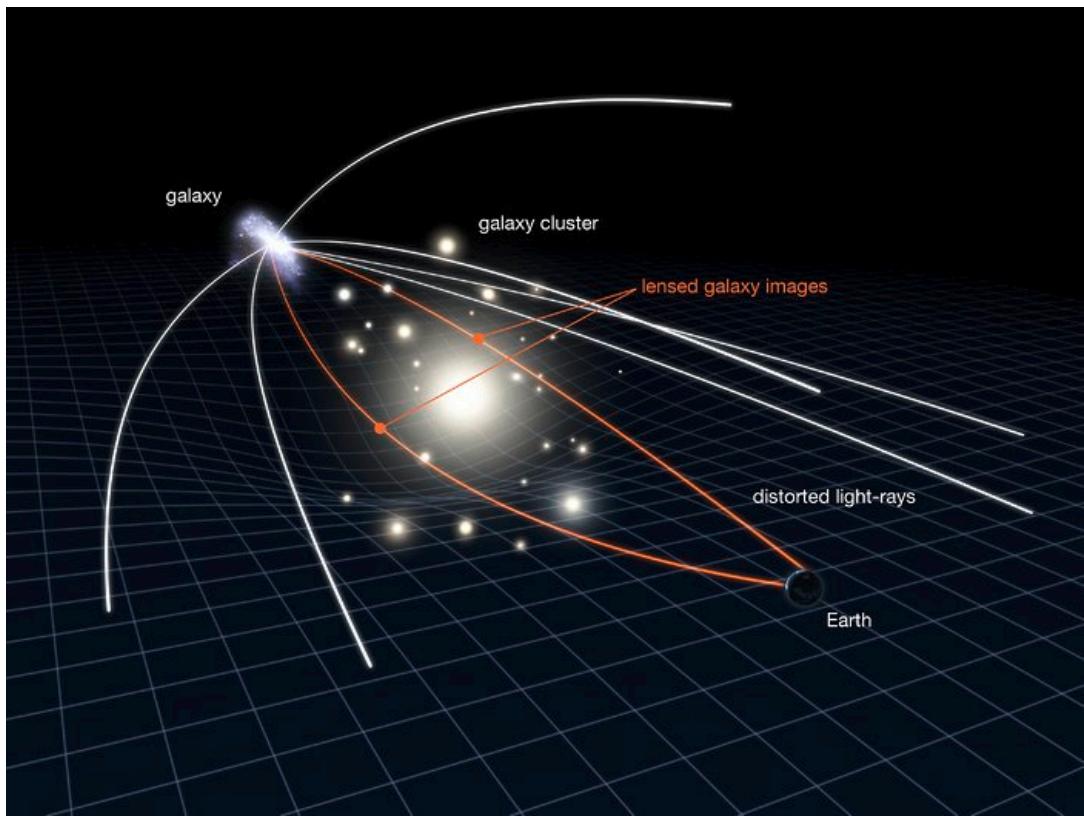


Figure 11: 来源: <https://esahubble.org/images/heic1106c/>

在时空度规的弱场近似中（即引力场相对较弱且时空曲率较小的情况）：

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \delta_{ij} dx^i dx^j + \mathcal{O}\left(\frac{\Phi^2}{c^4}\right)$$

其中 $\Phi = -GM/r$ 且 $|\Phi| \ll c^2$ 。设 $c = 1$ 。

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0 \implies v \approx 1 + 2\Phi$$

考慮 $x-y$ 平面上偏轉極小的近直線路徑。令 $y = y(x)$, $z = 0$, 且 $|y'| \ll 1$ 。則

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx \approx \left[1 + \frac{1}{2}(y')^2\right] dx$$

光程为

$$\begin{aligned} S &= \int n dl \approx \int [1 - 2\Phi(x, y)] \left[1 + \frac{1}{2}(y')^2\right] dx \\ &\approx \int \left[1 - 2\Phi + \frac{1}{2}(y')^2\right] dx \end{aligned}$$



考慮

$$L = \frac{1}{2}(y')^2 - 2\Phi(x, y)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \implies \frac{d}{dx}(y') = -2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \implies \frac{d^2 y}{dx^2} = -2 \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

令 $y(x) = b + \varepsilon(x)$, 其中 ε 为极小量:

$$\varepsilon''(x) = -2 \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, b)$$

总偏转角为:

$$\alpha = \Delta y' = \varepsilon'(+\infty) - \varepsilon'(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon''(x) dx$$

对于点质量 $\Phi = -GM/r$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = GM \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

在 $y = b$ 处:

$$\alpha = -2GMb \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

注意

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{2}{b^2}$$

因此,

$$\alpha = -2GMb \cdot \frac{2}{b^2} = -\frac{4GM}{b}$$

偏转幅度 (指向质量方向) 为

$$|\alpha| = \frac{4GM}{b}$$

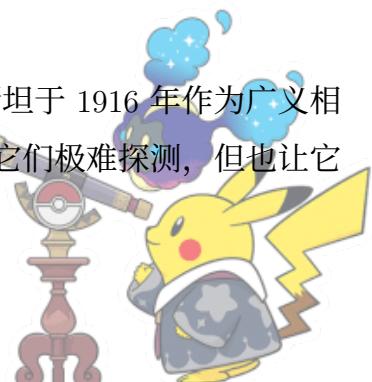
在度规中, $\Phi \rightarrow \Phi/c^2$ 。因此

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2}$$

13.12 引力波

13.12.1 引言

引力波是由加速运动的质量引起的时空曲率扰动。它们最初由阿尔伯特·爱因斯坦于 1916 年作为广义相对论的推论预言。与电磁波不同, 引力波与物质的相互作用非常微弱, 这使得它们极难探测, 但也让它们能够携带有关剧烈宇宙事件的信息。



13.12.2 喇啾质量

对于质量分量为 m_1 和 m_2 的双星系统，喇啾质量定义为

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right)^{3/5}$$

其中 f 是轨道频率。

13.12.3 双星系统

对于质量为 m_1 和 m_2 、轨道频率为 f_{orb} 的双星系统，引力波光度为

$$L_{GW} = \frac{32}{5Gc^5} (2\pi G \mathcal{M} f_{\text{orb}})^{10/3}$$

其中 r 是轨道间距。

13.13 吸积过程

13.13.1 引言

吸积是物质在引力作用下落向中心天体（如恒星、黑洞或中子星）的过程。

- 球对称吸积发生在物质以球对称方式沿径向落向中心天体时。
- 盘状吸积发生在物质由于具有角动量，在落向中心天体时形成一个旋转盘。



Figure 12: 来源: <https://www.skyatnightmagazine.com/space-science/accretion-disk>

13.13.2 爱丁顿光度

考虑一个半径为 r 、以总光度为 L 的光源为中心的球面。距离光源 r 处的能量通量（单位时间内通过单位面积的能量）等于总光度除以半径为 r 的球面积。球面积为

$$A = 4\pi r^2$$

因此，距离 r 处的能量通量为：

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

现在，考虑辐射压力的性质。光子携带动量，当它们撞击表面时会传递动量。辐射压力与能量通量的关系为：

$$E = pc \implies P_{\text{rad}} = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{F}{c}$$

其中 c 是光速，该公式假设辐射是各向同性的，且光子动量传递是完全高效的。则

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{c} \cdot \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{L}{4\pi r^2 c}$$

爱丁顿光度 L_{Edd} 是当向外的辐射压力与向内的引力达到平衡时，天体所能达到的最大光度。
天体受到的辐射压力由下式给出

$$P_{\text{rad}} = \frac{L}{4\pi r^2 c}$$

其中 L 是光度， r 是天体的半径， c 是光速。引力由下式给出

$$F_{\text{grav}} = \frac{GMm}{r^2}$$

其中 M 是中心天体的质量， m 是吸积物质的质量， G 是引力常数。平衡时：

$$\frac{L}{4\pi r^2 c} = \frac{GMm}{r^2}$$

简化该方程：

$$L = \frac{4\pi GMmc}{r^2}$$



对于爱丁顿光度，我们考虑使物质能够保持束缚在中心天体上而不被辐射压力吹走的最大光度。考虑到物质主要由氢组成，其电子质量为 m_e ，汤姆孙散射截面为 σ_T ，我们可以计算爱丁顿光度如下：

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMm_e c}{\sigma_T}$$

其中 $\sigma_T \approx 6.65 \times 10^{-25} \text{ m}^2$ 是量化电子通过汤姆孙散射散射光子概率的有效面积。

13.14 宇宙距离阶梯

13.14.1 引言

宇宙距离阶梯是天文学家用来确定天体距离的一系列方法。阶梯的每一级都为校准下一级方法提供信息，从而实现从太阳系到可观测宇宙边缘的测量。



Figure 13: 天文学中距离测量技术的层级结构。每一级都在校准下一级。



13.14.2 雷达测距

对于太阳系内的物体，我们可以直接使用雷达测量距离：

- 向行星或小行星发射无线电波
- 测量回波返回的时间延迟： Δt
- 距离： $d = \frac{c \cdot \Delta t}{2}$, 其中 c 是光速
- 局限于 ~ 10 AU (太阳系内)

13.14.3 恒星视差

视差利用地球轨道作为基线来测量附近恒星的距离：

$$d(\text{秒差距}) = \frac{1}{\theta(\text{角秒})}$$

其中

- d = 以秒差距为单位的距离 ($1 \text{ pc} \approx 3.26$ 光年)
- θ = 以角秒为单位的视差角
- 基线 = 1 AU (天文单位)

13.14.4 标准烛光：造父变星

造父变星是光变周期与其光度相关的脉动变星³：

$$M = a \cdot \log_{10}(P) + b$$

其中

³恒星变率分为两大类：

1. 规则变率：

- 脉动变星：这些恒星（如造父变星）由于外层的扩张和收缩而表现出周期性的亮度变化。
- 食双星：这些系统由两颗相互绕行的恒星组成，由于一颗恒星遮挡另一颗恒星，其光变曲线呈周期性变化。

2. 不规则变率：

- 耀星：这些恒星由于磁活动而表现出突然、不可预测的亮度增加。
- 激变变星：这些恒星由于双星系统中的质量转移而经历剧烈的亮度变化。



- M 是绝对星等 (固有亮度),
- P 是以天为单位的脉动周期,
- a, b 是校准常数。

一旦通过周期得知绝对星等 M , 距离模数公式即可给出距离:

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)$$

其中

- m 是视星等 (观测到的亮度),
- M 是绝对星等,
- d 是以秒差距为单位的距离。

13.14.5 费伯-杰克逊关系

对于椭圆星系, 速度弥散度与光度相关:

$$L \propto \sigma^\beta$$

其中

- σ 是恒星速度弥散度
- 经验上 $\beta \approx 4$

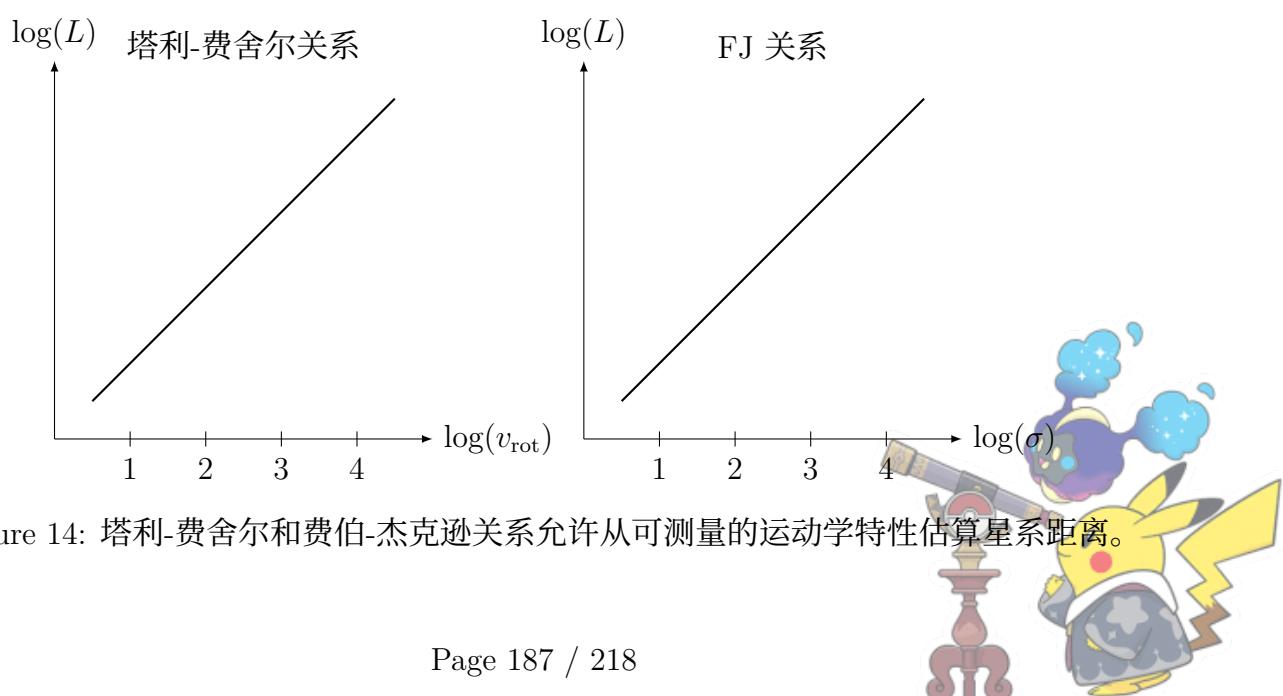


Figure 14: 塔利-费舍尔和费伯-杰克逊关系允许从可测量的运动学特性估算星系距离。

13.14.6 Ia 型超新星

Ia 型超新星极亮，是极佳的“可标准化烛光”：

- 源于达到钱德拉塞卡极限 ($\sim 1.4 M_{\odot}$) 的白矮星发生热核爆炸
- 峰值光度： $\sim 10^{10} L_{\odot}$ (与整个星系一样亮)
- 可在宇宙学距离上被观测到
- 光变曲线形状与峰值光度相关 (菲利普斯关系)

距离计算公式为

$$\mu = m_B - M_B + \alpha(s - 1) - \beta c$$

其中

- μ 是距离模数
- m_B 是 B 波段的视星等
- M_B 是绝对星等 (已校准)
- s 是光变曲线形状参数
- c 是颜色修正
- α, β 是校准系数



14 星际介质

14.1 简介

星际介质 (Interstellar Medium, 简称 ISM) 是指存在于星系内恒星之间空间的物质。它由气体、尘埃和宇宙射线组成。

根据物质的温度和密度，星际介质通常可以分为几个不同的相：

- **中性气体**: 由中性氢 (H) 和分子氢 (H_2) 组成，常存在于分子云中。
- **电离气体**: 由电离氢 (H^+) 和其他电离元素组成，典型代表是 HII 区。
- **尘埃**: 尺寸从纳米到微米不等的微小固体颗粒，会导致光的吸收和散射。
- **宇宙射线**: 穿过星际介质的高能粒子，主要是质子和原子核。

星际介质中的一些重要区域包括：

- **HII 区**: 由年轻炽热恒星发出的紫外辐射电离而成的电离氢区域。通常可以通过 $H\alpha$ 等发射线观测到。
- **分子云**: 星际介质中寒冷且稠密的区域，含有 H_2 等分子，是恒星诞生的摇篮。
- **温电离介质**: 星际介质中一种弥散的组分，气体处于部分电离状态，温度约为 10^4 K。

14.2 流体动力学

14.2.1 应力张量

在连续介质力学中，**应力张量** σ 是描述材料或流体内部相互作用力的基本概念。

对于一般的垂直三维空间，应力张量 σ 是一个 3×3 的矩阵，其分量 σ_{ij} 中的 i 和 j 代表空间中的方向（或坐标轴）：

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

其中：

- $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ 是沿 x, y, z 方向的正应力分量。



- $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ 是切应力分量。
- 该矩阵是对称的: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 。

14.2.2 张量积

定义. 14.1: 张量积

设 V 和 W 是域 \mathbb{F} 上的向量空间。张量积 $V \otimes W$ 是一个配备了双线性映射的向量空间:

$$\otimes : V \times W \longrightarrow V \otimes W$$

并满足以下泛性质: 对于任何到向量空间 U 的双线性映射 $\phi : V \times W \longrightarrow U$, 都存在唯一的线性映射 $\tilde{\phi} : V \otimes W \longrightarrow U$, 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ & \searrow \phi & \downarrow \tilde{\phi} \\ & & U \end{array}$$

两个向量 **A** 和 **B** 的张量积定义为:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ij} = A_i B_j$$

14.2.3 散度定理

定理. 14.1: 散度定理

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

其中:

- \mathbf{F} 是向量场,
- V 是由封闭曲面 ∂V 所包围的体积,
- \mathbf{n} 是曲面 ∂V 上的单位法向量 (指向外侧),
- dS 是 ∂V 上的面积元。



14.2.4 连续性方程与动量方程

设 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 表示质量密度, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 表示流体的速度场。

在一个固定的控制体积 V (边界为 ∂V , 外法线为 \mathbf{n}) 内的总质量为:

$$M_V(t) = \int_V \rho dV.$$

质量守恒原理指出, 体积 V 内质量的变化率等于流经边界的净质量通量的负值:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

由于 V 在空间中是固定的,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

根据散度定理,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$$

因此,

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0$$

由于 V 是任意取的, 被积函数必须处处为零, 得到:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0}$$

这就是连续性方程的微分形式。

利用物质导数 $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$, 可以写为:

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0}$$

考虑固定控制体积 V 内流体的动量:

$$\int_V \rho \mathbf{v} dV$$

其变化率为:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV$$

其中:



- σ 是应力张量,
- \mathbf{f} 是单位质量的体密度力 (例如重力)。

利用散度定理,

$$\int_{\partial V} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) dV, \quad \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV$$

因此,

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{f} \right) dV = 0$$

由于 V 是任意的,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}}$$

这就是守恒形式的柯西动量方程。利用连续性方程, 它可以改写为物质导数形式:

$$\boxed{\rho \frac{D \mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}}$$

14.2.5 欧拉方程 (纳维-斯托克斯方程的特例)

从以下方程出发:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}$$

其中 ρ 是流体密度, \mathbf{v} 是速度, $\boldsymbol{\sigma}$ 是应力张量, \mathbf{f} 表示单位质量的外部体密度力。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} (\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})) + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

对于理想流体 (无粘性), 应力张量仅包含压力项:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I}$$

其中 p 是压力, \mathbf{I} 是单位矩阵。应力张量的散度为:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p$$



代入动量方程并结合连续性方程简化，对于不可压缩流体 (ρ 为常数)：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{且} \quad \nabla \rho = 0.$$

这意味着 $\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ 等相关项消失。最终得到：

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}}$$

14.3 案例研究

14.3.1 背景

星际介质由不同密度和温度的气体和尘埃组成，构成了分子云、原子气体和电离相。当自引力超过压力支撑时，会发生引力坍缩，从而导致恒星形成。星际介质具有广泛的密度范围：

相	密度 ρ (g cm ⁻³)	坍缩时间尺度 t_{ff}
分子云 (弥散)	4.2×10^{-22}	$\sim 10^7$ 年
分子云 (致密核心)	4.2×10^{-20}	$\sim 10^6$ 年
原子氢 (HI) 云	4.2×10^{-24}	$\sim 10^8$ 年
HII 区	4.2×10^{-25}	$\sim 10^9$ 年

14.3.2 推导

- 连续性方程 (质量守恒)：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

- 欧拉方程 (动量守恒)：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi$$

- 引力势的泊松方程，其中 $\nabla^2 \Phi$ 是引力势的拉普拉斯算子：

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$



考虑一个均匀背景：

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{v} = \delta\mathbf{v}, \quad p = p_0 + \delta p, \quad \Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$$

为了孤立纯粹的引力坍缩效应，我们考虑无压力极限情况：

- 线性化连续性方程：

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0$$

- 线性化欧拉方程（忽略压力）：

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \delta\Phi.$$

- 线性化泊松方程：

$$\nabla^2 \delta\Phi = 4\pi G \delta\rho$$

因此，

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) = -\nabla^2 \delta\Phi$$

进而得到

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) = -4\pi G \delta\rho$$

同时，

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) = 0$$

最后，

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 [-4\pi G \delta\rho] = 0$$

得出：

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = 4\pi G \rho_0 \delta\rho$$

该方程的形式为 $\ddot{\delta\rho} = \omega^2 \delta\rho$ ，其中

$$\omega^2 \equiv 4\pi G \rho_0 > 0$$

$e^{\omega t}$ 模式代表密度扰动的指数增长，即引力坍缩。 $e^{-\omega t}$ 模式随时间衰减，通常在坍缩初始条件中不具备物理意义。e-倍增时间（特征增长/坍缩时间尺度）为：

$$\tau \equiv \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho_0}} \sim \frac{1}{\sqrt{G \rho_0}}$$



15 地球研究

15.1 潮汐

潮汐是由于月球和太阳对地球产生的引力作用，导致海平面发生的周期性涨落现象。

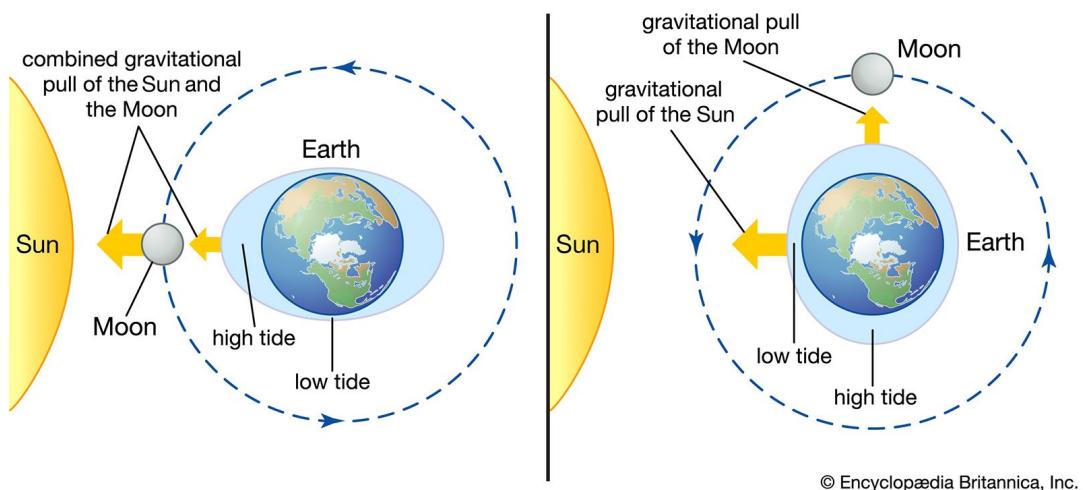
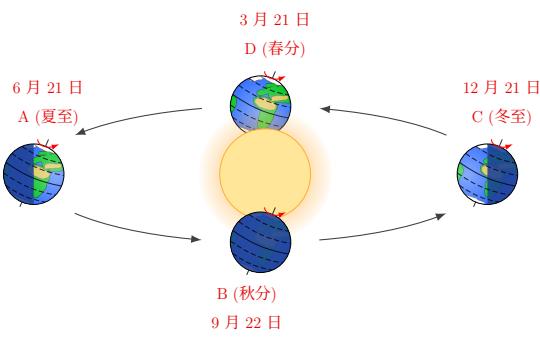


Figure 15: 来源: <https://www.britannica.com/science/tide>

15.2 季节

季节的产生是由于地轴相对于地球绕日公转轨道平面存在倾角 (23.5°)。

- 夏季发生在向太阳倾斜的半球。
- 冬季发生在背离太阳倾斜的半球。
- 春季和秋季发生在两个半球都没有明显向太阳倾斜的时期。



15.3 影响气候的因素

气候取决于多种自然因素：



- **纬度**: 距离赤道的远近直接影响气温。
- **海拔**: 海拔越高，气温通常越低。
- **洋流**: 暖流或寒流会显著影响沿海地区的气候。
- **地形**: 山脉可以阻挡风力并影响降水分布。
- **人类活动**: 城市化和温室气体排放也在改变气候。

15.4 食现象

15.4.1 日食

当日球运行至地球和太阳之间，遮挡住阳光时，便发生了日食。

15.4.2 月食

当地球运行至太阳和月球之间，将影子投射在月球上时，便发生了月食。

15.5 空间天气

15.5.1 简介

空间天气是指地球空间环境中的动态状况，主要受太阳活动的影响。

15.5.2 太阳风

太阳风是从太阳大气外层（日冕）释放出的带电粒子流。它会影响地球的磁层，并可能干扰卫星通信。

15.5.3 太阳耀斑

太阳耀斑是太阳表面突然爆发的辐射。它们在整个电磁波谱中释放能量，可能对地球上的无线电通信和GPS系统产生影响。

15.5.4 日冕物质抛射 (CMEs)

CMEs 是从日冕中喷发出的巨大太阳风和磁场云。它们可以引发地磁暴，影响卫星、电网以及产生极光。

15.5.5 极光

极光（南极光和北极光）是由来自太阳的带电粒子与地球磁场及大气层相互作用产生的。



15.6 流星雨

当地球穿过彗星留下的碎片带时，就会发生流星雨。

15.7 分点 (Equinoxes)

“分点”每年出现两次，此时太阳直射赤道。在这些日期，全球各地的昼夜时长几乎相等。这两个分点分别是：

- **春分**：约在 3 月 20 日或 21 日，标志着北半球春季的开始。
- **秋分**：约在 9 月 22 日或 23 日，标志着北半球秋季的开始。

在分点时，太阳从正东方升起，从正西方落下。

15.8 至点 (Solstices)

“至点”每年出现两次，此时太阳相对于天赤道到达天空中的最高或最低点。这导致了一年中最长或最短的白昼。

- **夏至**：约在 6 月 21 日或 22 日。太阳处于最北点，北半球昼最长、夜最短，南半球则相反。
- **冬至**：约在 12 月 21 日或 22 日。太阳处于最南点，北半球昼最短、夜最长，南半球则相反。

15.9 太阳赤纬

太阳赤纬是太阳光线与地球赤道平面之间的夹角。它随季节变化，在夏至达到 $+23.5^{\circ}$ ，在冬至达到 -23.5° 。在分点时，太阳赤纬为 0° ，意味着太阳直射赤道。

16 宇宙研究

16.1 人类对太阳系的探索

人类探索太阳系涉及将宇航员送往地球之外，以探索、研究并可能定居在其他天体上。

- **目的**：推进科学知识、开发航天技术、激励社会，以及确保人类的长期生存。
- **主要挑战**：长期暴露在微重力环境下、宇宙辐射、医疗支持受限、心理隔离以及安全的再入大气层。



- **关键目的地:** 用于测试技术的月球、用于长期探测的火星，以及用于科学和资源研究的近地小行星。
- **实施方案:** 利用空间站、月球任务和可持续生命支持系统进行分步扩张。

16.2 行星探测任务

行星任务是旨在探索行星、卫星、小行星和彗星的机器人或载人任务。

- **飞越任务:** 以较低的燃料消耗和任务复杂度提供简短但宝贵的观测数据。
- **环绕任务:** 支持长期监测、全球测绘和大气研究。
- **着陆器与漫游车:** 能够进行直接的表面分析、地质和化学调查，但需要复杂的进入、下降和着陆(EDL)系统。
- **科学价值:** 揭示行星形成历史、气候演变和潜在的可居住性。

17 月球研究

17.1 岁差 (Precession)

岁差是由于太阳和月球对地球赤道隆起部分的引力转矩，导致地球自转轴发生的缓慢圆锥形运动。

$$\text{岁差率} \approx 50.3'' \text{ 每年}$$

推导。 将地球视为赤道半径为 R_e 、极半径为 R_p 的扁球体。地球的赤道隆起受到来自太阳（或月球）的引力转矩：

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

转矩的大小与地球转动惯量之差以及引力成正比：

$$\tau \approx \frac{3GM_s}{2r^3}(C - A)\sin 2\theta$$

其中

- G 是万有引力常数，
- M_s 是太阳质量，



- r 是日地距离,
- C 和 A 分别是地球绕极轴和赤道轴的主转动惯量,
- θ 是黄赤交角 ($\approx 23.5^\circ$)。

岁差角速度 Ω_p 是转矩与地球自转角动量 $L = C\omega$ 的比值:

$$\Omega_p = \frac{\tau}{C\omega} = \frac{3GM_s}{2r^3} \frac{C - A}{C\omega} \cos \theta$$

此处, ω 是地球自转角速度。 $\cos \theta$ 因子源于垂直于自转轴的转矩分量。对于扁球体地球:

$$C - A = \frac{2}{5}M_e R_e^2 J_2$$

其中

- M_e 是地球质量,
- $J_2 \approx 1.0826 \times 10^{-3}$ 是动力学形状因子。

岁差角速度变为:

$$\Omega_p = \frac{3GM_s}{2r^3} \cdot \frac{\frac{2}{5}M_e R_e^2 J_2}{C\omega} \cos \theta$$

利用 $C \approx \frac{2}{5}M_e R_e^2$ 进行化简:

$$\Omega_p \approx \frac{3GM_s}{2r^3\omega} J_2 \cos \theta$$

代入数值:

$$G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

$$M_s = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$r = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$\omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$J_2 = 1.0826 \times 10^{-3}$$

$$\theta = 23.5^\circ$$

$$\text{岁差率} = \Omega_p \times 206264.8'' \times 3.156 \times 10^7 \text{ s/年} \approx 50.3''/\text{年}$$



17.2 章动 (Nutation)

章动是指叠加在岁差运动上的微小周期性摆动。这是由于月球和太阳相对于地球的位置不断变化，导致地球自转轴倾角产生偏差。

17.3 天平动 (Libration)

天平动是月球的一种视摆动，使得地球上的观测者随着时间的推移能看到超过其表面一半（约 59%）的区域。主要有三种类型：

- **经向天平动**：由于月球公转轨道的离心率导致。
- **纬向天平动**：由于月球自转轴相对于其轨道平面的倾斜导致。
- **周日天平动**：由于地球自转以及观测者地理位置变化导致的视角偏差。

18 太阳系研究

18.1 形成

太阳系形成于约 46 亿年前，起源于一个巨大的由气体和尘埃组成的分子云。这一过程可分为几个阶段。

18.1.1 星云假说

星云假说认为太阳系形成于一个旋转的气体尘埃盘。这个被称为“太阳星云”的云团在自身引力作用下坍缩，中心形成了太阳，剩余物质则形成了行星。核心阶段如下：

1. **太阳星云坍缩**：气体和尘埃云因引力开始收缩。在收缩过程中，它旋转得越来越快，形成了一个扁平的旋转盘。
2. **太阳的形成**：在圆盘中心，温度和压力急剧升高，最终引发核聚变，点燃了太阳。
3. **行星吸积**：在圆盘的外围区域，尘埃和气体开始聚集形成“星子”，这些星子通过进一步的碰撞和合并，形成了行星、卫星和其他小天体。
4. **清除星云**：新生太阳产生的太阳风吹走了剩余的气体和尘埃，留下了如今的太阳系结构。



18.1.2 分异与演化

在初始形成后，太阳系经历了几个演化过程：

- **分异作用**：早期的行星处于熔融状态，重物质下沉到核心，轻物质上升到表面。
- **后期重轰炸期**：在早期阶段，行星频繁受到残留星子的撞击，形成了表面的陨石坑。
- **轨道演化**：行星与太阳系内其他天体之间的引力相互作用导致其轨道随时间发生了变化。

18.2 太阳系的结构与组成

太阳系由太阳以及所有受其引力束缚的天体组成，包括行星、卫星、小行星、彗星等。

18.2.1 太阳

太阳是太阳系的中心恒星，提供了维持系统稳定的引力。它主要由氢和氦组成，占太阳系总质量的约99.86%。太阳核心发生的核聚变产生了巨大的能量，支持着地球上的生命。

18.2.2 行星

太阳系有八大行星，分为两大类：

类地行星 即内行星，主要由岩石和金属组成。包括：

- 水星
- 金星
- 地球
- 火星

气态巨行星与冰巨星 即外行星，主要由氢、氦及其他气体组成。气态巨行星包括：

- 木星
- 土星

冰巨星含有更高比例的“冰”（水、氨、甲烷），包括：

- 天王星
- 海王星



18.2.3 矮行星与小天体

太阳系还包含大量较小的天体：

- **矮行星**：类似于行星但未能清除其轨道附近的其他物体。例如冥王星、谷神星和阋神星。
- **小行星**：主要分布在火星和木星之间小行星带的岩石体。
- **彗星**：冰冷的天体，通常具有高度椭圆的轨道，接近太阳时会产生彗尾。
- **流星体**：小行星或彗星的碎片，进入地球大气层时会引发流星。

18.2.4 柯伊伯带与奥尔特云

太阳系的外围区域分布着冰冷的天体和矮行星：

- **柯伊伯带**：海王星轨道之外的区域，包含大量冰冷天体（如冥王星）。
- **奥尔特云**：一个假设存在的、远距离环绕太阳系的球壳状云团，被认为是长周期彗星的发源地。



第 II 部分：数据分析

19 概率

19.1 简介

事件 A 的概率是一个介于 0 到 1 之间的数值，代表该事件发生的可能性。其定义为：

$$P(A) = \frac{\text{有利结果数}}{\text{所有可能结果的总数}}$$

例如，在一枚均匀硬币的投掷中，正面朝上的概率为：

$$P(\text{正面}) = \frac{1}{2}$$

事件 A 的补集（记作 A^c ）发生的概率为：

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

例如，如果 $P(\text{正面}) = \frac{1}{2}$ ，那么反面朝上的概率 $P(\text{反面}) = \frac{1}{2}$ 。

在已知事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率称为条件概率，记作 $P(A|B)$ 。其计算公式为：

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

这是在假设 $P(B) > 0$ 的前提下， A 关于 B 的条件概率。

19.2 随机变量

随机变量是随机现象结果的数值表示。它可以分为两类：

- **离散型随机变量**：取值为离散的数值（例如：投掷 10 次硬币中正面朝上的次数）。
- **连续型随机变量**：可以在给定范围内取任意值（例如：个人的身高）。



对于离散型随机变量，概率质量函数 (PMF) 给出了每个可能结果的概率。例如，掷一枚均匀骰子（结果为 1, 2, 3, 4, 5, 6）的 PMF 为：

$$P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

对于连续型随机变量，我们使用概率密度函数 (PDF)。连续型随机变量 X 落在区间 $[a, b]$ 内的概率由 PDF 在该区间上的积分给出：

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

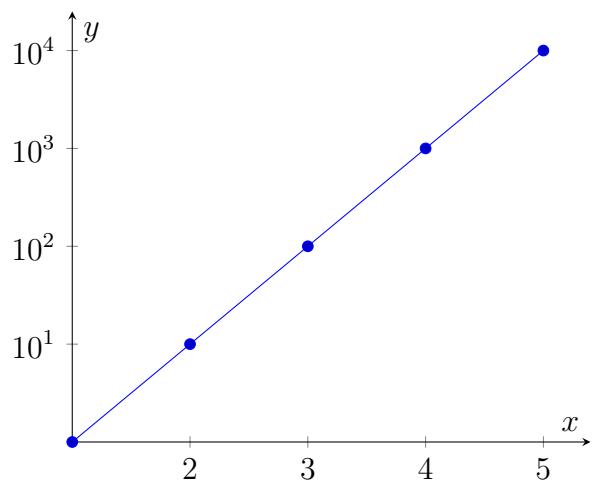
其中 $f_X(x)$ 是 X 的概率密度函数。

20 线性刻度与对数刻度

在线性刻度中，每一等份增量之间的距离是相等的，坐标轴数值按常数累加。

而在对数刻度中，数值之间的距离与数值的对数成正比：

示例



21 集中趋势的度量



定义. 21.1: 平均数 (Mean)

平均数 \bar{x} 是所有观测值的总和除以观测值的个数。对于样本量为 n 的样本：

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

定义. 21.2: 中位数 (Median)

中位数是将数据从小到大排列后的中间值。

- 如果 n 为奇数：中位数是位于第 $\frac{n+1}{2}$ 个位置的值。
- 如果 n 为偶数：中位数是中间两个值的平均数。

定义. 21.3: 众数 (Mode)

众数是数据集中出现次数最频繁的值。

22 离散程度的度量

22.1 基本概念

定义. 22.1: 四分位数 (Quartile)

四分位数是将排序后的数据集等分为四部分的统计量，用于描述数据的分布和散布情况。三个四分位数为：

$$Q_1 \text{ (第一四分位数)}, \quad Q_2 \text{ (第二四分位数, 即中位数)}, \quad Q_3 \text{ (第三四分位数)}$$

这些分位数将数据分为四个区间，每个区间包含 25% 的观测值。

定义. 22.2: 标准差 (Standard Deviation)

标准差是衡量一组数值数据离散程度的指标。它反映了各数值平均偏离均值的程度。较小的标准差意味着数据点集中在均值附近，而较大的标准差则意味着数据分布较广。对于数据点

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N,$$

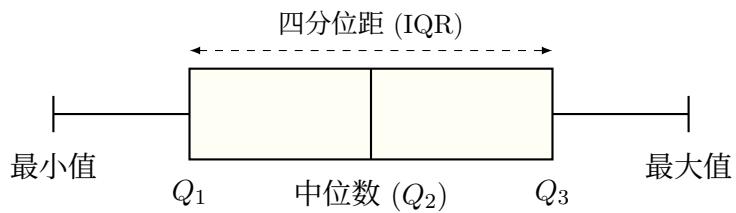


其标准差定义为：

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

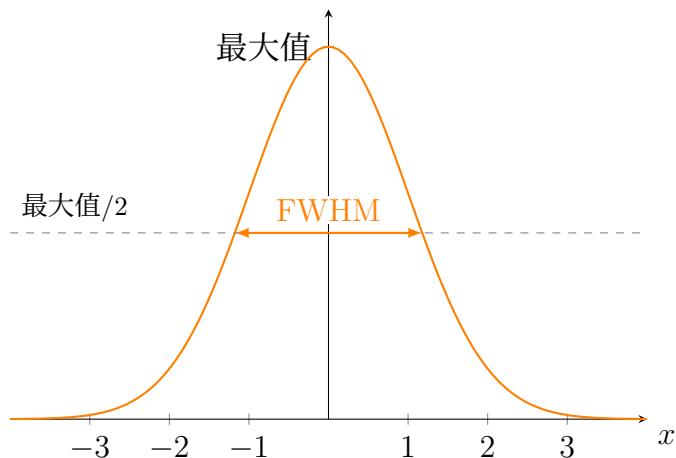
22.2 箱线图 (Box-and-Whisker)

箱线图是一种通过五个核心统计量来展示数值数据分布情况的图形方法：



23 半高全宽 (FWHM)

半高全宽 (Full Width at Half Maximum) 是指曲线达到其最大振幅一半处的宽度。



示例：对于高斯函数

$$f(x) = Ae^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中：

- A 是高斯函数的振幅 (最大值),
- μ 是分布的均值 (中心点),
- σ 是分布的标准差 (宽度指标)。



根据定义：

$$Ae^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{A}{2},$$

解得：

$$(x - \mu)^2 = 2\sigma^2 \ln 2.$$

半高处的点 x 为：

$$x = \mu \pm \sigma \sqrt{2 \ln 2}.$$

因此，FWHM 为：

$$\text{FWHM} = x_2 - x_1 = 2\sigma \sqrt{2 \ln 2}$$

24 误差分析

在实验测量中，所有量都存在不确定度或误差。如果一个函数取决于多个变量：

$$z = f(x, y, \dots),$$

且 x, y, \dots 具有不确定度 $\Delta x, \Delta y, \dots$ ，则 z 的近似不确定度为：

$$\boxed{\Delta z \approx \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots}}$$

25 回归分析

25.1 线性回归

线性回归是一种基础的有监督学习算法，用于建模标量响应（因变量 Y ）与一个或多个解释变量（自变量 X ）之间的关系。对于简单线性回归（单个自变量），这种关系用直线模型表示：

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x$$

其中 \hat{y} 是预测响应值， x 是自变量， β_0 是截距， β_1 是斜率。



25.1.1 最小二乘法

目标是找到最优系数 (β_0, β_1) , 使直线能够最好地拟合观测数据点 (x_i, y_i) 。所谓的“最佳拟合”是由最小二乘法定义的, 即最小化残差平方和。

定义. 25.1: 残差 (Residual)

第 i 个数据点的残差 e_i 是实际值 y_i 与预测值 \hat{y}_i 之间的差值:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)$$

定义. 25.2: 代价函数 (Cost Function)

代价函数 $J(\beta_0, \beta_1)$ 是我们要最小化的量:

$$J(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2$$

定理. 25.1: 线性回归解

为了找到 $J(\beta_0, \beta_1)$ 的最小值, 我们将对 β_0 和 β_1 的偏导数设为零。由此可得出最优系数 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 的解:

- 最优斜率系数为:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

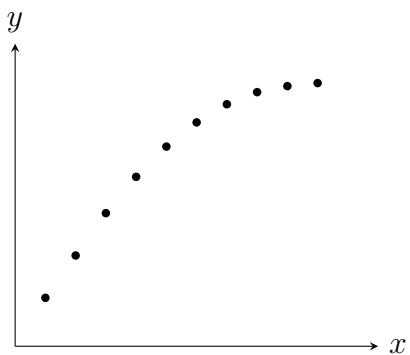
- 最优截距系数可通过回归线必须穿过均值点 (\bar{x}, \bar{y}) 这一事实求得:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

25.2 非线性回归

非线性回归旨在为变量间非线性关系的数据拟合曲线。虽然计算机可以精确完成此任务, 但也可以通过“眼力与笔”手动进行近似拟合。





绘制一条平滑曲线，使其在视觉上尽可能贴近所有点。不断调整形状，直到它捕捉到整体趋势。



第 III 部分：观测天文学

26 仪器与太空技术

26.1 望远镜

26.1.1 望远镜类型

光学望远镜 折射望远镜利用透镜使光线折射（弯曲）并汇聚到焦点。

- **优点：**镜筒密封、无中央遮挡、适合观测行星。
- **缺点：**存在色差、尺寸受限、造价昂贵。
- **结构：**物镜 → 镜筒 → 目镜。

反射望远镜 利用反射镜将光线反射并汇聚到焦点。

- **光学设计分类：**
 1. **牛顿式 (Newtonian)**: 主镜为抛物面镜，配有平面的副斜镜。
 2. **卡塞格林式 (Cassegrain)**: 主镜为双曲面镜，副镜为凸面镜。
 3. **里奇-克莱琴式 (Ritchey-Chrétien)**: 主、副镜均为双曲面镜（无球面像差）。
 4. **纳斯姆斯式 (Nasmyth)**: 通过平面镜将光线引导至望远镜侧面。
- **优点：**无色差、更易制造大口径。
- **缺点：**存在中央遮挡、某些设计存在彗差。

射电望远镜 射电望远镜利用巨大的抛物面天线或阵列收集无线电波。

- **典型案例：**阿雷西博 (305 m)、FAST “中国天眼” (500 m)、ALMA (干涉阵列)。
- **组成部分：**天线盘面、馈源天线、接收机、放大器、记录仪。



架台类型	优点	缺点
地平式 (Altazimuth)	结构简单、紧凑	存在场旋 (Field rotation)
赤道仪 (Equatorial)	自然跟踪天体	结构复杂、沉重
叉式 (Fork)	适合卡塞格林式，较稳定	覆盖天区受限
德式赤道仪	平衡性好	需要中天翻转 (Meridian flip)

Table 10: 望远镜常见架台类型对比

26.1.2 架台类型

26.1.3 核心组件

1. **主镜/物镜**: 核心集光元件。
2. **副镜**: 改变光路指向 (见于反射镜)。
3. **调焦座**: 调节目镜或仪器的位置。
4. **目镜/终端仪器**: 最终的光学分析设备。
5. **架台**: 支撑并指向望远镜的机械结构。
6. **驱动系统**: 补偿地球自转，跟踪天体。

26.1.4 线性放大倍率

望远镜的放大倍率定义为物体视尺寸增加的倍数：

$$M = \frac{f_{\text{物}}}{f_{\text{目}}}$$

其中 $f_{\text{物}}$ 为物镜或主镜的焦距， $f_{\text{目}}$ 为目镜的焦距。

26.1.5 角放大倍率

设物体高度为 h ，距离眼睛 D 。眼睛观察到的角度（视角） θ 为：

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{h}{D} \quad (\theta \ll 1)$$

角放大倍率 M 定义为：

$$M = \frac{\theta'}{\theta}$$



其中：

- θ' 是通过透镜观察时物体所张的角度。
- θ 是肉眼（不借助仪器）直接观察时物体所张的角度。

26.1.6 色差 (Chromatic Aberration)

色差是由于光的色散引起的一种透镜光学缺陷。其原因是透镜材料的折射率取决于入射光的波长。折射率 n 是波长 λ 的函数：

$$n = n(\lambda)$$

通常，短波长（紫光）比长波长（红光）经受更高的折射率：

$$n_{\text{紫}} > n_{\text{红}}$$

根据薄透镜制镜者公式：

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

由于 n 随 λ 变化，焦距 f 也随之变化。因此，不同颜色的光会聚焦在光轴的不同位置，导致图像边缘出现色散。

26.1.7 焦比 (f -number)

焦比（或称 f 值）是望远镜焦距 f 与有效口径 D 的比值：

$$f/\# = \frac{f}{D}$$

较小的焦比意味着更广的视场和更快的曝光速度，这对于观测暗弱天体非常重要。

26.1.8 光收集能力

望远镜的光收集能力是指其从天文物体收集光的能力。这一点非常重要，因为望远镜能够收集更多的光，就能检测到更暗的天体。光收集能力与望远镜孔径的面积 A 成正比，孔径通常是圆形的。圆形孔径面积的公式为

$$A = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2$$



其中 D 是孔径的直径。因此，光收集能力与孔径直径的平方成正比：

$$L \propto D^2$$

这一关系意味着具有更大孔径的望远镜能收集更多的光，从而使得观察更暗的天体成为可能。

26.1.9 自适应光学

自适应光学是一种通过补偿地球大气层造成的畸变来提高光学系统性能的技术。这些畸变，称为大气湍流，可能会模糊用地面望远镜拍摄的图像。自适应光学系统使用可变形镜面来实时修正这些畸变。该过程包括：

1. 使用引导星或激光在天空中创建参考点。
2. 波前传感器测量来自引导星的光的畸变。
3. 计算机计算出必要的波前修正。
4. 可变形镜面调整光路，补偿畸变。

结果是图像更加清晰，且大气畸变大大减少。

26.1.10 人工光

人工光污染影响天文观测，尤其是在城市地区。由于人工照明，夜空的亮度会掩盖微弱的天体物体，使得观察恒星、行星和星系变得更加困难。像光污染缓解这样的努力对于保护天文观测质量至关重要。

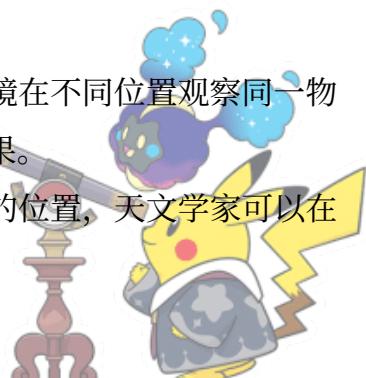
26.2 干涉仪

两元素干涉仪的几何模型 两元素干涉仪使用两个望远镜同时观察同一个天文物体。来自两个望远镜的信号被合成，干涉图案被分析以提取比单个望远镜能提供的更高分辨率的数据。对于两个间隔距离为 D 的望远镜，干涉仪的分辨率与所观察的光的波长 λ 和基线 D 之间的关系由以下公式给出，表示角分辨率 θ ：

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}$$

孔径合成 孔径合成是一种用于射电天文学和干涉仪的技术，它利用多个望远镜在不同位置观察同一物体，并将数据结合起来，从而模拟出一个比望远镜物理尺寸大得多的孔径的效果。

合成孔径的分辨率由望远镜之间的最大分离决定，称为基线。通过改变望远镜的位置，天文学家可以在多个基线下收集数据，这使得他们能够随着时间的推移提高分辨率。



26.3 探测器

26.3.1 光度计

光度计用来测量来自源的特定波长范围内的光强。它通常使用单个探测元件和滤光器来隔离所需的波长。

26.3.2 电荷耦合器件 (CCDs)

电荷耦合器件 (CCD) 是广泛使用的数字探测器，它们将光子转化为电子，再转化为可测量的电压。CCDs 具有高量子效率，并能够创建二维图像。每个像素中生成的电子数可以通过以下公式计算：

$$N_e = F_\gamma A t \text{QE}$$

其中

- F_γ 是光子通量 (光子 $s^{-1}m^{-2}$)，
- A 是望远镜的收集面积 (m^2)，
- t 是曝光时间 (s)，
- QE 是探测器的量子效率。

26.4 底片比例尺

26.4.1 简介

对于小角度 (满足 $\tan \theta \approx \theta$ 时)，望远镜的底片比例尺 P 给出如下：

$$P = \frac{s}{\theta} = \frac{1}{f}$$

其中：

- θ 是天体在天空中的角大小 (单位：弧度)
- s 是其在焦平面上的线大小
- f 是望远镜的焦距



由于天文学家通常使用角秒 (arcseconds) 和毫米 (mm, 或者对像素使用微米) 作为单位:

$$P_{\text{arcsec/mm}} = \frac{206265}{f_{\text{mm}}}$$

常数 206,265 的推导过程如下:

$$1 \text{ 弧度} = \frac{180}{\pi} \times 3600 = 206264.8 \text{ 角秒}$$

对于 CCD 等数字探测器:

$$P_{\text{arcsec/px}} = \frac{206265 \times p_{\mu m}}{f_{\text{mm}} \times 1000}$$

其中 $p_{\mu m}$ 是以微米为单位的像素尺寸。

26.4.2 视场 (Field of View)

探测器所覆盖的总角视场为:

$$\text{FOV}_{\text{宽}} = N_x \cdot P_{\text{px}} \text{ [角秒]}$$

$$\text{FOV}_{\text{高}} = N_y \cdot P_{\text{px}} \text{ [角秒]}$$

其中 N_x 和 N_y 分别是探测器在两个维度上的像素数量。

26.5 空间探测仪器

空间仪器在地球大气层之上运行，具有以下特征:

- 突破大气窗口限制:** 能够观测被大气吸收的紫外线、X 射线和红外线。
- 极高分辨率:** 无大气湍流，图像更清晰。
- 约束条件:** 造价极高、维护维修困难、寿命有限。

26.6 信噪比 (Signal-to-Noise Ratio)

26.6.1 定义

信噪比 (SNR) 是用来衡量信号在噪声干扰下质量的指标。它表示信号与背景噪声的对比程度。信噪比高意味着信号清晰，噪声相对较少；信噪比低则说明噪声较为显著。



信噪比的定义为：

$$\text{SNR} = \frac{S}{N}$$

其中，

- S 是信号的强度（例如，源点检测到的光子数），
- N 是噪声的强度（例如，背景的标准差）。

26.6.2 纯泊松噪声

定义. 26.1: 泊松分布

泊松分布是一种离散概率分布，用来描述在固定的时间或空间间隔内，事件发生的次数。它通常用来建模一些随机事件，比如电话中心接到的电话数量、交叉口发生的交通事故数量，或者单位时间内的粒子衰变次数。泊松分布的概率质量函数为：

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

其中，

- X 是随机变量，表示事件发生的次数，
- λ 是给定时间或空间间隔内的平均事件发生次数（也叫强度），
- $k!$ 是 k 的阶乘，即 $k! = k(k-1)(k-2)\dots 1$ 。

泊松分布的特点是它的均值和方差都等于 λ ，即

$$\mu = \sigma^2 = \lambda$$

对于光子计数探测器，主要的噪声通常是泊松噪声。如果预期的信号为 S 个光子，那么泊松统计给出：

$$\sigma = \sqrt{S}$$

因此，信噪比为：

$$\text{SNR} = \frac{S}{\sqrt{S}} = \sqrt{S}$$



26.6.3 背景噪声

假设测量同时包含物体信号 S 和背景噪声 B 。那么，总的光子数为：

$$S_{\text{tot}} = S + B$$

泊松统计给出的总方差为：

$$\sigma^2 = S + B$$

因此，信噪比为：

$$\text{SNR} = \frac{S}{\sqrt{S + B}}$$

26.6.4 读出噪声

CCD 或 CMOS 探测器会给每个像素增加读出噪声 σ_{read} 。如果使用了 n_{pix} 个像素，读出噪声的贡献为：

$$\sigma_{\text{read,tot}}^2 = n_{\text{pix}}\sigma_{\text{read}}^2$$

因此，总的方差变为：

$$\sigma^2 = S + B + n_{\text{pix}}\sigma_{\text{read}}^2$$

所以，信噪比为：

$$\text{SNR} = \frac{S}{\sqrt{S + B + n_{\text{pix}}\sigma_{\text{read}}^2}}$$

26.6.5 完整方程

$$\text{SNR} = \frac{S}{\sqrt{S + B + n_{\text{pix}} \left(1 + \frac{n_{\text{pix}}}{n_B} \right) (N_s + N_D + \sigma_{\text{read}}^2 + G^2\sigma_f^2)}}$$

其中，

- n_B 是图像中的背景像素，通常是没有物体或光源的区域。
- N_s 是源点信号，表示从被观察物体发出的光子数。
- N_D 是暗噪声，来自 CCD 探测器中由于热效应产生的电子，即使没有光照射也会产生。
- G 是 CCD 探测器的增益，它表示每个像素收集的电子数与系统记录的数字输出之间的关系。



- σ_f 是波动噪声或法诺噪声，源自电子计数过程中的统计波动。

