



Una mirada computacional a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo: densidad de probabilidad del oscilador armónico y solución al oscilador anarmónico mediante matching method

Daniel Mauricio Martín Rojas¹ y Diana Catherine León Carvajal¹

²Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad de Ciencias y Educación, Licenciatura en Física, Mecánica Cuántica I

25 de noviembre de 2022

Presentado a: Edwin Munevar Espitia

Resumen

El presente documento tiene como finalidad emplear C++ para graficar la densidad de probabilidad del oscilador armónico cuántico en $\varphi_{100}(x)$ para posteriormente compararlo con la probabilidad del clásico; además, resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo mediante *matching method* y *rk4* en un oscilador anarmónico para seguidamente comprobar su funcionalidad en el estado fundamental. Finalmente se llegan a las conclusiones de que la elección del método numérico es el más apropiado dado el empate de las gráficas y dada la construcción del algoritmo, este permite determinar $|\varphi_n(x)|^2$ hasta $n = 60$.

Palabras clave: Densidad de probabilidad, oscilador armónico, ecuación de Schrödinger, método numérico, oscilador anarmónico, C++.

Abstract

The purpose of this document is to use C++ to plot the probability density of the quantum harmonic oscillator in $\phi_{100}(x)$ to later compare it with the classical probability; also, solve the time-independent Schrödinger equation using *matching method* and *rk4* in an anharmonic oscillator to then check its functionality in the ground state. Finally, the conclusions are reached that the choice of the numerical method is the most appropriate given the tie of the graphs and given the construction of the algorithm, this allows determining $|\varphi_n(x)|^2$ up to $n = 60$.

Key Words: Probability density, harmonic oscillator, Schrödinger equation, numerical method, anharmonic oscillator, C++.

¹20181135041, 20181135042

²Cra. 3No. 26A-40, D.C.

1 Introducción

La ecuación de Schrödinger describe el comportamiento ondulatorio que presenta una partícula subatómica dadas ciertas condiciones, como lo son: condiciones de frontera, energía, y potencial. Al realizar el producto por el conjugado de la solución $|\Psi|^2$ se obtiene la densidad de probabilidad de hallar la partícula en cierto intervalo x en determinado tiempo t .

En la resolución de la ecuación de Schrödinger se tienen ciertos potenciales famosos para la ilustración de cómo resolver la ecuación, los potenciales más usados son: el pozo de potencial infinito, el potencial de oscilador armónico, el potencial de delta de Dirac, la barrera de potencial, entre otros. Como los aquí mencionados, existen una gran variedad de potenciales para la resolución de la ecuación de Schrödinger, entre estos se encuentran ciertos potenciales cuya solución analítica no es sencilla, de este modo la humanidad se vale de los computadores para la apropiada resolución de la ecuación con estos potenciales no tan utilizados.

En el presente documento se pretende llegar a desarrollar y explicar, con ayuda de la herramienta computacional, el comportamiento de la eigenfunción para un potencial de oscilador armónico en el estado estacionario $n = 100$. Además de esto, se resuelve la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un potencial de oscilador anarmónico, con la ayuda del método de Runge-Kutta de orden 4 y el matching method [3].

2 Nociones fundamentales

2.1 Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

La ecuación de Schrödinger se puede considerar como el análogo de la segunda ley de Newton $F = \frac{d^2x}{dt^2}$ para el mundo cuántico [3]. La ley de Schrödinger describe el comportamiento que tiene la función de onda de una partícula dadas ciertas condiciones iniciales. La ecuación de Schrödinger viene dada por:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1)$$

De esta ecuación se puede obtener la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, asumiendo que la función potencial V solamente depende de la posición, obteniendo así:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + V(x) \varphi = E \varphi \quad (2)$$

Además de esto, la ecuación de Schrödinger cuenta con una interpretación estadística, pues la función $|\Psi|^2$ da como resultado la probabilidad de encontrar la partícula en cierta posición x , esto demuestra que, a pesar de existir una ecuación diferencial determinista, no se puede saber exactamente dónde se encuentra la partícula en determinado tiempo, solamente se puede saber la probabilidad de que se encuentre en ese intervalo [3].

2.2 Oscilador armónico clásico

El Hamiltoniano del oscilador armónico clásico se define como:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (3)$$

Considerando las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Teniendo en cuenta que:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Las soluciones vienen dadas por:

$$x(t) = A \cos wt + B \sin wt \quad (4)$$

donde $w^2 = \frac{k}{m}$ [2].

2.3 Oscilador armónico cuántico

Resolviendo de ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2\hat{x}^2$$

es decir:

$$\hat{H}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

donde, en una dimensión, \hat{x} y \hat{p} son operadores los cuales cumplen la regla de conmutación dada por: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

Dado que es independiente del tiempo, la solución del Hamiltoniano viene dada por:

$$\Psi(x, t) = \varphi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (5)$$

donde $\varphi(x)$ es solución a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}mw^2x^2\varphi(x) = E\varphi(x)$$

Esta última ecuación se puede resolver de manera analítica, es decir, con serie de potencias o puede ser resuelta de manera

algebraica, es decir, con operadores escalera. Sea cual sea el método usado, se llega a la misma solución.

Para esta ocasión se usa el método analítico en el cual los estados estacionarios normalizados tienen por solución:

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{(-\xi^2/2)} \quad (6)$$

$$\text{donde } \xi = \sqrt{\frac{mw}{\hbar}} x$$

Para este potencial la energía está cuantizada y viene dada por la expresión [2]:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (7)$$

2.4 Densidad de probabilidad

Tratándose de variables aleatorias continuas, se toman intervalos infinitesimales de manera que la probabilidad de que la variable tome el valor entre x y $x + dx$ es $\rho(x)$ el cual es un factor de proporcionalidad llamado densidad de probabilidad.

La probabilidad de que la variable se encuentre en un valor finito entre a y b viene dada por:

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x) dx = 1 \quad (8)$$

Mientras que para distribuciones discretas [3]:

$$P_{ab} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1 \quad (9)$$

2.5 Oscilador anarmónico

La energía potencial que describe un oscilador no siempre debe ser simétrica $\frac{1}{2}kx^2$

sino que puede ser de modo tal que, en las vecindades próximas al punto de equilibrio domine una constante k_1 mientras que en la lejanía domine otra constante k_2 . De este modo la función potencial de un oscilador anarmónico será de la forma [5] [1]:

$$V(x) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2x^4 \quad (10)$$

2.6 Matching Method

Debido a las dificultades para la resolución de la ecuación de Schrödinger numéricamente, pues como se sabe, la energía suele estar cuantizada y de este modo no todos los valores de energía son soluciones de la ecuación diferencial, para este propósito se hace uso del *matching method* para poder determinar la energía apropiada para la resolución.

Dado este propósito, se soluciona la ecuación diferencial (2) con ayuda de un método numérico partiendo desde la parte izquierda a un punto escogido anteriormente y de la misma forma partiendo desde la parte derecha de la ecuación hacía el mismo punto escogido. Este punto, denominado x_{match} , se escoge arbitrariamente y es en donde las dos soluciones ψ_L y ψ_R deben coincidir.

Con esto en mente, se inicializan los valores de condiciones de frontera y de la energía, además se define una constante de tolerancia (tol) la cual determina el error permitido. Al realizar las soluciones de la ecuación por izquierda y por derecha se procede a hallar las derivadas en ese punto para la solución izquierda y derecha.

$$\psi'_L = \frac{\psi_L(x + \Delta x) - \psi_L(x - \Delta x)}{2\Delta x} \Big|_{x_m} \quad (11)$$

Haciéndolo de la misma forma para la parte derecha. Luego de calculados estos valores se procede a hallar la función Δ la cual indica el error que existe entre las dos soluciones. Esta función viene dada por:

$$\Delta = \frac{\psi'_L(x)/\psi_L(x) - \psi'_R(x)/\psi_R(x)}{\psi'_L(x)/\psi_L(x) + \psi'_R(x)/\psi_R(x)} \Big|_{x_m} \quad (12)$$

Una vez obtenido este valor se procede a determinar si el error es menor que la tolerancia establecida con anterioridad $|\Delta| < tol$, de no es así, se procede a hallar la energía requerida mediante el método de bisección; si la función Δ es del mismo signo que en la anterior iteración se mantiene el mismo ΔE y se actualiza la energía con este valor; si cambia de signo, el delta de energía (ΔE) es cambiado por $-\Delta E/2$. se realiza esta operación hasta que, finalmente, se llegue a una energía apropiada para que las dos soluciones (izquierda y derecha) sean lo suficientemente compatibles [5].

2.7 Método de Runge-Kutta de cuarto orden: rk4

Es un método numérico de cuarto orden (para esta ocasión) con un intervalo de error mínimo usado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de frontera; este algoritmo permite resolver EDO por medio de las integrales formales (exactas) cuando estas EDO no puede ser resueltas por los métodos convencionales, de la forma [4]:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y) \quad \text{con} \quad y(t_0) = y_0 \\ y(t) &= \int f(t, y) dt \\ y_{n+1} &= y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt \end{aligned}$$

Para dar solución a este método numérico se puede abordar desde diversas maneras; sin embargo, para este caso se predetermina un tamaño de paso h y se establece un número de iteraciones n . Dada su precisión, se obtienen cuatro términos de k para evaluar y así obtener una mejor aproximación para la función $f(t, y)$ alrededor del punto medio. Lo cual se ve de la siguiente forma:

- $k_1 = hf(t_n, y_n)$
- $k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$
- $k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$
- $k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$

y siendo la iteración:

- $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4)$

3 Metodología

Para el desarrollo de este documento, como se ha hecho mención anteriormente, se tienen dos casos a abordar: el primero consiste en hallar la densidad de probabilidad para el oscilador armónico cuántico en el estado estacionario $|\varphi_{100}(x)|^2$ y comparar el resultado con la probabilidad clásica; el segundo caso consiste en aplicar los métodos numéricos de Runge-Kutta de cuarto orden y matching method a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en un potencial del oscilador anarmónico. Además, para este último caso se reproduce el estado fundamental en $n=0$ del oscilador

armónico cuántico para corroborar el correcto funcionamiento del mismo.

Los casos anteriormente mencionados se desarrollan por medio del lenguaje de programación C++ y se obtienen las gráficas gracias a Gnuplot.

4 Análisis Cuantitativo

4.1 Caso 1: Densidad de probabilidad en $|\varphi_{60}|^2$

Para este primer caso se realiza la gráfica de la densidad de probabilidad para el potencial del oscilador armónico correspondiente al estado 60, esto debido a que, en la realización del programa, el mayor estado que se alcanzó fue precisamente $n = 60$, después de este valor la función se comienza a comportar de manera extraña.

Para la realización de esta sección se crea el código (ver anexos C) en el cual se define la función factorial, la función para el cálculo de los polinomios de Hermite, y la eigenfunción. Luego se establece el nivel al que se desea hallar la función de probabilidad, se realizan los cálculos y se imprimen los valores de x , $|\phi|^2$ y ρ el cual es la distribución de probabilidad para el oscilador armónico clásico.

Con base en lo anterior se obtienen los siguientes resultados³:

³Es fundamental aclarar que las tablas que se encuentran con puntos suspensivos significan continuidad, es decir, un recorte de datos debido a la extensidad de los mismos y con el fin de no saturar el documento. Para mayor información acerca de cada una de las tablas, ver el apartado B de los anexos.

x	$ \varphi_q(x) ^2$	$\rho_c(x)$
-1.210000	0.00020170	NaN
-1.209760	0.00020689	NaN
-1.209520	0.00021222	NaN
-1.209270	0.00021767	NaN
⋮	⋮	⋮
-0.000484	0.57709600	0.289373
-0.000242	0.57832500	0.289373
1.007E-14	0.57873500	0.289373
0.000242	0.57832500	0.289373
⋮	⋮	⋮
1.209270	0.00021767	NaN
1.209520	0.00021222	NaN
1.209760	0.00020689	NaN
1.210000	0.00020170	NaN

Tabla 1: Valores de densidad de probabilidad para el oscilador armónico cuántico y clásico con su respectiva posición.

Donde la x hace referencia a la posición, la q en $|\varphi_q(x)|^2$ hace referencia a la probabilidad del oscilador armónico cuántico y la c en $\rho_c(x)$ hace referencia a la probabilidad en el oscilador armónico clásico.

Posteriormente, trasladando los datos obtenidos en C++ a Gnuplot se obtiene la siguiente representación gráfica:

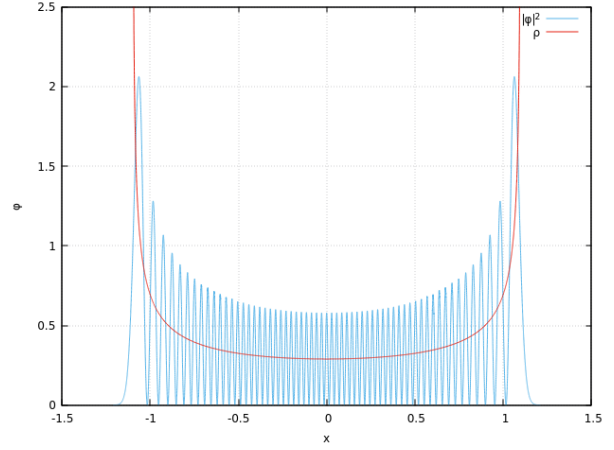


Figura 1: Densidad de probabilidad cuántica (azul claro) y densidad de probabilidad clásica (rojo) para el potencial de oscilador armónico en el estado $n = 60$. Fuente: Autores.

4.2 Caso 2: Oscilador anarmónico

En este segundo caso se desea resolver la ecuación diferencial de Schrödinger independiente del tiempo para un potencial de oscilador anarmónico, para ello, como se menciona antes, se hace uso del método de Runge-Kutta de cuarto orden y del matching method.

Para este código (ver anexos C) se realizan dos soluciones de la ecuación diferencial con el correspondiente potencial: primeramente se resuelve la función proveniente de la parte izquierda hasta un punto x_m y luego se resuelve la función por la parte derecha hasta el mismo punto x_m . Se calcula una función de error Δ y se actualiza la energía hasta llegar a la energía para el estado deseado, finalmente se imprimen los valores de x_L , ψ_L , x_R y ψ_R .

Este caso se dividió en dos secciones, donde la primera consiste en dejar constante el k_2 como $k_2 = 0$ obteniendo así el potencial

armónico (10), se ejecuta el código y se obtienen las energías (E) correspondientes para los niveles $n = 0, 5, 10, 15, 20$. En la segunda sección se inicializa la constante en $k_2 = 0,1$ y se vuelve a ejecutar el código encontrando las energías correspondientes a los mismos niveles de la primera sección, pero siendo esta vez el potencial anarmónico.

Con base en lo anterior se obtienen los siguientes resultados:

n	E	
0	E_0	0.49837
5	E_5	5.48367
10	E_{10}	10.4770
15	E_{15}	15.4659
20	E_{20}	20.4519

Tabla 2: Valores de energía obtenidos por el matching method para el potencial de oscilador armónico.

Posteriormente, se trasladan los datos obtenidos en C++ a Gnuplot para así obtener las siguientes representaciones gráficas:

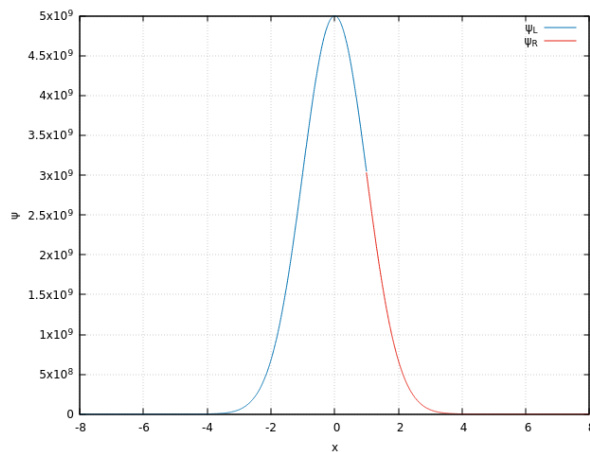


Figura 2: Solución numérica de la eigenfunción para el potencial armónico en el estado $n = 0$. Fuente: Autores.

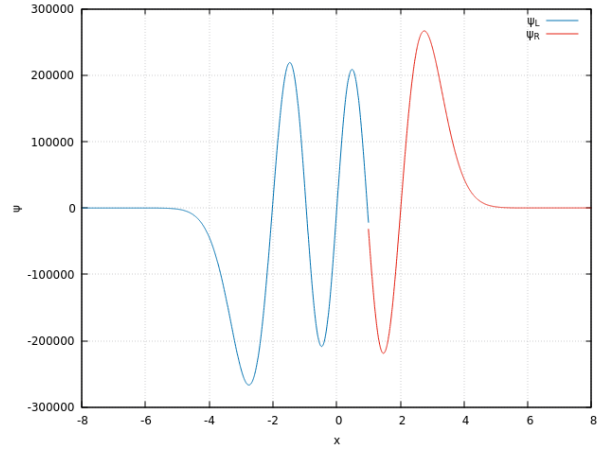


Figura 3: Solución numérica de la eigenfunción para el potencial armónico en el estado $n = 5$. Fuente: Autores.

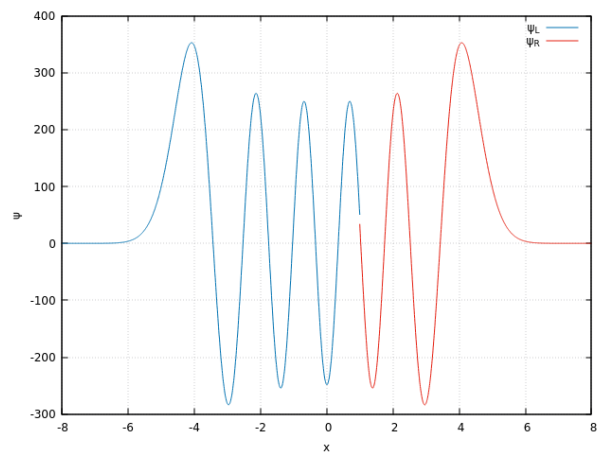


Figura 4: Solución numérica de la eigenfunción para el potencial armónico en el estado $n = 10$. Fuente: Autores.

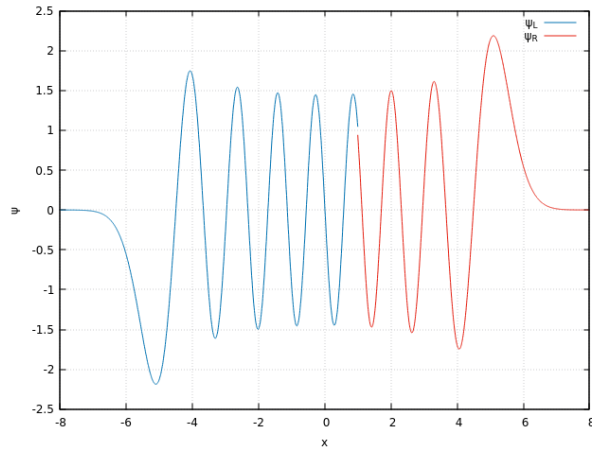


Figura 5: Solución numérica de la eigenfunción para el potencial armónico en el estado $n = 15$. Fuente: Autores.

n	E	
0	E_0	0.53126
5	E_5	6.96193
10	E_{10}	14.8908
15	E_{15}	23.8446
20	E_{20}	33.6132

Tabla 3: Valores de energía obtenidos por el matching method para el potencial de oscilador anarmónico.

Posteriormente, se trasladan estos datos obtenidos en C++ a Gnuplot para obtener las siguientes representaciones gráficas:

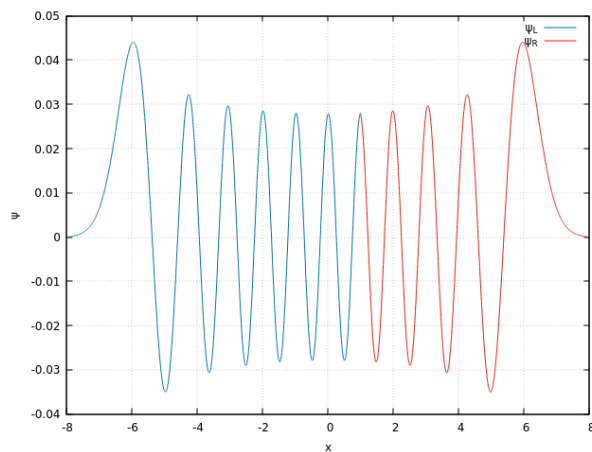


Figura 6: Solución numérica de la eigenfunción para el potencial armónico en el estado $n = 20$. Fuente: Autores.

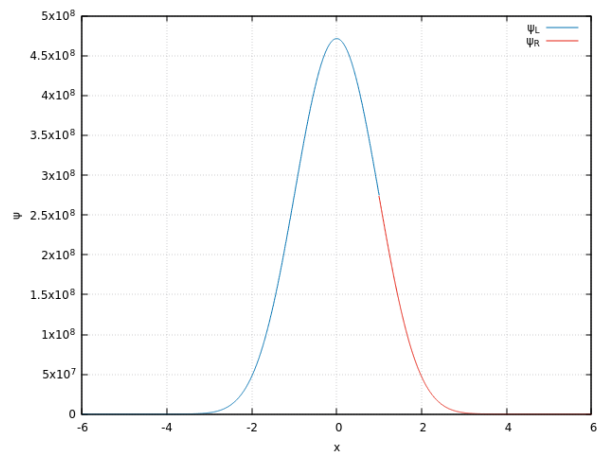


Figura 7: Solución numérica de la eigenfunción para el potencial anarmónico en el estado $n = 0$. Fuente: Autores.

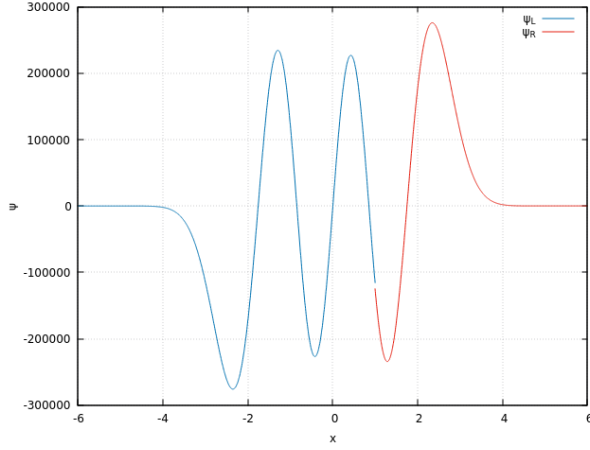


Figura 8: Solución numérica de la eigenfunción para el potencial anarmónico en el estado $n = 5$. Fuente: Autores.

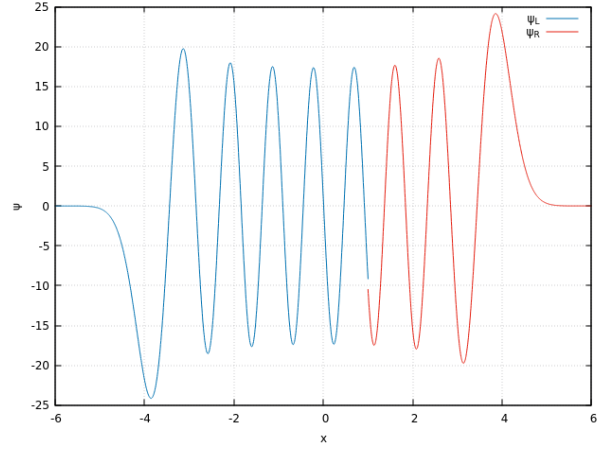


Figura 10: Solución numérica de la eigenfunción para el potencial anarmónico en el estado $n = 15$. Fuente: Autores.

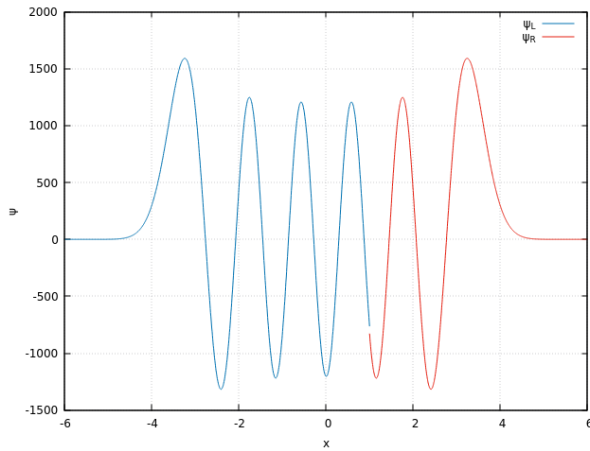


Figura 9: Solución numérica de la eigenfunción para el potencial anarmónico en el estado $n = 10$. Fuente: Autores.

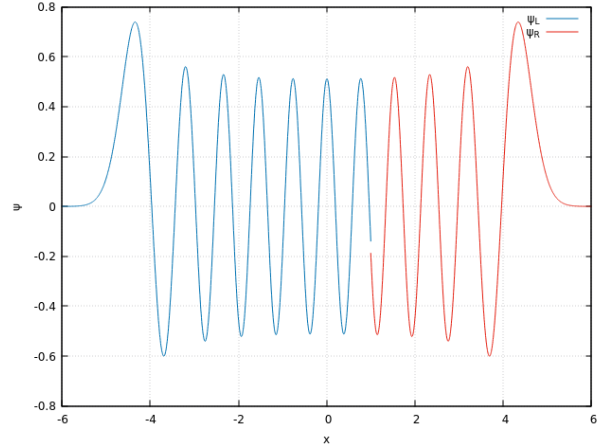


Figura 11: Solución numérica de la eigenfunción para el potencial anarmónico en el estado $n = 20$. Fuente: Autores.

4.3 Errores

4.3.1 Error porcentual

El error porcentual se define como:

$$E_p = \frac{V_{experimental} - V_{teórico}}{V_{teórico}} \times 100 \quad (13)$$

La tabla 2 muestra los valores de energía obtenidos numéricamente correspondientes a los niveles 0, 5, 10, 15 y 20. Estos valores es posible contrastarlos con los valores conocidos de energía dados por la ecuación (7), donde, para el algoritmo empleado, los valores de \hbar y ω se tomaron iguales a 1. De manera que se pueden hallar los errores de estos valores obtenidos numéricamente con los teóricos, logrando así los siguientes valores de error porcentual:

n	Error porcentual
0	0.33 %
5	0.30 %
10	0.22 %
15	0.22 %
20	0.23 %

Tabla 4: Valores del error porcentual de la energía numérica.

5 Análisis

En la figura 1 se comparan las densidades de probabilidad para el oscilador armónico clásico y el oscilador armónico cuántico para un estado grande, de este modo se puede observar que la densidad de probabilidad se comienza a asemejar a la densidad de probabilidad clásica a medida que n es mucho mayor.

En la tabla 2 se pueden observar los valores de la energía correspondientes al potencial de oscilador armónico, pues al hacer $k_2 = 0$ se obtiene el potencial de oscilador armónico, se puede ver que estos valores de energía son bastante aproximados a los valores teóricos descritos por la ecuación (7).

También es posible notar que, en los datos

de la tabla 3, los valores de energía son diferentes a los del oscilador armónico, siendo estos (los datos del oscilador anarmónico) mayores a los del oscilador armónico. Además, se puede observar que el cambio en el potencial para la resolución de la ecuación de Schrödinger genera cambios en la solución y se obtienen diferentes valores de energía cuantizada.

6 Conclusiones

- Como se observa a lo largo del documento, no se logra llegar hasta $\varphi_{100}(x)$ sino hasta $\varphi_{60}(x)$, lo cual se le puede atribuir presuntamente al manejo de datos de órdenes de magnitud tan altos como lo es 100! razón por la cual trae como consecuencias que en los cálculos de los polinomios de Hermite y en la eigenfunción se requiera de una mayor cantidad de números decimales.

Por otro lado, se le atribuye una indeterminación en x posiblemente debido a una división dado el orden de magnitud del número ya que al ejecutar los códigos con $n > 60$, la eigenfunción se comporta como se espera en los extremos y en el centro, sin embargo en los demás puntos, como se menciona, se indetermina.

Es así como, explorando con base en el algoritmo creado en C++ se llega a que hasta $n = 60$ es posible determinar $|\varphi_n(x)|^2$.

- En la gráfica de densidad de probabilidad (figura 1) se evidencia lo similar que comienza a ser la densidad de probabilidad cuántica a la densidad de probabilidad clásica para valores

de n grandes, notando que a medida que n se aproxima a infinito se tendrá un comportamiento más similar al oscilador armónico clásico.

- El método matching method es una buena estrategia para la resolución numérica de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, pues al no conocer los valores de energía que son solución, se emplea este método para poder encontrar dichos valores. Por otro lado, el método numérico Runge-Kutta de cuarto orden (rk4) también es de uso apropiado ya que, a pesar de ser un método de “costo alto” en la computación, este conlleva a una mayor aproximación y por tanto un gran cambio en la reducción del error en comparación con la aplicación de otros métodos numéricos como el de Euler, el cual es más sencillo de implementar en la computación, sin embargo, su error es mucho mayor y por tanto una menor aproximación.
- Al observar las gráficas obtenidas (figuras 2-11) se percibe que las formas de las gráficas para todos los niveles son similares para el potencial armónico y el anarmónico, el mayor cambio se contempla en la amplitud de las oscilaciones, siendo mayor para el potencial armónico.
- La elección del punto de encuentro x_m puede ayudar a que las soluciones izquierda y derecha converjan de mejor manera, pues se puede ver que en muchas de las gráficas las dos soluciones no empatan del todo bien, esto se hace claro observando la gráfica 6 pues se ve que las dos soluciones son las que mejores resultados se obtienen en el

empate, cosa que no sucede en otras gráficas.

- Con los datos obtenidos de error (ver tabla 4) se rectifica que el método utilizado es apropiado, pues se obtienen valores de errores pequeños para cada uno de los niveles tratados respecto a los valores de energía teóricos.
- De igual forma se hace evidente que los valores de energía correspondientes al potencial de oscilador anarmónico son diferentes y mayores que los obtenidos para el potencial de oscilador armónico, de modo que se hace notorio el cambio en el potencial.

A Anexos I

A continuación se dan a conocer los programas usados y por los cuales fueron posibles realizar el documento:

- **C++:** Es un lenguaje de programación de propósito general basado en el lenguaje de programación C como se describe en *ISO/IEC 9899:2011 Lenguajes de programación*. Además de las funciones proporcionadas por C, C++ proporciona tipos de datos adicionales, clases, plantillas, excepciones, espacios de nombres, sobrecarga de operadores, sobrecarga de nombres de funciones, referencias, operadores de administración de almacenamiento gratuitos y funciones de biblioteca adicionales. Fuente: ISO.
- **Gnuplot:** Es un programa de trazado controlado por comandos. Se puede utilizar de forma interactiva para trazar funciones y puntos de datos en

gráficos de dos y tres dimensiones con variedad de estilos. También se puede utilizar como lenguaje de secuencias de comandos para automatizar la generación de gráficos. Está diseñado principalmente para la visualización de datos científicos. Además, tiene derechos de autor, pero se puede distribuir libremente.

Fuente: Gnuplot.

B Anexos II

A continuación se encuentran en su totalidad los datos obtenidos junto con sus respectivas gráficas para apreciar de manera completa y detallada la información.

- <https://github.com/DianaCLC/Datos-y-gr-ficas.git>

C Anexos III

A continuación se encuentran los códigos empleados en C++ y Gnuplot para la realización del presente documento:

- **Caso 1:** <https://github.com/DanielM22/Oscilador-armonico.git>
- **Caso 2:** <https://github.com/DanielM22/Oscilador-Anarmonico.git>

Referencias

- [1] Ángel García. *Oscilaciones Anarmónicas*. 2010. URL: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/anarmonico/anarmonico.htm> (visitado 21-11-2022).
- [2] Eduardo García. *El Oscilador Armónico Cuántico*. 2015. URL: https://www.fisica.unam.mx/personales/romero/IFC2015/Oscilador_armonico_cuantico.pdf (visitado 21-11-2022).
- [3] David Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2.^a ed. Pearson, 2005.
- [4] R Landau, M Páez y C Bordeianu. *Computational Physics Problem Solving with Computers*. Wiley-VCH, 2012.
- [5] Leonard Schiff. *Quantum Mechanics*. 3.^a ed. McGraw-Hill, 1968.