Utilização de Métodos Númericos para Interpolação de Pontos

Jhonattan C. B. Cabral[1], **Daniel M. P. Carvalho**[1]

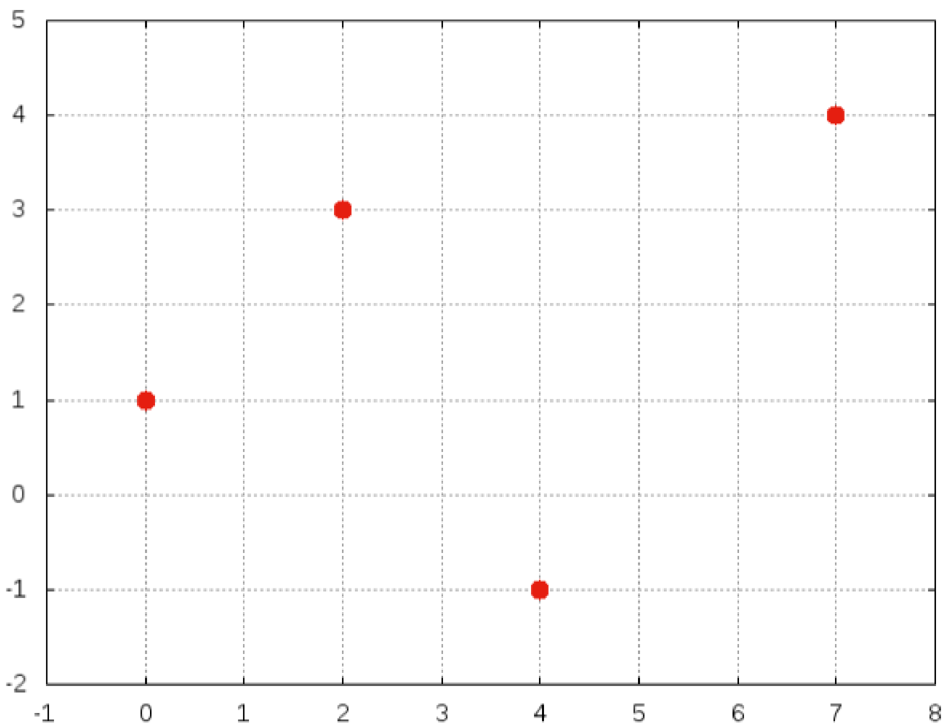
[1]Instituto de Informática e Matemática Aplicada (DIMAp)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

`jhonattan.yoru@gmail.com, danielmarx08@gmail.com`

Abstract. *Task applied in the first unit of the discipline of Numerical Calculus (DIM0404), aims to improve and apply the knowledge acquired in order to resolve problems involving interpolation methods.*

Resumo. *Tarefa aplicada na segunda unidade da disciplina de Cálculo Numérico (DIM0404), tem como objetivo aprimorar e aplicar os conhecimentos adquiridos para resolução de problemas envolvendo métodos de interpolação de pontos.*

1. Interpole os pontos (0,1), (2,3), (4,-1), (7,4) utilizando o polinômio de Newton.



Plote o gráfico do polinômio resultante em conjunto com os pontos.

1.1. RESPOSTA

Iniciaremos a resolução identificando os seguintes pares da relação:

x	$f(x)$
0	1
2	3
4	-1
7	4

Agora podemos utilizar o polinômio interpolador de Newton de grau 3:

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta_1 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_2 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta_3$$

Cada Δ_n mostrado no polinômio acima trata-se de uma diferença dividida calculada a seguir:

Δ_1	Δ_2	Δ_3
$\frac{3-1}{2-0} = 1$	$\frac{-2-1}{4-0} = -\frac{3}{4}$	
$\frac{-1-3}{4-2} = -2$		$\frac{\frac{11}{15}+\frac{3}{4}}{7-0} = \frac{89}{420}$
$\frac{-1-3}{4-2} = -2$	$\frac{\frac{5}{3}+2}{7-2} = \frac{11}{15}$	

Após encontrarmos os valores das diferenças divididas e como sabemos os valores de cada x_n dado pelo problema, basta substituir no polinômio e desenvolvê-lo:

$$P_3(x) = 1 + (x - 0) - 1 + (x - 0)(x - 2)(-\frac{3}{4}) + (x - 0)(x - 2)(x - 4)(\frac{89}{420})$$

$$P_3(x) = 1 + x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + (x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 8x)(\frac{89}{420})$$

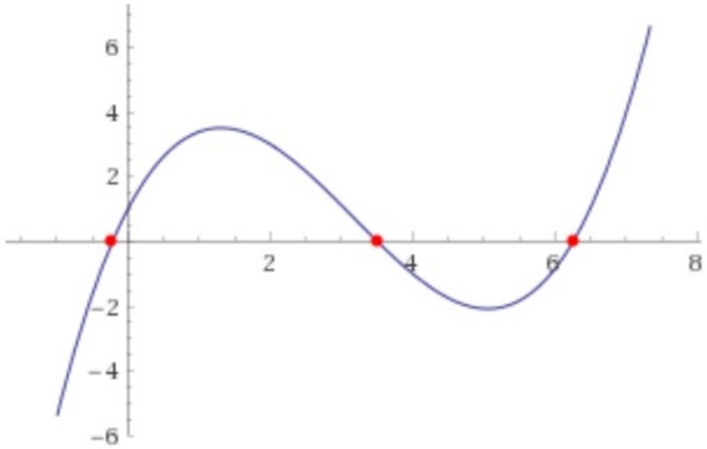
$$P_3(x) = 1 + x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{89}{420}x^3 - \frac{534}{420}x^2 + \frac{712}{420}x$$

Resultado:

$$P_3(x) = \frac{89}{420}x^3 - \frac{283}{140}x^2 + \frac{881}{210}x + 1$$

Abaixo conseguimos observar o gráfico do polinômio resultante, percebemos que os pontos dados pelo problema passam exatamente por ele.

Figura 1. Gráfico do polinômio



2. Implemente no computador o método de interpolação por polinômio de Lagrange ou de Newton para avaliar a função interpoladora em um x qualquer. Teste com um exemplo que contém pelo menos 4 pontos.

2.1. Código

O Código a seguir, corresponde ao que é pedido na questão. Optou-se por desenvolver um algoritmo que interpole pontos pelo método de lagrange.

2.1.1. lagrange.cpp

```
/*
 * @file lagrange.cpp
 * @brief Universidade Federal do Rio Grande Do Norte (UFRN)
 * @brief DIM0404 - Calculo Numerico
 * @brief Tarefa: Interpolar pontos pelo metodo de lagrange
 * @date 27/03/2018
 * @author Jhonattan Cabral e Daniel Marx.
 */

#include<iostream>
#include<cmath>

float lagrange(float *, float *, int, float);

int main()
{
    float xbarra = 0; //Valor que se deseja interpolar.
    float ybarra = 0; //f(xbarra).

    //Testando com dados da questao 1.
```

```
    float x[4] = {0, 2, 4, 7};
    float y[4] = {1, 3, -1, 4};

    std::cout << "Insira um x para obter o f(x): ";
    std::cin >> xbarra;

    ybarra = lagrange(x, y, 4,xbarra);
    std::cout << ">>f(" << xbarra << ") = " << ybarra << std::endl;
    return 0;
}

float lagrange(float * x, float * y, int size, float ponto)
{
    float result = 0; //Declarando variavel do somatorio (resultado final).
    for(int i = 0; i < size; ++i)
    {
      int  aux = 1.0; //Declarando variavel do produtorio.
        for(int j = 0; j< size; ++j)
        {
            if(i!=j)
            {
                //Produtorio da interpolacao polinomial de Lagrange.
                aux = aux * (ponto - x[j])/(x[i] - x[j]);
            }
        }
        //Somatorio da interpolacao polinomial de Lagrange.
        result = result + y[i] * aux;
     }
     return result;
}
```

No método **Lagrange** do código acima, é implementado o algoritmo para interpolação. Esse método tem como entrada 04 parâmetros, que são: dois vetores, **x** e **y**, que correspondem às coordenadas dos pontos nos eixos das abssissas e ordenadas respectivamente; um inteiro, que corresponde ao número de pontos; e um número de precisão simples. O método terá como retorno o resultado da função interpoladora dos pontos passados nos vetores, em função do valor de precisão simples.

3. Um designer precisa obter vários tons de cinza em um programa de computador. O preto representa o valor 0 na escala de cinza, enquanto o branco representa 255 nessa mesma escala. Represente os tons de cinza em função de um parâmetro k que varia de 0 a 1, isto é, expresse a função f(k) tal que f(0) = 0 e f(1) = 255.

A tabela a seguir descreve os dois pontos de f(k) que foi passado na questão:

k	$f(k)$
0	0
1	255

Para encontrar a função f(k) que passe por esses dois pontos, vamos interpolá-los utilizando os polinômios de newton, a expressão do polinômio será:

$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) * \Delta_1$; Sendo: $\Delta_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Fazendo as substituições pelos valores que temos, vamos obter:

$f(x) = 0 + (x - 0) * 255$, que implica em: $f(x) = 255x$

4. Em uma animação dois quadrados possuem mesmo centro, o segundo quadrado porem está rotacionado 45 graus. Ambos possuem mesmo lado no início da animação (quando k = 0). O animador estabelece que no final da animação (quando k = 1) o primeiro quadrado dobrara o seu lado e o segundo reduzirá o seu lado pela metade. Em que instante de tempo da animação (valor de k) o segundo quadrado estara exatamente encaixado no primeiro quadrado?

A questão nos informa que temos dois quadrados, inicialmetne com lados de mesmo tamanho, e uma variável **k** que assume valores no intervalo [0, 1], representando o tempo de uma animação. Os lados do primeiro quadrado variam até dobrar de tamanho no instante em que k é 1, enquanto que os lados do segundo, variam até que seu tamanho esteja reduzido pela metade do inicial, no instante k = 1.

Para resolvermos o problema de identificar em que instante da animação o segundo quadrado estará exatamente encaixado no primeiro, precisamos primeiramente descobrir a função de variação dos lados de cada um dos dois, e faremos isso por meio da interpolação. As tabelas a seguir apresentam os pontos de cada um desses quadrados ao qual já conhecemos, e serão eles que serão interpolados e gerarão duas as funções que buscamos.

Vale salientar que o valor **l** é o do lado inicial dos quadrados, e Q1(k) e Q2(k) estão em função do instante de animação.

k	$Q1(k)$
0	L
1	$2L$

Acharemos Q1(k) e Q2(k) pelo método de interpolação dos polinômios de Newton. Como nesse caso tem-se apenas dois pontos para achar cada função, a expressão do polinômio será:

P(x) = P(x_0) + (x - x_0) * Δ_1; Sendo: $\Delta_1 = \frac{P(x_1)-P(x_0)}{x_1-x_0}$

k	$Q2(k)$
0	L
1	$L/2$

Encontrando Q1(k):

Δ_1 de Q1(k) será: $\frac{2L-L}{1-0}$; que é igual a L

Com isso, temos que:

$Q1(k) = L + (L - 0)L$; E simplificando, $Q1(k) = L(x + 1)$

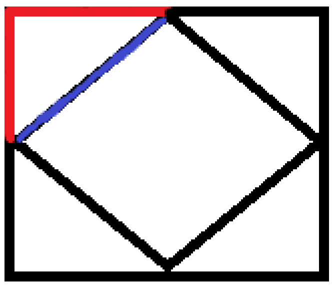
Encontrando Q2(k):

Δ_1 de Q2(k) será: $\frac{\frac{L}{2}-L}{1-0}$; que é igual a $-\frac{L}{2}$

Com isso, temos que:

$Q2(k) = L + (L - 0)\frac{-L}{2}$; E simplificando, $Q2(k) = L(\frac{-x}{2} + 1)$

Agora que temos as duas funções para cada um dos quadrados, vamos achar uma relação entre elas para calcular o exato momento em que o segundo quadrado está exatamente encaixado no primeiro. A figura a seguir representa esse momento e vamos utilizá-la para descrever a relação que iremos encontrar.



O quadrado maior é o primeiro quadrado e o menor o segundo. Nesse instante, o lado do maior é de tamanho X e o do menor, de tamanho Y. Nosso objetivo agora é achar uma relação de Y em função de X, para podermos utilizar no cálculo do instante k em que a situação da imagem ocorre.

Essa relação pode ser achada aplicando-se o teorema de pitágoras, que diz que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Nesse caso, o lado Y(em azul na figura) será a hipotenusa, e os catetos(em vermelho na figura) serão, cada um, a metade do lado X. Assim, a expressão fica: $Y^2 = \frac{X^2}{2} + \frac{X^2}{2}$

Resolvendo-a teremos então que: Y = $\frac{X}{\sqrt[2]{2}}$. E pondo X em função de Y, a expressão fica: $X = Y\sqrt[2]{2}$. Aplicando essa relação às funções Q1(k) e Q2(k), teremos que achar k de modo que $Q1(k) = Q2(k)\sqrt[2]{2}$.

Substituindo as funções na expressão:

$L(k + 1) = \sqrt[2]{2} * L(\frac{-k}{2} + 1)$

Dividindo ambos os lados por L, ficamos com:

$k + 1 = \sqrt[2]{2} * (\frac{-k}{2} + 1)$

Multiplicando a raiz do segundo lado pelos termos entre parêntesis e deixando a expressão toda sobre 2:

$k + 1 = \frac{-\sqrt[2]{2}k + \sqrt[2]{2}}{2}$

Pondo termos com variáveis no primeiro lado e termos só com constantes no segundo:

$k(2 + \sqrt[2]{2}) = \sqrt[2]{2} - 2$

Isolando k:

$k = \frac{\sqrt[2]{2} - 2}{2 + \sqrt[2]{2}}$

Resolvendo a divisão, temos então que o valor de k é de aproximadamente 0,2426. Assim encontramos o instante em que os dois quadrados estão exatamente encaixados um no outro.